Aufgabe 1

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, und es seien $T_n, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, für $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $(T_n)_n$ in der schwachen Operatortopologie gegen T konvergiert.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante C, so dass $\|T_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: 1. Wir zeigen zuerst, dass für jedes $x \in \mathcal{H}$ die Menge $\{T_n(x) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Sei also $x_0 \in \mathcal{H}$ gegeben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das lineare Funktional $\kappa(T_n(x_0)) \in \mathcal{H}^*$, welches gegeben ist durch

$$\kappa(T_n(x_0))(y) = \langle T_n(x_0), y\rangle. \quad (y \in \mathcal{H})$$

Für jedes $y \in \mathcal{H}$ gilt

$$\kappa(T_n(x_0))(y) = \langle T_n(x_0), y\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle T(x_0), y\rangle.$$

Es folgt, dass die Menge $\{\kappa(T_n(x_0)) \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}^*$ punktweise beschränkt ist, d.h. für jedes $y \in \mathcal{H}$ gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\kappa(T_n(x_0))(y)\| < \infty.$$

Wir wenden nun das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit an und erhalten, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\kappa(T_n(x_0))\| < \infty.$$

Wir haben $\|T_n(x_0)\| = \|\kappa(T_n(x_0))\|$ für jedes n, und daher

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x_0)\| < \infty.$$

2. Es folgt aus Teil 1, dass die Menge $\{T_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ punktweise beschränkt ist. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

Es gibt also eine Konstante C, so dass wie gewünscht $\|T_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie: Die Folge der adjungierten Operatoren $(T_n^*)_n$ konvergiert in der schwachen Operatortopologie gegen T^*.

Lösung: Es seien $x, y \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\langle y, T_n^*(x)\rangle = \langle T_n(y), x\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle T(y), x\rangle = \langle y, T^*(x)\rangle.$$

Das bedeutet, dass $(T_n^*)_n$ wie gewünscht in der schwachen Operatortopologie gegen T^* konvergiert.

(c) Zeigen Sie: Für jeden Operator $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvergiert die Folge $(ST_n)_n$ in der schwachen Operatortopologie gegen ST.

Lösung: Es seien $x, y \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\langle y, ST_n(x)\rangle = \langle S^*(y), T_n(x)\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle S^*(y), T(x)\rangle = \langle y, ST(x)\rangle.$$

Das bedeutet, dass $(ST_n^*)_n$ wie gewünscht in der schwachen Operatortopologie gegen ST^* konvergiert.

Aufgabe 2

Es sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, und es sei $f\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ eine stetige, hermitesche Form. Zeigen Sie, dass dann ein beschränkter hermitescher Operator $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert, so dass $f(x,y)=\langle A(x),y\rangle$ für alle $x,y\in\mathcal{H}$. Ist A eindeutig bestimmt?

Lösung: 1. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Angenommen es gibt zwei Operatoren A und B in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, so dass

$$\langle A(x),y\rangle = f(x,y) = \langle B(x),y\rangle,$$

für alle $x,y\in\mathcal{H}$. Es folgt, dass

$$\langle A(x)-B(x),y\rangle = 0,$$

für alle $x,y\in\mathcal{H}$. Insbesondere gilt für beliebiges $x\in\mathcal{H}$ und $y=A(x)-B(x)$, dass

$$\|A(x)-B(x)\|^2 = \langle A(x)-B(x),y\rangle = 0,$$

und daher $A(x)=B(x)$. Es folgt wie gewünscht, dass $A=B$.

2. Wir zeigen nun die Existenz von A. Es sei $x\in\mathcal{H}$. Wir betrachten die Abbildung

$$F_x\colon \mathcal{H}\to(H),\quad y\mapsto f(x,y).$$

Da f stetig und linear in der zweiten Kompontente ist, folgt, dass $F_x\in\mathcal{H}^*$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer gibt es daher ein eindeutig bestimmtes Element z_x in $\mathcal{H}$ mit $\|z_x\|=\|F_x\|$, so dass

$$F_x(y)=\langle z_x,y\rangle$$

für alle $y\in\mathcal{H}$.

Wir definieren nun die Abbildung $A\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ indem wir x in $\mathcal{H}$ auf $A(x):=z_x$ abbilden. Nach Konstruktion gilt dann

$$f(x,y)=F_x(y)=\langle z_x,y\rangle=\langle A(x),y\rangle,$$

für alle $x,y\in\mathcal{H}$, und $A(x)$ ist eindeutig durch die Gültigkeit dieser Formel für alle $y\in\mathcal{H}$ bestimmt.

Um zu zeigen, dass A linear ist, seien $x_1,x_2\in\mathcal{H}$ und $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ gegeben. Für jedes $y\in\mathcal{H}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\langle A(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2),y\rangle &= f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)\\ &= \bar\lambda_1 f(x_1,y)+\bar\lambda_2 f(x_2,y)\\ &= \bar\lambda_1\langle A(x_1),y\rangle+\bar\lambda_2\langle A(x_2),y\rangle\\ &= \langle\lambda_1A(x_1)+\lambda_2A(x_2),y\rangle.\end{aligned}$$

Es folgt wie gewünscht, dass $A(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1A(x_1)+\lambda_2A(x_2)$. Da f beschränkt ist, folgt dass $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Für alle $x,y\in\mathcal{H}$ gilt:

$$\langle A^*(x),y\rangle=\langle x,A(y)\rangle=\overline{\langle A(y),x\rangle}=\overline{f(y,x)}=f(x,y)=\langle A(x),y\rangle.$$

Es folgt wie gewünscht, dass $A = A^*$.

Aufgabe 3

Es sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, und es sei $S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ein kompakter Operator.

(a) Wir nehmen zunächst zusätzlich an, dass S selbstadjungiert ist. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Operatoren $S_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit endlichem Rang gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} \|S - S_n\| = 0$.

Lösung: Nach dem Spektralsatz gibt es eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ und eine Nullfolge $(\lambda_k)_k$ in $\mathbb{K}$, so dass $S(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \langle e_k, x\rangle e_k$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Es sei P_n die orthogonale Projektion auf den Teilraum, der von den Basiselementen $\{e_0, \ldots, e_n\}$ aufgespannt wird. Das heißt, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$. Wir haben:

$$
\begin{aligned}
\|S - P_nS\| &= \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{k\geq n+1} \lambda_k \langle e_k, x\rangle e_k \right\| \\
&= \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{k\geq n+1} |\lambda_k \langle e_k, x\rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \left(\sup_{k\geq n+1} |\lambda_k| \right) \left(\sum_{k\geq n+1} \langle e_k, x\rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sup_{k\geq n+1} |\lambda_k| \right) \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{k\geq 0} \langle e_k, x\rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sup_{k\geq n+1} |\lambda_k|.
\end{aligned}
$$

Da $(\lambda_n)_n$ eine Nullfolge ist, folgt wie gewünscht, dass $\lim_{n\to\infty} \|S - P_nS\| = 0$. Es ist außerdem klar, dass $S_n := P_nS$ endlichen Rang besitzt.

(b) Zeigen Sie die Aussage von (a) ohne die Annahme, dass S selbstadjungiert ist.

Lösung: Wir betrachten den kompakten, selbstadjungierten Operator $T = SS^*$. Nach Teil (a) gibt es eine Folge $(P_n)_n$ von orthogonale Projektionen mit endlichem Rang, so dass $\lim_{n\to\infty} \|T - P_nT\| = 0$. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\|S - P_nS\|^2 &= \|(S - P_nS)(S - P_nS)^*\| \\
&= \|(SS^* - P_nSS^* - SS^*P_n + P_nSS^*P_n\| \\
&= \|(T - P_nT) - (T - P_nT)P_n\| \\
&\leq \|(T - P_nT)\| + \|(T - P_nT)\| \cdot \|P_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

Jeder Operator $P_n S$ hat endlichen Rang.

(c) Es sei $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Operator mit endlichem Rang. Zeigen Sie, dass F^* auch endlichen Rang hat. Folgern Sie, dass der adjungierte Operator eines kompakten Operators wieder kompakt ist.

Lösung: Es sei $\mathcal{H}_0$ das Bild von F. Da F endlichen Rang besitzt, ist $\mathcal{H}_0$ ein endlich dimensionaler Hilbertraum. Wir wählen eine endliche Orthonormalbasis $(e_k)_{k=0,\ldots,n}$ für $\mathcal{H}_0$. Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt dann: Falls $\langle F(x), e_k\rangle = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$, dann gilt $F(x) = 0$.

Wir zeigen, dass das Bild von F^* im Unterraum enthalten ist, der von den Vektoren $F^*(e_k)$, $k = 0, \ldots, n$, aufgespannt wird. Sei dazu $x \in \mathcal{H}$, so dass x orthogonal zu $F^*(e_k)$ ist, für jedes $k = 0, \ldots, n$. Wir müssen zeigen, dass dann $x = 0$.

Wir haben

$$\langle F(x), e_k\rangle = \langle x, F^*(e_k)\rangle = 0,$$

für alle $k = 0, \ldots, n$, und daher wie gewünscht $F(x) = 0$. Es folgt, dass F^* endlichen Rang besitzt.

Sei nun $S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ein kompakter Operator. Nach Teil (b) gibt es eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Operatoren $S_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit endlichem Rang, so dass $\lim_{n\to\infty} \|S - S_n\| = 0$. Dann gilt:

$$\|S^* - S_n^*\| = \|S - S_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wir haben gezeigt, dass S_n^* für jedes n endlichen Rang besitzt. Das heißt, dass S^* der Limes von Operatoren mit endlichem Rang ist. Da jeder Operator mit endlichem Rang kompakt ist, und da die Menge der kompakten Operatoren abgeschlossen ist, folgt wie gewünscht, dass S^* kompakt ist.