2 ÚVOD DO LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Ing. Radomír Perzina, Ph.D.

Lineární programování

- nebo také lineární optimalizace (anglicky „linear programming“ a „linear optimization“), je matematickou metodou pro optimalizaci lineární účelové funkce za předpokladu lineárních omezujících podmínek
- Lineární programování je speciálním případem matematického programování (matematické optimalizace), využívá matematické poznatky především z oblasti lineární algebry.

EKONOMICKÝ A MATEMATICKÝ MODEL ÚLOHY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

- Výrobce krmiv pro psy plánuje výrobu dvou typů krmných směsí, směs A a směs B. Na jeho výrobu má na dané období k dispozici 180 tun kuřecích granulí, 120 tun vlákniny a 80 tun granulí z hovězího masa. Směs A se vyrábí smícháním 50 % kuřecích granulí, 25 % vlákniny a 25 % granulí z hovězího masa, zatímco směs B tvoří pouze kuřecí granule a vláknina smíchané v poměru 1:1. Předpokládaný čistý zisk po odečtení nákladů souvisejících s výrobou je 30 000 Kč za 1 tunu směsi A a 40 000 Kč za 1 tunu směsi B. Kolik tun směsi A a B má firma vyrábět, když chce maximalizovat zisk z výroby? Jinak řečeno, jak má firma naplánovat výrobu, aby byl zisk maximální?

EKONOMICKÝ MODEL ÚLOHY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

- Slovně popsaný rozhodovací problém, jak je zadán v příkladu, je typickou podobou **ekonomického modelu úlohy lineárního programování**.
- V ekonomickém modelu jsou popsány jak cíle analýzy, tak podstatné údaje systému pro zajištění daných cílů.
- Tyto údaje zahrnují popis procesů, činitelů a také vztahy mezi procesy, činiteli a cílem.

Příklad - řešení

- **V ekonomickém modelu příkladu jsou definovány dva procesy – výroba dvou typů směsí – označme tyto procesy jako 1 pro výrobu směsi A a proces 2 pro výrobu směsi B. Pro každou se směsí potřebujeme určit množství (v tunách) vyráběných směsí. Protože toto množství neznáme, označíme si jej proměnnými x_1 a x_2.**

Celkový zisk

- Celkový zisk z produkce x_1 tun směsi A a x_2 tun směsi B lze vypočítat jako součet zisku ze směsi A, což je 30 000 x_1 a zisku ze směsi B, což je 40 000 x_2. Celkový zisk z produkce obou směsí lze tedy popsat lineární funkcí

$$z = 30\,000\, x_1 + 40\,000\, x_2$$

- Funkce z se nazývá **účelová (kriteriální) funkce** a její koeficienty se nazývají **cenové koeficienty**.

Příklad - řešení

- Pro přehlednost lze složení směsí a omezení komponent směsí zapsat do tabulky:

	A	B	Kapacita surovin (t)
Granule z kuřecího masa	0,5	0,5	180
Vláknina	0,25	0,5	120
Granule z hovězího masa	0,25	0	80
Zisk za 1 tunu	30000	40000	
Vyrobené množství	x_1	x_2	

Omezující podmínka 1 – omezení pro komponenty

- **Na výrobu jedné tuny směsi A se spotřebuje 0,5 tuny kuřecích granulí, na výrobu x_1 tun směsi A se jich spotřebuje $0{,}5x_1$. Podobně na výrobu jedné tuny směsi B se spotřebuje 0,5 tuny kuřecích granulí, na výrobu x_2 tun směsi B se jich spotřebuje 0,5 x_2. Množství kuřecích granulí je omezené – kapacita granulí je 180 tun. Musí proto platit omezení (nazýváme jej také omezující podmínka):**

Omezující podmínka 2 omezení pro komponenty

- **Pro výrobu jedné tuny směsi A se spotřebuje 0,25 tuny vlákniny, na výrobu x_1 tun směsi A se jí spotřebuje 0,25 x_1. Na výrobu jedné tuny směsi B se spotřebuje 0,5 tuny vlákniny, na výrobu x_2 tun směsi B se jí spotřebuje 0,5 x_2.**

Omezující podmínka 3 omezení pro komponenty

- **Na výrobu jedné tuny směsi A se spotřebuje 0,25 tuny granulí z hovězího masa, na výrobu x_1 tuny směsi A se jí spotřebuje 0,25 x_1. Směs B granule z hovězího masa neobsahuje. Omezující podmínka pro granule z hovězího masa neobsahuje proměnnou x_2, kapacita suroviny je 80 tun:**

Podmínky nezápornosti

- Kromě vlastních omezení obvykle matematické modely, založené na ekonomických modelech, obsahují také **podmínky nezápornosti**, protože nepředpokládáme, že podnik vyrábí záporné množství směsi A nebo B:

nebo také můžeme psát

Matematický model příkladu

$$\max(30\,000x_1 + 40\,000x_2)$$

za podmínek

$$0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 \leq 180$$

$$0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 \leq 120$$

$$0{,}25x_1 \qquad\qquad \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Omezující podmínky:

Vlastní omezení:

$$\begin{array}{rcl|l} 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 & \leq & 180 & \text{kuřecí g.} \\ 0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 & \leq & 120 & \text{vláknina} \\ 0{,}25x_1 & \leq & 80 & \text{hovězí g.} \end{array}$$

3 zdroje (činitelé, kompo-nenty)

Strukturní koeficienty

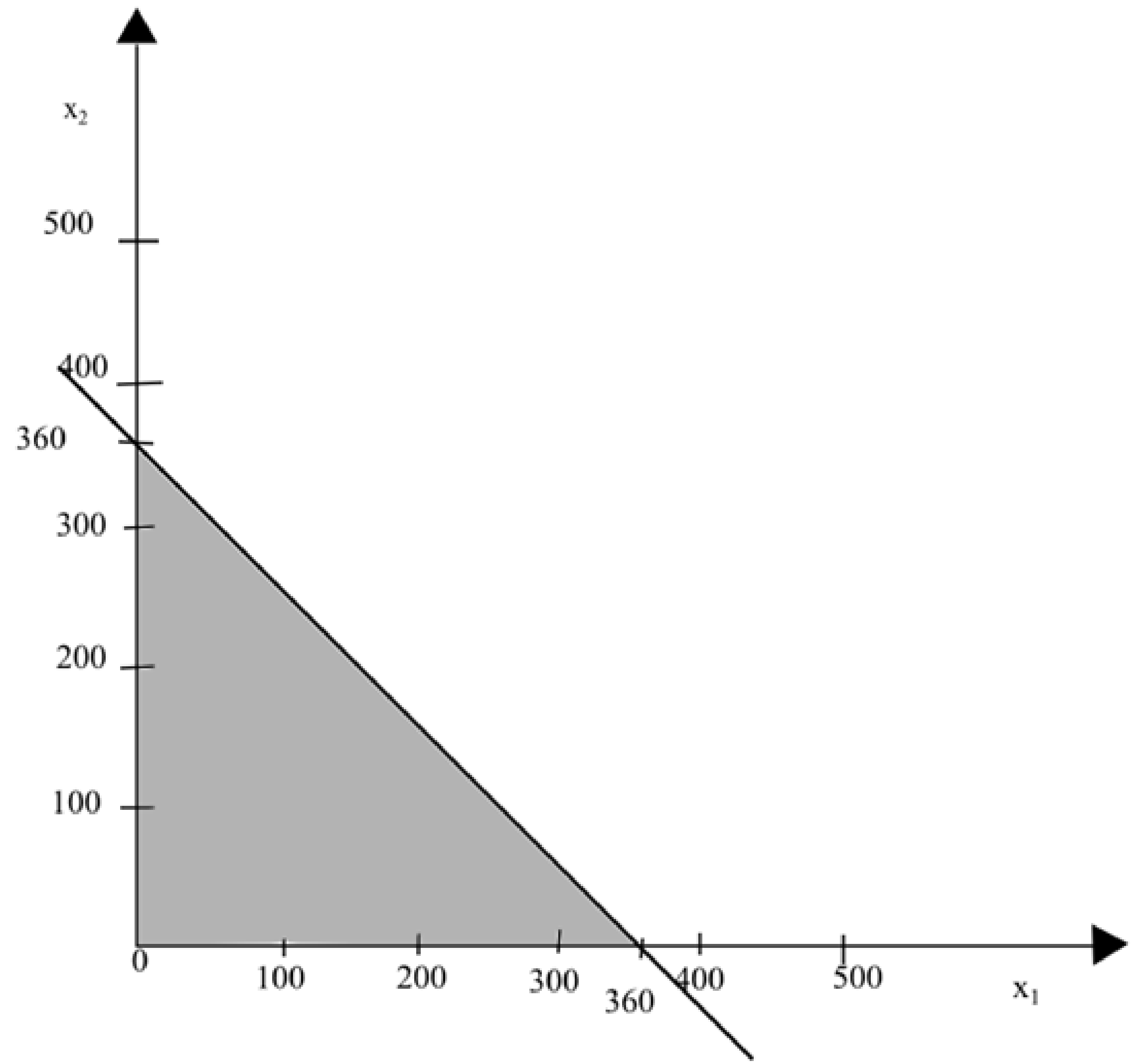
Kapacitní koeficienty (pravé strany)

Podmínky nezápornosti: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

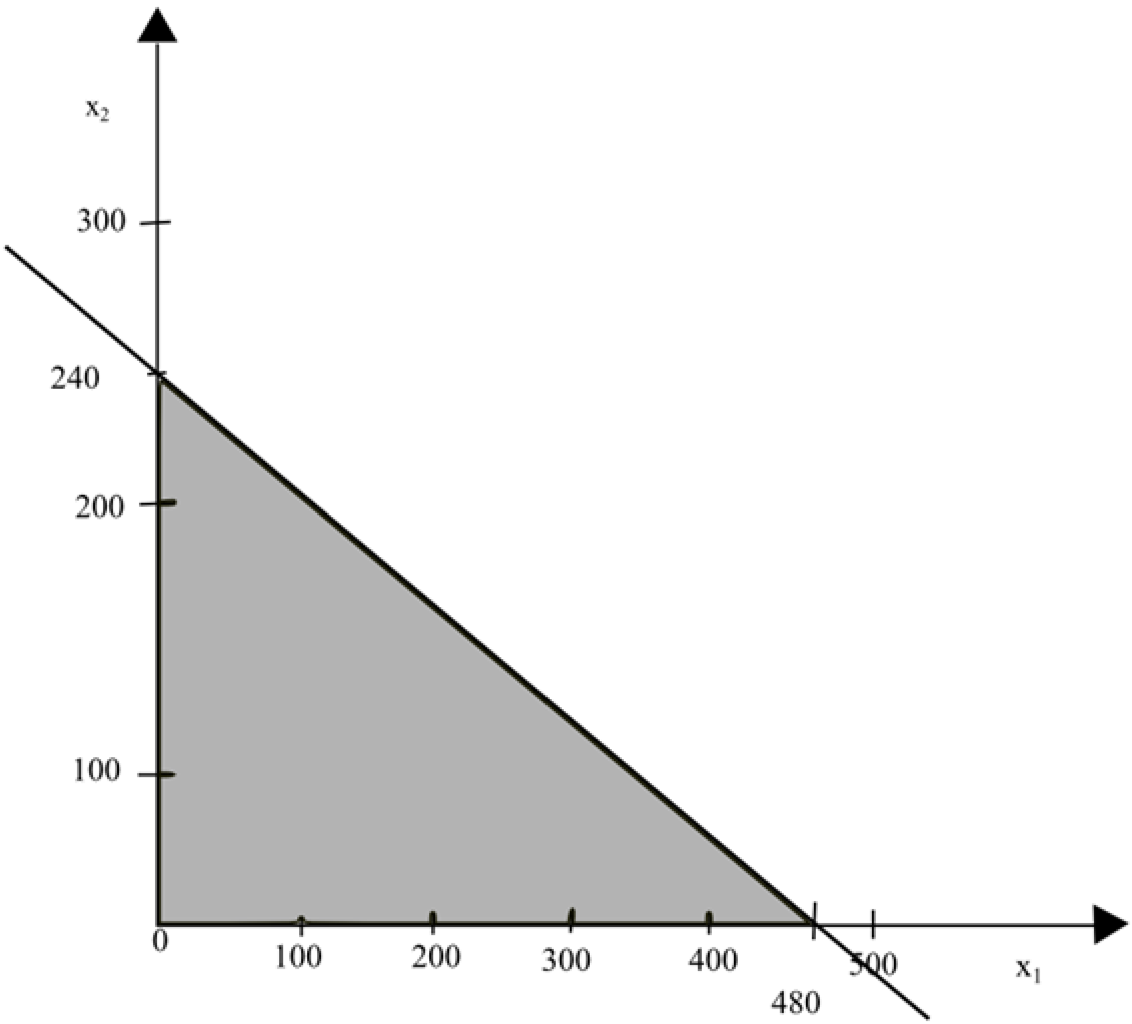
Grafické řešení

- **Přípustné řešení** úlohy lineárního programování je takové řešení, tedy takový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, který vyhovuje všem omezujícím podmínkám úlohy. Každé jiné řešení nazveme **nepřípustné řešení**.

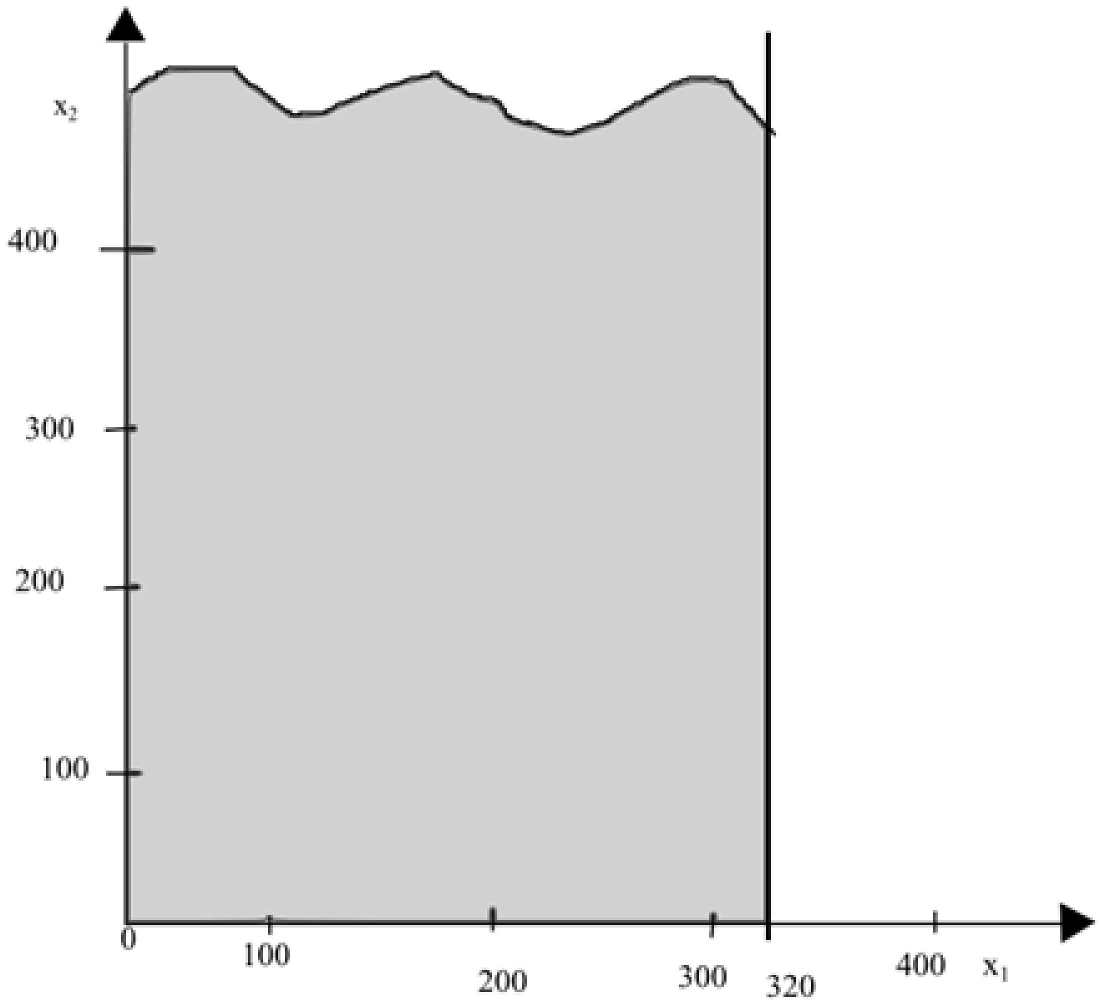
První vlastní omezení



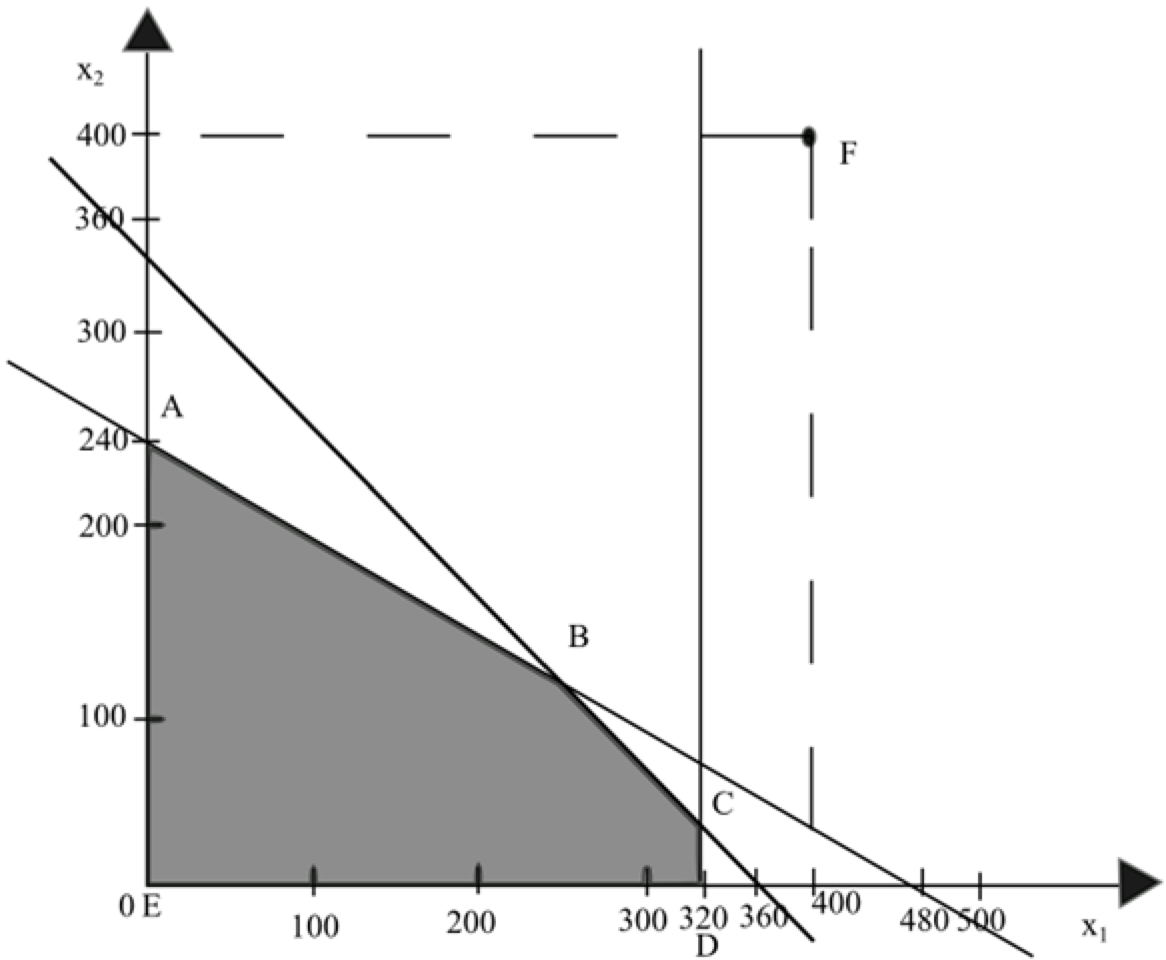
Druhé vlastní omezení



Třetí vlastní omezení



Množina přípustných řešení



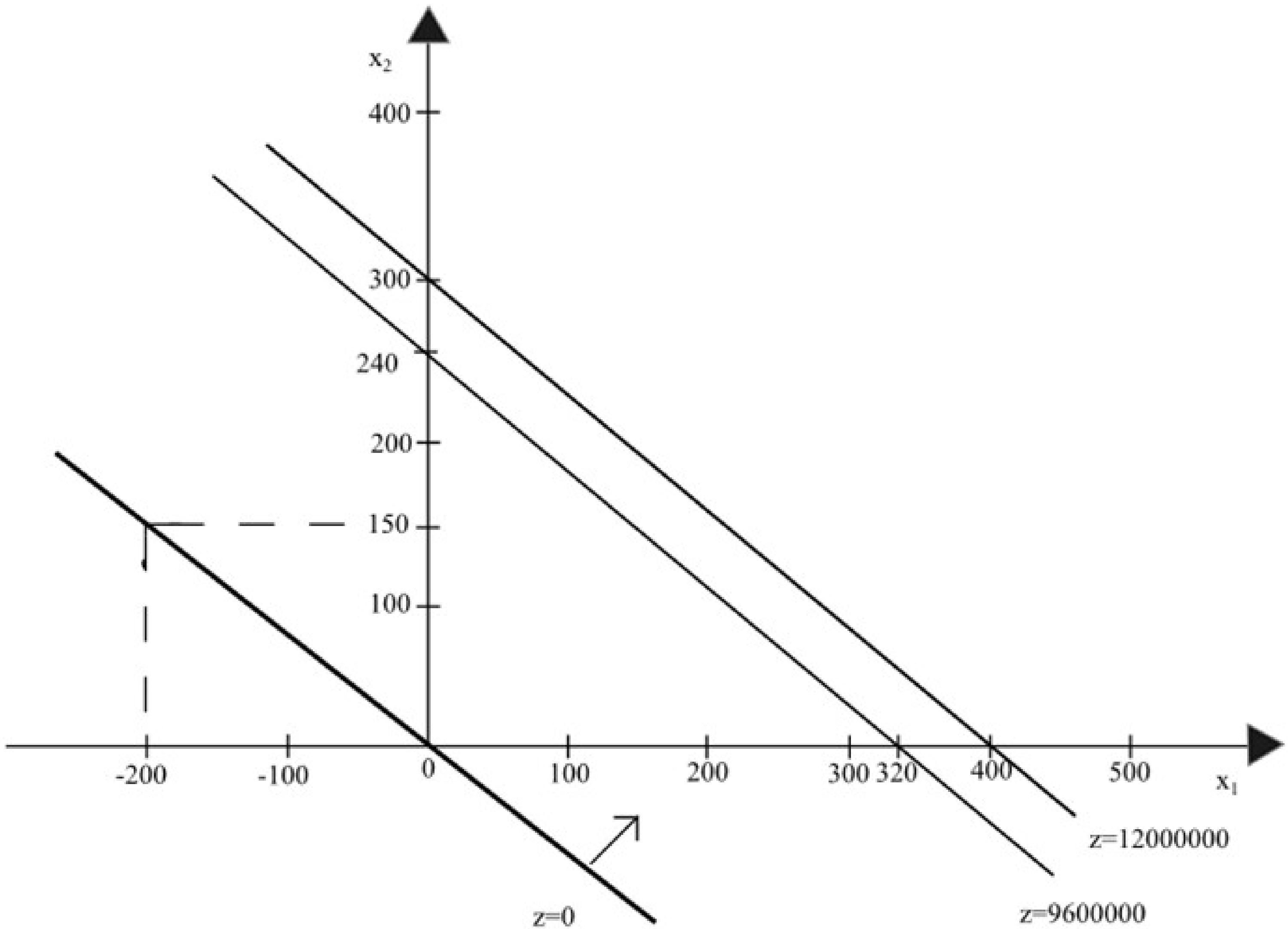
Hranice množiny přípustných řešení

- Bod A má souřadnice [0, 240]. Hodnota účelové funkce v tomto bodě je
- Bod B má souřadnice [240, 120].
- Bod C má souřadnice [320, 40].
- Bod D má souřadnice [320, 0].
- Bod E má souřadnice [0, 0].

Účelová funkce

- Pro grafické nalezení optimálního řešení je důležité přesně nakreslit účelovou funkci a pak posunutím účelové funkce nalézt optimální bod (maximum nebo minimum). V našem případě hledáme maximum účelové funkce vyjádřené rovnicí

Grafické znázornění účelové funkce



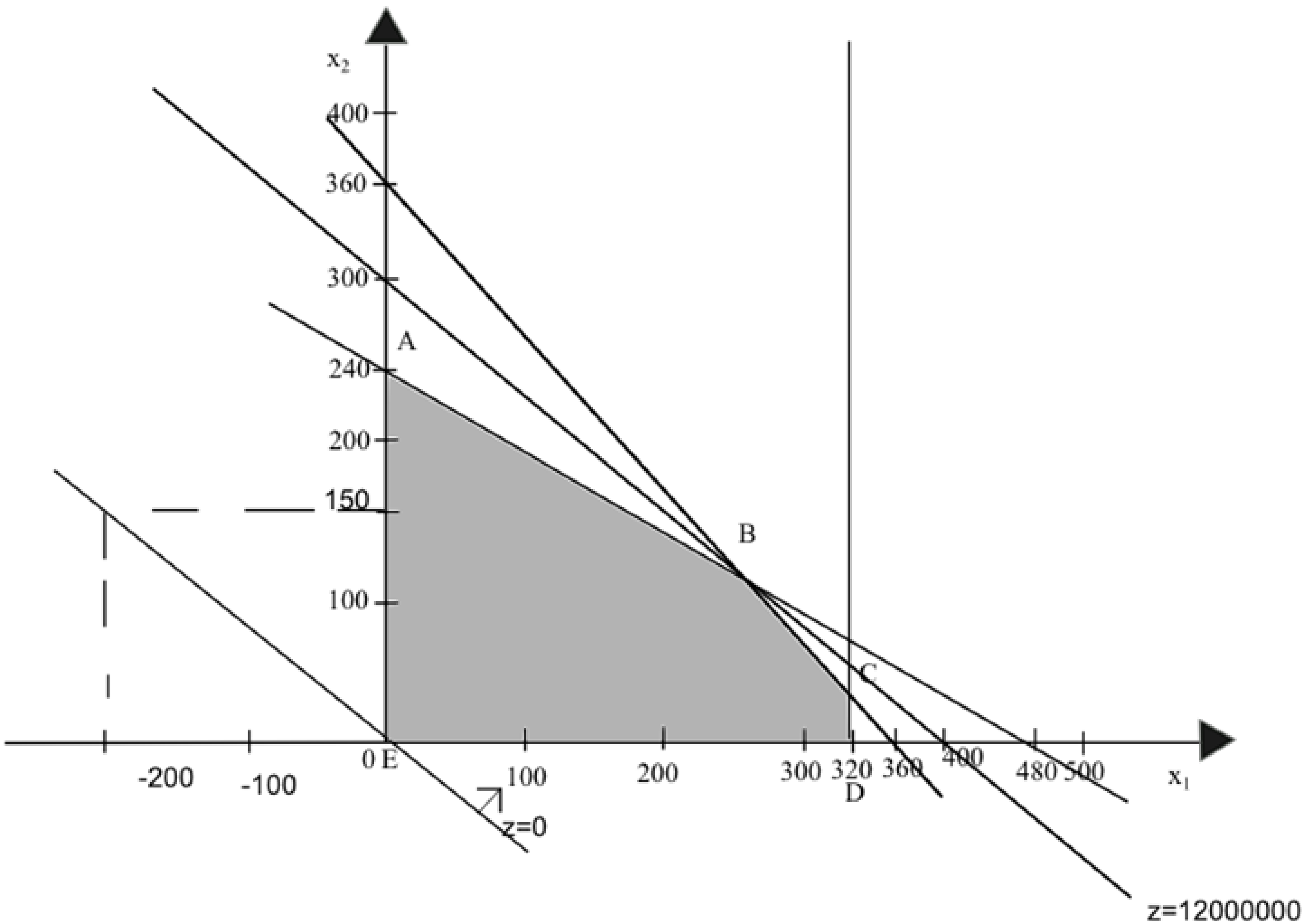
Optimální řešení

- **Optimální řešení** úlohy lineárního programování je takové přípustné řešení, ve kterém nabývá účelová funkce svého optima (maxima, minima nebo jiné hodnoty dle zadání).

Hledání maxima

- znázorníme množinu všech přípustných řešení,
- do stejného obrázku znázorníme hodnotu účelové funkce pro libovolně zvolenou hodnotu (například z=0),
- účelovou funkci rovnoběžně posouváme tak, aby její hodnota byla co nejvyšší a současně aby alespoň jeden z bodů množiny přípustných řešení ležel na grafu účelové funkce.

Optimální řešení



Příklad 2

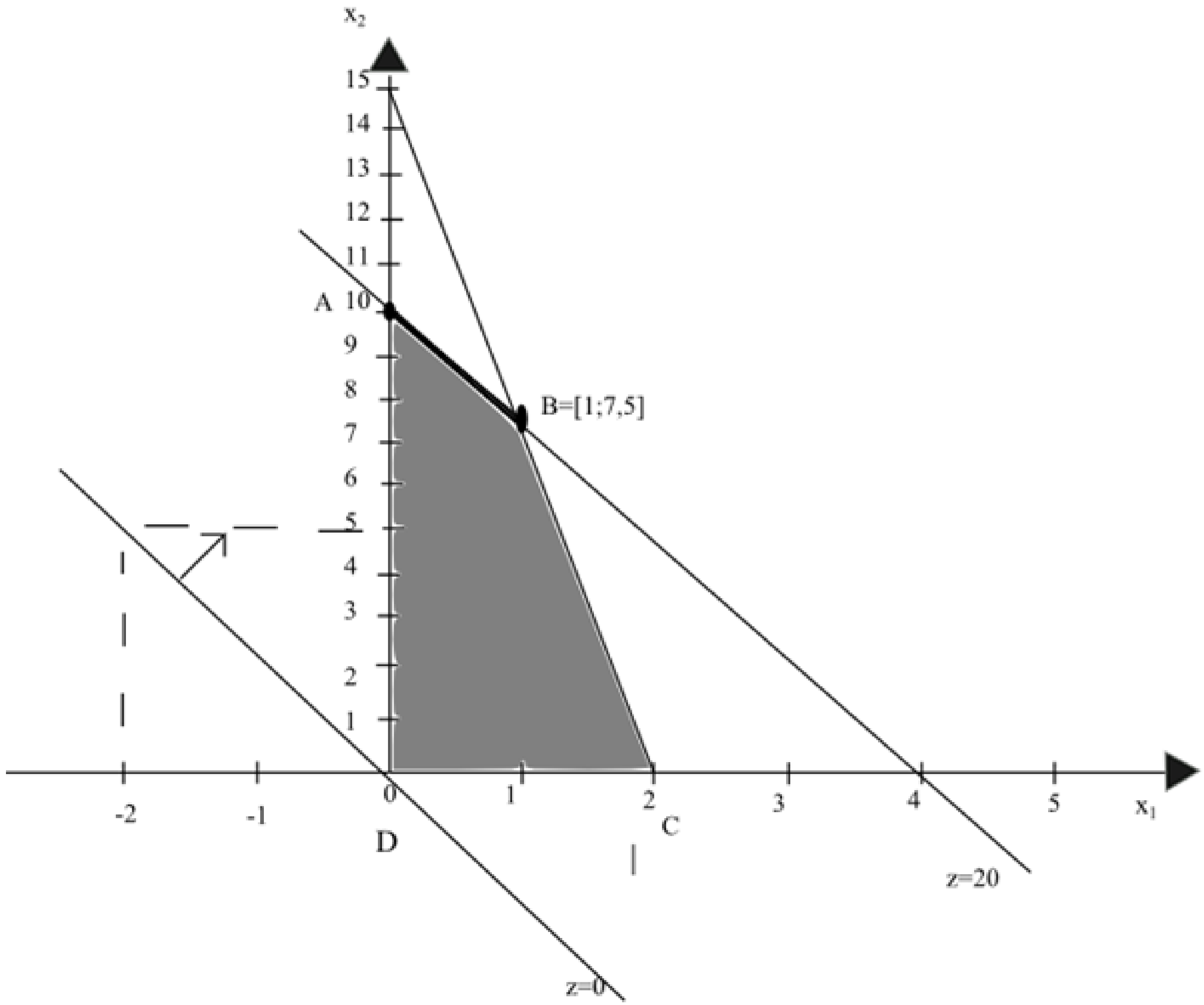
- **Najděte grafickou metodou optimální řešení následujícího maximalizačního problému:**

$$\max(5x_1 + 2x_2)$$

za podmínek

$$15x_1 + 2x_2 \leq 30$$
$$10x_1 + 4x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Příklad 2 - řešení



Příklad 3

- **Grafickou metodou nalezněte optimální řešení následujícího maximalizačního problému:**

$$\max(5x_1 + 2x_2)$$

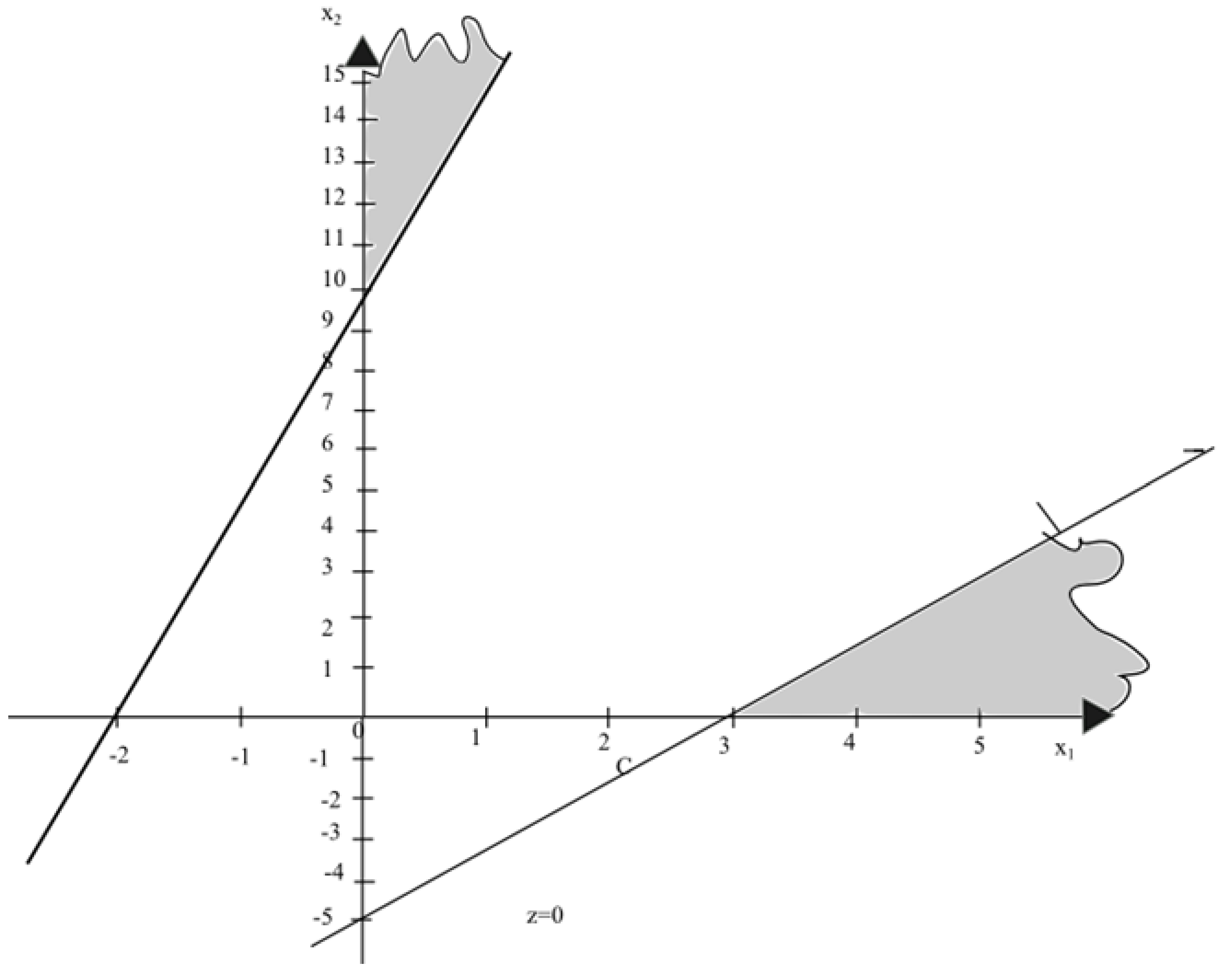
za podmínek

$$-10x_1 + 2x_2 \geq 20$$

$$10x_1 - 6x_2 \geq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Příklad 3 - řešení



Příklad 4

- **Grafickou metodou nalezněte optimální řešení následujícího maximalizačního problému:**

$$\max(5x_1 + 2x_2)$$

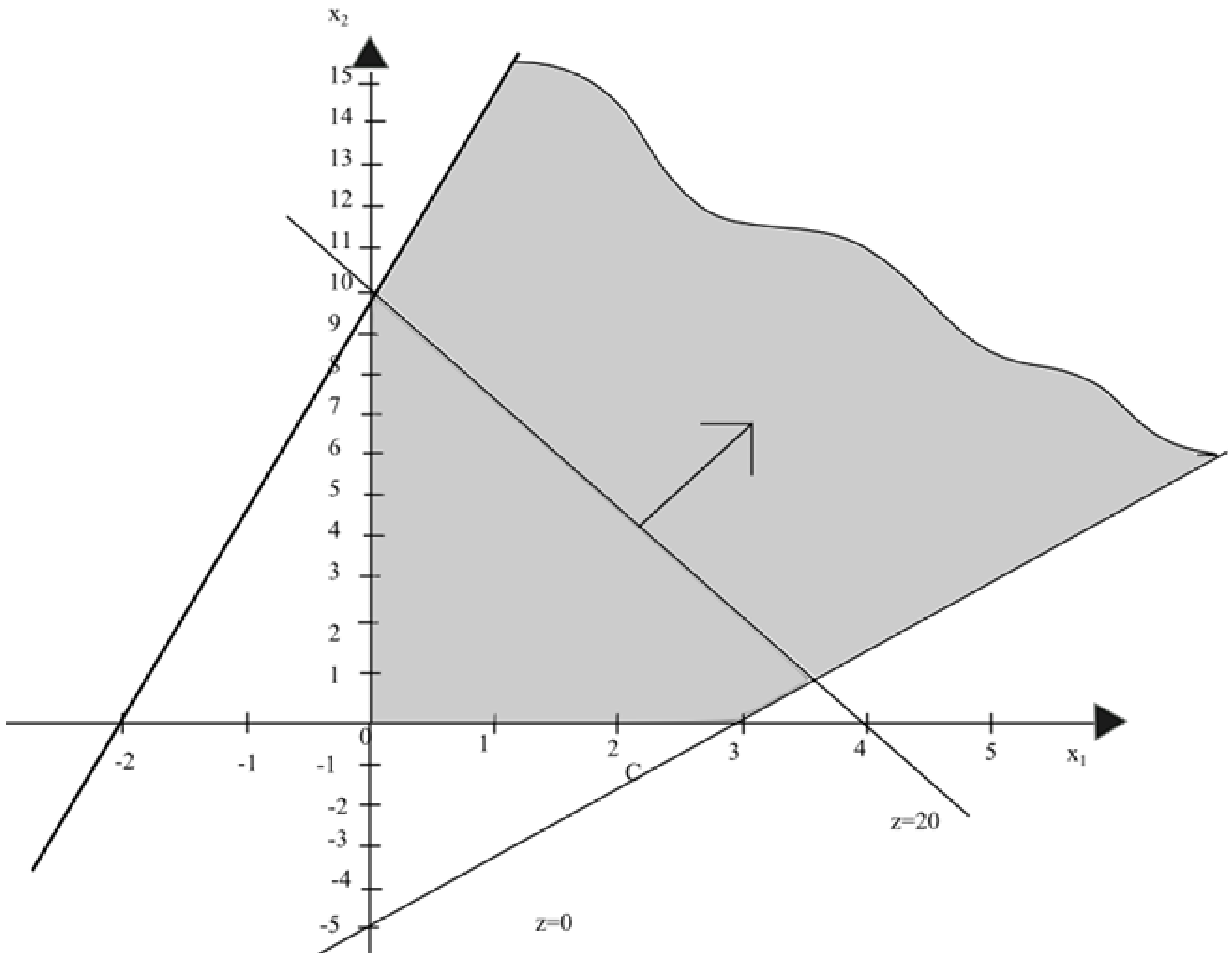
za podmínek

$$-10x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$10x_1 - 6x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Příklad 4 - řešení



Děkuji za pozornost