MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2018 LENKA JIRKŮ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Harmonické funkce

Bakalářská práce

Lenka Jirků

Vedoucí práce: doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D. **Brno 2018**

Bibliografický záznam

Autor:	Lenka Jirků Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Harmonické funkce
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
Akademický rok:	2017/2018
Počet stran:	viii + 40
Klíčová slova:	harmonické funkce, holomorfní funkce, Laplaceova rovnice, Poissonova rovnice, Poissonův integrál, princip maxima, vlastnost průměru

Bibliographic Entry

Author:	Lenka Jirků Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Harmonic functions
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and Insurance Mathematics
Supervisor:	doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
Academic Year:	2017/2018
Number of Pages:	viii + 40
Keywords:	harmonic functions, holomorphic functions, Laplace's equation, Poisson's equation, Poisson's integral, maximum principle, property of diameter

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme harmonickým funkcím. Je zde na ně nahlíženo dvěma způsoby – z pohledu teorie holomorfních funkcí a jako na řešení Laplaceovy rovnice. Jejich základní vlastnosti jsou také dokázány.

Práce je rozdělena do tří částí. V první části jsou definovány základní pojmy a dokázány věty, které se dále využijí při důkazech vlastností harmonických funkcí. Ve druhé části se zabýváme harmonickými funkcemi jako funkcemi dvou proměnných a zkoumáme je z pohledu holomorfních funkcí. Obsahem třetí části je pak náhled na harmonické funkce jako na funkce libovolného počtu proměnných, které jsou řešeními Laplaceovy rovnice.

Abstract

In this thesis harmonic functions are studied. We look at them in two different ways based on the theory of holomorphic functions and as solutions of Laplace's equation. Their fundamental properties are also proved.

The thesis consists of three parts. In the first chapter, basic terms are defined and theorems are proved which are used in the proofs of properties of harmonic functions. In the second chapter we deal with harmonic functions as functions of two variables and study them from the point of the theory of holomorphic functions. In the third chapter the harmonic functions are analysed as functions of an arbitrary number of variables which are solutions of Laplace's equation.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2017/2018

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Lenka Jirků

Program: Matematika

Obor: Finanční a pojistná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce: Harmonické funkce

Název práce anglicky: Harmonic functions

Oficiální zadání:
Harmonické funkce mohou být uvažovány z hlediska teorie funkcí holomorfních jako funkce dvou proměnných, ale současně mohou být vnímány jako řešení Laplaceovy rovnice jako funkce libovolného počtu proměnných. Práce by měla být věnována oběma pohledům. Hlavní (infinitezimální) vlastnosti studovaných funkcí by pak měly být v práci dokázány.

Literatura:

RENARDY, Michael a Robert ROGERS. *An introduction to partial differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1992. vii, 428. ISBN 0387979522.

RUDIN, Walter. *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Vyd. 2., přeprac. Praha: Academia, 2003. 460 s. ISBN 8020011250.

TREVES, François. *Basic linear partial differential equations*. 1st ed. New York: Academic Press, 1975. xvii, 470. ISBN 0126994404.

JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (II)*. 3. dopl. vyd. Praha: Academia, 1976. 669 s.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D.

Datum zadání práce: 17. 6. 2017

V Brně dne: 3. 11. 2017

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Jirků 16. 11.
Lenka Jirků
studentka

doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
vedoucí práce

v.z.
prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat doc. RNDr. Michalovi Veselému, Ph.D., za trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování mé bakalářské práce věnoval, za cenné připomínky a užitečné rady.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 23. května 2018 ....

Lenka Jirků

Obsah

Úvod

Na harmonické funkce lze pohlížet dvěma základními způsoby. V první řadě je lze chápat jako funkce dvou proměnných, kdy je studujeme z pohledu teorie holomorfních funkcí. V řadě druhé jsou funkcemi libovolného počtu proměnných, které jsou řešeními Laplaceovy rovnice. Harmonické funkce mají množství zajímavých a užitečných vlastností, z nichž ty nejdůležitější jsou v práci dokázány.

Práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole jsou definovány základní pojmy a popsány základní vlastnosti, jejichž znalost je při důkazech vlastností harmonických funkcí potřebná. Nejdříve dokážeme Hausdorffovu větu o maximalitě, která zaručuje existenci maximální totálně uspořádané podmnožiny. Dále se budeme věnovat lineárním funkcionálům, přičemž existence omezeného lineárního funkcionálu s jistými vlastnostmi je obsahem Hahnovy–Banachovy věty, jejíž důkaz také uvedeme. Další důležitou větou je Fubiniova, která popisuje integraci v součinech měřitelných prostorů. V závěru první kapitoly se pak zaměříme na Arzelàovu–Ascoliho větu.

Druhá kapitola je věnována harmonickým funkcím z pohledu holomorfních funkcí v $\mathbb{C}$. Seznámíme se zde s Poissonovým integrálem, který je užitečným nástrojem při zkoumání harmonických funkcí. Zaměříme se mj. na vlastnost průměru a uvedeme definice a věty, které vedou k nalezení řešení Dirichletovy úlohy. Také se budeme zabývat konvergencí posloupnosti harmonických funkcí.

Ve třetí kapitole se přesuneme k n-dimenzionálnímu eukleidovskému prostoru $\mathbb{R}^n$ a zaměříme se na harmonické funkce jako na řešení Laplaceovy rovnice. Nejdříve definujeme objemové a plošné průměry a dokážeme jejich vlastnosti, které dále využijeme. Dále se budeme zabývat principem maxima, který zaručuje jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy. Na závěr dokážeme Harnackovu větu týkající se souměřitelnosti hodnot kladných harmonických funkcí.

Kapitola 1

Základní pojmy a věty

Než se dostaneme k vlastnostem harmonických funkcí, je třeba nejdříve nadefinovat základní pojmy a vlastnosti. Ty následně využijeme v důkazech vlastností harmonických funkcí.

Definice 1. Nechť je dána množina $\mathscr{K} \neq \emptyset$. Jestliže pro $a,b,c \in \mathscr{K}$ platí:

i) $(a \le b \wedge b \le c) \Rightarrow (a \le c)$;

ii) $a \le a$ pro každé $a \in \mathscr{K}$;

iii) $(a \le b \wedge b \le a) \Rightarrow (a = b)$,

pak říkáme, že množina $\mathscr{K}$ je *částečně uspořádaná* binární relací $\le$. Pokud pro každou dvojici $a,b \in \mathscr{M}$, kde $\mathscr{M}$ je podmnožinou částečně uspořádané množiny $\mathscr{K}$, platí $a \le b$ nebo $b \le a$, pak množinu $\mathscr{M}$ nazýváme *totálně uspořádanou*, resp. *lineárně uspořádanou*.

Poznámka 1. Pro každý systém podmnožin dané množiny je známo, že je částečně uspořádán relací inkluze $\subseteq$.

Definice 2. Nechť systém τ je systémem podmnožin množiny $X \neq \emptyset$ s následujícími vlastnostmi:

i) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$;

ii) pokud $T_i \in \tau$, $i \in \{1, \dots, n\}$, pak $T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_n \in \tau$;

iii) jestliže je $\{T_\alpha\}$ libovolný systém množin z τ, potom $\bigcup_\alpha T_\alpha \in \tau$.

Pak systému τ říkáme *topologie* na X, X se nazývá *topologický prostor* a prvky náležící do systému τ *otevřené množiny* v X.

Definice 3. Nechť prostor X je topologický.

i) Nechť doplněk $F^c = X \setminus F$ množiny $F \subseteq X$ je otevřený. Pak množinu F nazýváme *uzavřenou* množinou.

ii) Nechť $\overline{F}$ je nejmenší uzavřenou podmnožinou X, v níž je obsažena množina $F \subseteq X$. Pak říkáme, že $\overline{F}$ je *uzávěrem* množiny F.

iii) Nechť množina $F \subseteq X$ je podmnožinou sjednocení systému otevřených množin $\{T_\alpha\} \subseteq X$. Lze-li najít podsystém každého takového systému $\{T_\alpha\}$, který je konečný a ve kterém je opět obsažena množina F, pak množinu F nazýváme *kompaktní*.

iv) Je-li množina X kompaktní, pak X nazýváme *kompaktním prostorem*.

v) Nechť je dán bod $p \in X$. Pak každou podmnožinu X, ve které se p nachází a která je otevřená, nazýváme *okolím* bodu p.

vi) Nechť $p, q \in X$ a $p \neq q$ jsou libovolná. Existují-li okolí taková, že P je okolím p a T okolím q a zároveň $P \cap T = \emptyset$, pak se prostor X nazývá *Hausdorffův*.

vii) Nechť pro každý bod z X existuje jeho okolí s kompaktním uzávěrem. Pak se prostor X nazývá *lokálně kompaktním*.

Definice 4. Nechť G je zobrazení vektorového prostoru T_1 nad $\mathbb{C}$ do vektorového prostoru T_2 nad $\mathbb{C}$ a zároveň pro každé $x, y \in T_1$ a pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je splněna rovnost

$$G(\alpha x + \beta y) = \alpha G(x) + \beta G(y). \tag{1.1}$$

Pak zobrazení G se označuje jako *lineární zobrazení* prostoru T_1 do prostoru T_2. Nechť G je komplexní funkce na T_1 a nechť pro ni platí (1.1). Pak zobrazení G nazýváme *lineárním funkcionálem*.

1.1 Hausdorffova věta

Nyní se seznámíme s Hausdorffovou větou o maximalitě, díky níž je zaručena existence maximální totálně uspořádané podmnožiny.

Definice 5. Nechť je dán neprázdný systém množin $\mathscr{G}$ a nechť $\varphi \subseteq \mathscr{G}$. Pokud systém φ je totálně uspořádán inkluzí, říkáme, že je *řetězcem* v systému $\mathscr{G}$.[1]

Definice 6. Nechť je dán systém množin $\mathscr{G}$ a funkce $h : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$. Dále nechť $A_0 \in \mathscr{G}$ a nechť $\mathscr{G}'$ je podsystémem systému $\mathscr{G}$. Pak $\mathscr{G}'$ nazýváme *věží*, jestliže platí:

i) $A_0 \in \mathscr{G}'$;

ii) sjednotíme-li množiny každého řetězce v $\mathscr{G}'$, bude toto sjednocení obsaženo v $\mathscr{G}'$;

iii) platí-li $A \in \mathscr{G}'$, pak $h(A) \in \mathscr{G}'$.

Lemma 1.1. *Nechť je dán systém $\mathscr{G}$, který je neprázdný a skládá se z podmnožin množiny $X \neq \emptyset$. Dále nechť sjednocení množin každého řetězce obsaženého v systému $\mathscr{G}$ opět leží v systému $\mathscr{G}$. Existuje-li funkce h, která každé množině $A \in \mathscr{G}$ přiřadí množinu $h(A) \in \mathscr{G}$ splňující $A \subseteq h(A)$ a zároveň množina $h(A) \setminus A$ je nejvýše jednoprvková, pak existuje množina A s vlastností, že $A \in \mathscr{G}$ a zároveň $h(A) = A$.*

[1] Pro $A, B \in \varphi$ tedy platí $A \subseteq B$ nebo $B \subseteq A$ dle Definice 1

Důkaz. Nechť $A_0 \in \mathscr{G}$ a nechť $\mathscr{G}'$ je věží. Dále systém všech prvků $A \in \mathscr{G}$ s vlastností, že $A_0 \subseteq A$, označme $\mathscr{G}_1$. Systém $\mathscr{G}_1$ je také věží, z čehož plyne, že množina, která obsahuje všechny věže, je neprázdná. Průnik všech věží označme $\mathscr{G}_0$. Je zřejmé, že $\mathscr{G}_0$ je opět věží, avšak to neplatí pro vlastní podsystémy systému $\mathscr{G}_0$, žádný z nich věží není. Dále víme, že inkluze $A_0 \subseteq A$ je splněna pro každou množinu $A \in \mathscr{G}_0$. Nyní dokážeme, že $\mathscr{G}_0$ je řetězcem v $\mathscr{G}$.

Nechť každá množina $A \in \mathscr{G}_0$ splňuje jednu z vlastností $A \subseteq C$ nebo $C \subseteq A$. Nechť Ω je systém obsahující všechna taková $C \in \mathscr{G}_0$, pro která platí předchozí podmínky, a $\psi(C)$ je systém všech $A \in \mathscr{G}_0$, kde $A \subseteq C$ nebo $h(C) \subseteq A$ pro každé $C \in \Omega$. Je zřejmé, že systém Ω a každý systém $\psi(C)$ splňují body i) a ii) z Definice 6. Nechť $C \in \Omega$ a $A \in \psi(C)$. Nyní potřebujeme ukázat, že $h(A) \in \psi(C)$.

Jestliže $A \in \psi(C)$, pak může nastat jedna z následujících situací. První možnost je $A \subseteq C$ a zároveň $A \neq C$; druhá je, že $A = C$. Poslední možnou variantou je $h(C) \subseteq A$. Nastane-li první situace, tj. A je podmnožinou C, je zřejmé, že nemůže nastat $C \subsetneq h(A)$. Množina $h(A) \setminus A$ by totiž nesplňovala předpoklady lemmatu, protože by byla alespoň dvouprvková. Platí tedy $h(A) \subseteq C$, protože $C \in \Omega$. Nechť nastane druhá situace, tedy $A = C$. Pak $h(A) = h(C)$. Pokud máme třetí situaci, tj. $h(C)$ je podmnožinou A, pak platí $h(A) \in \psi(C)$. Z vlastnosti $A \subseteq h(A)$ totiž vyplývá, že $h(C) \subseteq h(A)$.

To také znamená, že se nám podařilo ukázat, že $\psi(C)$ je věží. Také je již očividné, že pro každé $C \in \Omega$ platí $\psi(C) = \mathscr{G}_0$. To plyne z minimality systému $\mathscr{G}_0$. Protože $A \in \mathscr{G}_0$ a zároveň $C \in \Omega$, nastávají dvě možnosti. První je $A \subseteq C$, druhá $h(C) \subseteq A$. To však potvrzuje, že $h(C) \in \Omega$. Systém Ω je tedy věží a $\Omega = \mathscr{G}_0$, což víme z vlastnosti minimality $\mathscr{G}_0$. Z toho, jak je systém Ω definován, je zřejmé totální uspořádání systému $\mathscr{G}_0$.

Nyní definujme sjednocení systému $\mathscr{G}_0$ jako A. Fakt, že $A \in \mathscr{G}_0$, vyplývá z bodu ii) Definice 6. Z bodu iii) Definice 6 zase plyne, že $h(A) \in \mathscr{G}_0$. Díky tomu, že $A \subseteq h(A)$ a zároveň A je největším prvkem systému $\mathscr{G}_0$, máme $A = h(A)$. □

Definice 7. Nechť je dána množina $F \neq \emptyset$. Pokud funkce f přiřazuje každé neprázdné podmnožině F daný prvek z množiny F, tj. $f(F) \in F$, pak funkce f se nazývá *výběrovou funkcí*.

Věta 1.2 (Hausdorffova věta o maximalitě). *Nechť K je neprázdná částečně uspořádaná množina. Pak její součástí je maximální totálně uspořádaná podmnožina.*

Důkaz. Nechť systém všech podmnožin množiny K, které jsou totálně uspořádané, je $\mathscr{G}$. Systém $\mathscr{G}$ je neprázdný, protože pro každou jednoprvkovou množinu platí, že je totálně uspořádána. Sjednotíme-li řetězec obsahující totálně uspořádané množiny, získáme opět totálně uspořádanou množinu.

Nechť na K máme libovolnou výběrovou funkci f a nechť $A \in \mathscr{G}$ a A' je množinou všech bodů x, které náleží do doplňku A^c množiny A a zároveň $A \cup \{x\} \in \mathscr{G}$. Je-li $A' \neq \emptyset$, klademe $h(A) = A \cup \{f(A')\}$. Pokud však nastane situace, že $A' = \emptyset$, pak h definujeme jako $h(A) = A$.

Z Lemmatu 1.1 vyplývá, že lze najít alespoň jednu takovou množinu $A \in \mathscr{G}$ s vlastností, že $A' = \emptyset$. Pak maximálním prvkem systému $\mathscr{G}$ je každá množina A, která splňuje předchozí vlastnosti. □

1.2 Hahnova–Banachova věta

V této podkapitole se zaměříme na lineární funkcionály a jejich vlastnosti. V závěru dokážeme Hahnovu–Banachovu větu popisující existenci omezeného lineárního funkcionálu jistých vlastností.

Definice 8. Nechť X je komplexním vektorovým prostorem a ke každému $x \in X$ existuje nezáporné číslo $\|x\|$ splňující:

i) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro každé $x, y \in X$;

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, kde $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{C}$;

iii) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Pak X nazýváme *normovaným vektorovým prostorem* a $\|x\|$ *normou* x.

Definice 9. Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory nad $\mathbb{C}$ a G je lineárním zobrazením prostoru X do prostoru Y. Normou zobrazení G rozumíme

$$\|G\| = \sup\{\|G(x)\|; x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Pokud norma zobrazení G je konečná, tj. $\|G\| < \infty$, pak se G nazývá *omezeným lineárním zobrazením*. Pokud je Y tělesem komplexních čísel, pak omezenému lineárnímu zobrazení G říkáme *omezený lineární funkcionál*.

Definice 10. Nechť prostor T je komplexním vektorovým prostorem a nechť pro každé $x, y \in T$, pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a pro $f : T \to \mathbb{C}$ je

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{a} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x). \tag{1.2}$$

Pak komplexní funkce f je *komplexně lineárním funkcionálem* na prostoru T. Nechť T je reálným vektorovým prostorem a pro každé $x, y \in T$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ jsou splněny rovnosti (1.2). Pak se reálná funkce f nazývá *reálně lineárním funkcionálem* na prostoru T.

Lemma 1.3. *Mějme komplexní vektorový prostor T.*

i) Nechť na prostoru T je dán komplexně lineární funkcionál f s reálnou částí u. Pak pro každé $x \in T$ platí

$$f(x) = u(x) - \mathrm{i}u(\mathrm{i}x). \tag{1.3}$$

ii) Nechť na T je u reálně lineárním funkcionálem a nechť f splňuje (1.3). Pak f je komplexně lineárním funkcionálem na T.

iii) Nechť f a u splňují (1.3) a nechť T je normovaným vektorovým prostorem. Pak platí rovnost $\|f\| = \|u\|$.

Důkaz. Nechť $z = \alpha + i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a nechť $x \in T$. Dále $iz = -\beta + i\alpha$; tedy reálnou částí komplexního čísla iz je $-\beta$. Proto pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$z = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Re}(iz). \tag{1.4}$$

Je-li $z = f(x)$, pak

$$f(x) = u(x) + iv(x) \quad \text{a} \quad if(x) = -v(x) + iu(x),$$

kde u je reálnou a v imaginární částí funkce f. Dále

$$f(ix) = u(ix) + iv(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = if(x). \tag{1.5}$$

Z toho plyne rovnost

$$\mathrm{Re}\,(if(x)) = \mathrm{Re}\,(f(ix)) = u(ix).$$

Dosazením $z = f(x)$ do (1.4) jsme dokázali první část lemmatu.

Nechť jsou splněny předpoklady uvedené ve druhé části lemmatu, tj. na T je reálně lineární funkcionál u a pro f platí (1.3). Z definice reálně lineárního funkcionálu v Definici 10 vyplývá pro každé $x, y \in T$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platnost následujících rovností

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{a} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Zároveň je však splněna rovnost (1.5). Funkce f je tedy komplexně lineárním funkcionálem na T, čímž jsme dokázali i druhou část lemmatu.

Jelikož $|u(x)| \leq |f(x)|$ pro každé $x \in T$, pak jistě platí také $\|u\| \leq \|f\|$. Zároveň však pro každé $x \in T$ lze nalézt číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ s vlastnostmi $|\alpha| = 1$ a $\alpha f(x) = |f(x)|$. Tím dostáváme

$$|f(x)| = f(\alpha x) = u(\alpha x) \leq \|u\| \cdot \|\alpha x\| = \|u\| \cdot \|x\|.$$

To znamená, že $\|f\| \leq \|u\|$, z čehož plyne, že nutně musí platit $\|f\| = \|u\|$. Tím jsme dokázali i poslední část lemmatu. □

Poznámka 2. Nyní si připomeneme pojem rozšíření funkce. Funkce G se nazývá *rozšířením* f, jestliže definiční obor funkce f je obsažen v definičním oboru funkce G a pro každé $x \in D(f)$, kde $D(f)$ je definiční obor funkce f, je $f(x) = G(x)$.

Věta 1.4 (Hahnova–Banachova). *Nechť L je podprostor vektorového prostoru X nad $\mathbb{C}$, který je normovaný, a nechť na L máme omezený lineární funkcionál f. Pak na prostoru X existuje omezený lineární funkcionál G, který je rozšířením f a splňuje $\|G\| = \|f\|$.*

Důkaz. Nechť prostor X je reálným normovaným vektorovým prostorem. Proto předpokládejme, že f je reálně lineární omezený funkcionál na L. Pokud $\|f\| = 0$, pak je hledaným rozšířením $G \equiv 0$. Proto se tímto případem nebudeme zabývat a bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $\|f\| = 1$. Pro upřesnění, normy $\|f\|$ a $\|G\|$ získáváme ze vztahů

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in L, \|x\| \leq 1\} \quad \text{a} \quad \|G\| = \sup\{|G(x)|; x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Nyní zvolme bod $x_0 \in X$ splňující, že $x_0 \notin L$. Nechť všechny vektory tvaru $x + \lambda x_0$, kde $x \in L$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, tvoří L_1. Pro dané $\alpha \in \mathbb{R}$ definujme $f_1(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda\alpha$. Vidíme, že na L_1 je lineární funkcionál f_1 rozšířením f. Jelikož jsme požadovali, aby $\|f\| = 1$, musíme najít takové α, aby norma rozšířeného funkcionálu byla opět rovna 1. Toho docílíme platností nerovnosti

$$|f(x) + \lambda\alpha| \leq \|x + \lambda x_0\| \quad \text{pro } x \in L,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nerovnost upravíme tak, že vektor x nahradíme vektorem $-\lambda x$, čímž dostaneme

$$|-\lambda\,(f(x) - \alpha)| \leq \|-\lambda(x - x_0)\|.$$

Následně nerovnost vydělíme $|\lambda|$ za předpokladu, že $|\lambda| \neq 0$. Tím získáme nerovnost

$$|f(x) - \alpha| \leq \|x - x_0\|.$$

Nyní definujme

$$M_x = f(x) - \|x - x_0\| \quad \text{a} \quad N_x = f(x) + \|x - x_0\| \quad \text{pro } x \in L. \tag{1.6}$$

Pak pro každé $x \in L$ platí $M_x \leq \alpha \leq N_x$. Abychom našli vhodné α, musí platit

$$M_x \leq N_y \quad \text{pro každé } x, y \in L, \tag{1.7}$$

tj. všechny intervaly $[M_x, N_x]$ musí mít společný bod. Protože ale víme, že platí

$$f(x) - f(y) = f(x - y) \leq \|x - y\| \leq \|x - x_0\| + \|y - x_0\| \quad \text{pro } x, y \in L,$$

znamená to, že nerovnost (1.7) plyne z definice M_x, N_x, tj. z (1.6). Tím jsme ukázali existenci f_1, rozšíření funkcionálu f z L na L_1, s vlastností, že $\|f\| = \|f_1\|$.

Nechť máme podprostor $L^\star$ prostoru X obsahující L a nechť na $L^\star$ je $f^\star$ reálně lineárním rozšířením f s vlastností, že $\|f^\star\| = 1$. Systém uspořádaných dvojic $(L^\star, f^\star)$ označme $\mathscr{K}$. Zaveďme částečné uspořádání $(L^\star, f^\star) \leq (L^{\star\star}, f^{\star\star})$ na systému $\mathscr{K}$ tak, že $L^\star \subseteq L^{\star\star}$ a $f^\star(x) = f^{\star\star}(x)$ pro každé $x \in L^\star$. Podmínky částečného uspořádání uvedené v Definici 1 jsou splněny. Protože systém $\mathscr{K}$ obsahuje uspořádané dvojice (L, f), je neprázdný. Hausdorffova věta o maximalitě (Věta 1.2) zaručuje existenci maximálního totálně uspořádaného podsystému M systému $\mathscr{K}$.

Nechť ψ je systémem všech $L^\star$, které splňují $(L^\star, f^\star) \in M$. Jelikož systém ψ je totálně uspořádán, pro sjednocení $\tilde{L}$ všech prvků ψ pak platí, že je podprostorem prostoru X. Je-li $x \in \tilde{L}$, pak pro daný prvek $L^\star \in M$ platí $x \in L^\star$. Nechť $(L^\star, f^\star) \in M$ a $G(x) = f^\star(x)$. Z Definice 1 plyne, že pokud $x \in L^\star$, nezáleží na volbě $L^\star \in \psi$.

Funkcionál G je lineárním funkcionálem na $\tilde{L}$ a zároveň $\|G\| = 1$. Pokud by $\tilde{L}$ byl vlastním podprostorem prostoru X, dostali bychom se do sporu s maximalitou M, protože bychom získali další rozšíření G. Platí tedy $X = \tilde{L}$. Tím jsme větu dokázali pro reálný obor.

Zbývá ověřit platnost v komplexním oboru. Nechť L je podprostor komplexního normovaného vektorového prostoru X. Zvolme na L komplexně lineární funkcionál f s reálnou částí u. Z Hahnovy–Banachovy věty pro reálný obor vyplývá, že můžeme rozšířit u na reálně lineární funkcionál P na X s vlastností, že $\|P\| = \|u\|$. Pro každé $x \in X$ definujme $G(x) = P(x) - \mathrm{i}P(\mathrm{i}x)$. Z Lemmatu 1.3 víme, že $\|G\| = \|P\| = \|u\| = \|f\|$ a také že G je komplexně lineární rozšíření f, čímž jsme větu dokázali. $\square$

1.3 Rieszova věta

Nyní se zaměříme na měřitelné množiny a seznámíme se s jejich vlastnostmi. Následně zformulujeme Rieszovu větu o reprezentaci.

Definice 11. Nechť má systém $\mathfrak{N}$ podmnožin množiny $X \neq \emptyset$ následující vlastnosti:

i) $X \in \mathfrak{N}$;

ii) $(A \in \mathfrak{N}) \Rightarrow (A^c \in \mathfrak{N})$, kde A^c je doplňkem množiny A v množině X;

iii) $(A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \Rightarrow (A \in \mathfrak{N})$, kde $A_n \in \mathfrak{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pak systém $\mathfrak{N}$ nazýváme σ*-algebrou* na X a říkáme, že množina X je *měřitelný prostor* a prvky náležící do systému $\mathfrak{N}$ *měřitelné množiny* na X.

Věta 1.5. *Nechť je dána množina $X \neq \emptyset$ a systém $\mathscr{G}$ podmnožin množiny X. Pak existuje nejmenší σ-algebra $\mathfrak{N}^\star$ na X s vlastností, že $\mathscr{G} \subseteq \mathfrak{N}^\star$.*

Důkaz. Nechť na X je dán systém σ-algeber $\mathfrak{N}$ takový, že je v nich obsažen systém $\mathscr{G}$. Tento systém označme M. Jelikož $\mathscr{G}$ se nachází v σ-algebře všech podmnožin množiny X, je zřejmé, že systém M je neprázdný. Dále označme pro každé $\mathfrak{N} \in M$ průnik všech $\mathfrak{N}$ symbolem $\mathfrak{N}^\star$. Zřejmě $\mathscr{G} \subseteq \mathfrak{N}^\star$ a zároveň $\mathfrak{N}^\star$ je v každé σ-algebře na X obsahující $\mathscr{G}$.

Nyní musíme dokázat, že $\mathfrak{N}^\star$ je σ-algebrou na X. Důkaz provedeme pouze pro bod iii) z Definice 11. Zbylé body se dokáží triviálně. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $A_n \in \mathfrak{N}^\star$ a nechť $\mathfrak{N} \in M$. Jelikož $\mathfrak{N}$ je σ-algebrou, je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}$. To znamená, že také $A_n \in \mathfrak{N}$. Dále $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}^\star$, neboť pro každou množinu $\mathfrak{N} \in M$ je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}$. □

Poznámka 3. Systém $\mathfrak{N}^\star$ z Věty 1.5 je také označován jako σ*-algebra generovaná systémem* $\mathscr{G}$.

Definice 12. Nechť je dán prostor X a σ-algebra $\mathscr{B}$, kde X je topologickým prostorem a $\mathscr{B}$ nejmenší σ-algebrou na X, jejíž existence je zaručena Větou 1.5, s vlastností, že každá otevřená množina v X je obsažena také v $\mathscr{B}$. Pak všechny prvky $\mathscr{B}$ nazýváme *borelovskými množinami* na X.

Poznámka 4. Každá uzavřená množina v X je borelovskou množinou, jelikož je doplňkem k otevřené množině.

Definice 13. Nechť je dána funkce μ na σ-algebře $\mathfrak{N}$. Nechť μ zobrazuje $\mathfrak{N} \to [0,\infty]$ a zároveň má vlastnost, že je spočetně aditivní, tj. je splněna rovnost

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

kde $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je disjunktním systémem prvků z $\mathfrak{N}$. Funkci μ nazýváme *nezápornou mírou*. Spočetně aditivní množinovou funkci, která je komplexní a je definována na σ-algebře, nazýváme *komplexní mírou*.

Definice 14. Nechť jsou dány kompaktní množiny a nechť množina F je na topologickém prostoru jejich spočetným sjednocením. Pak F nazýváme *σ-kompaktní*. Nechť μ je nezápornou mírou a nechť jsou dány množiny F_i, $i \in \mathbb{N}$ takové, že míra $\mu(F_i)$ je konečná. Dále nechť množina F s mírou μ je sjednocením takových množin F_i a toto sjednocení je konečné. Pak říkáme, že množina F má *σ-konečnou míru*.

Definice 15. Nechť je dán topologický prostor X a na něm komplexní funkce f. Pak *nosič funkce f* definujeme jako uzávěr množiny $\{x \in X;\, f(x) \neq 0\}$.

Poznámka 5. Systém všech spojitých funkcí $f : X \to \mathbb{C}$ s kompaktním nosičem značíme $C_c(X)$.

Definice 16. Nechť je dán lokálně kompaktní Hausdorffův prostor X a $f : X \to \mathbb{C}$. Pokud ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít množinu $F \subseteq X$, která je kompaktní a pro každé $x \notin F$ je $|f(x)| < \varepsilon$, říkáme, že funkce f se *anuluje v nekonečnu*.

Poznámka 6. Všechny spojité funkce f na X, které se anulují v nekonečnu, značíme $C_0(X)$. Je zřejmé, že $C_c(X) \subseteq C_0(X)$. Pokud množina X je kompaktní, $C_0(X)$ a $C_c(X)$ jsou totožné množiny.

Věta 1.6 (Rieszova věta o reprezentaci). *Nechť máme lokálně kompaktní Hausdorffův prostor X a nezáporný lineární funkcionál G na prostoru $C_c(X)$. Pak existuje σ-algebra $\mathfrak{N}$ na X taková, že obsahuje všechny borelovské podmnožiny X, a také právě jedna nezáporná míra μ na $\mathfrak{N}$, která reprezentuje G tak, že*

$$G(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \quad \textit{pro každou funkci } f \in C_c(X),$$

a má následující vlastnosti:

i) každá kompaktní množina $F \subseteq X$ splňuje $\mu(F) < \infty$;

ii) pro každou množinu $K \in \mathfrak{N}$ platí

$$\mu(K) = \inf\{\mu(T);\, K \subseteq T, T \textit{ je otevřená}\};$$

iii) každá otevřená množina $K \in \mathfrak{N}$ s vlastností $\mu(K) < \infty$ splňuje

$$\mu(K) = \sup\{\mu(F);\, F \subseteq K, F \textit{ je kompaktní}\};$$

iv) pokud $K \in \mathfrak{N}$, $A \subseteq K$ a $\mu(K) = 0$, pak $A \in \mathfrak{N}$.

Důkaz. Důkaz lze najít v [2]. □

1.4 Fubiniova věta

Další důležitou větou, kterou dokážeme, je Fubiniova věta, jež popisuje integraci v součinech měřitelných prostorů.

Zaveďme důležité značení, které budeme dále využívat. Symbolem V označme otevřený jednotkový kruh v $\mathbb{C}$ se středem v počátku, $\overline{V}$ pak značí uzávěr V. Dále jednotkovou kružnici, která je hranicí kruhu V, budeme značit jako H.

Nechť funkce h je definována na H a funkce f je definována vztahem

$$f(t) = h\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right), \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Funkce f je *periodická* a její perioda je 2π, tj. pro každé $t \in \mathbb{R}$ je $f(t+2\pi) = f(t)$. Funkce na H lze tedy ztotožnit s funkcemi na $\mathbb{R}$, které jsou 2π-periodické, tj. lze zaměňovat $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$ a $f(t)$. Dále $C(H)$ bude značit systém všech spojitých funkcí na H a ve smyslu předchozího ztotožnění uvažujeme normu

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{|f(t)|;\, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Definice 17. Definujme pro každé $p \in [1,\infty)$ systém $\mathscr{L}^p(H)$ jako systém všech komplexních funkcí f na $\mathbb{R}$, které jsou lebesgueovsky měřitelné a které mají periodu 2π. Pro $\mathscr{L}^p(H)$ definujme konečnou normu předpisem

$$\|f\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Definice 18. Nechť je dán prostor X s nezápornou mírou μ a nechť na X je dána komplexní měřitelná funkce f. Pro $p \in [1,\infty)$ definujeme $\mathscr{L}^p$ *normu* funkce f předpisem

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pak $\mathscr{L}^p(\mu)$ je systémem všech funkcí f s vlastností, že $\|f\|_p < \infty$.

Definice 19. Nechť jsou dány měřitelné prostory $(X,\mathfrak{N})$ a $(Y,\mathfrak{J})$, kde $\mathfrak{N}$ je σ-algebrou na X a $\mathfrak{J}$ na Y. Nechť jsou dány množiny $A \in \mathfrak{N}$ a $B \in \mathfrak{J}$. Pak říkáme, že množina $A \times B$ je *měřitelným obdélníkem*. Dále definujeme $\mathfrak{N} \times \mathfrak{J}$ jako nejmenší σ-algebru na $X \times Y$ obsahující všechny měřitelné obdélníky. Nechť je dána množina $F \subseteq X \times Y$. Pak pro $x \in X$ a $y \in Y$ definujeme *řez x množiny* F, resp. *řez y množiny* F, jako

$$F_x = \{y \in Y;\, (x,y) \in F\}, \quad \text{resp.} \quad F_y = \{x \in X;\, (x,y) \in F\},$$

přičemž tedy $F_x \subseteq Y$ a $F_y \subseteq X$.

Věta 1.7. *Nechť je dána množina $F \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{J}$. Pak $F_x \in \mathfrak{J}$ pro každé $x \in X$ a $F_y \in \mathfrak{N}$ pro každé $y \in Y$.*

Důkaz. Nechť je dána množina M, která obsahuje všechny množiny $F \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{J}$ takové, že $F_x \in \mathfrak{J}$ pro každé $x \in X$. Pokud $F = A \times B$, pro každé $x \in A$ dostáváme $F_x = B$ a pro každé $x \notin A$ máme $F_x = \emptyset$. Každý měřitelný obdélník je tedy podmnožinou množiny M.

Jelikož $\mathfrak{J}$ je σ-algebrou, dle Definice 11 platí:

i) $X \times Y \in M$;

ii) $(F \in M) \Rightarrow ((F^c)_x = (F_x)^c) \Rightarrow (F^c \in M)$;

iii) $(F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \Rightarrow (F_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i)_x) \Rightarrow (F \in M)$, kde $F_i \in M$, $i \in \mathbb{N}$.

Z toho je zřejmé, že M je σ-algebrou, a tedy $M = \mathfrak{N} \times \mathfrak{J}$. Analogicky lze dokázat také, že $F_y \in \mathfrak{N}$. □

Definice 20. Nechť na $X \times Y$ je dána funkce f. Pak pro každé $x \in X$ definujme $f_x(y) = f(x,y)$ na Y a pro každé $y \in Y$ definujme $f_y(x) = f(x,y)$ na X.

Věta 1.8. *Nechť na $X \times Y$ je dána funkce f, která je $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{J})$-měřitelná. Pak*

i) f_x je $\mathfrak{J}$-měřitelná pro každé $x \in X$;

ii) f_y je $\mathfrak{N}$-měřitelná pro každé $y \in Y$.

Důkaz. Nechť je libovolně dána otevřená množina T. Označme

$$N = \{(x,y) \in X \times Y;\, f(x,y) \in T\}.$$

Je zřejmé, že $N \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{J}$. Pak

$$N_x = \{y \in Y;\, f_x(y) \in T\}.$$

Dále $N_x \in \mathfrak{J}$, což vyplývá z Věty 1.7. Tím jsme dokázali i). Analogicky lze dokázat ii). □

Věta 1.9. *Nechť jsou dány měřitelné prostory $(X,\mathfrak{N},\mu)$ a $(Y,\mathfrak{J},\lambda)$, kde X, resp. Y, je sjednocením množin X_n, resp. Y_n, $n \in \mathbb{N}$, které jsou disjunktní a zároveň splňují $\mu(X_n) < \infty$, resp. $\lambda(Y_n) < \infty$, přičemž toto sjednocení je nejvýše spočetné. Dále nechť $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{J}$ jsou σ-algebrami a μ, λ jsou mírami na daných σ-algebrách a míry μ a λ jsou σ-konečné. Nechť $F \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{J}$ a $\upsilon(x) = \lambda(F_y)$ a $\omega(y) = \mu(F_x)$ pro každé $x \in X$ a $y \in Y$. Pak je splněna rovnost*

$$\int_X \upsilon \,\mathrm{d}\mu = \int_Y \omega \,\mathrm{d}\lambda$$

a funkce υ, resp. ω, je $\mathfrak{N}$-měřitelná, resp. $\mathfrak{J}$-měřitelná.

Důkaz. Důkaz lze nalézt např. v [8]. □

Definice 21. Nechť jsou dány měřitelné prostory $(X,\mathfrak{N},\mu)$ a $(Y,\mathfrak{J},\lambda)$, pro které platí podmínky uvedené ve Větě 1.9, a nechť $N \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{J}$. Definujme

$$(\mu \times \lambda)(N) = \int_X \mu(N_y)\,\mathrm{d}\mu = \int_Y \lambda(N_x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Pak říkáme, že $\mu \times \lambda$ je *součinová míra*.

Poznámka 7. Je zřejmé, že jestliže λ a μ jsou σ-konečné míry, pak $\mu \times \lambda$ je také σ-konečnou mírou.

Věta 1.10 (Lebesgueova věta o monotónní konvergenci). *Nechť je dána množina $X \neq \emptyset$ a posloupnost měřitelných funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na X. Jestliže pro skoro všechna $x \in X$ platí:*

i) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty$;

ii) $f_n(x)$ *konverguje k* $f(x)$ *pro* $n \to \infty$,

pak pro $n \to \infty$ platí

$$\int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$$

a funkce f je měřitelná.

Důkaz. Důkaz lze najít v [2]. □

Věta 1.11 (Fubiniova). *Nechť jsou dány měřitelné prostory $(X,\mathfrak{N},\mu)$ a $(Y,\mathfrak{J},\lambda)$ a nechť míry μ a λ těchto prostorů jsou σ-konečné. Dále nechť je dána funkce f taková, že na $X \times Y$ je $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{J})$-měřitelná.*

i) Nechť pro nezápornou funkci f a pro každé $x \in X$ a $y \in Y$ je

$$\upsilon(x) = \int\limits_Y f_x \,\mathrm{d}\lambda, \quad \omega(y) = \int\limits_X f_y \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.9}$$

Pak pro υ a ω platí

$$\int\limits_X \upsilon \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \lambda) = \int\limits_Y \omega \,\mathrm{d}\lambda \tag{1.10}$$

a zároveň υ, resp. ω, je $\mathfrak{N}$-měřitelná, resp. $\mathfrak{J}$-měřitelná.

ii) Nechť komplexní funkce f splňuje

$$\int\limits_X \upsilon^\star \,\mathrm{d}\mu < \infty, \quad \textit{kde } \upsilon^\star(x) = \int\limits_Y |f_x| \,\mathrm{d}\lambda.$$

Pak je $f \in \mathscr{L}^1(\mu \times \lambda)$.

iii) Jestliže $f \in \mathscr{L}^1(\mu \times \lambda)$, pak $f_x \in \mathscr{L}^1(\lambda)$ pro skoro všechna $x \in X$ a $f_y \in \mathscr{L}^1(\mu)$ pro skoro všechna $y \in Y$. Zároveň υ a ω, které jsou skoro všude definované vztahem (1.9), náleží do $\mathscr{L}^1(\lambda)$ a $\mathscr{L}^1(\mu)$ a splňují (1.10).

Důkaz. Z Věty 1.8 je zřejmá korektnost zavedení funkcí υ a ω. Nechť $N \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{J}$ a nechť je dána funkce f. Z Věty 1.9 a Definice 21 plyne, že pro každou funkci s, která je nezáporná a $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{J})$-měřitelná, je i) splněno. Lze najít posloupnost funkcí $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s vlastností, že

$0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots$ a pro každý bod $(x,y) \in X \times Y$ konverguje $s_n(x,y)$ k $f(x,y)$. Přiřaďme ke každé υ_n funkci s_n. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\int_X \upsilon_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{X\times Y} s_n \, \mathrm{d}(\mu \times \lambda). \tag{1.11}$$

Dále $\{\upsilon_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ je pro každé $x \in X$ neklesající posloupností a zároveň konverguje k $\upsilon(x)$. To je zřejmé z Věty 1.10. Opětovnou aplikací Věty 1.10 na integrály v (1.11) obdržíme první část z (1.10). Záměníme-li x a y, získáme také druhou část z (1.10). Tím máme dokázán bod i). Důkaz ii) plyne z i). Stačí pouze i) aplikovat na funkci $|f|$.

Část iii) dokážeme pouze pro reálný prostor, jelikož poté lze snadno odvodit tvrzení také pro komplexní prostor. Nechť je dán reálný prostor $\mathscr{L}^1(\mu \times \lambda)$ a reálná funkce f. Aplikujme i) na funkce f^+ a f^-, kde f^+ je nezápornou a f^- zápornou částí funkce f. Funkci υ_1 přiřaďme f^+ a υ_2 funkci f^-. Pak $\upsilon_1 \in \mathscr{L}^1(\mu)$, neboť $f \in \mathscr{L}^1(\mu \times \lambda)$, $f^+ \le |f|$ a zároveň f^+ splňuje i). Analogicky $\upsilon_2 \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Pro každé x, pro které jsou $\upsilon_1(x)$ a $\upsilon_2(x)$ konečné, platí $f_x \in \mathscr{L}^1(\lambda)$, protože

$$f_x = (f^+)_x - (f^-)_x.$$

Pro skoro každé x platí, že $\upsilon_1(x) < \infty$ a $\upsilon_2(x) < \infty$. Taková x pak splňují

$$\upsilon(x) = \upsilon_1(x) - \upsilon_2(x),$$

což plyne z toho, že $\upsilon_1, \upsilon_2 \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Také zřejmě $\upsilon \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Zaměníme-li v (1.10) υ a f za υ_1 a f^+, resp. υ_2 a f^-, jsou rovnosti v (1.10) splněny. Odečteme-li tyto rovnosti, obdržíme první část z iii). Druhou část získáme analogicky: stačí zaměnit f_y za f_x a ω za υ. □

Poznámka 8. Integrály $\int_X \upsilon \, \mathrm{d}\mu$ a $\int_Y \omega \, \mathrm{d}\lambda$ lze rozepsat a (1.10) vyjádřit jako dvojnásobné integrály

$$\int_X \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\lambda(y).$$

Integrál $\int_{X\times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \lambda)$ v (1.10) je potom dvojným integrálem.

1.5 Arzelàova–Ascoliho věta

V závěru první kapitoly dokážeme Arzelàovu–Ascoliho větu, která umožňuje vybrat z posloupnosti stejně spojitých a stejně ohraničených funkcí stejnoměrně konvergentní podposloupnost.

Definice 22. Nechť je dána množina $X \neq \emptyset$ se zobrazením $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnostmi:

i) $\rho(x,y) \in [0,\infty)$ pro každé $x,y \in X$;

ii) $(\rho(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ pro každé $x,y \in X$;

iii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ pro každé $x,y \in X$;

iv) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ pro každé $x,y,z \in X$.

Pak množinu X nazýváme *metrickým prostorem s metrikou* ρ.

Poznámka 9. Nerovnost v bodě iv) v Definici 22 je nazývána *trojúhelníkovou nerovností*.

Definice 23. Nechť je dán metrický prostor X s metrikou ρ. Dále nechť je $\mathscr{G}$ systémem komplexních funkcí na X. Lze-li pro každé $\varepsilon > 0$ najít $\delta > 0$ s vlastností, že pro každá $x,y \in X$ taková, že $|x-y| < \delta$, a pro každou funkci $f \in \mathscr{G}$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, řekneme, že funkce náležící do systému $\mathscr{G}$ jsou *stejně spojité*.

Nechť pro každý bod $x \in X$ lze najít $L(x) > 0$ takové, že pro každou funkci f systému $\mathscr{G}$ platí nerovnost $|f(x)| \le L(x)$. Pak říkáme, že funkce náležící do systému $\mathscr{G}$ jsou *bodově stejně omezené*.

Věta 1.12 (Arzelàova–Ascoliho). *Nechť X je metrickým prostorem a $F \subseteq X$, kde F je spočetná hustá podmnožina X. Dále nechť je dán systém $\mathscr{G}$, který obsahuje komplexní funkce na X, které jsou bodově stejně omezené a stejně spojité. Pak lze z posloupnosti $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcí z $\mathscr{G}$ vybrat podposloupnost takovou, že na kompaktních podmnožinách prostoru X stejnoměrně konverguje.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost vytvořená ze všech bodů množiny F a nechť je dána množina Z_0 všech celých čísel, která jsou nezáporná, a nechť $Z_k \subseteq Z_0$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Víme, že existuje konvergentní podposloupnost vybraná z posloupnosti komplexních čísel $\{f_n(x_k)\}_{n\in Z_{k-1}}$, protože posloupnost $\{f_n(x_k)\}_{n\in Z_{k-1}}$ je omezená. To znamená, že lze najít množinu $Z_k \subseteq Z_{k-1}$ s vlastnostmi, že je nekonečná a zároveň pro $n \in Z_k$ existuje limita $\lim_{n\to\infty} f_n(x_k)$.

Budeme-li tento postup opakovat, získáme množiny $Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots$, které jsou také nekonečné a pro které platí, že jestliže $n \in Z_k$, pak pro každé j s vlastností $j \in \{1,\ldots,k\}$ lze najít limitu $\lim_{n\to\infty} f_n(x_j)$. Nechť $Z = \{r_1, r_2, \ldots\}$, kde r_k je k-tým členem Z_k. To znamená, že pro každé k najdeme v množině Z nejvýše $k-1$ členů, které nejsou součástí množiny Z_k. Z toho plyne, že máme-li $n \in Z$, pak pro každé $x \in F$ lze najít limitu $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Dále uvažujme libovolnou kompaktní podmnožinu D množiny X a $\varepsilon > 0$. Z Definice 23 dostáváme $\delta > 0$, které zaručuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost

$$|f_n(p) - f_n(q)| < \varepsilon, \quad \text{pokud} \quad |p-q| < \delta.$$

Nechť $K_1,\ldots,K_L$ jsou otevřené koule s poloměry $\delta/2$. Pokryjeme jimi množinu D. Dále víme o existenci takových bodů p_i, kde $i \in \{1,\ldots,L\}$, s vlastností, že $p_i \in K_i \cap F$. To vyplývá z toho, že množina F je v množině X hustá. Uvažujme $n \in Z$. Pak je zaručena existence limity $\lim_{n\to\infty} f_n(p_i)$, jelikož p_i náleží do množiny F. Proto existuje $Q \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$|f_l(p_i) - f_n(p_i)| < \varepsilon \quad \text{pro každé } l,n \in Z,$$

kde $l > Q$ a zároveň $n > Q$ pro každé $i \in \{1,\ldots,L\}$.

Nechť nyní $x \in D$ a nechť je dáno takové i, pro které platí $x \in K_i$ a $|x - p_i| < \delta$. Platnost nerovnosti

$$|f_l(x) - f_n(x)| \le |f_l(x) - f_l(p_i)| + |f_l(p_i) - f_n(p_i)| + |f_n(p_i) - f_n(x)| < 3\varepsilon$$

pro každé $l > Q$, $n > Q$ a $l,n \in Z$ je tak zaručena výběrem δ a Q. □

Kapitola 2

Harmonické funkce z hlediska teorie holomorfních funkcí

Ve druhé kapitole se budeme zabývat harmonickými funkcemi z pohledu holomorfních funkcí. Budeme se tedy na ně dívat jako na funkce dvou proměnných.

2.1 Holomorfní funkce

Než začneme studovat vlastnosti harmonických funkcí, podíváme se na holomorfní funkce.

Definice 24. Nechť existuje limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{2.1}$$

kde f je komplexní funkcí na otevřené množině M a $z_0 \in M$. Hodnota $f'(z_0)$ se nazývá *derivací* funkce f v bodě z_0. Nechť pro každý bod $z_0 \in M$ existuje vlastní limita ve (2.1). Pak říkáme, že funkce f je *holomorfní* na množině M.

Nechť $f : M \to \mathbb{C}$ pro otevřenou množinu $M \subseteq \mathbb{C}$ je holomorfní komplexní funkcí komplexní proměnné a nechť

$$f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \quad \text{kde } z = x + \mathrm{i}y. \tag{2.2}$$

Pak můžeme spočítat

$$\begin{aligned} f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \\ = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + \mathrm{i}v(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} &= \\ = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} &+ \\ + \mathrm{i} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}&. \end{aligned}$$

Protože $f'(z)$ existuje, existují i obě dvojné limity, a tak existují i limity ve směrech $(\Delta x, 0)$ a $(0, \Delta y)$, přičemž

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + \mathrm{i}v(x+\Delta x, y) - u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + \mathrm{i} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = u_x + \mathrm{i}v_x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + \mathrm{i}v(x, y+\Delta y) - u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y} = \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y} + \mathrm{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y} = v_y - \mathrm{i}u_y,
\end{aligned}
$$

kde u_x, resp. v_x, je parciální derivací reálné, resp. imaginární, části funkce f vzhledem k proměnné x a u_y, resp. v_y, je parciální derivací reálné, resp. imaginární, části funkce f vzhledem k proměnné y. Výše odvozené rovnosti shrňme do následující věty.

Věta 2.1. *Nechť f je komplexní funkcí na M a nechť splňuje (2.2). Pokud má funkce f v bodě $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ vlastní derivaci, pak je*

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + \mathrm{i}v_x(z_0) = v_y(z_0) - \mathrm{i}u_y(z_0). \tag{2.3}$$

Poznámka 10. Porovnáním reálné a imaginární části z (2.3) získáme *Cauchyovy–Riemannovy podmínky*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{2.4}$$

Reálná i imaginární část každé holomorfní funkce tedy musí Cauchyovy–Riemannovy podmínky splňovat.

Definice 25. Nechť je dána komplexní funkce h na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{C}$ a nechť funkce h má v každém bodě množiny M druhé derivace h_{xx}, h_{yy}. Pak funkce

$$\Delta h = h_{xx} + h_{yy} \tag{2.5}$$

se nazývá *laplasiánem* funkce h.

Definice 26. Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a $f \in C(M)$ je reálná funkce. Rovnici

$$-\Delta h = f \quad \text{na } M,$$

kde $h : \overline{M} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, nazýváme *Poissonovou rovnicí*. Je-li $f \equiv 0$ na M, hovoříme o *Laplaceově rovnici*

$$\Delta h = 0 \quad \text{na } M. \tag{2.6}$$

Jelikož holomorfní funkce $h = u + \mathrm{i}v$ má derivace všech řádů, podle (2.4) z Poznámky 10 je

$$u_{xx} = v_{xy} = v_{yx} = -u_{yy}, \quad v_{yy} = u_{xy} = u_{yx} = -v_{xx}.$$

Jak reálná, tak imaginární, část funkce f vyhovuje tedy rovnici (2.6), tj.

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{na } M. \tag{2.7}$$

Definice 27. Funkci h nazýváme funkcí *harmonickou* na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{C}$, pokud funkce h splňuje Laplaceovu rovnici (2.6) v každém bodě množiny M.

Poznámka 11. Komplexní funkce je na množině M harmonická právě tehdy, když pro její reálnou i imaginární složku platí, že je harmonickou funkcí na M. To plyne z faktu, že pokud existuje laplasián reálné funkce, pak je také reálnou funkcí.

Pro každou funkci h, která má všechny parciální derivace druhého řádu spojité, můžeme rovnost (2.5) vyjádřit také ve tvaru $\Delta h = 4\partial\overline{\partial}h$, kde ∂ a $\overline{\partial}$ jsou diferenciální operátory dané vztahy

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{a} \quad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Věta 2.2. *Každá holomorfní funkce je funkcí harmonickou.*

Důkaz. Nechť funkce h je holomorfní. Pak víme, že $\Delta h = 0$ a funkce h má spojité derivace všech řádů. Tedy z (2.7) plyne, že funkce h je harmonickou funkcí. □

2.2 Poissonův integrál

V této podkapitole dokážeme Poissonovu větu, díky které lze vyjádřit jisté funkce pomocí tzv. Poissonova integrálu. Toho pak využijeme při zkoumání vlastností harmonických funkcí.

Definice 28. *Trigonometrický polynom P* je každý konečný součet tvaru

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

kde $t \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ a $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots b_N \in \mathbb{C}$.

Poznámka 12. Trigonometrický polynom P lze také vyjádřit ve tvaru

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{nit}, \quad \text{kde } c_{-N}, \dots c_N \in \mathbb{C}.$$

Připomeňme významy symbolů V, H a $\overline{V}$. Symbol V značí otevřený jednotkový kruh v $\mathbb{C}$ se středem v počátku, $\overline{V}$ je pak uzávěrem V. Dále H označuje jednotkovou kružnici, která je hranicí kruhu V.

Definice 29. Nechť je dána funkce $f \in \mathscr{L}^1(-\pi, \pi)$. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ čísla

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-nit}\,\mathrm{d}t$$

nazýváme *Fourierovými koeficienty* funkce f. *Fourierova řada* funkce f je potom definována jako

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{nit} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Částečný součet Fourierovy řady je definován jako

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{nit}, \quad \text{kde } N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}.$$

Věta 2.3. *Pokud $f \in C(H)$ a $\varepsilon > 0$, pak existuje trigonometrický polynom P, který splňuje*

$$|f(t) - P(t)| < \varepsilon \quad \textit{pro každé } t \in H.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt např. v [11]. □

Poznámka 13. Větu 2.3 lze „vylepšit“ následovně. Nechť je dána funkce $f \in C(H)$. Pak aritmetické průměry částečných součtů Fourierovy řady funkce f stejnoměrně konvergují k funkci f.

Definice 30. Nechť je dán prostor X, který je lokálně kompaktním Hausdorffovým prostorem. Pak míra μ je nazývána *borelovskou mírou* na X, jestliže je dána na σ-algebře borelovských množin na X.

Nechť je dána borelovská množina F, která je podmnožinou X, a nechť μ je nezáporná míra. Pak μ je *regulární zevně*, pokud navíc splňuje ii) z Rieszovy věty o reprezentaci (Věta 1.6). Splňuje-li iii), pak je *regulární zevnitř*. Míra μ je *regulární mírou*, jestliže všechny množiny F splňují podmínku ii) a zároveň iii), tj. jsou regulární zevně i zevnitř.

Věta 2.4 (Poissonova). *Nechť je dán vektorový prostor A nad $\mathbb{C}$ jistých spojitých komplexních funkcí na $\overline{V}$. Nechť A obsahuje všechny polynomy a každá funkce $f \in A$ splňuje*

$$\sup\{|f(z)|; z \in V\} = \sup\{|f(z)|; z \in H\}.$$

Pak každou funkci $f \in A$ můžeme vyjádřit jako

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - t) + r^2} f\left(\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{d}t, \quad \textit{kde } z = r\mathrm{e}^{i\varphi} \textit{ a } z \in V. \tag{2.8}$$

Důkaz. Nechť $f \in A$ a $x \in V$. Pak z $\|f\|_V = \|f\|_H$ dostáváme

$$|f(x)| \leq \|f\|_H, \quad \text{kde } \|f\|_H = \sup\{|f(x)|; x \in H\}. \tag{2.9}$$

Nechť všechny funkce na H, jež jsou restrikcemi funkcí z A na H, tvoří systém L, který je podprostorem $C(H)$. To plyne z faktu, že pokud pro každé $y \in H$ máme $f(y) = 0$, pak dle (2.9) musí platit $f(x) = 0$ pro každé $x \in V$. To znamená, že máme-li funkce $f, g \in A$ a zároveň $f(y) = g(y)$ pro každé $y \in H$, pak $f \equiv g$.

Dále nechť $x \in V$ je libovolně, ale pevně, zvoleným bodem. Zobrazení $f \mapsto f(x)$ je omezeným lineárním funkcionálem na L s normou rovnou 1, což je zřejmé z (2.9), kdy pro $f \equiv 1$ nastává rovnost. Z Hahnovy–Banachovy věty (Věta 1.4) vyplývá existence lineárního funkcionálu G na $C(H)$, pro který platí $\|G\| = 1$ a $G(f) = f(x)$, $f \in L$.

Nechť $f \in C(H)$ a hodnoty funkce f náleží do intervalu $[0,1]$. Označme $h = 2f - 1$ a $G(h) = \alpha + i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. To znamená, že pro funkci h platí, že její hodnoty náleží do intervalu $[-1,1]$. Z toho plyne, že $|h+\mathrm{i}s|^2 \leq 1+s^2$ pro každou konstantu $s \in \mathbb{R}$. Z vlastností funkcionálu G, a to $G(1) = 1$ a $\|G\| = 1$, plyne

$$(\beta+s)^2 \leq |\alpha+\mathrm{i}(\beta+s)|^2 = |G(h+\mathrm{i}s)|^2 \leq 1+s^2. \tag{2.10}$$

Upravme levou stranu nerovnosti (2.10) se ziskem

$$(\beta+s)^2 = \beta^2+2\beta s+s^2.$$

Dosazením do původní nerovnosti (2.10) a po další úpravě dostaneme

$$\beta^2+2\beta s \leq 1 \quad \text{pro každé } s \in \mathbb{R},$$

z čehož vyplývá, že $\beta = 0$. Jelikož $\|h\|_H \leq 1$, je $|\alpha| \leq 1$. Další úpravou získáme

$$G(f) = \frac{1}{2}G(h+1) = \frac{1}{2}(\alpha+1) \geq 0.$$

Z Rieszovy věty o reprezentaci (Věta 1.6) víme o existenci regulární nezáporné borelovské míry μ_x na H takové, že

$$G(f) = \int_H f \,\mathrm{d}\mu_x. \tag{2.11}$$

Vztah (2.11) nyní aplikujeme na prostor A. Tedy pro každé $z \in V$ lze najít nezápornou borelovskou míru μ_z na H, pro kterou platí

$$f(z) = \int_H f \,\mathrm{d}\mu_z. \tag{2.12}$$

Nechť je dán pevně zvolený bod $z \in V$, kde $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ a $r \in [0,1)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, a nechť $v_n(w) = w^n$, $v_n \in A$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dosazením do (2.12) získáme

$$r^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi} = \int_H v_n \,\mathrm{d}\mu_z \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Pro $v_{-n} = \overline{v_n}$ pak dostáváme

$$r^{|n|} \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi} = \int_H v_n \,\mathrm{d}\mu_z \quad \text{pro } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.13}$$

Nyní se zaměříme na funkci

$$P_r(\varphi-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \mathrm{e}^{n\mathrm{i}(\varphi-t)}, \tag{2.14}$$

protože

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi-t) \mathrm{e}^{n\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t = r^{|n|} \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi} \quad \text{pro } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

Porovnáme-li (2.13) a (2.15), obdržíme

$$\int_H f \, \mathrm{d}\mu_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi - t) f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t \quad \text{pro } f = v_n. \tag{2.16}$$

Protože identita (2.16) je splněna pro každé $f = v_n$, platí také pro každý trigonometrický polynom f. Z Věty 2.3 tak víme, že (2.16) je splněno pro každou funkci $f \in C(H)$, tj. pro každou funkci $f \in A$ lze použít (2.12). Kombinací těchto vztahů obdržíme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi - t) f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t. \tag{2.17}$$

Nyní zbývá ještě upravit $P_r(\varphi - t)$ z (2.14). Řadu lze sečíst, protože je reálnou částí součtu

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)^n = 1 + 2\frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{1 - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} = 1 + \frac{2z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} = \frac{1 - r^2 + 2\mathrm{i}r\sin(\varphi - t)}{|1 - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}|^2}.$$

Vezmeme-li pouze reálnou část, obdržíme vyjádření

$$P_r(\varphi - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - t) + r^2}. \tag{2.18}$$

Pro $r \in [0,1)$ platí $P_r(\varphi - t) \geq 0$.[1] Konečně dosazením (2.18) do (2.17) obdržíme (2.8). □

Poznámka 14. Tzv. *Poissonův integrál* funkce f ve vzorci (2.17) budeme pro zjednodušení dále značit symbolem $K[f]$. Dále pro $z \in V$ klademe

$$K[\mathrm{d}\mu](z) = \int_H K\left(z, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}\mu\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right),$$

kde μ je komplexní borelovskou mírou na H.

2.3 Vlastnost průměru

Další vlastností harmonických funkcí, kterou dokážeme, je vlastnost průměru.

Definice 31. Nechť $S(a;r)$ je otevřeným kruhem, který má střed v bodě $a \in \mathbb{C}$ a poloměr roven $r > 0$, tj.

$$S(a;r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}.$$

Symbolem $\overline{S}(a;r)$ značíme uzávěr kruhu $S(a;r)$ a $S'(a;r)$ *prstencové okolí* bodu a s poloměrem r, tj.

$$S'(a;r) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - a| < r\}.$$

[1] Výraz $P_r(\varphi - t)$ nazýváme Poissonovým jádrem

Definice 32. Nechť pro každé $z \in M$, kde $M \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina, existuje taková posloupnost $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$, že $r_n \to 0$ pro $n \to \infty$ a je splněno

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(z + r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak říkáme, že spojitá funkce f má na M *vlastnost průměru*.

Věta 2.5. *Pokud na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{C}$ má spojitá funkce h vlastnost průměru, pak je h harmonickou funkcí na M.*

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro reálnou funkci h. V obecném případě lze postupovat analogicky. Nechť $\overline{S}(a;R) \subseteq M$. Díky Poissonovu integrálu máme na $\overline{S}(a;R)$ spojitou funkci f, přičemž f je na $S(a;R)$ harmonická a na $\partial S(a;R)$, tj. na hranici $S(a;R)$, je totožná s funkcí h.

Nechť $u \equiv h - f$ a nechť $l = \sup\{u(z); z \in \overline{S}(a;R)\}$. Dále nechť je $l > 0$ a F je množina všech takových $z \in \overline{S}(a;R)$ s vlastností, že $u(z) = l$. Množina F je kompaktní podmnožinou $S(a;R)$, protože na $\partial S(a;R)$ je $u = 0$. Díky tomu lze najít $z_0 \in F$ takové, že

$$|z_0 - a| \geq |z - a| \quad \text{pro každé } z \in F.$$

Tedy alespoň polovina kruhu $S(z_0;r)$ neleží uvnitř množiny F pro každé dostatečně malé r. To znamená, že průměry funkce u jsou menší než $l = u(z_0)$. Tím získáváme spor, jelikož u je funkce s vlastností průměru. Z toho plyne, že $l \equiv 0$, a proto $u \leq 0$.

Obdobný postup provedeme pro $-u$. Tak nám nastává identita $h \equiv f$, což znamená, že $u \equiv 0$ na $S(a;R)$. Funkce h je tedy harmonickou funkcí na množině M, protože $\overline{S}(a;R)$ je uzavřený kruh v M. □

2.4 Dirichletova úloha

Nyní zavedeme definice a věty vedoucí k nalezení řešení Dirichletovy úlohy.

Definice 33. Nechť jsou dána čísla $p,q > 0$, která splňují

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2.19}$$

Pak je nazýváme *sdruženými exponenty*.

Poznámka 15. Vztah (2.19) lze přepsat do tvaru $p + q = pq$. Z Definice 33 je zřejmé, že $p \in (1,\infty)$ a $q \in (1,\infty)$.

Věta 2.6. *Nechť je dána nezáporná míra μ na X, která je σ-konečná, a nechť jsou dána čísla $p,q > 1$, přičemž q je sdruženým exponentem s p. Dále nechť je na $\mathscr{L}^p(\mu)$ dán lineární funkcionál ψ, který je omezený. Pak lze najít právě jeden prvek $h \in \mathscr{L}^q(\mu)$ s vlastností, že*

$$\psi(f) = \int_X fh\,\mathrm{d}\mu$$

pro každou funkci $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$. Pokud pro ψ a h tento vztah platí, pak pro ně platí také rovnost $\|\psi\| = \|h\|_q$.

Důkaz. Důkaz lze nalézt např. v [13]. □

Definice 34. Nechť je dána množina $X \neq \emptyset$ se σ-algebrou $\mathfrak{N}$ a systém množin $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ z $\mathfrak{N}$, který je spočetný a zároveň pro $i \neq j$ je $F_i \cap F_j = \emptyset$ a $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Pak říkáme, že systém $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je *rozkladem množiny F*. *Komplexní míra* μ je pak na $\mathfrak{N}$ definována jako komplexní funkce, která pro každý rozklad množiny $F \in \mathfrak{N}$ splňuje

$$\mu(F) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i).$$

Nechť je dána nezáporná míra λ taková, že $|\mu(F)| \leq \lambda(F)$ pro každé $F \in \mathfrak{N}$ a pro každý rozklad libovolné množiny $F \in \mathfrak{N}$ platí

$$\lambda(F) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(F_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(F_i)|.$$

Pak říkáme, že množinová funkce $|\mu|$ definovaná na $\mathfrak{N}$ pro každé $F \in \mathfrak{N}$ předpisem

$$|\mu|(F) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(F_i)|$$

a splňující vlastnost, že $|\mu|(F) \geq |\mu(F)|$, je *variací míry* μ a $|\mu|(X)$ je *totální variací míry* μ na množině X.

Věta 2.7. *Nechť je dán prostor X, který je lokálně kompaktním Hausdorffovým prostorem. Dále nechť ψ je lineárním funkcionálem na $C_0(X)$ a nechť je omezený. Pak ke každému takovému funkcionálu ψ lze najít právě jednu komplexní borelovskou míru μ, která pro každou funkci $f \in C_0(X)$ splňuje*

$$\psi(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Dále platí, že norma funkcionálu ψ je rovna totální variaci μ.

Důkaz. Důkaz lze najít např. v [13]. □

Věta 2.8. *Nechť X je měřitelným prostorem, μ je komplexní a zároveň konečnou mírou na X a ω komplexní funkcí, která je na X měřitelná. Dále nechť M je otevřená podmnožina roviny, která je disjunktní s $\omega(X)$, a pro každé $z \in M$ platí*

$$f(z) = \int_X \frac{\mathrm{d}\mu(\chi)}{\omega(\chi) - z}. \tag{2.20}$$

Pak na množině M můžeme funkci f vyjádřit pomocí mocninné řady.

Důkaz. Nechť $S(a;r)$ je podmnožinou M. Pro každé pevné $z \in S(a;r)$ je geometrická řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\omega(\chi)-a)^{n+1}} = \frac{1}{\omega(\chi)-z} \tag{2.21}$$

na X stejnoměrně konvergentní, protože pro každé $z \in S(a;r)$ a $\chi \in X$ je splněn odhad

$$\left|\frac{z-a}{\omega(\chi)-a}\right| \leq \frac{|z-a|}{r} < 1.$$

Díky tomu můžeme do (2.20) dosadit (2.21) a integrováním řady pro každé $z \in S(a;r)$ získáme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n,$$

kde

$$b_n = \int_X \frac{\mathrm{d}\mu(\chi)}{(\omega(\chi)-a)^{n+1}} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

□

Definice 35. *Poissonovo jádro P_r* je pro $r \in [0,1)$ a $t \in \mathbb{R}$ definováno vztahem

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}. \tag{2.22}$$

Poznámka 16. Poissonovo jádro lze chápat jako funkci proměnných r a t nebo jako systém funkcí proměnné t s parametrem r.

Dosadíme-li do vzorce (2.22) $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, kde $r \in [0,1)$ a $\varphi \in \mathbb{R}$, za t, dostaneme stejně jako v důkazu Věty 2.4 vyjádření (2.18). Pak z (2.22) máme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,\mathrm{d}t = 1. \tag{2.23}$$

Dále $P_r(t) > 0$, $P_r(t) = P_r(-t)$ a navíc pro $|t| \in (\delta, \pi]$, kde $\delta > 0$, platí $P_r(t) < P_r(\delta)$ a $\lim_{r\to 1} P_r(\delta) = 0$ pro $\delta \in (0,\pi]$. To vyplývá ze vztahu (2.18).

Pokud budeme chápat Poissonovo jádro jako funkci proměnných $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, z (2.18) obdržíme

$$P\left(z, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) = \frac{1-|z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z|^2},$$

kde $z \in V$ a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in H$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Věta 2.9. *Nechť je dána funkce $f \in C(H)$. Nechť funkce $J(f)$ je dána předpisem*

$$J(f)\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) = \begin{cases} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) & \textit{pro } r = 1; \\ K[f]\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) & \textit{pro } r \in [0,1), \end{cases}$$

kde $\varphi \in \mathbb{R}$. Pak platí, že $J(f) \in C\left(\overline{V}\right)$.

Důkaz. Pro každou funkci $h \in C(H)$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ je $\left|K[h]\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)\right| \leq \|h\|_H$ pro $r \in [0,1)$, tj. pro $h \in C(H)$ je

$$\|J(h)\|_{\overline{V}} = \|h\|_H, \quad \text{kde } \|h\|_H = \sup\{|h(x)|; x \in H\}. \tag{2.24}$$

To plyne z (2.23) a z vlastnosti $P_r(t) > 0$. Máme-li libovolný trigonometrický polynom tvaru

$$h\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi},$$

pak z (2.22) dostáváme

$$J(h)\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) = \sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|} \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi},$$

z čehož plyne $J(h) \in C\left(\overline{V}\right)$. Pro $k \in \mathbb{N}$ lze najít trigonometrické polynomy h_k takové, že $\|h_k - f\|_H \to 0$ pro $k \to \infty$. Pak z (2.24) pro $k \to \infty$ získáváme

$$\|J(h_k) - J(f)\|_{\overline{V}} = \|J(h_k - f)\|_{\overline{V}} \to 0.$$

Ukázali jsme tak, že funkce $J(h_k) \in C\left(\overline{V}\right)$ na $\overline{V}$ konvergují k funkci $J(f)$ stejnoměrně, a tedy $J(f) \in C\left(\overline{V}\right)$. □

Definice 36. Nechť na H je dána spojitá funkce f. Pak problém určit funkci h, která je harmonická na V a jejíž hodnoty na hranici jsou určeny funkcí f, se nazývá *Dirichletovou úlohou*.

Zdůrazněme, že Věta 2.9 nám umožňuje nalézt řešení *Dirichletovy úlohy* ve tvaru Poissonova integrálu funkce f. Doplnění je potom obsahem následující věty.

Věta 2.10. *Nechť reálná funkce u je na V harmonická a na $\overline{V}$ spojitá. Pak na V je funkce u Poissonovým integrálem své restrikce na množinu H a zároveň je reálnou částí funkce f, která je holomorfní a pro každé $z \in V$ je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} u\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \, \mathrm{d}t.$$

Důkaz. Z Věty 2.8 víme, že $f \in J(V)$. Nechť u_1 je reálnou částí funkce f. Pak je funkce u_1 Poissonovým integrálem hraničních hodnot u. Proto musíme ukázat, že $u \equiv u_1$.

Nechť $g = u - u_1$ a nechť je funkce g na V harmonická a na $\overline{V}$ spojitá. Spojitost funkce u_1 na $\overline{V}$ plyne z Věty 2.9. Dále nechť pro každý bod množiny H je $g = 0$. Nechť jisté $z_0 \in V$ splňuje nerovnost $g(z_0) > 0$. Pro pevně dané $\varepsilon > 0$ s vlastností $\varepsilon \in (0, g(z_0))$ a pro každé $z \in \overline{V}$ uvažujme

$$h(z) = g(z) + \varepsilon |z|^2. \tag{2.25}$$

Pak zřejmě $h(z_0) \geq g(z_0) > \varepsilon$. Na V lze najít bod $z_1 \in V$, který je bodem lokálního maxima funkce h, protože $h \in C\left(\overline{V}\right)$ a v každém bodě $z \in H$ je $h(z) = \varepsilon$.

Zároveň z toho vyplývá, že $h_{xx}(z_1) \leq 0$ a $h_{yy}(z_1) \leq 0$. Tím ale nastává spor, protože z (2.25) je zřejmé, že laplasián funkce h je $4\varepsilon > 0$. Rozdíl funkcí je $u - u_1 \leq 0$, ale zároveň $u_1 - u \leq 0$, tj. $u - u_1 \geq 0$. Proto musí nutně platit $u_1 \equiv u$. □

2.5 Věta o reprezentaci

V této podkapitole dokážeme větu o reprezentaci, která umožňuje reprezentovat harmonické funkce Poissonovým integrálem.

Definice 37. Nechť na V je dána funkce h. Pak je h přiřazen systém funkcí h_r pro $r \in [0,1)$ na H, přičemž každá funkce h_r je definována předpisem $h_r\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) = h\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)$, kde $\varphi \in \mathbb{R}$.

Definice 38. Nechť je dán metrický prostor X, ve kterém každá cauchyovská posloupnost konverguje. Pak X se nazývá *úplným prostorem*.

Definice 39. Úplný normovaný vektorový prostor nazýváme *Banachovým prostorem*.

Definice 40. Nechť je dán metrický prostor X obsahující hustou podmnožinu, která je spočetná. Pak říkáme, že X je *separabilním prostorem*.

Věta 2.11. *Nechť X je separabilním Banachovým prostorem a nechť je na X dána posloupnost lineárních funkcionálů $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, přičemž*

$$L = \sup\{\|G_n\|;\, n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Pak pro každé $x \in X$ lze vybrat z posloupnosti $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podposloupnost $\{G_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ takovou, že

$$G(x) = \lim_{i\to\infty} G_{n_i}(x). \tag{2.26}$$

Zároveň G je lineárním funkcionálem s vlastností, že $\|G\| \le L$.

Důkaz. Jednotlivé funkcionály G_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou stejně spojité a omezené, protože pro každá $x, x', x'' \in X$ platí

$$|G_n(x)| \le L\|x\| \quad \text{a zároveň} \quad |G_n(x') - G_n(x'')| \le L\|x' - x''\|.$$

Pro každé $x \in X$ lze najít posloupnost $\{G_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ takovou, že posloupnost $\{G_{n_i}(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ konverguje pro $i \to \infty$. To plyne z faktu, že každý bod ležící v prostoru X je kompaktní podmnožinou tohoto prostoru, a proto můžeme aplikovat Větu 1.12. Dále nechť funkcionál G je definován vztahem (2.26). Pak $\|G\| \le L$. Linearita G je zřejmá. □

Věta 2.12. *Nechť na V máme funkci h, která je harmonická, a nechť pro $p \in [1,\infty)$ platí*

$$L = \sup\{\|h_r\|_p;\, r \in (0,1)\} < \infty. \tag{2.27}$$

i) Jestliže $p = 1$, pak je zaručena existence právě jedné komplexní borelovské míry μ na H s vlastností, že $h = K[\mathrm{d}\mu]$.

ii) Jestliže $p > 1$, pak je zaručena existence právě jedné funkce $f \in \mathscr{L}^p(H)$ s vlastností, že $h = K[f]$.

iii) Nechť je na H dána nezáporná borelovská míra μ. Dále nechť funkce h je nezáporná na V. Pak funkce h je Poissonovým integrálem borelovské míry μ na H.

Důkaz. Nechť $p = 1$ a G_r je lineárním funkcionálem, který pro každé $r \in [0,1)$ na $C(H)$ splňuje

$$G_r(g) = \int_H g h_r \, \mathrm{d}\sigma. \tag{2.28}$$

Z (2.27) je zřejmé, že $\|G_r\| \leq L$. Z Vět 2.7 a 2.11 máme zaručenu existenci míry μ na H s vlastností, že $\|\mu\| \leq L$, a posloupnosti $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ takové, že $r_i \to 1$ pro $i \to \infty$ a

$$\lim_{i\to\infty} \int_H g h_{r_i} \, \mathrm{d}\sigma = \int_H g \, \mathrm{d}\mu \tag{2.29}$$

pro každou funkci $g \in C(H)$.

Na V je funkce $f_i(z) = h(r_i z)$ harmonická a na $\overline{V}$ spojitá. Z Věty 2.10 je zřejmé, že funkce f_i je Poissonovým integrálem své restrikce na množinu H. Dále nechť $z \in H$, $t \in \mathbb{R}$ a

$$g\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) = K\left(z, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right). \tag{2.30}$$

Nyní si uvědomme, že $f_i\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) = h_{r_i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$. Dosazením (2.29) do (2.30) obdržíme

$$\begin{aligned} h(z) &= \lim_{i\to\infty} h(r_i z) = \lim_{i\to\infty} f_i(z) = \lim_{i\to\infty} \int_H K\left(z, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) f_i\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}\sigma\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) = \\ &= \int_H K\left(z, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}\mu\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) = K[\mathrm{d}\mu](z). \end{aligned}$$

Nechť nyní $p \in (1,\infty)$ a q je sdruženým exponentem s p. Je známo, že $\mathscr{L}^q(H)$ je separabilním prostorem. Pro $q < \infty$ a pro trigonometrické polynomy, které mají koeficienty ze spočetné husté podmnožiny komplexní roviny, platí, že jsou podmnožinou těchto prostorů a zároveň tvoří hustou a spočetnou množinu. Z toho pak vyplývá, že $\mathscr{L}^q(H)$ je separabilním Banachovým prostorem.

Nechť pro každou funkci $g \in \mathscr{L}^q(H)$ je definován lineární funkcionál G_r dle (2.28). Opět $\|G_r\| \leq L$. Obdobně jako pro případ $p = 1$ máme zaručenu existenci takové funkce $f \in \mathscr{L}^p(H)$, že $\|f\|_p \leq L$ a pro každé $g \in \mathscr{L}^q(H)$ dostaneme

$$\lim_{i\to\infty} \int_H g h_{r_i} \, \mathrm{d}\sigma = \int_H g f \, \mathrm{d}\sigma.$$

To vyplývá z Vět 2.6 a 2.11. Další postup je obdobný jako pro případ $p = 1$.

Tím máme dokázánu existenci komplexní borelovské míry μ a funkce $f \in \mathscr{L}^p(H)$ v částech i) a ii). Teď ještě musíme ukázat jednoznačnost, a to tak, že dokážeme implikaci

$$(K[\mathrm{d}\mu] = 0) \Rightarrow (\mu = 0).$$

Nechť $f \in C(H)$ a nechť $h = K[f]$ a $u = K[\mathrm{d}\mu]$. Ze vztahu

$$K\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) = K\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)$$

a z Fubiniovy věty (Věta 1.11) získáváme pro každé $r \in [0,1)$ vztah

$$\int_H h_r \,\mathrm{d}\mu = \int_H u_r f \,\mathrm{d}\sigma.$$

Nechť $u = 0$. Pak je zřejmé, že také $u_r = 0$. Dále víme, že pro $r \to 1$ konverguje h_r stejnoměrně k f. Proto pro každé $f \in C(H)$ a $K[\mathrm{d}\mu] = 0$ platí

$$\int_H f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Využitím Věty 2.7 dostáváme, že $\mu = 0$, čímž jsme dokázali jednoznačnost.

Tvrzení iii) plyne z i). Protože funkce h je kladná, z i) dostaneme pro $p = 1$ vztah (2.27). Také pro každé $r \in [0,1)$ plyne z vlastnosti průměru harmonické funkce rovnost

$$\int_H |h_r| \,\mathrm{d}\sigma = \int_H h_r \,\mathrm{d}\sigma = h(0).$$

Funkcionály G_r jsou tedy nezáporné, z čehož plyne, že $\mu \geq 0$. □

2.6 Harnackova věta o konvergenci

Dosud jsme se zabývali Poissonovým integrálem na množině V. Nyní se podívejme na obecný kruh $S(a;R)$ s poloměrem $R > 0$ a se středem v bodě a. Aplikujeme-li výsledky předchozích podkapitol na $S(a;R)$, obdržíme následující větu. Také dokážeme konvergenci harmonických funkcí, tj. Harnackovu větu.

Věta 2.13. *Nechť je dán kruh $S(a;R)$ a nechť funkce h je spojitá na hranici kruhu $S(a;R)$ a definujeme h uvnitř jako*

$$h\left(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - t) + r^2} h\left(a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t, \tag{2.31}$$

kde $r \in [0,R)$ a $\varphi \in [0,2\pi)$. Pak funkce h je na $S(a;R)$ harmonická a na uzávěru $\overline{S}(a;R)$ spojitá.

Důkaz. Důkaz lze najít v [5]. □

Věta 2.14. *Nechť je dána množina $F \neq \emptyset$, která je kompaktní, a nechť $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost funkcí spojitých na F. Dále nechť posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodově konverguje k funkci f, která je na F spojitá. Platí-li*

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \quad \textit{pro každé } x \in X,\, n \in \mathbb{N},$$

konverguje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na F k funkci f stejnoměrně.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [14]. □

Nyní přistoupíme k Harnackově větě.

Věta 2.15 (Harnackova). *Nechť je dána otevřená a ohraničená množina $M \subseteq \mathbb{C}$ a na ní posloupnost harmonických funkcí $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

i) Konverguje-li posloupnost funkcí $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ k funkci h na kompaktních podmnožinách množiny M stejnoměrně, funkce h je na M harmonická.

ii) Platí-li $h_1 \leq h_2 \leq \cdots$ na M, posloupnost funkcí $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na kompaktních podmnožinách souvislé množiny M konverguje stejnoměrně nebo pro každé $z \in M$ konverguje $h_n(z)$ k nekonečnu pro $n \to \infty$.

Důkaz. Nechť $\overline{S}(a;R) \subseteq M$ a v (2.31) dosaďme h_n za h. Funkce h na množině $S(a;R)$ splňuje (2.31), protože na hranici $\overline{S}(a;R)$ funkce h_n stejnoměrně konverguje k h. Tím máme dokázánu část i).

Dále předpokládejme, že $h_1 \geq 0$, případně h_n nahraďme $h_n - h_1$. Označme

$$h = \sup\{h_n; n \in \mathbb{N}\} \quad \text{a} \quad A = \{z \in M; h(z) < \infty\}.$$

Nechť B je doplňkem množiny A v množině M, tj. $B = M \setminus A$. Pro $r \in [0,R)$ a $\varphi \in [0,2\pi]$ je splněna nerovnost

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-t)+r^2} \leq \frac{R+r}{R-r}.$$

Úpravou pro $n \in \mathbb{N}$ dostaneme

$$\frac{R-r}{R+r}h_n(a) \leq h_n\left(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) \leq \frac{R+r}{R-r}h_n(a).$$

Pokud zaměníme h a h_n, dostaneme ty samé nerovnosti. Proto pro každé $z \in S(a;R)$ je $h(z) = \infty$ nebo $h(z) < \infty$. Množiny A a B jsou proto otevřené.

Dále platí $A = \emptyset$ nebo $A = M$, protože množina M je souvislá. Pokud $A = \emptyset$, důkaz je zřejmý. Jestliže $A = M$, pak h splňuje v každém kruhu na M Poissonův vzorec, což vyplývá z Lebesgueovy věty o monotónní konvergenci (Věta 1.10). Proto funkce h je na M harmonická. Z Věty 2.14 pak vyplývá stejnoměrná konvergence posloupnosti spojitých funkcí na kompaktní množině. Tím máme dokázánu část ii). □

Kapitola 3

Harmonické funkce jako řešení Laplaceovy rovnice

V této kapitole budeme uvažovat n-dimenzionální eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem, tj.

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \text{kde } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Symbolem Dh budeme značit gradient, tj.

$$Dh = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right)$$

pro funkci $h : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a dále definujme Δh jako

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2},$$

pokud příslušné derivace existují.

3.1 Laplaceova a Poissonova rovnice

Ve třetí kapitole se budeme na harmonické funkce dívat jako na řešení Laplaceovy rovnice. Proto na úvod Laplaceovu (a také Poissonovu) rovnici definujeme.

Definice 41. Nechť je dána otevřená množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a funkce $f : M \to \mathbb{R}$. Pak rovnice

$$\Delta h = 0 \quad \text{na } M \tag{3.1}$$

se nazývá *Laplaceova rovnice* a rovnici tvaru

$$-\Delta h = f \quad \text{na } M \tag{3.2}$$

nazýváme *Poissonovou rovnicí.*

Poznámka 17. Poissonova rovnice je tedy nehomogenní rovnicí, která odpovídá homogenní Laplaceově rovnici.

Definice 42. Nechť je dána funkce h, která má na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ spojité všechny parciální derivace až do druhého řádu. Pokud na množině M vyhovuje h rovnici (3.1), říkáme, že je řešením Laplaceovy rovnice, a funkci h nazýváme *harmonickou*. Řešení Poissonovy rovnice je definováno analogicky.

Jestliže funkce h má na $\overline{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ spojité všechny parciální derivace prvního řádu a $\vec{n}$ je vnější jednotkovou směrovou normálou hranice množiny M, tj. ∂M, pak normálová derivace h je dána vztahem

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot Dh.$$

Nechť je dána množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$, která je otevřená a ohraničená. Zpravidla bývá Laplaceova a Poissonova rovnice doplněna další podmínkou, a to:

i) Dirichletovou podmínkou

$$h(x) = g(x) \quad \text{pro } x \in \partial M, \tag{3.3}$$

kde $g : \partial M \to \mathbb{R}$ a řešení h uvažované rovnice má na M spojité všechny parciální derivace až do druhého řádu a na $\overline{M}$ je spojité. Tato úloha se nazývá *Dirichletova*.

ii) Neumannovou podmínkou

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{n}}(x) = g(x) \quad \text{pro } x \in \partial M, \tag{3.4}$$

kde funkce g je definovaná na ∂M a řešení h má na M spojité parciální derivace až do druhého řádu a na $\overline{M}$ je spojité. Tento problém nese název *Neumannova úloha*.

3.2 Objemové a plošné průměry

Nejdříve uveďme značení, které budeme dále využívat. Kouli v $\mathbb{R}^n$ se středem v bodě x a poloměrem $r > 0$ budeme značit $K(x;r)$, dále označíme $S(x;r) = \partial K(x;r)$, tj. hranici koule $K(x;r)$, a $\overline{K}(x;r) \subseteq \mathbb{R}^n$ pak reprezentuje uzavřenou kouli se středem v bodě x a poloměrem $r > 0$. Symbol $\nu(n)$ bude označovat objem n-dimenzionální jednotkové koule v $\mathbb{R}^n$, tj. pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\nu(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad \text{pro gama funkci} \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t, \quad x > 0. \tag{3.5}$$

Doplňme, že

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \text{pro } x > 0, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1, \tag{3.6}$$

což umožňuje snadno vypočítat $\nu(n)$ v (3.5) pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice 43. *Objemovým průměrem* spojité funkce f na $K(x;r)$ rozumíme

$$\fint_{K(x;r)} f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\nu(n)r^n} \int_{K(x;r)} f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3.7}$$

Plošný průměr funkce f je pak dán předpisem

$$\fint_{S(x;r)} f(y)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\nu(n)nr^{n-1}} \int_{S(x;r)} f(y)\,\mathrm{d}S. \tag{3.8}$$

Definice 44. Nechť je dána otevřená, ohraničená množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$. Nechť ke každému bodu $\widetilde{x} \in \partial M$ lze najít $r > 0$ a funkci $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, která je třídy C^k, tj. má spojité všechny parciální derivace až do řádu k, a je splněn jeden z následujících vztahů

$$M \cap K(\widetilde{x};r) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in K(\widetilde{x};r);\, x_n > \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})\},$$
$$M \cap K(\widetilde{x};r) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in K(\widetilde{x};r);\, x_n < \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Pak říkáme, že hranice ∂M je *třídy* C^k.

Věta 3.1 (Greenovy identity). *Nechť je dána množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$, která je otevřená a ohraničená a jejíž hranice je třídy C^1. Dále nechť funkce h, f mají spojité všechny parciální derivace až do druhého řádu na M a spojité parciální derivace prvního řádu na $\overline{M}$. Pak platí:*

i)

$$\int_M \Delta h\,\mathrm{d}x = \int_{\partial M} \frac{\partial h}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S;$$

ii)

$$\int_M Dh \cdot Df\,\mathrm{d}x = \int_{\partial M} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} h\,\mathrm{d}S - \int_M h\Delta f\,\mathrm{d}x;$$

iii)

$$\int_M h\Delta f - f\Delta h\,\mathrm{d}x = \int_{\partial M} h\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} - f\frac{\partial h}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S.$$

Důkaz. Důkaz lze najít v [16]. □

Nechť $n = 1$, $M = (\alpha, \beta)$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\overline{K}(x;r) = [x-r, x+r] \subseteq (\alpha, \beta)$ a nechť pro h a $x \in \mathbb{R}$ platí $h(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Dosazením do (3.7) spočítáme objemový průměr. Pro ilustraci ověřme hodnotu $\nu(1)$ z (3.5). Využitím (3.5) a (3.6) dostáváme

$$\nu(1) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}} = 2.$$

Dle očekávání jsme obdrželi hodnotu $\nu(1) = 2$, tj. délku intervalu $(-1, 1)$, resp. $[-1, 1]$.

Objemový průměr je pak roven

$$\fint_{K(x;r)} h(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\nu(1)r}\int_{x-r}^{x+r}(ay+b)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}(ay+b)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2r}\left[\frac{ay^2}{2}+by\right]_{x-r}^{x+r} =$$
$$= \frac{1}{2r}\left(\frac{a(x+r)^2}{2}+b(x+r)-\frac{a(x-r)^2}{2}-b(x-r)\right) =$$
$$= \frac{1}{2r}\left(\frac{4arx}{2}+2br\right) = \frac{2arx+2br}{2r} = ax+b = h(x).$$

Obdobným výpočtem pro plošný průměr lze dostat $\fint_{(x;r)} h(y)\,\mathrm{d}S = h(x)$.

Ukážeme, že výše odvozený vztah platí pro libovolně zvolené n.

Věta 3.2. *Nechť je dána otevřená množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť je h harmonická funkce na M. Pak pro každou kouli $\overline{K}(x;r) \subseteq M$ platí*

$$h(x) = \fint_{K(x;r)} h(y)\,\mathrm{d}y = \fint_{S(x;r)} h(y)\,\mathrm{d}S. \tag{3.9}$$

Důkaz. Nechť $x \in M$ je zvoleno libovolně. Nechť $\overline{K}(x;r) \subseteq M$ pro všechna dostatečně malá $r > 0$ a pro tato r definujme

$$g(r) = \fint_{S(x;r)} h(y)\,\mathrm{d}S(y). \tag{3.10}$$

Derivujme

$$g'(r) = \left(\fint_{S(0;1)} h(x+rz)\,\mathrm{d}S(z)\right)' = \fint_{S(0;1)} Dh(x+rz)\cdot z\,\mathrm{d}S(z) =$$
$$= \fint_{S(x;r)} Dh(y)\cdot\frac{y-x}{r}\,\mathrm{d}S(y) = \fint_{S(x;r)} \frac{\partial h}{\partial \vec{n}}(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

Upravme s využitím (3.8). Tak získáme

$$\fint_{S(x;r)} \frac{\partial h}{\partial \vec{n}}(y)\,\mathrm{d}S(y) = \frac{1}{\nu(n)nr^{n-1}}\int_{S(x;r)} \frac{\partial h}{\partial \vec{n}}(y)\,\mathrm{d}S(y) = \frac{r}{n}\cdot\frac{1}{\nu(n)r^n}\int_{S(x;r)} \frac{\partial h}{\partial \vec{n}}(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

Využijme i) z Věty 3.1. Tím obdržíme

$$\frac{r}{n}\cdot\frac{1}{\nu(n)r^n}\int_{S(x;r)} \frac{\partial h}{\partial \vec{n}}(y)\,\mathrm{d}S(y) = \frac{r}{n}\cdot\frac{1}{\nu(n)r^n}\int_{K(x;r)} \Delta h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Z (3.7) pak plyne
$$\frac{r}{n}\cdot\frac{1}{\nu(n)r^n}\int\limits_{K(x;r)}\Delta h(y)\,\mathrm{d}y=\frac{r}{n}\fint\limits_{K(x;r)}\Delta h(y)\,\mathrm{d}y.$$
Dostáváme tedy
$$g'(r)=\frac{r}{n}\fint\limits_{K(x;r)}\Delta h(y)\,\mathrm{d}y=0. \tag{3.11}$$
Z toho vyplývá, že pro uvažovaná r je funkce $g(r)$ konstantní. Proto
$$g(r)=\lim_{r\to 0^+}g(r)=\lim_{r\to 0^+}\fint\limits_{S(x;r)}h(y)\,\mathrm{d}S(y)=h(x).$$
Tj. dokázali jsme, že $h(x)=\fint_{S(x;r)}h(y)\,\mathrm{d}S(y)$.

Rozepsáním integrálu přes kouli $K(x;r)$ pomocí plošných integrálů přes sféry $S(x;s)$, kde $s\in(0,r)$, získáváme
$$\int\limits_{K(x;r)}h(y)\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^r\int\limits_{S(x;s)}h(y)\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}s=h(x)\int\limits_0^r n\nu(n)s^{n-1}\,\mathrm{d}s=h(x)\nu(n)r^n.$$
Další úpravou již snadno dostáváme
$$h(x)=\frac{1}{\nu(n)r^n}\int\limits_{K(x;r)}h(y)\,\mathrm{d}y=\fint\limits_{K(x;r)}h(y)\,\mathrm{d}y.$$
Tím jsme dokázali také tvrzení věty pro objemový průměr. □

Poznámka 18. Předchozí věta nám tedy říká, že spočítáme-li integrální průměr všech hodnot harmonické funkce přes povrch dané koule, získáme hodnotu, které nabývá funkce ve středu této koule. Pro objemový průměr platí obdobné tvrzení; stačí jen nahradit kouli sférou.

Věta 3.3. *Nechť je dána funkce $h: M\to\mathbb{R}$ pro otevřenou množinu $M\subseteq\mathbb{R}^n$, která má na M spojité všechny parciální derivace až do druhého řádu. Nechť pro každou kouli $\overline{K}(x;r)\subseteq M$ platí*
$$h(x)=\fint\limits_{S(x;r)}h(y)\,\mathrm{d}S(y).$$
Pak h je na M harmonickou funkcí.

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Proto nechť lze najít $x\in M$ s vlastností, že $\Delta h(x)\neq 0$, a dostatečně malé $r>0$ takové, že $\overline{K}(x;r)\subseteq M$ a $\Delta h(y)\neq 0$ pro $y\in\overline{K}(x;r)$. To plyne z toho, že $x\in M^0$, kde M^0 je vnitřek množiny M (tj. množina všech vnitřních bodů množiny M). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\Delta h(y)>0$ pro každé $y\in\overline{K}(x;r)$.

Nechť máme funkci g danou předpisem (3.10). Pak její derivace z (3.11) dává $g'(s) > 0$ pro dostatečně malá $s > 0$. Protože ale pro dostatečně malá $s > 0$ platí

$$h(x) = \lim_{r \to 0^+} \fint_{S(x;r)} h(y) \, \mathrm{d}S(y) < g(s) = \fint_{S(x;s)} h(y) \, \mathrm{d}S(y) = h(x),$$

nastává spor. Tím jsme dokázali tvrzení věty. □

3.3 Princip maxima

Princip maxima je další důležitou vlastností harmonických funkcí. Mimo jiné díky němu lze dokázat jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy.

Vezměme $n = 1$ a $M = (\alpha, \beta)$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, kdy každá harmonická funkce je tvaru $h(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, a zároveň na $\overline{M}$ je spojitá. Pak je zřejmé, že svého maxima i minima nabývá funkce h na hranici množiny M, neboli

$$\max_{x \in \overline{M}} h(x) = \max_{x \in \partial M} h(x) \quad \text{a} \quad \min_{x \in \overline{M}} h(x) = \min_{x \in \partial M} h(x).$$

Také je zřejmé, že pokud extrém funkce h nastane ve vnitřním bodě množiny M, pak h je konstantní.

Díky principu maxima, který dokážeme níže, platí uvedená úvaha také pro obecné harmonické funkce.

Věta 3.4 (Silný princip maxima). *Nechť je dána otevřená a ohraničená množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$, která je navíc souvislá. Dále nechť je dána funkce h, která je na M harmonická a na $\overline{M}$ spojitá. Pokud existuje bod $x_0 \in M$, pro který platí $h(x_0) = \max_{x \in \overline{M}} h(x)$, pak je funkce h na M konstantní.*

Důkaz. Uvažujme $x_0 \in M$ ze znění věty. Označme

$$m = h(x_0) = \max_{x \in \overline{M}} h(x).$$

Nechť $r \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial M))$, kde $\operatorname{dist}(x_0, \partial M)$ je vzdálenost bodu x_0 od hranice množiny M. Pak

$$m = h(x_0) = \fint_{K(x_0;r)} h(y) \, \mathrm{d}y \leq m.$$

Na $K(x_0; r)$ je $h \equiv m$, což je zřejmé ze spojitosti funkce h. Bod x_0 je proto vnitřním bodem množiny

$$A = \{x \in M; h(x) = m\}.$$

Množina A je tedy v M otevřená, ale zároveň je očividně v M uzavřená. Jelikož je množina M souvislá, pak A musí být buď $\emptyset$, nebo $A = M$. Vzhledem k tomu, že $x_0 \in M$, je $h \equiv m$ na množině M. □

Poznámka 19. Každá funkce h, která je na souvislé množině M harmonická a na $\overline{M}$ spojitá, dle předchozí věty nabývá svého maxima pouze na hranici M. Má-li své maximum ve vnitřním bodě množiny M, pak je na M konstantní.

Z Věty 3.4 také plyne, že je-li M souvislá a funkce h je na $\overline{M}$ spojitá a na M harmonická, $h \equiv g$ na ∂M, funkce g je nezáporná a je-li alespoň někde na ∂M funkce g kladná, pak na celé množině M je kladná také funkce h.

Ze silného principu maxima vyplývá tzv. slabý princip maxima.

Věta 3.5 (Slabý princip maxima). *Nechť je dána množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$, která je otevřená a ohraničená, a nechť je dána funkce h, která je na M harmonická a na $\overline{M}$ spojitá. Pak*

$$\max_{x\in\overline{M}} h(x) \leq \max_{x\in\partial M} h(x). \tag{3.12}$$

Důkaz. Nechť X je souvislou komponentou množiny M (tj. neexistuje souvislá množina $Y \subseteq M$, která je nadmnožinou množiny X, tj. $Y \supseteq X$) takovou, že na uzávěru X se nachází maximum funkce h na množině $\overline{M}$. Obdobně jako v důkazu Věty 3.4 mějme množinu

$$B = \left\{ x \in X;\, h(x) = \max_{y\in\overline{X}} h(y) \right\}.$$

Množina B je opět buď prázdnou množinou, pak se maximum nachází na hranici X, přičemž $\partial X \subseteq \partial M$, nebo $B = X$, tj. $h \equiv \max_{y\in\overline{X}} h(y)$. Jelikož h je na $\overline{M}$ spojitá, máme větu dokázánu. □

Poznámka 20. Z inkluze $\partial M \subset \overline{M}$ je zřejmé, že ve Větě 3.5 je splněna také nerovnost

$$\max_{x\in\overline{M}} h(x) \geq \max_{x\in\partial M} h(x).$$

Proto v (3.12) lze nahradit nerovnost rovností. Navíc, dosadíme-li funkci $-h$ za h, dostaneme obdobnou rovnost pro minimum, tj.

$$\min_{x\in\overline{M}} h(x) = \min_{x\in\partial M} h(x).$$

Věta 3.6. *Nechť je dána množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$, která je otevřená a ohraničená. Pak pro libovolné funkce f, g lze najít nejvýše jedno řešení Dirichletovy úlohy* (3.2)*,* (3.3)*.*

Důkaz. Nechť funkce h_1 a h_2 jsou dvě řešení uvažované Dirichletovy úlohy. Označme $v_1 \equiv h_1 - h_2$ a $v_2 \equiv h_2 - h_1$. Funkce v_1, v_2 jsou na M harmonické a na ∂M nulové. Dle principu maxima jsou funkce v_1, v_2 na M nekladné. Na M tedy platí, že $h_1 \equiv h_2$. □

Poznámka 21. Tvrzení ve Větě 3.6 selže, vyloučíme-li nějaký bod z hranice M v Dirichletově podmínce (3.3). Uvažme příklad takového selhání. Nechť množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je tvaru

$$M = \{(x,y) \in K(0;1);\, y > 0\},$$

kde $K(0;1)$ je kruh se středem v počátku a poloměrem 1, a nechť funkce h, která má na M spojité všechny parciální derivace až do druhého řádu a na $\overline{M} \setminus \{0\}$ je spojitá, je řešením problému (3.2) a

$$h \equiv 0 \quad \text{na } \partial M \setminus \{0\}.$$

Řešení tohoto problému není jednoznačné. Jsou jím totiž funkce $h \equiv 0$ a $h \equiv \operatorname{Im}(z + z^{-1})$, kde $z = x + \mathrm{i}y$.

V Dirichletově úloze využíváme Dirichletovu podmínku. Pro úplnost uveďme také úlohu, která je omezena Neumannovou podmínkou (3.4).

Nechť je tedy dána Neumannova úloha, tj. (3.2), (3.4). Neumannova úloha má jednoznačné řešení, které se ale může lišit aditivní konstantou.[1] Nutnou podmínkou je však platnost následující rovnosti

$$\int_M \Delta h \,\mathrm{d}x = \int_{\partial M} g \,\mathrm{d}S.$$

Kombinací Dirichletovy a Neumannovy úlohy je tzv. Dirichletova–Neumannova úloha, někdy také označována jako třetí okrajová úloha. Nechť je dána omezená otevřená množina M a identicky nenulové funkce $u \geq 0$ a Φ, které jsou na ∂M spojité. Dále nechť je $u \geq 0$ na ∂M a zároveň pro alespoň jeden bod $x \in \partial M$ je $u(x) > 0$. Dirichletova–Neumannova úloha (3.1) a

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{n}} + uh = \Phi \quad \text{na } \partial M$$

má jednoznačné řešení h takové, že na $\overline{M}$ má spojité parciální derivace až do druhého řádu.[2]

3.4 Hladkost harmonických funkcí

Máme-li $n = 2$, pak se na harmonické funkce na jednoduše souvislých oblastech lze dívat jako na reálné a imaginární části holomorfních funkcí tvaru $h = u + \mathrm{i}v$, kde u, v mají spojité parciální derivace všech řádů a splňují Cauchyovy–Riemannovy podmínky.[3]

V této podkapitole se podíváme na hladkost harmonických funkcí v obecné dimenzi.

Definice 45. Nechť na $\mathbb{R}^n$ jsou dány měřitelné funkce f a g. Definujme funkci $f * g$ vztahem

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, pro které má integrál na pravé straně smysl. Pak funkci $f * g$ nazýváme *konvolucí funkcí* f a g.

Nyní uveďme značení a funkce, které dále využijeme. Zaveďme nezápornou funkci $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vztahem

$$\psi(x) = \begin{cases} c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}} & \text{pro } \|x\| < 1; \\ 0 & \text{pro } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

kde $\|x\|$ značí eukleidovskou normu $x \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta s vlastností, že

$$\frac{1}{c} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int_{K(0;1)} \mathrm{e}^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}\,\mathrm{d}x.$$

[1] Důkaz tohoto tvrzení a další informace o Neumannově úloze lze nalézt např. v [17]

[2] Další informace o Dirichletově–Neumannově úloze lze nalézt např. v [6]

[3] Více o harmonických funkcích z pohledu holomorfních funkcí lze najít v Kapitole 2

Funkce ψ splňuje $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 1$ a navíc $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nechť je $a > 0$. Pro $x \in \mathbb{R}^n$ definujme funkci ψ_a předpisem

$$\psi_a(x) = \frac{1}{a^n}\psi\left(\frac{x}{a}\right).$$

Funkce $\psi_a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ je nezáporná s vlastností

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_a(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{3.13}$$

Dále $\psi_a(x) > 0$ právě tehdy, když $\|x\| < a$. Funkci ψ_a nazýváme *regularizační funkcí*.

Nechť je dána funkce $f : M \to \mathbb{R}$, pro kterou existuje $\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$. Volme dostatečně malé $\varepsilon > 0$ a definujme množinu

$$M_\varepsilon = \{x \in M; \operatorname{dist}(x, \partial M) > \varepsilon\}.$$

Pak na M_ε definujme funkci $f^\varepsilon = \psi_\varepsilon * f$, tj. pro každé $x \in M_\varepsilon$ klademe

$$f^\varepsilon(x) = \int\limits_M \psi_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{K(0;\varepsilon)} \psi_\varepsilon(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Věta 3.7. *Nechť je dána funkce h, která je na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ spojitá. Nechť pro každou kouli $\overline{K}(x;r) \subseteq M$ platí*

$$h(x) = \fint_{S(x;r)} h(y)\,\mathrm{d}S(y). \tag{3.14}$$

Pak $h \in C^\infty(M)$.

Důkaz. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a odpovídající množina M_ε. Pro $x \in M_\varepsilon$ je

$$h^\varepsilon(x) = \int\limits_M \psi_\varepsilon(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_M \psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)h(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_{K(x;\varepsilon)} \psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)h(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_0^\varepsilon \psi^\star\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\int\limits_{S(x;r)} h(y)\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon^n}h(x)n\nu(n)\int\limits_0^\varepsilon \psi^\star\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)r^{n-1}\,\mathrm{d}r,$$

kde $\psi^\star$ je funkce ψ pro $n = 1$. Dostáváme tedy

$$\int\limits_M \psi_\varepsilon(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^n}h(x)n\nu(n)\int\limits_0^\varepsilon \psi^\star\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)r^{n-1}\,\mathrm{d}r. \tag{3.15}$$

Jelikož to platí každou funkci h splňující (3.14), pak jistě také pro $h \equiv 1$. Jejím dosazením do (3.15) obdržíme

$$\int\limits_M \psi_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^n}n\nu(n)\int\limits_0^\varepsilon \psi^\star\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)r^{n-1}\,\mathrm{d}r. \tag{3.16}$$

Z (3.13) a (3.16) plyne

$$h(x)\frac{1}{\varepsilon^n}n\nu(n)\int_0^{\varepsilon}\psi^{\star}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)r^{n-1}\,\mathrm{d}r = h(x)\int_M \psi_{\varepsilon}(x-y)\,\mathrm{d}y = h(x)\int_{\mathbb{R}^n}\psi_{\varepsilon}(y)\,\mathrm{d}y = h(x).$$

Tím dostáváme na M_{ε} identitu $h \equiv h^{\varepsilon}$. Víme, že $h^{\varepsilon} \in C^{\infty}(M_{\varepsilon})$, což je zřejmé z vlastností konvoluce. Dále je $h^{\varepsilon} \in C^{\infty}(M)$, jelikož $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně. □

Věta 3.8. *Nechť na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je dána harmonická funkce h. Pak je h hladká na M, tj. $h \in C^{\infty}(M)$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Vět 3.2 a 3.7. □

3.5 Harnackova věta o souměřitelnosti

V poslední podkapitole se stručně podíváme na tzv. souměřitelnost kladných harmonických funkcí.

Definice 46. Nechť jsou dány otevřené množiny M a N, kde $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{N}$ je kompaktní a $\overline{N} \subset M$. Pak množinu N nazýváme *kompaktně vnořenou* do množiny M a píšeme $N \subset\subset M$.

Dále platí vztah

$$\operatorname{dist}(N, \partial M) = \inf\left\{\operatorname{dist}(x, \partial M);\, x \in N\right\} > 0,$$

který vyplývá z kompaktnosti množiny $\overline{N}$. Proto každou funkci h, která je na M harmonická, můžeme na $\overline{N}$ vyjádřit pomocí průměrů, které mají stejný poloměr. Nyní toto tvrzení zformulujme do věty.

Věta 3.9 (Harnackova). *Nechť je dána množina N, která je souvislá a která je kompaktně vnořena do množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$, tj. $N \subset\subset M$. Pak lze najít konstantu $c > 0$ takovou, že c závisí pouze na M a N a zároveň každá kladná harmonická funkce h na M pro každé $x, y \in N$ splňuje*

$$\frac{1}{c}\cdot h(y) \le h(x) \le c\cdot h(y), \quad \text{tj.} \quad \sup\left\{h(x); x \in N\right\} \le c\cdot \inf\left\{h(x); x \in N\right\}.$$

Důkaz. Nechť $x, y \in N$ a $\|x-y\| \le r$, kde r zvolíme jako $r = \operatorname{dist}(N, \partial M)/4$. Pak využitím (3.7), (3.8) a (3.9) získáme

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\nu(n)(2r)^n}\int_{K(x;2r)} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi \ge \frac{1}{\nu(n)(2r)^n}\int_{K(y;r)} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\nu(n)r^n}\int_{K(y;r)} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2^n}h(y). \end{aligned}$$

Platí tedy

$$2^n h(y) \geq h(x) \geq \frac{1}{2^n} h(y).$$

Množinu $\overline{N}$ můžeme pokrýt koulemi $K_1, \ldots, K_L$, které jsou uzavřené a mají poloměr $r/2$. Navíc každá koule je s následující koulí nedisjunktní, tj. $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ pro $i \in \{1, \ldots, L-1\}$. Stačí uvážit, že $\overline{N}$ je souvislá kompaktní množina. Pak tedy pro každou dvojici bodů $x, y \in N$ dostáváme

$$(2^n)^L h(y) \geq h(x) \geq \left(\frac{1}{2^n}\right)^L h(y).$$

$\square$

Seznam použité literatury

[1] AHLFORS, Lars V. *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1966.

[2] BARTLE, Robert G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. New York: Wiley, 1995. ISBN 0-471-04222-6.

[3] BASSANINI, Piero; ELCRAT, Alan R. *Theory and applications of partial differential equations*. New York: Plenum Press, 1997. ISBN 0-306-45640-0.

[4] FRANCŮ, Jan. *Parciální diferenciální rovnice*. 4. dopl. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4399-0.

[5] FUKS, Boris A.; ŠABAT, Boris V. *Funkce komplexní proměnné*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství Kruh, 1953.

[6] GILBARG, David; TRUDINGER Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order*. 2nd ed. New York: Springer, 2001. ISBN 978-3-540-41160-4.

[7] GREGUŠ, Michal. *Parciálne diferenciálne rovnice*. Bratislava: Univerzita Komenského, 1983.

[8] HALMOS, Paul R. *Measure theory*. New York: Springer, 1974. ISBN 978-1-4684-9442-6.

[9] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (II)*. 3.vyd. Praha: Academia, 1976.

[10] KALAS, Josef. *Analýza v komplexním oboru*. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2006. ISBN 80-210-4045-9.

[11] KATZNELSON, Yitzhak. *An introduction to harmonic analysis*. 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0-521-54359-2.

[12] RENARDY, Michael; ROGERS, Robert C. *An introduction to partial differential equations*. Corr. 2nd print. New York: Springer, 1996. ISBN 0-387-97952-2.

[13] RUDIN, Walter. *Analýza v reálném a komplexním oboru*. 2. vyd. Praha: Academia, 2003. ISBN 80-200-1125-0.

[14] RUDIN, Walter. *Principles of mathematical analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976. ISBN 0-07-054235-x.

[15] SIMON, Barry. *Harmonic analysis*. Providence: American Mathematical Society, 2015. ISBN 978-1-4704-1102-2.

[16] STRAUSS, Walter A. *Partial differential equations: An introduction*. New York: Wiley, 1992. ISBN 0-471-54868-5.

[17] TAYLOR, Michael E. *Partial differential equations: Basic theory*. New York: Springer, 1996. ISBN 0-387-94654-3.

[18] TRÈVES, François. *Basic linear partial differential equations*. 5. print. New York: Academic Press, 1975. ISBN 0-12-699440-4.

[19] VESELÝ, Michal. *Parciální diferenciální rovnice* [online]. Brno, 2016 [cit. 2018-03-10]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/∼xvesely/data/PDE.pdf.