

Časové řady - rozklad na harmonické složky

Základní informace

V návaznosti na harmonický rozklad funkcí spojitých v čase uvede tato kapitola matematické prostředky pro rozklad diskretních posloupností na dílčí harmonické složky. Dále zde seznámíme čtenáře s rozdíly, které vyplývají z odlišného charakteru navzorkovaných dat (především z pohledu frekvenční vlastností) ve srovnání s vlastnostmi veličin ve spojitém čase. Aby bylo možné oba typy dat a jejich spektrální vlastnosti, bude nezbytné, aby byl čtenář seznámen se způsoby frekvenční analýzy veličin ve spojitém čase ([odkaz na VJ4 - Modely veličin spojitých v čase – rozklad na harmonické složky](#)). Bez toho to zatím nepůjde. Na konci se seznámíme s velice frekventovaným pojmem rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier Transform, ve zkratce FFT), vysvětlíme si proč je rychlá i základní princip, jak toho dosáhnout.

Výstupy z výuky

- seznámit se s definicemi diskretní Fourierova řada, Fourierova transformace s diskretním časem a diskretní Fourierova transformace;
- pochopit rozdíly v podstatě uvedených typů Fourierovy transformace a umět použít správného algoritmu pro data určitého typu;
- umět spočítat Fourierovu transformaci dané časové řady;
- seznámit se se základním principem rychlé Fourierovy transformace.

1 Diskrétní Fourierova řada

Rozklad spojitých veličin na harmonické složky jsme začali rozkladem periodických funkcí pomocí Fourierovy řady. Připomeňme dva základní vztahy pro Fourierovu řadu v exponenciálním tvaru pro spojitě periodické funkce. Podle kterých spojitou veličinu $x(t)$ lze rozložit na nekonečný součet dílčích harmonických složek, jejichž frekvence jsou celočíselnými násobky základní úhlové frekvence Ω podle

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k e^{jk\Omega t},$$

kde \hat{c}_k jsou komplexní Fourierovy koeficienty definované vztahem

$$\hat{c}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega t} dt$$

a $\Omega = 2\pi/T$ je opět úhlový kmitočet základní harmonické složky určený základní periodou T rozkládané funkce $x(t)$. Modul komplexního Fourierova koeficientu \hat{c}_k určuje amplitudu odpovídající harmonické složky, jeho fáze hodnotu počáteční fáze odpovídající harmonické funkce.

Fourierova řada pro spojitě funkce je definovaná nekonečným součtem harmonických složek. To vyplývá ze skutečnosti, že komplexní exponenciála se spojitým časem $e^{j\omega t}$ jako jádrová funkce harmonického rozkladu nabývá různých hodnot pro různé hodnoty úhlového kmitočtu ω . Situace je ale zcela odlišná u diskrétní jádrové posloupnosti $e^{jk\Omega_d T_{vz}}$, jejíž hodnoty se opakují s periodou kmitočtu 2π , protože je $\Omega_d = 2\pi/T$ a perioda časové řady je dána počtem jejích vzorků, tj. $T = N \cdot T_{vz}$. V tom případě je

$$e^{jk\Omega_d T_{vz}} = e^{j \frac{k2\pi T_{vz}}{N T_{vz}}} = e^{j2\pi \frac{k}{N}} \quad (1.1)$$

a pokud index k , udávající pořadí frekvenční složky, je větší než počet vzorků N v periodě časové řady, pak se hodnoty komplexní jádrové exponenciály opakují.

Chceme-li najít diskrétní ekvivalent Fourierovy řady pro spojitě funkce, pak musíme vzít v potaz tuto skutečnost a počet frekvenčních složek ve spektru diskrétní posloupnosti již nebude nekonečný, nýbrž omezený vzorkovací frekvencí na N vzorků.

Protože je diskrétní Fourierova řada reprezentována konečným součtem dílčích složek, nejsou problémy, na rozdíl od případu se spojitým časem, s její konvergencí.

Definice 1.1:

Nechť tedy $x(nT_{vz})$ je periodická posloupnost s periodou NT_{vz} . Tu lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady pomocí vztahu

$$x(nT_{vz}) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.2)$$

kde

$$\hat{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.3)$$

Důkaz:

Změňme index sumace ve vztahu pro výpočet koeficientu \dot{c}_k

$$\dot{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot e^{-\frac{2j\pi mk}{N}}. \quad (1.4)$$

Pak je

$$\begin{aligned} s(nT_{vz}) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_n \cdot e^{2j\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot e^{-2j\pi km/N} \right) e^{2j\pi kn/N} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{2j\pi k(n-m)/N}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

Potom pro $n = m$ je

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2j\pi k(n-m)/N} = \sum_{k=0}^{N-1} e^0 = N \quad (1.6)$$

a pro $n \neq m$ pomocí vztahu pro součet geometrické posloupnosti je

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2j\pi k(n-m)/N} = \frac{1 - e^{2j\pi N(n-m)/N}}{1 - e^{2j\pi(n-m)/N}} = 0 \quad (1.7)$$

a tedy (protože součet je nenulový pouze pro $k = m$)

$$x(nT_{vz}) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{2j\pi k(n-m)/N} = \frac{1}{N} x(nT_{vz}) \cdot N = x(nT_{vz}). \quad (1.8)$$

Tedy $s(nT_{vz}) = x(nT_{vz})$, což bylo to, co jsme chtěli dokázat.

Příklad 1.1:

Určete spektrum posloupnosti $x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(2\pi n/N)$.

Řešení:

Nejdříve spočítejme úlohu spíše na základě logických úvah. Zadaná posloupnost $x(kT_{vz})$ je periodická s periodou N a můžeme si ji vyjádřit pomocí Eulerova vztahu ve tvaru

$$A \cdot \cos \frac{2\pi n}{N} = \frac{A}{2} \left[e^{\frac{2j\pi n}{N}} + e^{-\frac{2j\pi n}{N}} \right].$$

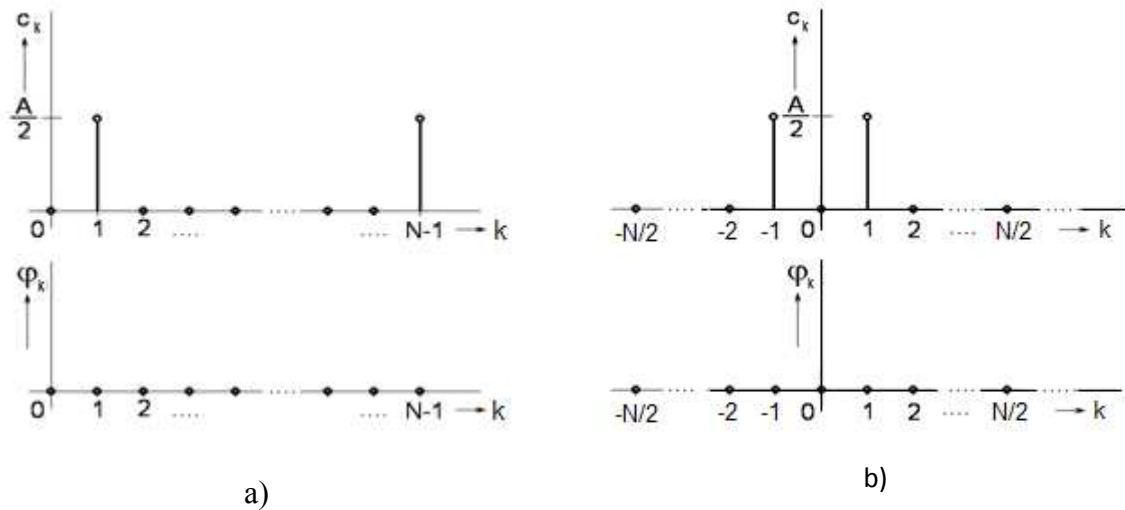
Nyní protože

$$e^{\frac{2j\pi n(N-1)}{N}} = e^{\frac{2j\pi nN}{N}} \cdot e^{-\frac{2j\pi n}{N}} = e^{\frac{2j\pi n}{N}}$$

je

$$A \cdot \cos \frac{2\pi n}{N} = \frac{A}{2} \left[e^{\frac{2j\pi n}{N}} + e^{\frac{2j\pi(N-1)n}{N}} \right]$$

Z toho plyne, že



Obr.1.1 Amplitudové a fázové spektrum posloupnosti $x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(2\pi n/N) - a)$ s periodou $\langle 0, N-1 \rangle$; $b)$ s periodou $\langle -N/2, N/2 \rangle$

$$\dot{c}_1 = \frac{A}{2}, \quad \dot{c}_{N-1} = \frac{A}{2} \text{ a } \dot{c}_k = 0 \text{ pro všechna jiná } n.$$

Spektrum tohoto signálu pak můžeme graficky vyjádřit s periodou $\langle 0, N-1 \rangle$ a díky periodičnosti jádrové funkce řady i v periodě $\langle -N/2, N/2 \rangle$, jak je tomu na obr.1.1.

Pokusme se nyní spočítat koeficienty diskrétní Fourierovy řady pro danou posloupnost podle definičního vztahu. Nejdříve stejnosměrnou složku, tj. pro $k = 0$. Podle (1.3) je

$$\dot{c}_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \cdot e^{-\frac{j2\pi n \cdot 0}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right).$$

Protože součet vzorků kosinové posloupnosti přes jednu celou periodu je nulový, je hodnota \dot{c}_0 rovněž nulová (pro stejnosměrnou složku určitě dle očekávání).

Nyní určíme hodnotu Fourierova koeficientu pro $k = 1$.

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \cdot e^{-\frac{j2\pi n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) - \frac{j}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = \\ &= \frac{A}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos(0) + \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) \right] - \frac{jA}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sin(0) + \sin\left(\frac{4\pi n}{N}\right) \right] = \\ &= \frac{A}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(0) + \frac{A}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) - \frac{jA}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(0) - \frac{jA}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \sin\left(\frac{4\pi n}{N}\right). \end{aligned}$$

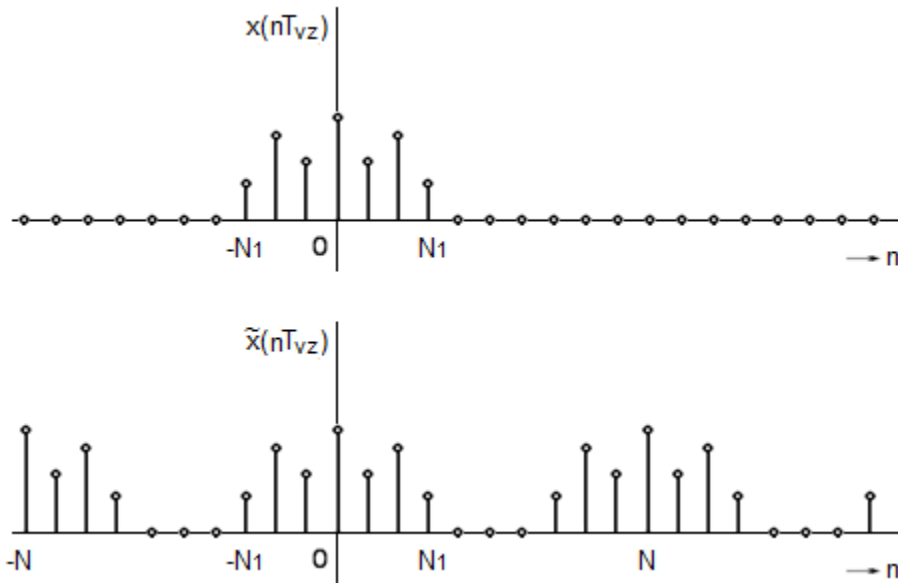
Součet v prvním členu je N , druhý součet, stejně jako třetí i čtvrtý jsou nulové (druhý a čtvrtý, protože se týká součtu vzorků kosinusovky, resp. sinusovky přes dvě celé periody – sice přes N vzorků, ale obě harmonické funkce mají dvojnásobnou frekvenci než je zadaná, třetí součet je snad hanba vysvětlovat). Takže výsledná hodnota je

$$\dot{c}_1 = \frac{A}{2}$$

tak jak v úvodní fázi řešení. Výpočet pro $k = -1, N-1$ a pro všechny ostatní k je už ekvivalentní.

2 Fourierova transformace s diskretním časem (DTFT)

Pokusme se zde uplatnit podobnou strategii jako v případě přechodu od Fourierovy řady k Fourierově transformaci v případě funkcí spojitých v čase



Obr.2.1 Podmínky přechodu od diskretní Fourierovy řady k Fourierově transformaci

Definice 2.1:

Nechť $x(nT_{vz})$ je časově omezená posloupnost s diskretním časem s $x(nT_{vz}) = 0$ pro všechna celá $n < -N_1$ a $n > N_1$, kde N_1 je celočíselná konstanta. Dále, necht' pro jakékoliv kladné celé sudé číslo $N > 2N_1$ označíme $\tilde{x}_N(nT_{vz})$ posloupnost s periodou NT_{vz} , která je $x(nT_{vz})$ pro $n = -N/2, -(N/2)+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, (N/2)-1$ (obr.2.1)

Z definice $\tilde{x}_N(nT_{vz})$ máme

$$x(nT) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}_N(nT_{vz}). \quad (2.1)$$

Protože $\tilde{x}_N(nT_{vz})$ je periodická funkce s periodou NT_{vz} , má Fourierovu řadu

$$\tilde{x}_N(nT_{vz}) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{\frac{2j\pi kn}{N}}, \quad (2.2)$$

kde

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \tilde{x}_N(nT_{vz}) \cdot e^{-\frac{2j\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.3)$$

Z vlastností $\tilde{x}_N(nT_{vz})$ vyplývá, že lze poslední uvedenou rovnici přepsat do tvaru

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot e^{\frac{2j\pi nkT_{vz}}{NT_{vz}}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.4)$$

a potom

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jn\omega T_{vz}}, \quad \omega = 2\pi k / NT_{vz}, \quad (2.5)$$

kde ω je pro $N \rightarrow \infty$ spojitá (nediskrétní) veličina.

Úvahy z výše uvedené definice jen potvrzují, co už známe z rozkladu spojitých funkcí, totiž že spojitost či nespojitost spektra nesouvisí se spojitostí či nespojitostí rozkládané funkce, nýbrž s její periodičností.

3 Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Aby bylo možné s frekvenčním spektrem prakticky počítat, je užitečné spektrální funkci diskretizovat.

Definice 3.1:

Předpokládejme, že posloupnost $x(nT_{vz}) = 0$ pro $n < 0$ a $n \geq N$, pak DFT je definována vztahem

$$\begin{aligned} \mathcal{DFT}\{x(nT_{vz})\} &= X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk\Omega nT_{vz}} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{NT_{vz}} nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi kn / N} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Definice 3.2:

Zpětnou inverzní diskrétní Fourierovu transformaci pak definuje vztah

$$\mathcal{DFT}^{-1}\{X(k\Omega)\} = x(nT_{vz}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{jnT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{j2\pi kn / N} \quad (3.2)$$

Definice 3.3:

Pokud uvažujeme pouze posloupnost hodnot bez její časové resp. kmitočtové interpretace, lze definiční vztah diskrétní Fourierovy transformace vyjádřit též ve tvaru

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn / N} \quad (3.3)$$

resp. inverzní transformace

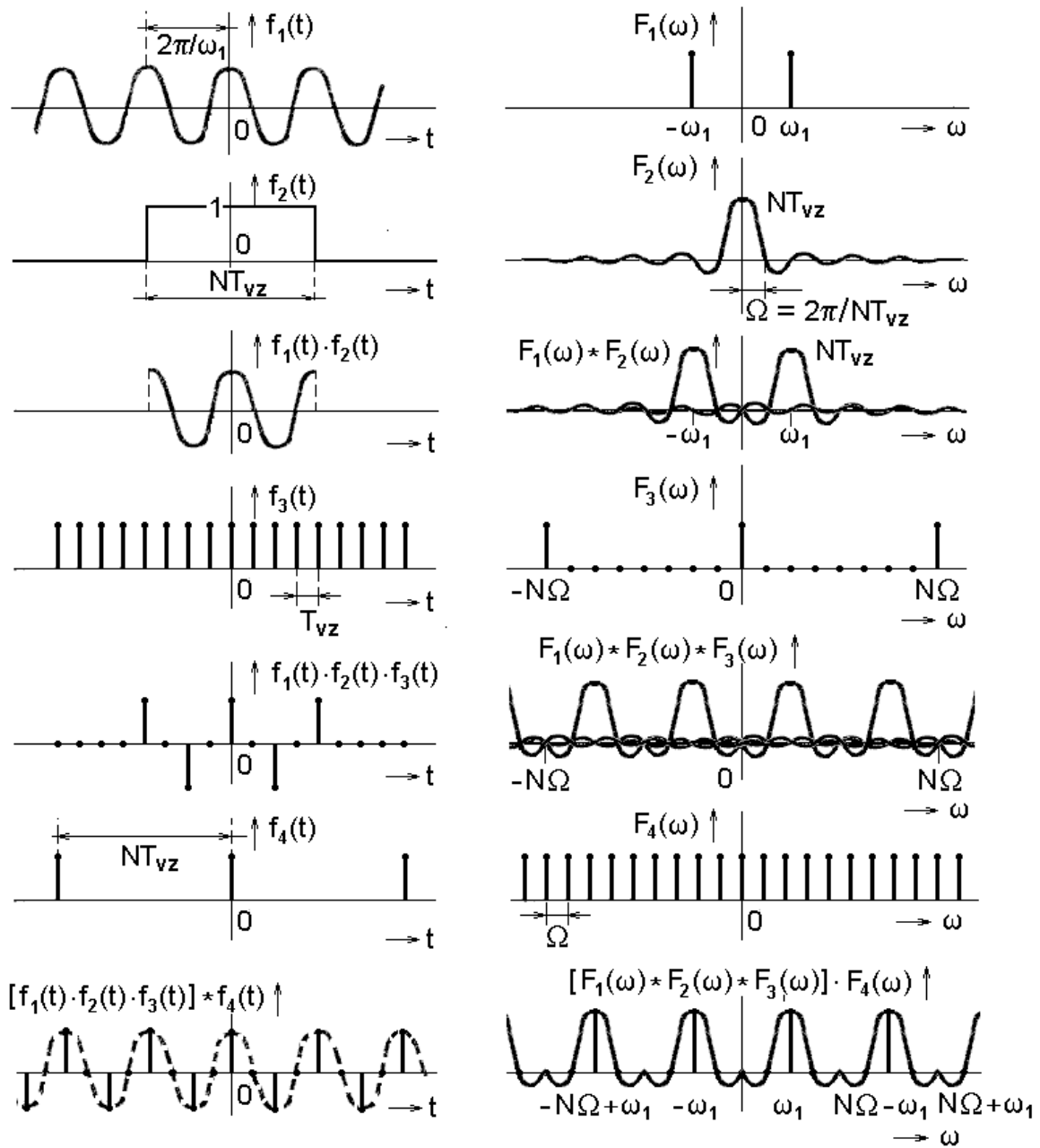
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi kn / N} \quad (3.4)$$

Diskrétní Fourierova transformace, stejně jako všechny ostatní formy Fourierovy transformace, je inverzibilní, tj. platí:

$$\mathcal{DFT}^{-1}\{\mathcal{DFT}(x)\} = x. \quad (3.5)$$

což lze dokázat následovně:

$$\begin{aligned} x(mT_{vz}) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) e^{jmT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) e^{-jk\Omega nT_{vz}} \right) e^{jmT_{vz}k\Omega} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}}, \text{ kde } \Omega = 2\pi / NT_{vz}. \end{aligned} \quad (3.6)$$



Obr.3.1 Princip a důsledky diskrétní Fourierovy transformace pro kmitočtový signál

$$\omega_1 = \omega_{vz}/4 = \pi/(2T_{vz})$$

Protože podobně jako v důkazu diskrétní Fourierovy řady je $\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = N$ pro $m = n$ a

pro $m \neq n$ je $\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1 - e^{j(m-n)N\Omega T_{vz}}}{1 - e^{j(m-n)\Omega T_{vz}}} = 0$, můžeme pokračovat

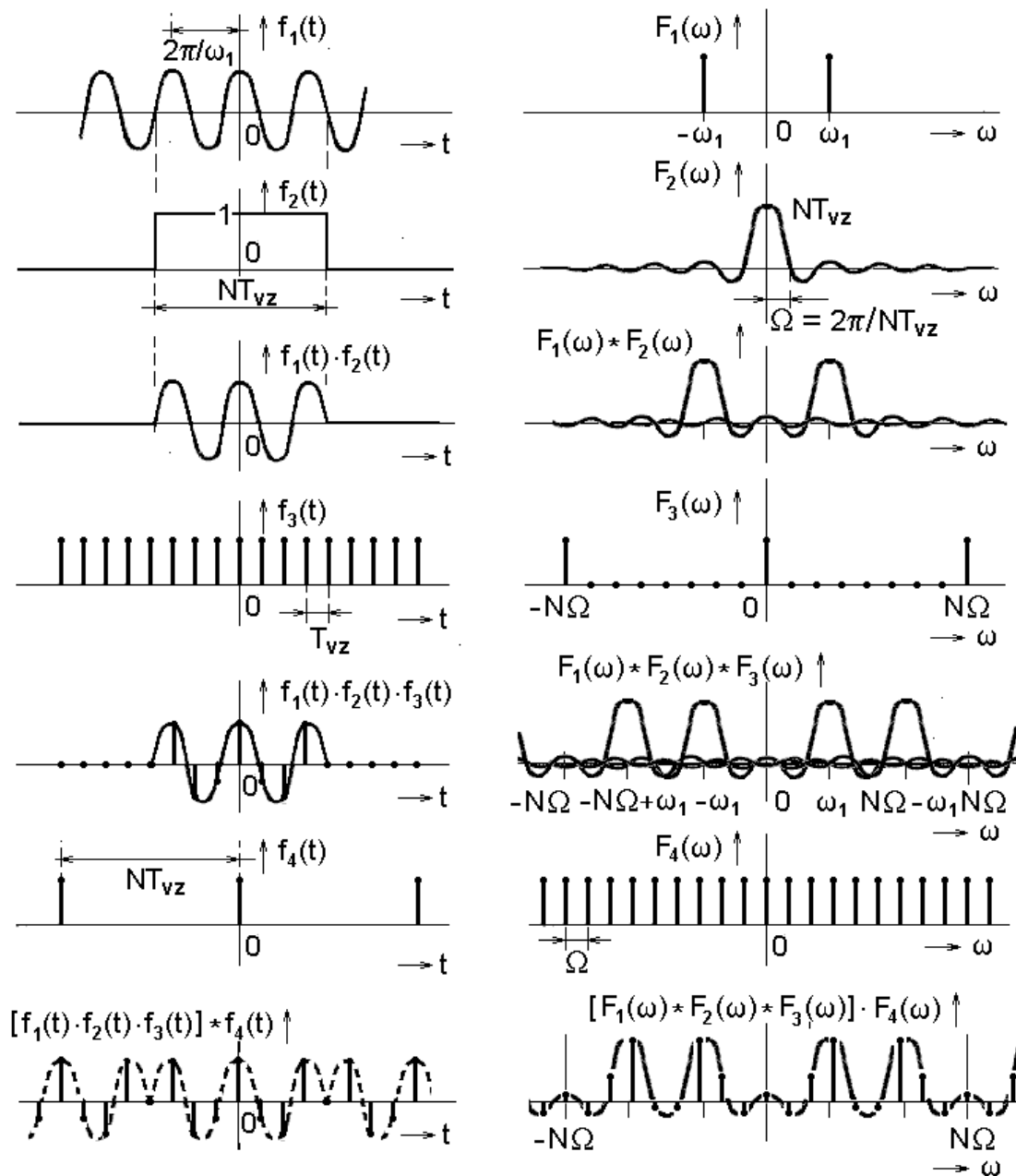
$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = \frac{1}{N} x(mT_{vz}) \cdot N = x(mT_{vz}). \quad (3.7)$$

Vliv DFT na charakter spektra harmonické posloupnosti je patrný z obr.3.1 a 3.2 Na obr.3.1 je zobrazen případ, kdy je perioda vzorkované funkce $T = 2\pi/\omega_1$ rovna celočíselnému násobku vzorkovací periody $T_{vz} = 2\pi/\omega_{vz}$, v konkrétním případě $T = 4T_{vz}$, tj. $\omega_1 = \omega_{vz}/4 = \pi/(2T_{vz})$. Na obou obrázcích jsou zobrazeny v levé části časové průběhy a vpravo jim odpovídající spektra. Konečný úsek signálu je vytvořen z původního časově neomezeného průběhu vynásobením obdélníkovým oknem, jehož délka je rovna celočíselnému násobku vzorkovací periody, konkrétně $N = 8$. Spektrum vynásobeného, tj. časově omezeného úseku spojitě harmonické funkce je dán konvolucí spekter původního harmonického signálu a spektra obdélníkového okna ve tvaru funkce $Sa(\omega)$. Vzorkování tohoto úseku funkce o konečné době trvání vyjádříme dle definice ([odkaz na VJ5Časové řady. Základní pojmy a matematické operace, vztah \(1.2\)](#)) násobením sledem jednotkových impulsů s periodou opakování rovnou vzorkovací periodě T_{vz} . Tomu odpovídá rovněž periodické impulsní spektrum s periodou rovnou vzorkovací frekvenci $\omega_{vz} = N\Omega$ a výsledné spektrum navzorkované posloupnosti je konvolucí všech tří dílčích složek, jejichž násobením vznikl diskrétní harmonický signál omezeného trvání.

Diskrétní verzi spektra získáme násobením spektra pulsem Diracových s frekvencí Ω . Tomuto pulsu odpovídá v časové oblasti periodický sled jednotkových impulsů s periodou NT_{vz} . Protože konečné spektrum je výsledkem násobení spojitěho spektra navzorkované posloupnosti konečného trvání, je časová reprezentace navzorkovaného spektra konvoluce navzorkované posloupnosti s časovou reprezentací vzorkovacího pulsu spektra. Touto konvolucí se posloupnosti nepřímou vnucuje periodicitu, takže výsledné diskrétní spektrum je spektrem periodické posloupnosti. Tím, že je vzorkování signálu vhodně vázáno s délkou konečného obdélníkového okna a tím i se vzorkováním spektra, odpovídá fiktivní výsledná periodická posloupnost původní funkci, jejíž spektrum jsme pomocí DFT počítali.

Na druhé straně, pokud délka omezujícího obdélníkového okna neodpovídá celočíselnému násobku period vstupního signálu, pak i výsledné diskrétní spektrum odpovídá funkci, jejíž průběh je modifikován, např. tak, jak je zobrazeno na obr.3.2.

Druhý, zřejmě ještě důležitější důsledek formální diskretizace spektrální funkce a z toho vyplývající vnucené periodizace transformované posloupnosti je ten, že diskrétní Fourierova transformace je téměř totožná s diskrétní Fourierovou řadou. Jediný rozdíl je v dělení počtem vzorků N v periodě při výpočtu komplexních koeficientů, jejichž moduly udávají amplitudy harmonických složek odpovídající frekvence a jejich argumenty počáteční fázi. Protože definiční vztah DFT toto dělení neobsahuje, neodpovídají výsledné hodnoty amplitudám harmonických složek, ale hodnotám N -krát větším.



Obr.3.2 Princip a důsledky diskrétní Fourierovy transformace pro kmitočety signálu

$$\omega_1 = 5 \omega_{vz}/16 = 5\pi/(8T_{vz})$$

Příklad 3.1:

Mějme zadánu posloupnost čtyř nenulových vzorků $x(0) = 1$, $x(1) = 2$, $x(2) = 2$, $x(3) = 1$ a všechny ostatní hodnoty $x(n) = 0$ pro $n \neq 0, 1, 2, 3$. Určete hodnoty vzorků frekvenčního spektra pro $N = 4$.

Řešení:

Definiční vztah (3.3) pro diskrétní Fourierovu transformaci

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

Lze přeformulovat i do trigonometrického tvaru

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot [\cos(2\pi kn/N) - j\sin(2\pi kn/N)].$$

Z tohoto tvaru lze snadno vyjádřit reálné a imaginární části komplexních hodnot vzorků spektra

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(X(k)) &= x(0) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k \cdot 0}{4}\right) + x(1) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k \cdot 1}{4}\right) + x(2) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k \cdot 2}{4}\right) + x(3) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k \cdot 3}{4}\right) = \\ &= 1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + 2 \cdot \cos(\pi k) + \cos\left(\frac{3\pi k}{2}\right), \text{ pro } k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(X(k)) &= -x(0) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k \cdot 0}{4}\right) - x(1) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k \cdot 1}{4}\right) - x(2) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k \cdot 2}{4}\right) - x(3) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k \cdot 3}{4}\right) = \\ &= 0 - 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) - 2 \cdot \sin(\pi k) - \sin\left(\frac{3\pi k}{2}\right), \text{ pro } k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Po dosazení za k dostáváme

$$\operatorname{Re}(X(k)) = \begin{cases} 6, & \text{pro } k = 0; \\ -1, & \text{pro } k = 1; \\ 0, & \text{pro } k = 2; \\ -1, & \text{pro } k = 3 \end{cases} \quad \text{a} \quad \operatorname{Im}(X(k)) = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 0; \\ -1, & \text{pro } k = 1; \\ 0, & \text{pro } k = 2; \\ 1, & \text{pro } k = 3. \end{cases}$$

Z toho jsou hodnoty vzorků frekvenčního spektra v kartézském tvaru

$$X(k) = \begin{cases} 6, & \text{pro } k = 0; \\ -1 - j, & \text{pro } k = 1; \\ 0, & \text{pro } k = 2; \\ -1 + j, & \text{pro } k = 3. \end{cases}$$

a v polárním tvaru, který je v tomto případě běžnější je

$$X(k) = \begin{cases} 6 \cdot e^0, & \text{pro } k = 0; \\ \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}}, & \text{pro } k = 1; \\ 0, & \text{pro } k = 2; \\ \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}, & \text{pro } k = 3. \end{cases}$$

Z dosažených výsledků je zřejmé, že posloupnost modulů spektrálních hodnot (čar) je symetrická s osou symetrie pro $k = 2$ a antisymetrická s toutéž osou pokud jde o argumenty (fáze) spektrálních hodnot. Posloupnost by byla periodická, pro hodnoty $k > 4$ by se hodnoty spektrálních vzorků opakovaly.

Pokud bychom chtěli, aby moduly odpovídaly amplitudám odpovídajících harmonických složek, musíme vypočítané hodnoty $X(k)$ podělit počtem vzorků, tedy čtyřmi. Správnost takového počínání snadno ověříme pro $X(0)$, které po podělení vychází 1,5, což právě odpovídá střední hodnotě ze čtyř nenulových vzorků zadané posloupnosti.

Příklad 3.2:

Určete hodnoty spektrálních vzorků posloupnosti $\{1, 1, 1, 1\}$.

Řešení:

Nejdříve jednoduchá úvaha. Všechny zadané vzorky nabývají stejné hodnoty. Zadáání tedy odpovídá periodicky se opakující hodnotě 1 s periodou 4. Protože data neobsahují žádnou jinou periodicitu, spektrum by mělo obsahovat pouze jeden nenulový vzorek a to pro nulovou frekvenci, tj. stejnosměrnou složku.

Použijeme-li téhož postupu jako v předchozím příkladu 3.1, dostáváme hodnoty spektrálních čar: $X(0) = 4$, $X(1) = 0$, $X(2) = 0$ a $X(3) = 0$. Spektrální hodnota $X(0)$ pro nulovou frekvenci je tedy opravdu rovna čtyřnásobku amplitudy harmonické složky s nulovou frekvencí.

Příklad 3.3:

Určete hodnoty spektrálních vzorků posloupnosti $\{1, 0, 0, 0\}$.

Řešení:

Nejdříve opět jednoduchá úvaha. Zadané vzorky odpovídají jednotkovému impulzu a protože prostřednictvím DFT vnucujeme posloupnosti periodicitu s periodou odpovídající počtu zadaných vzorků, reprezentují zadané hodnoty periodický sled jednotkových impulzů s periodou čtyři vzorky. Protože spektrum jednotkového impulzu je konstantní (harmonické složky jsou zastoupeny rovnoměrně, tj s toutéž amplitudou. Moduly spektrálních vzorků by tedy měly po výpočtu pomocí DFT být $|X(0)| = 1$, $|X(1)| = 1$, $|X(2)| = 1$, $|X(3)| = 1$ a po podělení počtem vzorků $X_N(k) = \{0,25, 0,25, 0,25, 0,25\}$. Ověřte si výpočtem opět podle postupu v Příkladu 3.1.

Příklad 3.4:

Určete hodnoty spektrálních vzorků posloupnosti $\{0, 1, 0, -1\}$ a vysvětlete charakter vypočítaného spektra.

Řešení:

$X(k) = \{0, -2j, 0, 2j\}$ pro $k = 0, 1, 2, 3$, což lze též vyjádřit $X(k) = \{0, 2 \cdot e^{-j\pi/2}, 0, 2 \cdot e^{j\pi/2}\}$ a normalizovaná posloupnost na jeden vzorek $X_N(k) = \{0, 0,5 \cdot e^{-j\pi/2}, 0, 0,5 \cdot e^{j\pi/2}\}$. Výslednou posloupnost lze interpretovat tak, že data obsahují harmonickou složku o periodě rovné počtu

vzorků v posloupnosti (tzv. první harmonická složka) o amplitudě $A = 0,5 + 0,5 = 1$ a počáteční fázi $-\pi/2$ – logicky, protože data začínají od 0, vzorky tedy odpovídají sinusovce, který je vůči referenční funkci kosinus posunutá právě o úhel $-\pi/2$.

Příklad 3.5:

Co by se stalo, kdyby se posloupnost z Příkladu 3.4 posunula o jeden vzorek, tj. byla by $\{1, 0, -1, 0\}$.

Řešení:

Po aplikaci postupu z Příkladu 3.1 dostáváme $X(k) = \{0, 2, 0, 2\}$ pro $k = 0, 1, 2, 3$. To znamená, že počáteční fáze první harmonické je nulová. Jak jinak, když datová posloupnost začíná jedničkou a odpovídá tak referenčnímu kosinu.

Příklad 3.6:

Určete hodnoty spektrálních vzorků posloupnosti $\{1, -1, 1, -1\}$ a vysvětlete charakter vypočítaného spektra.

Řešení:

$X(k) = \{0, 0, 4, 0\}$ pro $k = 0, 1, 2, 3$ a $X_N(k) = \{0, 0, 1, 0\}$ pro $k = 0, 1, 2, 3$. Zadaná datová posloupnost obsahuje dvě periody, tj. dvojnásobek základní periody dané počtem vzorků datové posloupnosti. Tato frekvence (druhá harmonická složka) je rovna polovině vzorkovací frekvence (4 vzorky v posloupnosti). Pro tuto frekvenci nemá spektrální posloupnost dva vzorky, nýbrž pouze jeden ležící na záporné reálné ose v komplexní rovině, proto je jeho hodnota dvojnásobná, než jak jsme sdi zvykli v předcházejících příkladech.

Příklad 3.7:

Pokud by se datová posloupnost posunula o jeden vzorek ve srovnání s předešlým příkladem, tj. byla by $\{-1, 1, -1, 1\}$, znamenalo by to, že se druhá harmonická složka posunula o polovinu periody. Jak by se to projeví ve spektrální posloupnosti?

Skryté řešení:

$$X(k) = \{0, 0, -4, 0\} \text{ pro } k = 0, 1, 2, 3.$$

Příklad 3.8:

Bylo by možné v datové i spektrální posloupnosti zobrazit harmonickou funkci s periodou rovnou třetině délky datové posloupnosti?

Skryté řešení:

Harmonická složka má frekvenci, která je již větší, než vzorkovací frekvence. V datové posloupnosti by se zobrazila jako první harmonická.

4 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Definiční vztah pro výpočet diskrétní Fourierovy transformace v exponenciálním tvaru můžeme pomocí Eulerova vztahu vyjádřit i funkcemi \cos a \sin jako

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk\Omega nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot (\cos(k\Omega nT_{vz}) - j \sin(k\Omega nT_{vz})). \quad (3.48)$$

Výpočet každé z N složek spektra posloupnosti pak představuje N -násobný součet součinu hodnoty signálu s reálnou i komplexní složkou jádra transformace, představované odpovídajícími hodnotami funkcí \sin a \cos . Takto definovaný výpočet je poměrně pracný a je otázkou, zda jej nelze optimalizovat.

Zrychlení výpočetního algoritmu se může dosáhnout využitím dříve vypočítaných mezivýsledků, resp. vynecháním zbytečných výpočtů – např. násobení nulou. Relativně zdlouhavé a opakované výpočty hodnot obou goniometrických funkcí lze usnadnit používáním předem spočítaných tabulkových hodnot pro jednu čtvrtinu periody jedné z obou funkcí. Dalšího zefektivnění výpočtu lze dosáhnout vhodným uspořádáním výpočetního algoritmu, např. tzv. rychlou Fourierovou transformací.

Abychom dokázali posoudit pracnost jednotlivých variant výpočtu diskrétního spektra diskrétního signálu je potřeba určit základní elementy výpočtu. Z definičního vztahu (3.48) vyplývá, že takové elementy jsou dva - násobení komplexního čísla a sečítání dvou čísel. Jednotku pracnosti P tedy definujeme pomocí jednoho komplexního násobení a sečtení dvou čísel. Výpočet jedné hodnoty spektra signálu o N vzorcích pomocí definičního vztahu představuje N elementů pracnosti výpočtu, tedy $N \cdot P$. Pracnost výpočtu celého spektra zahrnujícího N hodnot poté představuje hodnotu $N \cdot N \cdot P = N^2 \cdot P$. Tuto hodnotu můžeme považovat za referenční pro srovnání s pracnostmi jiných variant výpočtu.

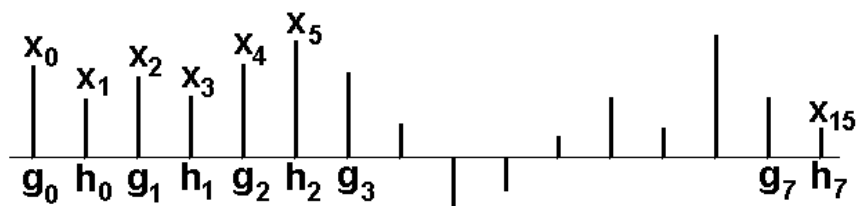
Algoritmus rychlé Fourierovy transformace má dvě z hlediska pracnosti v podstatě ekvivalentní varianty:

- rozklad v časové oblasti;
- rozklad ve frekvenční oblasti,

z nichž se podrobněji zabýváme principem první varianty, který je pak snadno aplikovatelný i pro postup druhý.

Předpokládejme, že vstupní signálová posloupnost má sudý počet vzorků. Rozdělíme ji na dvě dílčí posloupnosti (obr.4.1):

- $\{g_i\} = \{x_{2i}\}$ - sudé prvky původní posloupnosti;
- $\{h_i\} = \{x_{2i+1}\}$ - liché prvky původní posloupnosti, $i = 0, 1, \dots, N/2-1$.



Obr.4.1 Rozdělení signálové posloupnosti

Dále předpokládáme, že všechny posloupnosti (původní i obě dílčí), mají svou DFT, které jsou definovány vztahy

$$G(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i \cdot e^{-\frac{j4\pi ik}{N}} \quad (3.49)$$

a

$$H(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i \cdot e^{-\frac{j4\pi ik}{N}} \quad (3.50)$$

pro $k \in \langle 0, N/2-1 \rangle$.

k-tou hodnotu spektra počítanou podle původního transformačního algoritmu nyní vyjádříme pomocí dílčích výpočtů $G(k)$ a $H(k)$. V tom případě platí

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N}} = x_0 \cdot e^{-\frac{j2\pi \cdot 0k}{N}} + x_1 \cdot e^{-\frac{j2\pi \cdot 1k}{N}} + x_2 \cdot e^{-\frac{j2\pi \cdot 2k}{N}} + \dots + x_{N-1} \cdot e^{-\frac{j2\pi \cdot (N-1)k}{N}} = \\ &= \begin{vmatrix} g_0 = x_0 & g_1 = x_2 & g_2 = x_4 & g_7 = x_{14} \\ h_0 = x_1 & h_1 = x_3 & h_2 = x_5 & h_7 = x_{15} \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi (2i+1)k}{N}} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} \cdot e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \right) = G(k') + e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \cdot H(k') \quad k' = k \bmod(N/2) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Když hodnoty pomocných dílčích posloupností budeme počítat podle základního definičního vztahu, bude celková pracnost součtem pracností výpočtu spekter obou posloupností a jejich spojení

$$2 \cdot (N/2)^2 \cdot P + N \cdot P = (N^2 \cdot P)/2 + N \cdot P \quad (3.52)$$

tzn. dosáhneme uspořené pracnosti téměř na polovinu, pokud bude druhý člen vyjadřující pracnost zkombinování obou posloupností malý ve srovnání se členem prvním (to bude platit především pro velké hodnoty N).

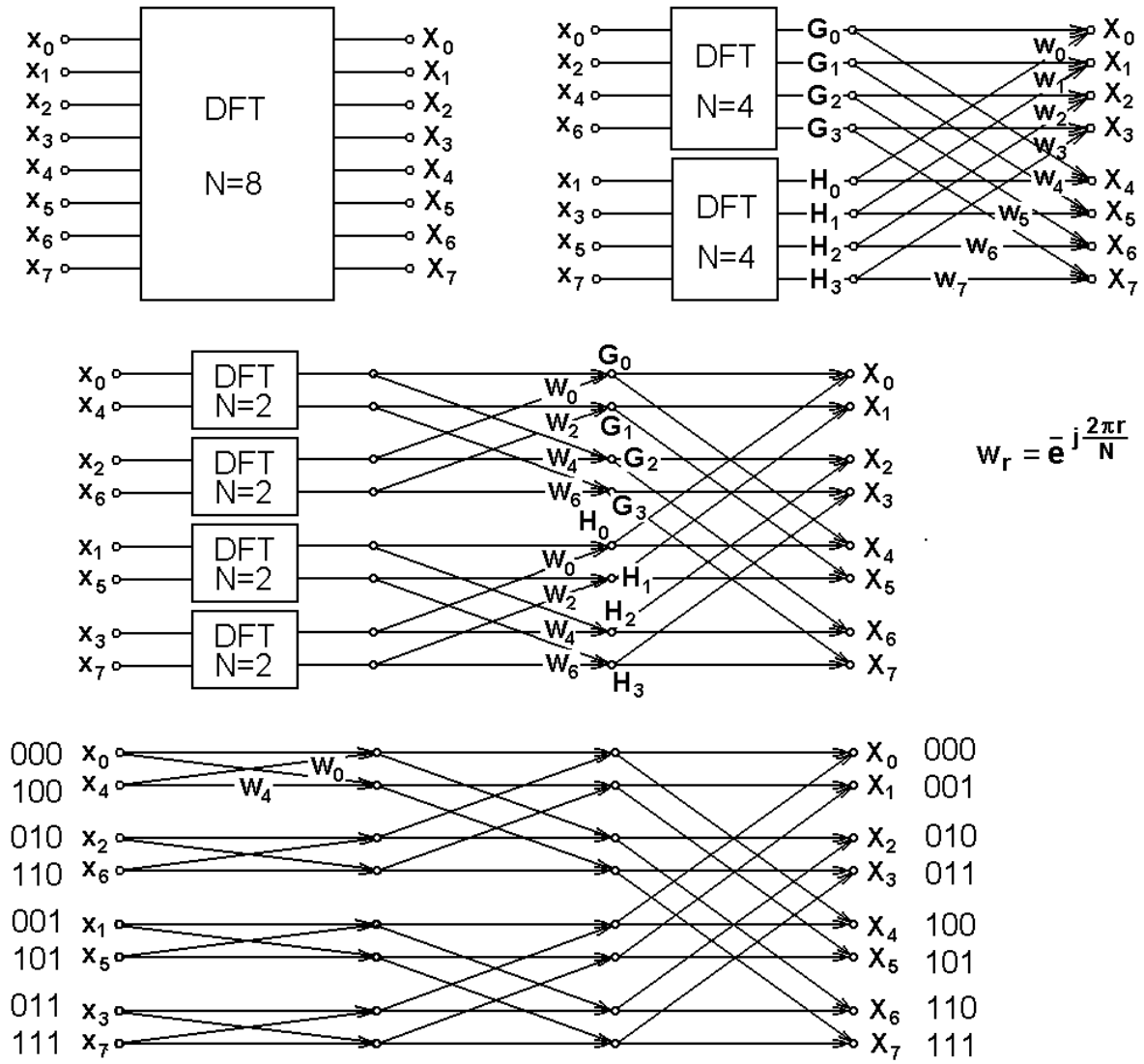
Je-li $N/2$ opět sudé, může se v dělení dále pokračovat – celkově je výhodné, je-li N mocninou dvou, tj. platí $N = 2^m$ - v tom případě lze pokračovat v dělení až ke vstupní posloupnosti (obr.4.2).

Každý uzel ve výpočetním schématu představuje součet příspěvků reprezentovaných vstupními orientovanými hranami, přičemž jeden z obou vstupů je násoben vahou w_r . Pracnost výpočtu v každém uzlu schématu bude právě P a počet uzlů v každé výpočetní vrstvě je N , pracnost výpočtu v celé vrstvě je $N \cdot P$. Počet vrstev ve výpočetním schématu bude v případě $N = 2^m$ roven $m = \log_2 N$ a proto celková pracnost je $N \cdot P \cdot m = N \cdot P \cdot \log_2 N$. Po velká N tento výraz roste již téměř lineárně a jeho hodnoty jsou proto výrazně menší než původní pracnost s kvadratickou závislostí.

Vzhledem k postupnému dělení a uspořádávání dílčích vstupních posloupností není po dokončení rozkladu vstupní signálová posloupnost uspořádána vzestupně podle jejich indexů, nýbrž jinak. Vyjádříme-li hodnoty indexů jednotlivých vzorků binárně a tato binární čísla

čteme zprava doleva (obr.4.2), tvoří hodnoty indexů přirozeně rostoucí posloupnost - proto nazýváme uspořádání vzorků vstupní posloupnosti bitově inverzní.

Další skutečností usnadňující výpočet je existence standardních opakujících se motýlkovitých výpočetních struktur o čtyřech uzlech a čtyřech hranách, což znamená, že výpočet v rámci každé takové dílčí struktury se řídí stále stejným algoritmem. Navíc pro výpočet výstupních hodnot v každé vrstvě jsou potřeba pouze vstupní vzorky každé vrstvy, výpočet tedy může probíhat vždy jen v jedné vrstvě a lze tak šetřit výpočetní paměť.



Obr.4.2 Výpočetní schéma algoritmu FFT rozkladem v časové oblasti

Příklad 4.1:

Určete jak se použitím algoritmu FFT zrychlí oproti základnímu definičnímu algoritmu DFT výpočet při $256 = 2^8$ vzorcích, při $1024 = 2^{10}$ vzorcích a při $1\,048\,576 = 2^{20}$ vzorcích.

Řešení:

Jak bylo výše uvedeno pracnost výpočtu DFT podle definičního vztahu je $P \cdot N^2$, podle algoritmu FFT $P \cdot N \cdot \log_2 N$, kde P je jednotka pracnosti a N počet vzorků. Protože nám jde o relativní zrychlení výpočtu, dostaneme požadovanou informaci z podílu obou pracností, tj.

$$K = \frac{P \cdot N^2}{P \cdot N \cdot \log_2 N} = \frac{N}{\log_2 N}.$$

Pro $N = 256$ dostáváme

$$K_{256} = \frac{N}{\log_2 N} = \frac{256}{8} = 32,$$

pro $N = 1024$ je

$$K_{1024} = \frac{N}{\log_2 N} = \frac{1024}{10} = 102,4$$

a konečně pro $N = 1\,048\,576$

$$K_{1024} = \frac{N}{\log_2 N} = \frac{1048576}{20} = 52428,8.$$

Pro 256 vzorků zrychlí algoritmus FFT výpočet frekvenčního spektra 32 krát, pro 1024 vzorků přibližně 100 krát a pro 1 048 576 vzorků více než $5 \cdot 10^4$ krát.

5. Rekonstrukce spojité funkce z navzorkované posloupnosti

Pro ty, kterým nedá spát, jak se z teoreticky nekonečné navzorkované posloupnosti může dostat zpět k spojité funkci, uvádíme jedno malé teoretické odvození.

Předpokládejme, že původní spojité funkce $x_a(t)$ měla frekvenčně omezené spektrum $X_a(f)$, tj. platí pro ni

$$X_a(f) = \begin{cases} X(f) & |f| \leq f_{vz}/2 \\ 0 & |f| > f_{vz}/2 \end{cases} \quad (5.1)$$

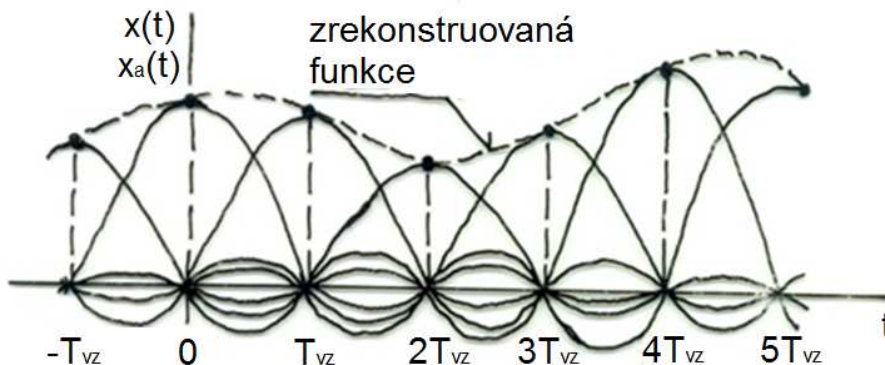
kde $X(f)$ je frekvenční spektrum dané posloupnosti. Protože víme, že navzorkovaná posloupnost je periodická s periodou danou vzorkovací frekvencí, zajímá nás pouze její jedna (první) perioda, pro kterou v rozsahu frekvencí $|f| \leq f_{vz}/2$ platí

$$X_a(f) = X(f) = T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi n T_{vz} f} \quad (5.2)$$

Potom pro původní funkci $x_a(t)$ je

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} X_a(f) \cdot e^{j2\pi f t} df = \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} \left[T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi n T_{vz} f} \right] e^{j2\pi f t} df = \\ &= T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} e^{j2\pi f (t - nT_{vz})} df = \left| \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \right| = \\ &= \frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \frac{e^{j2\pi (t - nT_{vz}) \cdot F/2} - e^{-j2\pi (t - nT_{vz}) \cdot F/2}}{j2\pi (t - nT_{vz})} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \text{Si} \left(\pi (t - nT_{vz}) \cdot \frac{1}{T_{vz}} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Co tento vztah říká? Původní funkce $x_a(t)$ je dána nekonečným součtem vzorkovacích funkcí, které procházejí každou hodnotou z nekonečného počtu vzorků navzorkované posloupnosti. Přesně tak, jak ukazuje obr.5.1.



Obr.5.1 Rekonstrukce navzorkované posloupnosti

