J. Morley

Vorbemerkung des Uebersetzers.

Der Aufforderung des Verfassers und Verlegers, das vorliegende Buch zu übersetzen, bin ich um so lieber nachgekommen, weil ein Buch ähnlichen Inhalts in Deutschland nicht existirt. Ein flüchtiger Blick in dasselbe wird genügen um sich zu überzeugen, dass man es hier mit einer gewöhnlichen Aufgabensammlung nicht zu thun hat; überall tritt die Methode in den Vordergrund, uud wie fruchtbar diese Methoden sind, zeigen z. B. die Auflösungen der Aufgaben 200, 201, 403 und 404 (Malfattisches Problem) ohne Anwendung der neueren Geometrie, eine Reihe von schönen Aufgaben des zweiten Kapitels, und namentlich das dritte Kapitel. Ich darf daher meinen Fach- und Berufsgenossen ein eingehendes Studium des Buches empfehlen; anregende und nutzbringende Einflüsse überhaupt, so wie im Besonderen auf den Unterricht in der Geometrie, werden nicht ausbleiben.

Noch eine Bemerkung muss ich mir in Betreff einzelner zur Anwendung gekommener Ausdrücke gestatten. Statt Schwerpunktstransversale, wofür auch von Manchen das vieldeutige „Mittellinie" gebraucht wird, habe ich das Wort Mediane gewählt; es ist kurz und kommt auch schon in mehreren deutschen Büchern (wenn auch eingeklammert) vor. Heutigen Tages ist es üblich geworden, umbeschriebene und einbeschriebene Figuren zu sagen. Aus Gründen der Consequenz habe ich deshalb stets gesagt: In einen Kreis, Dreieck etc. eine Figur zu beschreiben.

Kiel, im Mai 1879.

Der Uebersetzer.

Eine englisch-amerikanische Ausgabe (London: Low & Co., New York: Harpers Brothers.) und eine französische Ausgabe der „Methoden und Theorien" sind gleichzeitig mit der deutschen erschienen. — Uebersetzungen in andere Sprachen behalten sich Verfasser und Verleger vor.

Früher erschien von demselben Verfasser:

Theorie der algebraischen Gleichungen.

Kopenhagen 1878. Preis 10 RM.

Ferner erschien in demselben Verlage:

Malthe-Bruun & Crone

Quatre modèles

représentant des surfaces développables

avec des renseignements

sur la

construction des modèles et sur les singularités qu'ils représentent

Avec quelques remarques

sur les surfaces développables et sur l'utilité des modèles

par

Mr. le Docteur H. G. Zeuthen

Kopenhagen 1877. Preis 5 RM.

Methoden und Theorien.

Methoden und Theorien

zur

Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben,

angewandt auf etwa 400 Aufgaben

von

ius

Dr. Jul. Petersen.

Docent an der polytechnischen Schule in Kopenhagen,
Mitglied der königlich dänischen Gesellschaft der Wissenschaften.

Unter Mitwirkung des Verfassers nach der zweiten Auflage des Originals
ins Deutsche übertragen

von

Dr. R. von Fischer-Benzon,

Oberlehrer am Gymnasium in Kiel.

Kopenhagen.

Andr. Fred. Høst & Sohn,

Universitätsbuchhändler,

Kommissionäre d. kgl. dän. Gesellschaft der Wissenschaften.

1879.

Bianco Lunos Buchdruckerei.

Vorwort des Verfassers.

Bereits mehrere hundert Jahre vor Christi Geburt nahm die Geometrie einen sehr hohen Standpunkt ein. Da die Algebra noch nicht die Entwickelung erfahren hatte, durch welche sie später der Geometrie eine so wesentliche Hülfe geleistet hat, waren die Alten fast ausschliesslich auf das rein geometrische Verfahren angewiesen, und es war deshalb natürlich, dass die Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben eine bedeutende Rolle in ihren Schriften spielen musste. Obgleich die Mathematiker bis in die neueste Zeit Interesse für diesen Zweig der Mathematik behalten haben, ist die Entwickelung der Mittel, welche man für die Behandlung der Aufgaben hat, eine sehr geringe gewesen. Apollonius hätte z. B. ebenso gut wie Steiner das Malfattische Problem lösen können, wenn er es gekannt hätte.

Die Auflösung von Constructionsaufgaben wird deshalb von vielen als eine Art Räthselrathen betrachtet, welches nur Einzelnen von der Natur besonders Begünstigten gelingt. Die Folge hiervon ist gewesen, dass die Constructionsaufgaben zum Theil nur wenig Eingang in die Schulen gefunden haben, wo sie doch vor allen anderen hingehören, denn keine anderen Aufgaben tragen in so hohem Grade dazu bei, das Beobachtungs- und Combinationsvermögen zu schärfen und das Nachdenken klar und logisch zu machen, und keine Art von Aufgaben wirkt in so hohem Grade anziehend auf den, der sich damit beschäftigt, wie diese.

Das vorliegende Buch ist nun ein Versuch, die Studirenden eine Constructionsaufgabe anfassen zu lehren. Es ist auf die Weise entstanden, dass ich eine grosse Menge von Aufgaben gelöst habe, von denen viele original sind, der grösste Theil aber aus den vielen existirenden Sammlungen entnommen ist. Ich habe dann nach der Lösung einer Aufgabe versucht, die Idee zu finden, welche zur Lösung führte, und die Gedankenbewegung zu analysiren, welche zu dieser Idee führte, um daraus mehr oder weniger allgemeine Methoden zu entnehmen. Daraus folgt, dass ich nur selten die Lösungen Anderer habe benutzen können, da man nur selten aus einer solchen ersehen kann, auf welchem Wege der Verfasser sie gefunden hat. Indessen folgt es von selbst, dass meine Lösungen, namentlich bei leichteren Aufgaben, oft mit denen Anderer übereinstimmen. Vielleicht wird man finden, dass von einigen Aufgaben leichtere Lösungen als die meinigen existiren; hierzu muss ich bemerken, dass ich immer eine Auflösung, deren Idee einfach und deutlich war, einer anderen vorgezogen habe, welche mehr das Gepräge des Zufalls trägt, selbst wenn die practische Ausführung der letzteren vielleicht etwas leichter ist.

Da also Methoden mein Ziel sind, sind die Lösungen nur angedeutet, während eine vollständigere Entwickelung und Discussion dem Leser oder Lehrer überlassen bleibt. Von Figuren sind nur wenige beigegeben, da man doch am leichtesten Ueberblick über die Figur erhält, wenn man sie entstehen sieht. Im Allgemeinen ist es nicht meine Meinung, dass man mein Buch durchlesen, sondern dass man es durcharbeiten soll.

„Methoden und Theorien etc.“ erschienen zum ersten Male in dänischer Sprache 1866. Das Buch hat also eine Probe durchgemacht, und ich darf sagen, dass es dieselbe bestanden hat. Es liegt viele Beweise dafür vor, dass es einen bedeutenden Einfluss auf das Studium der Geometrie gehabt hat, nicht nur in Dänemark, sondern auch in den beiden anderen nordischen Reichen. Hierin liegt auch der Grund dafür, dass ich es wage, dasselbe einem grösseren Publicum vorzulegen. Ich hoffe, dass man es auch dort brauchbar finden wird, theils als Hülfsmittel für den Unterricht in der elementaren Geometrie, theils als Vorbereitung auf das Studium der neueren Geometrie.

Kopenhagen 1879.

Julius Petersen.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Zusätze.

Einleitung.

Die Sätze der Geometrie treten in zwiefacher Form auf, indem sie entweder ausdrücken, dass eine Figur, welche auf eine gewisse vorgeschriebene Art gezeichnet ist, gewissen Bedingungen genügt, oder indem sie fordern, dass eine Figur in solcher Weise gezeichnet (construirt) werden soll, dass sie gewisse gegebene Bedingungen erfüllt. Im ersten Falle hat man den Lehrsatz, im zweiten die Constructionsaufgabe.

Bei der Auflösung von Constructionsaufgaben muss man, da dieselbe durch Zeichnen ausgeführt wird, einige Apparate anwenden; dem Herkommen gemäss bedient man sich nur des Lineals, mit Hülfe dessen man eine gerade Linie durch zwei gegebene Punkte ziehen kann, und des Zirkels, mittelst dessen man um einen gegebenen Mittelpunkt mit gegebenem Radius einen Kreis beschreiben kann. Irgend eine beliebige Auflösung wird deshalb aus diesen beiden Operationen zusammengesetzt sein.

Diese Einschränkung bringt es mit sich, dass viele anscheinend sogar einfache Aufgaben sich nicht lösen lassen (die Dreitheilung des Winkels, Quadratur des Kreises u. s. w.); allgemein lässt sich nachweisen, dass dies der Fall mit solchen Aufgaben ist, deren Berechnung auf Gleichungen führt, die sich nicht auf den ersten oder zweiten Grad reduciren lassen.

Eine Aufgabe ist überbestimmt, wenn mehr Bedingungen für die gesuchte Figur gestellt sind, als für deren Bestimmung nothwendig sind, sie ist bestimmt, wenn sie eine endliche, unbestimmt, wenn sie eine unendliche Anzahl von Lösungen hat.

Bei der Auflösung der bestimmten Aufgabe sind anzugeben:

Die Ausführung der Construction.

Der Beweis für die Richtigkeit derselben.

Eine Discussion, d. h. eine Angabe der Grenzen, zwischen denen die gegebenen Grössen liegen müssen, damit die Aufgabe 0, 1. 2 u. s. w. Lösungen erhält.

Unter den unbestimmten Aufgaben haben diejenigen ein besonderes Interesse, bei denen eine hinzugefügte Bedingung die Aufgabe bestimmt machen würde. Obgleich eine solche Aufgabe unendlich viele Lösungen hat, wird derselben doch nicht von jeder Figur genügt, sondern alle ihre Lösungen gruppiren sich auf eine durch die gegebenen Bedingungen bestimmte Weise. So ist ein Punkt bestimmt, sobald er zwei gegebene Bedingungen erfüllen soll; wird aber nur eine Bedingung gestellt, so wird er unbestimmt, aber alle Punkte, welche diese erfüllen, werden auf einer geraden oder krummen Linie liegen; diese heisst der *geometrische Ort* für die Punkte, welche diese Bedingung erfüllen. Auf dieselbe Weise geht es mit einer Figur, zu deren Bestimmung es an einer Bedingung fehlt, indem im Allgemeinen dasselbe mit jedem Punkte der Figur der Fall sein wird, so dass jeder von diesen seinen geometrischen Ort erhält.

Eine vollkommen allgemeine Methode für die Auflösung geometrischer Aufgaben hat man in der analytischen Geometrie. Es folgt indessen von selbst, dass man, wenn man eine Methode auf die verschiedensten Aufgaben anwenden will, sehr häufig grosse Umwege machen muss. So betrachtet man in der analytischen Geometrie den Abstand der Punkte von einem Paar Axen, welche im Allgemeinen nicht das geringste mit der Aufgabe zu thun haben; ausserdem kommt man bei Anwendung dieser Methode leicht dazu mechanisch zu rechnen, da man nicht immer der geometrischen Bedeutung der erhaltenen Gleichungen folgen kann, und diese werden ausserdem, und das ist vielleicht der gewichtigste Einwand, leicht so complicirt, dass ihre Auflösung practisch unausführbar wird.

In Folge dieser Schwierigkeiten bei der directen Anwendung von Descartes' Geometrie hat man in neuerer Zeit eine Menge specieller Methoden (durch verschiedene Coordinatensysteme u. s. w.) angegeben, wodurch die Auflösung der einzelnen Aufgabe natürlicher und eleganter wird, aber die Schwierigkeit wird nun auf die Wahl der Methode übertragen. Man hat dadurch einen Uebergang von dem algebraischen zu dem rein geometrischen Verfahren gebildet. Durch letzteres sucht man die Auflösung der Aufgabe dadurch abzuleiten, dass man auf geometrischem Wege untersucht, welche Verbindungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken der Figur statt finden. Um diese Untersuchungen zu erleichtern beginnt man allemal damit, *eine Figur zu zeichnen*, welche die gesuchte Lösung darstellt, und es kommt nun darauf an, diese mit Hülfe der aus der Geometrie bekannten Sätze zu untersuchen.

Zeigt es sich nun, was bei einer grossen Menge einfacherer Aufgaben der Fall ist, dass Alles auf die Bestimmung eines unbekannten Punktes ankommt, so ergiebt sich die Methode, welche man anzuwenden hat, unmittelbar aus dem Vorhergehenden:

Man betrachte die beiden Bedingungen, welche der gesuchte Punkt erfüllen soll, jede für sich; jeder derselben wird dann ein geometrischer Ort entsprechen, und sind diese gerade Linien oder Kreise, ist die Aufgabe gelöst, denn da der Punkt auf beiden liegen soll, muss er dort liegen, wo sie sich schneiden.

Sind die geometrischen Oerter zwei gerade Linien, so erhält die Aufgabe nur eine Lösung und kann nur unmöglich werden, wenn die Linien parallel werden. Sind die geometrischen Oerter zwei Kreise, oder ein Kreis und eine gerade Linie, so erhält die Aufgabe zwei Lösungen, wenn sie sich schneiden, eine, wenn sie sich berühren, und wird unmöglich, wenn sie ausserhalb einander liegen. Es ist ein qualitativer Unterschied zwischen diesem Falle und dem vorhergehenden, wo die unmögliche Aufgabe nur ein Grenzfall ist.

Sobald die geometrischen Oerter andere Curven werden, kann man dieselben nicht direct für die Construction verwenden, sondern muss die Aufgabe von anderen Seiten betrachten. Doch ist es zu beachten, dass ein Punkt, der durch eine Gerade und einen Kegelschnitt bestimmt wird, auch durch eine Gerade und einen Kreis bestimmt werden kann, während die Construktion unausführbar ist, sobald der Punkt durch zwei Kegelschnitte, die von einander unabhängig sind, bestimmt wird.

Die Methode, welche hier auf die einfachsten Aufgaben angewandt wurde, lässt sich für die zusammengesetzteren erweitern. Die Regel würde dann folgende werden:

Man denke sich eine von den für die gesuchte Figur gestellten Bedingungen als nicht vorhanden und suche geometrische Oerter für die Punkte der dann unbestimmten Figur.

Man sieht leicht, dass es von der grössten Wichtigkeit ist viele geometrische Oerter zu kennen, so weit dieselben gerade Linien oder Kreise sind. Im ersten Kapitel sind daher die wichtigsten von diesen zugleich mit einer genaueren Entwicklung der oben angegebenen Hauptregeln aufgeführt.

Falls man nicht unmittelbar geometrische Oerter anwenden kann, wird die Hauptregel folgende: *Aus der gezeichneten Figur bilde man eine andere, in der die Verbindung zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken bequemer ist;* die genauere Entwickelung hiervon findet sich im zweiten Kapitel.

Der Kürze wegen wird in dem Folgenden ein Dreieck durch ABC, die Länge seiner Seiten durch a, b und c bezeichnet. Die Höhe auf a heisst h_a, die nach derselben Seite gezogene Mediane (Schwerpunktstransversale), m_a. w_a ist die Länge der Linie, welche den $\angle A$ halbirt. r und ρ sind die Radien der um- und einbeschriebenen Kreise, während ρ_a, ρ_b und ρ_c die Radien der äusseren Berührungskreise sind (der Kreis mit ρ_a berührt a und die Verlängerungen von b und c etc.). Wenn von einem Viereck $ABCD$ die Rede ist, so hat man sich die Eckpunkte in der Reihenfolge zu denken, in der sie genannt sind.

$\angle\,(a, b)$ bezeichnet den Winkel zwischen zwei Linien a und b.

Erstes Kapitel.

Geometrische Oerter.

A. Geometrische Oerter für Punkte.

a. *Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung haben, ist ein Kreis um den gegebenen Punkt als Mittelpunkt und mit der gegebenen Entfernung als Radius.*

Zusatz 1. Der geometrische Ort für die Endpunkte gleich langer Tangenten desselben Kreises ist ein dem gegebenen concentrischer Kreis.

Zusatz 2. Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen an einen gegebenen Kreis gezogenen Tangentenpaare denselben Winkel einschliessen, ist ein dem gegebenen concentrischer Kreis.

Zusatz 3. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit gegebenem Radius, welche einen gegebenen Kreis berühren, wird von zwei dem gegebenen concentrischen Kreisen gebildet, deren Radien gleich der Summe und der Differenz der gegebenen Radien sind.

b. *Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einer gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung haben, besteht aus zwei Geraden, parallel der gegebenen in der gegebenen Entfernung.*

Zusatz 1. Der geometrische Ort für die Spitzen aller gleich grossen Dreiecke über derselben Grundlinie ist eine der Grundlinie parallele Gerade, denn die Dreiecke müssen alle dieselbe Höhe haben.

c. *Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten dieselbe Entfernung haben, ist eine Gerade, senkrecht auf der Mitte der Verbindungslinie der beiden Punkte.*

d. *Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Geraden dieselbe Entfernung haben, wird von zwei auf einander senkrechten Geraden gebildet, welche die Winkel zwischen den gegebenen Geraden halbiren.*

e. *Der geometrische Ort für alle Punkte, welche so liegen, dass die von ihnen an die Endpunkte einer gegebenen Strecke gezogenen Geraden einen gegebenen Winkel einschliessen, ist ein Kreisbogen über der gegebenen Strecke als Sehne.* Man sagt von dem Bogen, dass er den gegebenen Winkel *fasse*, und von der Sehne, dass sie von den Punkten des Bogens unter dem gegebenen Winkel *gesehen* werde.

Hat ein Punkt des Bogens die verlangte Eigenschaft, so müssen alle dieselbe haben, da alle Winkel Peripheriewinkel auf demselben Bogen werden. Zieht man eine Gerade, welche den Kreis in dem einen Endpunkte der Sehne berührt, so muss diese mit der Sehne einen Winkel bilden, welcher dem gegebenen gleich ist, da beide durch denselben Bogen gemessen werden. Daraus ergiebt sich folgende Construction: Man trage den gegebenen Winkel an die Sehne in dem einen Endpunkte an; dadurch erhält man eine Tangente; eine Senkrechte auf dieser in dem Berührungspunkt muss durch den Mittelpunkt gehen, der ausserdem auf einer Senkrechten auf der Mitte der Sehne liegen muss.

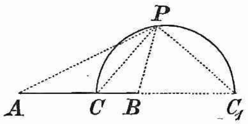
Der Bogen wird ein Halbkreis, wenn der gegebene Winkel ein Rechter ist.

Anmerkung. Wenn man nicht weiss, auf welcher Seite der gegebenen Linie der gesuchte Punkt liegt, muss man zwei Bogen construiren, welche den Winkel fassen, einen auf jeder Seite der Linie. Die beiden anderen Bogen der beiden Kreise fassen dann den Supplementwinkel des gegebenen Winkels. Spricht man nicht von dem Winkel zwischen zwei Linien, sondern von dem Winkel von einer Linie bis zu einer anderen und nimmt man diesen Winkel mit Vorzeichen, indem man eine der beiden Umlaufsrichtungen als positiv einführt, so wird der geometrische Ort ein Vollkreis. Sind die gegebenen Punkte A und B, so wird der Winkel von der

Linie durch A bis zur Linie durch B gleich dem Winkel von der Tangente in A bis AB.

Zusatz 1. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller durch einen gegebenen Punkt gezogenen Sehnen ist ein Kreis, denn die Linien, welche den Mittelpunkt der Sehne mit dem Mittelpunkt des Kreises und mit dem gegebenen Punkte verbinden, schliessen einen rechten Winkel ein.

Zusatz 2. Zeichnet man in einen Kreis Dreiecke ABC mit einer gemeinschaftlichen Seite AB und beschreibt in diese Dreiecke Kreise, so wird der geometrische Ort für die Mittelpunkte dieser ein Kreisbogen über AB als Sehne, beschrieben von der Mitte des Bogens AB; der übrige Theil des Kreises ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise. AB wird nämlich von den gesuchten Mittelpunkten aus unter Winkeln gesehen, die beziehungsweise $R + \frac{1}{2} C$ und $R - \frac{1}{2} C$ sind, und AB wird von der Mitte des Bogens AB unter einem Winkel gesehen, welcher gleich $2R - C$ ist.



f. *Der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von 2 gegebenen Punkten in einem gegebenen Verhältniss $m:n$ stehen, ist eine Kreislinie.*

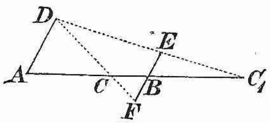
A und B seien die gegebenen Punkte, P einer der gesuchten. Man halbire $\angle APB$ und dessen Nebenwinkel durch PC und PC_1. Dann hat man

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{m}{n}; \ \angle CPC_1 = R.$$

Die Punkte C und C_1 theilen also die Linie AB innen und aussen nach dem gegebenen Verhältniss und bleiben dieselben für jedes P. Da die Strecke CC_1 von P aus unter einem rechten Winkel gesehen wird, so muss zufolge **e** der geometrische Ort für P ein Kreis mit dem Durchmesser CC_1 sein.

Man sagt, dass die Punkte C und C_1 die AB harmonisch nach dem Verhältniss $m:n$ theilen, und die Aufgabe ist also darauf zurück geführt

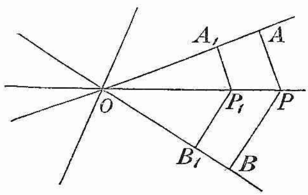
Eine gegebene Linie harmonisch nach einem gegebenen Verhältniss zu theilen.



Diese Construction ist in nebenstehender Figur ausgeführt. AD und BE stehen in dem gegebenen Verhältniss und sind parallel gezogen, BF ist gleich BE. DF und DE schneiden dann die AB in den gesuchten Punkten.

c ist ein besonderer Fall von **f**, wenn nämlich $m = n$.

g. *Der geometrische Ort für alle Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Geraden in einem gegebenen Verhältniss $m:n$ stehen, wird von zwei geraden Linien gebildet, die durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden gehen.*



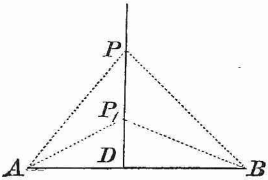
Die gegebenen Geraden seien OA und OB. Falls ein Punkt P die verlangte Eigenschaft hat, müssen alle Punkte der OP sie auch haben; nimmt man z. B. P_1, so hat man

$$\frac{OP_1}{OP} = \frac{A_1P_1}{AP} = \frac{B_1P_1}{BP} \text{ oder } \frac{A_1P_1}{B_1P_1} = \frac{AP}{BP}.$$

Die Linie lässt sich also ziehen, sobald man einen Punkt derselben kennt; dieser kann leicht mit Hülfe von **b** gefunden werden, wenn man die beiden Entfernungen beliebig in dem gegebenen Verhältniss wählt. Die andere Linie wird auf ähnliche Weise gezeichnet; sie fällt in den Nebenwinkel von AOB. Diese vier durch O gehenden Geraden bilden einen harmonischen Strahlenbüschel. Eine beliebige gerade Linie wird nämlich von ihnen in vier harmonischen Punkten geschnitten.

d ist ein specieller Fall von **g**, nämlich für $m = n$.

Zusatz. Sind zwei gerade Linien AB und CD gegeben, und wird ein solcher Punkt P gesucht, dass $\triangle\ PAB$ und $\triangle\ PCD$ in einem gegebenen Verhältniss stehen, so muss der geometrische Ort für P der hiergenannte sein, denn das Verhältniss der Höhen ist constant.



h. *Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine constante Differenz a^2 haben, ist eine senkrechte Gerade auf der Verbindungslinie der beiden Punkte.*

A und B seien die gegebenen Punkte, P einer der gesuchten, PD sei senkrecht auf AB. Jeder Punkt der PD muss dann die verlangte Eigenschaft haben, denn betrachtet man z. B. P_1, so hat man

$$\overline{AP_1}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{P_1D}^2;\ \overline{BP_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{P_1D}^2,$$

$$\text{woraus } \overline{P_1B}^2 - \overline{P_1A}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$$

und auf dieselbe Weise

$$\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2.$$

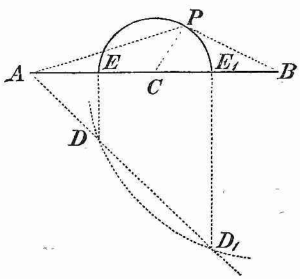
Zeichnet man ein beliebiges rechtwinkeliges Dreieck, dessen eine Kathete a ist, und beschreibt man um A und B als Mittelpunkte Kreise, deren Radien beziehungsweise gleich der Hypotenuse und der anderen Kathete sind, so geht die gesuchte Linie durch die Schnittpunkte dieser beiden Kreise. Die andere Kathete des rechtwinkeligen Dreiecks muss so gross genommen werden, dass die Kreise sich schneiden. Hier wurde vorausgesetzt, dass P von B die grössere Entfernung haben solle.

Zusatz 1. Der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus man gleich grosse Tangenten an zwei Kreise ziehen kann (welche dieselbe Potenz haben mit Beziehung auf die beiden Kreise), ist eine Gerade, senkrecht auf der Centrale (Radicalaxe, Potenzlinie der Kreise); man sieht nämlich leicht, dass die Punkte solche Entfernungen von den Kreismittelpunkten haben müssen, dass die Differenz der Quadrate derselben gleich der Differenz der Quadrate der Radien ist. Wenn die Kreise sich schneiden, geht die Potenzlinie durch die Durchschnittspunkte derselben. Die drei Potenzlinien für drei Kreise gehen durch denselben Punkt, das Potenzcentrum (Radicalcentrum). Dadurch bestimmt man leicht einen Punkt der Potenzlinie für 2 Kreise, welche sich nicht schneiden; man hat nur nöthig einen beliebigen Kreis zu zeichnen, der beide schneidet.

Zusatz 3. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche zwei gegebene Kreise unter einem Durchmesser schneiden, ist eine Gerade, senkrecht auf der Centrale in demselben Abstand von dem einen Kreismittelpunkt wie die Potenzlinie von dem anderen.

Zusatz 2. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise rechtwinkelig schneiden (so dass die im Durchschnittspunkt an beide gelegten Tangenten rechte Winkel bilden), ist die Potenzlinie der Kreise.

i. *Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine constante Summe a^2 haben, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Mitte der Verbindungslinie der beiden Punkte liegt.*



A und B seien die gegebenen Punkte, P einer der gesuchten. Zieht man die Mediane PC, hat man wie bekannt

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{PC}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2$$

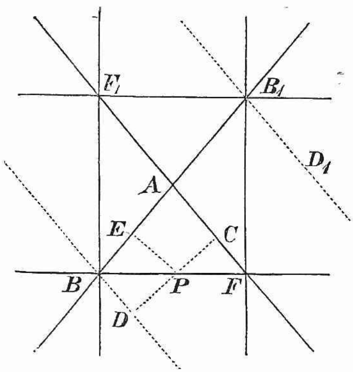
$$\text{oder } \overline{PC}^2 = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2.$$

Die gesuchten Punkte haben also constanten Abstand von C. Um auf AB die Punkte zu bestimmen, durch welche der Kreis geht, trage man $\angle BAD = 45°$ in A an. Von B beschreibe man mit dem Radius a einen Bogen, welcher AD in den Punkten D und D_1 schneidet. Fällt man nun von D und D_1 Senkrechte auf AB, so sind ihre Fusspunkte E und E_1 die gesuchten Punkte, denn

$$a^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EB}^2 \text{ und } a^2 = \overline{D_1E_1}^2 + \overline{E_1B}^2,$$
$$\text{aber } DE = AE \text{ und } D_1E_1 = AE_1.$$

k. *Der geometrische Ort für alle Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Geraden eine gegebene Summe oder Differenz haben, ist ein System von vier geraden Linien.*

Die gegebenen Geraden seien AB und AC, P einer der gesuchten Punkte, also $PC + PE = a$. Macht man $PD = PE$, muss der geometrische Ort für D aus zwei Geraden bestehen, die der AC im Abstande a parallel sind. Diese seien BD und D_1B_1.



Die gesuchten Punkte sollen nun denselben Abstand von AE und von einer von diesen Geraden haben und müssen also auf einer von den vier Geraden liegen, welche die Winkel an den beiden Durchschnittspunkten halbiren. Hierdurch ist die Aufgabe auch gelöst, wenn die Differenz der Abstände a sein soll; denn bei einer genaueren Untersuchung der Figur findet man leicht, dass für die vier begrenzten Abschnitte BF, FB_1, B_1F_1 und F_1B die Summe, und für die übrigen unbegrenzten Stücke die Differenz der Abstände a sei.

Anmerkung. Kommt man überein CP als positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem P auf der einen oder anderen Seite der gegebenen Geraden AF liegt und auf ähnliche Weise EP als positiv oder negativ, je nachdem P auf der einen oder der anderen Seite von AB liegt, so erhält man eine unendliche Gerade als geometrischen Ort, indem man beziehungsweise für die vier Linien hat

$$CP + EP = a;\; CP - EP = a;$$
$$-\; CP + EP = a;\; -\; CP - EP = a.$$

Mit Hülfe dieser geometrischen Oerter lassen sich die folgenden Aufgaben leicht lösen: man betrachte die beiden für den gesuchten Punkt gestellten Bedingungen jede für sich; dadurch erhält man zwei geometrische Oerter für den Punkt.

Beispiele.

1. Einen Punkt zu bestimmen, der von drei gegebenen Punkten gleiche Entfernung hat. (**c**).
2. Einen Punkt zu bestimmen, welcher von drei gegebenen Geraden gleiche Entfernung hat. (**d**).

3. Ein Dreieck aus seinen drei Seiten zu construiren. (**a**).

Einen Kreis mit gegebenem Radius zu zeichnen, welcher

4. durch zwei gegebene Punkte geht, (**a**).
5. durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt, (**a** und **b**).
6. durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt, (**a**).
7. zwei gegebene Gerade berührt, (**b**).
8. eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt, (**a** und **b**).
9. zwei gegebene Kreise berührt, (**a**).
10. Ein Dreieck zu construiren aus a, h_a und m_a. (**a** und **b**).
11. An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, von der eine gegebene Gerade ein gegebenes Stück abschneidet. (**a** Zus. 1).
12. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade oder einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt (**c**).
13. Auf einer gegebenen Kreislinie einen Punkt zu bestimmen, der von einer gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung habe. (**b**).
14. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, der von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernung habe. (**c**).
15. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei parallele Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. (**d** und **a**).
16. Von einem gegebenen Punkte eine Tangente an einen Kreis zu ziehen. (**e**).

Ein Dreieck zu construiren aus

17. A, a und h_a. (**e** und **b**).
18. A, a und m_a. (**e** und **a**).
19. Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus zwei gegebene Strecken unter gegebenen Winkeln gesehen werden (Pothenot'sche Aufgabe). (**e**).
20. Ein einbeschriebenes Viereck zu construiren aus einem Winkel, einer anliegenden Seite und den beiden Diagonalen. (**e** und **a**).
21. Einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von drei gegebenen Geraden in gegebenen Verhältnissen stehen. (**g**).

22. In einem Dreieck einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von den drei Eckpunkten in gegebenen Verhältnissen stehen. (**f**).
23. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so durch einen gegebenen Kreis zu ziehen, dass die Abstände der Durchschnittspunkte von einer gegebenen Geraden eine gegebene Summe haben.
    Man bestimme den Mittelpunkt der Sehne. (**e** Zus. 1 und **b**).
24. Einen Punkt so zu bestimmen, dass die von dem Punkte an zwei gegebene Kreise gezogenen Tangenten gegebene Längen haben. (**a** Zus. 1).
25. Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus zwei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln gesehen werden. (**a** Zus. 2).
26. In ein gegebenes Dreieck ein gleichschenkeliges Dreieck mit gegebener Höhe zu beschreiben, so dass die Grundlinie der einen Seite parallel wird. (**b** und **c**).
27. Einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, und dessen Peripherie gegebene Abstände von zwei gegebenen Geraden hat. (**k**).
28. Ein Dreieck zu construiren aus A, w_a und ρ. (**d**, **b** und 16).
29. Ein einbeschriebenes Viereck aus AB, BC, AC und dem Winkel zwischen den Diagonalen zu construiren. (3 und 1).
30. Einen Punkt zu bestimmen, so dass die von ihm an drei gegebene Kreise gezogenen Tangenten gleiche Länge haben. (**h** Zus. 1).
31. Ein Dreieck zu construiren aus A, a und $b^2 + c^2$. (**e** und **i**).
32. In einem gegebenen Dreieck einen Punkt so zu bestimmen, dass die von ihm nach den Eckpunkten gezogenen Linien das Dreieck in drei inhaltsgleiche Theile theilen.
    Das Dreieck sei ABC, der gesuchte Punkt O. Sind $\triangle\ AOB$ und $\triangle\ AOC$ inhaltsgleich, so muss der geometrische Ort für O eine durch A gehende Gerade sein. Da die Mediane das Dreieck halbirt, muss die Mitte von BC ein Punkt des geometrischen Ortes sein, und dieser ist also die Mediane selber. Der gesuchte Punkt ist folglich der Durchschnittspunkt der Medianen.
33. In ein gegebenes Dreieck ein anderes mit zwei gegebenen

Seiten so zu beschreiben, dass der eine Eckpunkt auf einen gegebenen Punkt fällt. (a).

34. Einen Kreis zu construiren, der drei gegebene gleich grosse Kreise umschliessend berührt. (1).
35. Ein Dreieck zu construiren aus a, h_b und h_c. (e und a).
36. Einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstand von dem Scheitelpunkt eines gegebenen Winkels gleich einer gegebenen Strecke, und dessen Abstände von den Schenkeln des Winkels in einem gegebenen Verhältniss stehen. (a und g).

Ein Dreieck zu construiren aus

37. a, A und $b^2 - c^2$. (e und h).
38. a, h_a und $b^2 + c^2$. (b und i).
39. Für die Construction eines rechtwinkeligen Dreiecks sind gegeben: Die Höhe auf der Hypotenuse, zwei Punkte der Hypotenuse und ein Punkt von jeder der Katheten. (b und e).
40. Um ein gleichseitiges Dreieck ein Quadrat zu beschreiben, so dass die beiden Figuren einen Eckpunkt gemeinsam haben. Man suche den gegenüberliegenden Eckpunkt des Quadrats zu bestimmen. (e und c).
41. Ein Dreieck zu construiren aus a, A und ρ. (e, Zus. 2).
42. Eine gegebene Gerade in zwei Abschnitte zu theilen, welche eine gegebene Strecke zur mittleren Proportionale haben. (e und b).
43. Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck; man soll einen Kreis construiren, welcher die Hypotenuse berührt, durch den Scheitelpunkt des rechten Winkels geht und seinen Mittelpunkt auf der einen Kathete hat. (d).
44. Gegeben sind zwei Parallelen, auf der einen ein Punkt A und ausserdem irgendwo ein Punkt O. Man soll durch O eine Gerade ziehen, welche die Parallele durch A in X, die andere in Y schneidet, so dass $AX = AY$. Man suche den Mittelpunkt von XY zu bestimmen.
45. Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus man die drei Abschnitte AB, BC und CD einer gegebenen Geraden unter gleichen Winkeln sieht. (f).
46. In einem Dreieck einen Punkt zu bestimmen, von dem aus

die drei Seiten gleich gross erscheinen (unter gleichen Winkeln gesehen werden). (**e**).

47. Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus drei gegebene Kreise gleich gross erscheinen.
Die Abstände des Punktes von den Kreismittelpunkten müssen sich wie die Radien verhalten; man findet deshalb den Punkt durch **f**.

48. Ein Dreieck zu construiren aus a, h_a und $b:c$. (**b** und **f**).

49. In einem gegebenen Viereck einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von den zwei gegenüberliegenden Seiten eine gegebene Summe und von den beiden anderen ein gegebenes Verhältniss haben.

50. Auf einer gegebenen Kreisperipherie einen Punkt so zu bestimmen, dass die Summe seiner Abstände von zwei gegebenen Geraden ein Minimum werde. (**k**).

51. Einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise rechtwinkelig schneidet. (**h** Zus. 3).

52. Einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise unter Durchmessern schneidet. (**h** Zus. 2).

53. In einen gegebenen Kreis soll ein rechtwinkeliges Dreieck so beschrieben werden, dass die Katheten jede durch einen gegebenen Punkt gehen. (**e**).

54. In einen gegebenen Kreis soll ein rechtwinkeliges Dreieck beschrieben werden; man kennt den einen spitzen Winkel und einen Punkt der einen Kathete. (**e**).

55. Auf einem kreisförmigen Billard liegen zwei Bälle auf demselben Durchmesser; wie muss man den einen stossen, damit er nach dem Zurückprallen den anderen trifft? (**f**).

Bei den vorhergehenden Aufgaben konnte man ohne weiteres geometrische Oerter anwenden, da entweder unmittelbar ein Punkt bestimmt werden sollte, oder es sich gleich herausstellte, dass die Aufgabe durch Bestimmung eines solchen gelöst sei. Ist das nicht der Fall, so wende man folgende Regeln an:

Man führe die gegebenen Stücke in die Figur ein; ist z. B. die Summe zweier Linien gegeben, so genügt es nicht, dass diese Linien einzeln vorkommen, sondern man muss die gegebene Summe selber einführen; in der Regel macht man dies so, dass der eine Endpunkt auf einen gegebenen Punkt fällt.

Man unterwerfe die Figur einer sorgfältigen Untersuchung um die Linien und Winkel zu finden, welche sich, ohne gegeben zu sein, leicht mit Hülfe der gegebenen Stücke bestimmen lassen.

Darauf suche man einen solchen Theil der Figur ausfindig zu machen, welcher für sich durch die gegebenen Stücke bestimmt ist, und welcher also, wenn man ihn gleich zeichnet, als Ausgangspunkt für die Bestimmung des übrigen Theils der Figur dienen kann. Hier kann man die Wahl zwischen mehreren Theilen haben und muss dann in der Regel den wählen, wodurch man gleich den grössten Theil der gesuchten Figur gezeichnet erhält. Besonders wird oft das Princip angewandt, nach **Dreiecken** mit drei bekannten Stücken zu suchen.

Zur Einführung der Seiten eines Dreiecks oder von Summen und Differenzen aus diesen bedient man sich oft der vier Berührungskreise des Dreiecks. Auf jeder Seite liegen zwei Eckpunkte und vier Berührungspunkte, und der Abstand zwischen zwei beliebigen von diesen lässt sich einfach durch die Seiten des Dreiecks ausdrücken. Insbesondere beachte man, wenn s den halben Dreiecksumfang bedeutet:

a) Der einbeschriebene Kreis theilt die Seiten in die Stücke $s-a$, $s-b$ und $s-c$.

b) Der Abstand von A bis zu den Punkten, wo der Kreis mit dem Radius ρ_a die Seiten b und c berührt, ist s. Der Abstand dieser Berührungspunkte von dem Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises ist a.

c) Der innere und der eine äussere Berührungskreis berühren a in Punkten, welche gleichweit von B und C entfernt sind, und deren Abstand von einander $b-c$ oder $c-b$ beträgt.

Beispiele.

56. Ein Viereck $ABCD$ zu construiren aus AB, BC, AC, BD und $\angle D$.

$\triangle ABC$ kann sofort gezeichnet werden; darauf bestimme man D. (a und c).

57. Ein einbeschriebenes Viereck $ABCD$ zu construiren aus $\angle A$, $\angle ABD$, AC und BD.
Man zeichne $\triangle ABD$; dadurch wird der umbeschriebene Kreis bestimmt, und man erhält nun C durch **a**.
58. Ein Parallelogramm aus AB, AC und AD zu construiren.
59. Ein Dreieck zu construiren aus A, h_a und w_a.
Das Dreieck, dessen Seiten h_a und w_a sind, lässt sich sofort construiren.
60. Ein Dreieck zu construiren aus h_a, m_a und r.
Man zeichne das Dreieck, dessen Seiten h_a und m_a sind, und bestimme darauf den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises durch **a** und **c**.
61. Ein Dreieck aus a, r und h_b zu construiren.
Man construire das Dreieck, dessen Seiten a und h_b sind, und bestimme darauf den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises durch **a**.
62. Man construire ein Dreieck aus B, a und ρ.
63. Zeichne ein Dreieck aus a, $b + c$ und h_b.
64. Ein Parallelogramm aus der einen Seite und den beiden Diagonalen zu construiren.
65. Ein Dreieck aus h_a und m_a zu construiren, wenn zugleich $a = 2\,b$.
66. Ein Viereck zu construiren aus AC, $\angle CAB$, $\angle ACD$, CD und DB.
Man zeichne $\triangle ADC$ und bestimme darauf B.
67. Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Gerade ziehen, welche zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks so schneidet, dass die Durchschnittspunkte mit den Endpunkten der dritten Seite auf derselben Kreisperipherie liegen.

Ein Dreieck zu construiren aus

68. a, h_b und m_a.
69. h_a, m_a und b.
70. h_a, h_b und B.
71. h_a, m_a und $a : b$.
72. h_a, B und C.
73. Ein Dreieck zu construiren aus a, A und $b + c$.
Man führe $b + c$ in die Figur ein, indem man AC über A hinaus und ein Stück $AD = c$ verlängert, und verbinde dann

D mit B; wie leicht ersichtlich lässt sich nun $\triangle$ CDB sofort construiren, da $\angle D = \frac{1}{2} A$. Den Eckpunkt A bestimmt man dann mittelst **c**.

Zugleich ersieht man hieraus, dass, wenn BC eine gegebene Sehne ist, und man eine Sehne BA bis D um ein Stück $AD = DC$ verlängert, der geometrische Ort für D ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt auf der Mitte des Bogens BC liegt.

74. Ein Dreieck zu construiren aus A, b und $a - c$.
Man verlängere c über A hinaus um das Stück $a - c$.

75. Einen gegebenen Bogen in zwei andere so zu theilen, dass die Summe der zugehörigen Sehnen ein Maximum werde.

76. Man construire ein Dreieck aus A, $b + c$ und $h_b + DC$, wo D den Fusspunkt von h_b bedeutet.

77. Ein Dreieck zu construiren aus a, $b + c$ und $B - C$.

78. Ein Dreieck zu construiren aus a, A und $b - c$.

79. Um ein gegebenes Quadrat ein anderes gegebenes Quadrat zu beschreiben (73).

80. Um ein gegebenes regelmässiges $n$eck ein anderes gegebenes regelmässiges $n$eck zu beschreiben.

81. Ein Viereck zu construiren aus AB, BC, BD, $\angle A$ und $\angle B$.

82. Man construire ein Viereck aus AB, AC, $\angle A$, $\angle D$ und $\angle C$.

83. Ein einbeschriebenes Viereck zu construiren aus r, AC, BD und $AB \pm BC$.
Man zeichne den Kreis, trage AC hinein und bestimme B (73); dann findet man D.

84. Ein einbeschriebenes Viereck zu construiren aus AB, BC, AC und $CD \pm DA$.

85. Ein Viereck zu construiren aus AB, CD, AC, $\angle BAC$ und $\angle ABD$.

86. Ein einbeschriebenes Viereck zu construiren aus $AB \pm BC$, DA, BD und $\angle A$.

87. Ein Dreieck zu construiren aus a, $b - c$ und $B - C$.
Man ziehe BD, so dass $AD = AB$ und also $DC = b - c$; es ergiebt sich dann leicht, dass $\angle DBC = \frac{1}{2} (B - C)$. Das

$\triangle\ BDC$ lässt sich also ohne weiteres construiren, und man bestimmt dann A mit Hülfe von **c**.

88. Ein Dreieck zu construiren aus c, w_a und $B - C$.
Das Dreieck, in dem c und w_a Seiten sind, lässt sich sofort construiren, da $\angle\ (w_a, a) = 90° - \frac{1}{2}(B - C)$.

89. Ein Trapez aus den Diagonalen, einer der parallelen Seiten und einem Winkel zu construiren.

90. Gegeben ist eine Gerade, auf derselben der Punkt A und ausserhalb derselben der Punkt P. Man soll auf der gegebenen Geraden einen solchen Punkt X bestimmen, dass $AX + XP = m$, wo m gegeben ist. (AX ist mit Vorzeichen zu nehmen).
Man trage m auf der gegebenen Geraden von A aus ab; X lässt sich dann durch **c** bestimmen.

91. Gegeben sind zwei Punkte A und B, und eine durch B gehende Gerade; auf dieser Geraden sollen zwei Punkte X und Y in gleicher Entfernung von B so bestimmt werden, dass XY von A aus unter einen gegebenen Winkel gesehen werde.
Man verlängere AB bis C, so dass $BC = AB$.

92. Gegeben sind zwei Parallelen, auf der einen ein Punkt A, auf der anderen ein Punkt B, und zwischen den Parallelen ein Punkt O. Man soll durch O eine Gerade ziehen, welche die Parallelen in X und Y so schneidet, dass AX und BY (mit Vorzeichen genommen) eine gegebene Summe haben.
Die Gerade geht durch die Mitte von AC, wenn $YC = AX$.

93. Ein Dreieck zu construiren aus a, A und $CD \cdot b$, worin D den Fusspunkt von h_b bedeutet.
Der Fusspunkt von h_a lässt sich leicht bestimmen.

94. Ein Dreieck zu construiren aus B, $c - a$ und der Differenz der beiden Abschnitte, in welche b durch h_b getheilt wird.
Trägt man die gegebenen Differenzen als AD und AE auf AB und AC ab, so ist $\angle\ AED$ bekannt. ($BE = BD = BC$).

95. Gegeben sind drei Punkte A, B, C und eine durch A gehende Gerade. Man soll einen Kreis beschreiben, der durch A und B geht und die gegebene Gerade in einem solchen Punkte D schneidet, dass DC eine Tangente des Kreises ist.
$\angle\ BDC = \angle\ BAD$, wonach sich D leicht auffinden lässt.

96. Ein Dreieck zu construiren aus r, h_a und $B - C$.
Der Winkel zwischen h_a und dem nach A gezogenen Radius ist bekannt.

97. Im $\triangle ABC$ soll die XY parallel zu BC gezogen werden, so dass $XY = XB + YC$.
Die gesuchte Linie geht durch den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises.

98. Man soll ein Dreieck aus $B - C$ und w_a construiren, wenn zugleich das Verhältniss $\frac{b + c}{a}$ gegeben ist.

99. In einem Parallelogramm soll eine Linie AX nach X auf CD gezogen werden, so dass $AX = AB + XD$.
Trägt man AB auf AX ab, so fällt der Endpunkt auf BD.

100. Von einem Dreieck ABC ist AB der Grösse und Lage nach gegeben, ferner $\angle A$ und der Punkt D, in welchem der von C aus gezogene Durchmesser AB schneidet; man soll den um das Dreieck beschriebenen Kreis construiren.
BD wird vom Kreismittelpunkte aus unter einem bekannten Winkel gesehen.

101. Von einem Dreieck, worin AD den Winkel A halbirt, kennt man AD, $AB - BD$ und $AC - CD$. Man soll das Dreieck construiren.
BA und CA werden auf BC abgetragen, so dass DA_1 nnd DA_2 die gegebenen Differenzen sind. Der Kreis durch A, A_1, A_2 ist dem einbeschriebenen Kreise des gesuchten Dreiecks concentrisch und hat einen bekannten Durchmesser.

102. Man construire ein Viereck, wenn die Projectionen des Durchschnittspunktes der Diagonalen auf die vier Seiten gegeben sind.
Der Winkel zwischen den auf zwei gegenüberliegenden Seiten errichteten Senkrechten ist bekannt.

103. Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels sind die Punkte A und B gegeben. Man suche auf dem anderen Schenkel einen solchen Punkt X, dass $\angle AXB = 2 \angle ABX$.
Man bestimme die Mitte von XY, wenn Y ein Punkt auf XB und $AX = AY$.

104. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche

von einem gegebenen Winkel ein Dreieck von gegebenem Umfang abschneidet.

Einer der äusseren Berührungskreise des Dreiecks lässt sich construiren.

105. Ein Dreieck zu construiren aus A, w_a und $a + b + c$.

106. Ein Dreieck zu construiren aus A, ρ und $a + b + c$.

107. Ein Dreieck zu construiren aus A, r und $a + b + c$.

Da a bekannt ist, reducirt sich die Aufgabe auf 73 oder 137.

108. Ein Dreieck zu construiren aus ρ, ρ_a und w_a.

Durch ρ und ρ_a ist h_a bestimmt.

109. Ein Dreieck zu construiren aus ρ, ρ_a und $b - c$.

$b - c$ ist der Abstand zwischen zwei Berührungspunkten.

110. Ein Dreieck zu construiren aus a, ρ und $b + c$.

s und a sind bekannt und bestimmen zwei Berührungspunkte so wie den einen Eckpunkt.

111. Ein Dreieck zu construiren aus a, ρ und $b - c$.

112. Ein Dreieck zu construiren aus h_a, ρ und $a + b + c$.

Man kennt a.

113. Ein Dreieck zu construiren aus a, ρ_b und ρ_c.

Das Stück zwischen den Berührungspunkten der beiden Kreise ist bekannt.

114. Ein Dreieck zu construiren aus ρ_a, ρ_b und $a + b$.

Das Stück zwischen den Berührungspunkten der beiden Kreise ist bekannt.

115. Ein Dreieck zu construiren aus ρ_b, ρ_c und $B - C$.

Der Winkel zwischen BC und der Centrale der beiden Kreise ist bekannt.

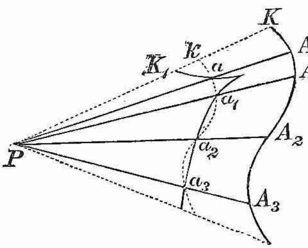
116. Ein Dreieck zu construiren aus a, $b + c$ und w_a.

Da die Mittelpunkte des inneren und äusseren Berührungskreises und die Durchschnittspunkte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten harmonische Punkte sind, so müssen die Projektionen derselben auf AB auch harmonische Punkte sein. Von diesen vier Punkten kennt man drei und bestimmt also leicht den vierten.

Leichter lässt sich die Aufgabe lösen, wenn man w_a hinlegt und B und C dadurch bestimmt, dass ihre Abstände von den

Endpunkten von w_a in demselben bekannten Verhältniss $(b + c) : a$ stehen.

Multiplication von Curven.



Zieht man von einem Punkt P eine Gerade nach einem beliebigen Punkt einer gegebenen Curve K und theilt man diese Gerade durch den Punkt a so, dass $Pa : PA = m : n$, dann ist der geometrische Ort für a eine Curve k, welche der gegebenen ähnlich ist.

Man sagt von den beiden Curven, dass sie ähnlich gegen einander liegen. P heisst ihr Aehnlichkeitspunkt, die Geraden durch P Aehnlichkeitsstrahlen. Homologe Punkte der Curven nennt man solche, welche auf demselben Aehnlichkeitsstrahl liegen, homologe Linien solche, welche homologe Punkte verbinden. Der Begriff lässt sich erweitern, denn irgend ein beliebiger Punkt der Ebene kann als dem einen System angehörig betrachtet werden und erhält dadurch seinen homologen Punkt in dem anderen System. Der Aehnlichkeitspunkt ist dann der Punkt der Ebene, welcher, als zugehörig zu dem einen Systeme betrachtet, mit seinem homologen Punkte in dem anderen System zusammenfällt. Da die Theorie der ähnlichen Lage in den meisten Lehrbüchern der Geometrie behandelt wird, so soll hier nur an folgende Sätze erinnert werden:

Einer geraden Linie oder einem Kreise entspricht eine gerade Linie oder ein Kreis.

Alle homologen Linien sind parallel.

Alle homologen Winkel sind gleich.

Alle homologen Linien stehen in dem Verhältniss $m : n$. Die Figuren heissen deshalb ähnlich nach diesem Verhältniss.

Trägt man Pa auf der Verlängerung von PA über P ab, so gelten doch dieselben Sätze. Man sagt dann, dass die Systeme umgekehrt ähnlich liegen.

Zwei beliebige Kreise können als direct und umgekehrt ähnlich liegend betrachtet werden. Die beiden Aehnlichkeitspunkte heissen dann der äussere und der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise.

Mit Hülfe des hier gesagten kann man eine allgemeine Aufgabe lösen, welche eine sehr häufige Anwendung findet:

Durch einen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Curven K und K' in den Punkten A und a so schneidet, dass PA und Pa in einem gegebenen Verhältniss $m:n$ stehen.

Man betrachtet nämlich den gegebenen Punkt als Aehnlichkeitspunkt und zeichnet eine Curve k, ähnlich liegend gegen K und in dem Verhältniss $n:m$; diese wird dann K' in dem gesuchten Punkte schneiden. Die Anzahl der Lösungen ist gleich der Anzahl von Durchschnittspunkten zwischen K' und k. Die Aufgabe lässt sich immer mit Zirkel und Lineal lösen, sobald die gegebenen Curven aus geraden Linien und Kreisbogen zusammengesetzt sind.

Soll der gegebene Punkt auf derselben Seite von A und a liegen ($m:n$ positiv), so zeichnet man k direct ähnlich liegend gegen K, soll er dagegen zwischen A und a liegen ($m:n$ negativ), so zeichnet man k umgekehrt ähnlich liegend gegen K.

Eine Curve in ähnlicher Lage gegen eine gegebene im Verhältniss $m:n$ zu zeichnen, nenne ich der Kürze wegen: dieselbe mit Beziehung auf den Aehnlichkeitspunkt mit $\pm\frac{m}{n}$ zu multipliciren, nämlich $+$ oder $-$, je nachdem die ähnliche Lage direct oder umgekehrt ist.

Soll eine gerade Linie multiplicirt werden, so bleibt die Richtung unverändert, und man hat also nur nöthig einen ihrer Punkte zu multipliciren.

Soll ein Kreis multiplicirt werden, so muss man Mittelpunkt und Radius oder Mittelpunkt und einen Punkt der Peripherie multipliciren.

Beispiele.

117. Durch einen gegebenen Punkt O eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene gerade Linien so schneidet, dass die Abstände der Durchschnittspunkte von O sich wie $m:n$ verhalten.

Man nehme O als Aehnlichkeitspunkt, multiplicire die eine gegebene Gerade mit $\pm \frac{m}{n}$ und ziehe eine Linie durch O und den gefundenen Durchschnittspunkt.

118. Durch den Punkt O innerhalb eines gegebenen Kreises eine Sehne zu ziehen, welche durch den Punkt in zwei Abschnitte getheilt wird, die sich wie $m:n$ verhalten.

Man nehme O als Aehnlichkeitspunkt und multiplicire den Kreis mit $-\frac{m}{n}$; die gesuchten Linien gehen dann nach den Punkten, in denen der neue Kreis den gegebenen schneidet. Liegt der gegebene Punkt ausserhalb des Kreises, so multiplicire man mit $\frac{m}{n}$ oder $\frac{n}{m}$.

Soll der ausserhalb des Kreises liegende Abschnitt sich zu der abgeschnittenen Sehne wie $m : n$ verhalten, so multiplicire man mit $\frac{m}{m+n}$ oder $\frac{m+n}{m}$.

119. Durch den einen Durchschnittspunkt O zweier Kreise eine Gerade zu ziehen, von welcher die Kreise gleich grosse Sehnen abschneiden.

Man multiplicire den einen Kreis mit -1, indem man O als Aehnlichkeitspunkt nimmt.

120. In ein gegebenes Viereck ein Parallelogramm zu beschreiben, dessen Mittelpunkt auf einen gegebenen Punkt fällt.

121. Ein Dreieck zu construiren aus a, b und m_c.

Man lege $m_c = CE$ hin, und beschreibe um C als Mittelpunkt mit den Radien a und b Bogen; einen von diesen multiplicire man mit -1, indem man E als Aehnlichkeitspunkt nimmt. Man könnte auch damit anfangen, eine der gegebenen Seiten hinzulegen; dann müsste man den einen Bogen mit $\frac{1}{2}$ oder den andern mit 2 multipliciren; das letztere ist in der Ausführung leichter, erfordert aber mehr Raum.

122. Ein Dreieck zu construiren aus a, A und m_b.

Ueber a beschreibe man den Bogen, welcher $\angle A$ fasst. Von B aus schlage man einen Bogen mit dem Radius m_b; diesen multiplicire man mit 2 oder den ersten Kreis mit $\frac{1}{2}$, indem man C als Aehnlichkeitspunkt nimmt.

123. Durch einen auf einer Kreisperipherie gegebenen Punkt eine Sehne zu ziehen, welche von einer anderen gegebenen Sehne halbirt wird.
Man nehme den gegebenen Punkt als Aehnlichkeitspunkt und multiplicire die gegebene Sehne mit 2 oder den Kreis mit $\frac{1}{2}$.
124. Durch zwei concentrische Kreise eine gerade Linie zu ziehen, so dass die kleine Sehne die Hälfte der grossen ist.
125. Ein Dreieck zu construiren aus a, $\frac{b}{c}$ und m_c.
126. Ein Dreieck zu construiren aus einem Winkel und zwei Medianen.
127. Ein Dreieck aus seinen drei Medianen zu construiren.
Lässt sich auf 121 zurückführen, da die Medianen sich gegenseitig nach dem Verhältniss 1 : 2 theilen.
128. Für die Construction eines Dreiecks sind gegeben: Der Schwerpunkt desselben (Durchschnittspunkt der Medianen), ein Eckpunkt und zwei Curven (gerade Linien oder Kreise), auf welche die beiden anderen fallen sollen.
129. Ein Dreieck zu construiren aus a, m_b und $\angle\,(m_a, b)$.
130. Ein Dreieck zu construiren aus b, m_b und $\angle\,(m_a, a)$.
131. Ein einbeschriebenes Viereck zu construiren aus $\angle\, A$, DB, $\angle\, ACB$ und dem Verhältniss zwischen den Abschnitten von AC.
132. Man soll ein Parallelogramm zeichnen, von dem zwei gegenüberliegende Eckpunkte in gegebenen Punkten und die beiden anderen auf einer gegebenen Kreisperipherie liegen.
133. In einem Dreieck soll man von A nach BC eine Linie AD ziehen, welche die mittlere Proportionale zwischen BD und DC ist.
Man benutze den umbeschriebenen Kreis des Dreiecks.
134. Ein Dreieck zu construiren aus a, b und w_c.
135. Ein Dreieck zu construiren aus A, b und $\angle\,(m_a, a)$.
136. In einem gegebenen Dreieck eine Linie durch A so zu ziehen, dass die Abschnitte derselben von A bis an die Projectionen von B und C in einem gegebenen Verhältniss stehen.
137. An zwei Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.
Zwei Kreise, als ähnlich liegende Figuren betrachtet, haben zwei Aehnlichkeitspunkte. Diese liegen auf der Centrale, und

eine durch die Endpunkte von zwei parallelen Radien gezogene Gerade geht durch den äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt, je nachdem die Radien gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Eine Tangente von dem einen Aehnlichkeitspunkt an den einen Kreis berührt auch den anderen.

138. Gegeben sind ein Punkt O und zwei Kreise; man soll an jeden der Kreise eine Tangente so ziehen, dass die beiden Tangenten parallel sind nnd dass ihre Abstände von O in einem gegebenen Verhältniss stehen.
Durch eine Multiplication des einen Kreises mit Beziehung auf O wird die Aufgabe auf 137 reducirt.

139. Ein Dreieck zu construiren aus A, m_b und $\angle\ (a, m_c)$.

140. Auf einer Kreisperipherie sind die Punkte A und B gegeben; man bestimme auf der Peripherie einen Punkt X, so dass XA und XB einen gegebenen Durchmesser in zwei Punkten Y und Z schneiden, deren Abstände vom Kreismittelpunkt in einem gegebenen Verhältniss stehen.
Multiplicirt man AX mit Beziehung auf den Kreismittelpunkt, so dass Y auf Z fällt, so fällt A auf einen bekannten Punkt A_1 und $\angle\ A_1ZB$ ist bekannt.

141. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn man die Lage von drei Punkten kennt, welche die drei Seiten nach gegebenen Verhältnissen theilen.
ABC sei das gesuchte Dreieck, D, E und F die gegebenen Punkte und $BD : DA = m : n$; $AF : FC = p : q$; $CE : EB = r : s$. Nimmt man D als Aehnlichkeitspunkt und multiplicirt BD mit $-\frac{n}{m}$, so bleibt D liegen, und B fällt auf den unbekannten Punkt A; multiplicirt man darauf DA mit $-\frac{q}{p}$ mit Beziehung auf F, so fällt A auf C, und D kommt auf einen bekannten Punkt D_1; multiplicirt man darauf D_1C mit $-\frac{s}{r}$ mit Beziehung auf E, so fällt C auf B und D_1 auf einen neuen bekannten Punkt D_2. Da die Richtung einer Geraden durch Multiplication nicht verändert wird, muss BD_2

parallel DB sein, so dass DD_2 mit AB zusammenfällt. Um die Seite BC zu erhalten, wiederholt man dieselben Operationen auf entgegengesetztem Wege, indem man von E ausgeht.

Dieselbe Construction lässt sich auf ein beliebiges Polygon anwenden. Im Besonderen beachte man den Fall, wo die Mitten aller Seiten gegeben sind und die Seitenzahl gerade ist; die Aufgabe ist dann unbestimmt oder unmöglich (Mathematisk Tidsskrift for 1862 pag. 159).

142. Gegeben sind vier concentrische Kreise; man soll eine gerade Linie ziehen, welche dieselben beziehungsweise in A, B, C und D schneidet, so dass $AB = CD$.

Bedeutet (AB) die Potenz eines Punktes des Kreises A mit Beziehung auf den Kreis B, und schneidet die Gerade die Kreise zum zweiten Mal beziehungsweise in den Punkten A_1, B_1, C_1 und D_1, so ist $(AD) = AD \,.\, AD_1$; $(BC) = BC \,.\, BC_1$; $AD_1 = BC_1$, also

$$AD : BC = (AD) : (BC).$$

Dieses Verhältniss lässt sich leicht construiren, indem man zwei Linien so zieht, dass der Abschnitt zwischen den Kreisen A und B auf der einen gleich dem Abschnitt zwischen B und C auf der anderen ist. Man kennt nun auch das Verhältniss $AB : AC$ und kann die gesuchte Linie durch einen willkürlich gewählten Punkt A ziehen.

143. Von einem Viereck $ABCD$ sind AB, BC, CD und AC gegeben; wenn man AB in eine bestimmte Lage bringt, was wird dann der geometrische Ort für

α) den Eckpunkt D,

β) für den Mittelpunkt der Diagonale BD,

γ) für den Mittelpunkt der Linie, welche die Mitten der Diagonalen verbindet?

144. In einem Kreise mit dem Mittelpunkt O ist der feste Durchmesser AOB gezogen und eine Sehne BC, welche bis D verlängert ist, so dass $CD = BC$. Man suche den geometrischen Ort für den Durchschnittspunkt von OD und AC.

145. Man bestimme den geometrischen Ort für den zu einem festen Punkte A symmetrischen Punkt mit Beziehung auf

eine Gerade, welche sich um einen anderen festen Punkt B dreht.

Die Aehnlichkeitsmethode.

Die Methode, welche bei der Multiplication der Curven angewandt wurde, ist mit einbegriffen in eine allgemeinere, die sogenannte Aehnlichkeitsmethode. *Man wendet dieselbe an, sobald man, nach Fortnahme einer der gestellten Bedingungen, ein System von ähnlichen (und ähnlich liegenden) Figuren erhält.* Während bis hieher nach Theilen der Figur gesucht wurde, welche für sich vollständig bestimmt waren, *so hat man nun solche Theile der Figur zu suchen, deren Form bekannt ist.*

Die wichtigsten Fälle sind folgende:

a) *Eine Länge ist gegeben, im Uebrigen aber nur Winkel und Verhältnisse.* Man sieht dann von der gegebenen Länge ab und sucht eine Figur zu construiren, welche die gegebenen Winkel und Verhältnisse hat, indem man die Länge einer von den Linien der Figur willkürlich wählt. Die construirte Figur ist dann der gesuchten ähnlich, und man findet diese selber durch Einführung der gegebenen Linie.

146. Ein Dreieck zu construiren aus zwei Winkeln und einer Linie (Mediane, Höhe, Umfang u. s. w.).
Man construire ein beliebiges Dreieck, welches die gegebenen Winkel enthält, und zeichne darauf ein anderes diesem ähnliches Dreieck, welches die gegebene Linie enthält.

147. Ein Dreieck zu construiren aus A, a und $b : c$.
Ein beliebiges Dreieck mit dem Winkel A, in welchem die diesen Winkel einschliessenden Seiten in dem gegebenen Verhältniss stehen, muss dem gesuchten ähnlich sein.

148. Ein Quadrat aus dem Unterschiede zwischen Diagonale und Seite zu construiren.

149. Ein Dreieck zu construiren aus A, b und $a : c$.

150. Gegeben ist ein Centriwinkel ACB; man ziehe eine Tangente welche durch den Berührungspunkt und die Schenkel des Centriwinkels nach einem gegebenen Verhältniss getheilt werde.

Man beginne mit der Tangente, deren Grösse beliebig gewählt wird, und suche den Kreismittelpunkt. Die Figur hat nun die richtige Form und erhält leicht die richtige Grösse, wenn man den Kreismittelpunkt als Aehnlichkeitspunkt nimmt.

151. Ein Dreieck zu construiren aus A, h_a und dem Verhältniss der durch h_a auf a gebildeten Abschnitte.

152. Ein Dreieck aus seinen drei Höhen zu construiren.
Das Verhältniss der Seiten ist bekannt. Zieht man von einem beliebigen Punkte an einen Kreis drei Secanten, deren äussere Abschnitte gleich den gegebenen Höhen sind, so verhalten die ganzen Secanten sich zu einander wie die gesuchten Dreiecksseiten.

153. Man soll in einen Halbkreis ein Viereck beschreiben, welches einem gegebenen Viereck ähnlich ist, so dass zwei Eckpunkte auf den Durchmesser und zwei auf die Peripherie fallen.
Zuerst zeichne man einen Halbkreis um das gegebene Viereck. Die so erhaltene Figur ist der gesuchten ähnlich.

b) Bei den oben angeführten Aufgaben war die Lage der gesuchten Figur gleichgültig; *soll dagegen die Figur eine bestimmte Lage mit Beziehung auf gewisse gegebene Linien oder Punkte einnehmen, so muss man suchen eine solche Bedingung fortzunehmen, dass man ein System von ähnlich liegenden Figuren bekommt.* Dadurch werden die geometrischen Oerter für alle Punkte der Figur gerade Linien durch den Aehnlichkeitspunkt, und dadurch bestimmt man dann leicht die gesuchte Figur, indem man zuerst eine beliebige von den Figuren zeichnet und darauf die gegen diese ähnlich liegende Figur, welche zugleich die fortgenommene Bedingung erfüllt. Die Bedindung, welche man fortzunehmen hat, ist in der Regel entweder, *dass eine Linie eine bestimmte Länge haben soll*, oder *dass ein Punkt auf einer gegebenen Linie liegen soll*, oder *dass eine Linie durch einen gegebenen Punkt gehen soll.*

154. In ein gegebenes Dreieck ABC ein anderes abc zu beschreiben, so dass die Seiten desselben gegebenen Geraden parallel werden.
Nimmt man die Forderung fort, dass a auf BC fallen soll, so wird den übrigen Forderungen durch ein System von ähn-

lichen Dreiecken genügt, welche A als Aehnlichkeitspunkt haben. Zeichnet man irgend eines von diesen Dreiecken, etwa $a_1\ b_1\ c_1$, so wird Aa_1 die Seite BC in a schneiden.

155. Ein Quadrat zu beschreiben in ein gegebenes Dreieck, Sector oder Segment.

156. In ein gegebenes Dreieck ein Parallelogramm zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist.

157. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche mit zwei gegebenen Geraden gleiche Winkel bildet.

158. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, so dass drei gegebene durch einen Punkt gehende Gerade auf derselben zwei Stücke abschneiden, welche in einem gegebenen Verhältniss stehen.

Anstatt des gegebenen Punktes nehme man einen beliebigen Punkt auf einer der gegebenen Geraden. (117).

159. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche von den Schenkeln eines gegebenen Winkels Stücke abschneidet, die in einem gegebenen Verhältniss stehen.

160. In einem Dreieck soll man zu einer der Seiten eine Parallele ziehen, welche in einem gegebenen Verhältniss zu einem der Stücke steht, die sie von einer der anderen Seiten abschneidet.

161. Eine gerade Linie in gegebener Richtung zu ziehen, auf welcher die Schenkel zweier gegebener Winkel zwei Stücke abschneiden, die in einem gegebenen Verhältniss stehen.

Sind die Winkel BAC und DEF, und ist X der gesuchte Punkt auf EF, so wird X, wenn EF fortgenommen wird, eine gerade Linie durch den Punkt von DE beschreiben, der auf einer Geraden durch A in der gegebenen Richtung liegt.

162. Ein gleichschenkeliges Dreieck aus der zu einem der Schenkel gehörigen Höhe und Mediane zu construiren.

Das Dreieck, in dem die gegebenen Linien Seiten sind, kann sofort gezeichnet werden, und man kennt dann die Form des Dreiecks, in welchem die Mediane die eine Seite und die Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks die gegenüberliegende Ecke ist.

163. Auf einer Kreislinie ist ein Punkt A und ausserdem eine

Sehne BC gegeben. Man soll eine Sehne AD ziehen, welche BC in E so schneidet, dass DE und DC in einem gegebenen Verhältniss stehen.

Man kennt die Form des Dreiecks CED und zeichnet ein diesem ähnliches Dreieck, indem man C als Aehnlichkeitspunkt nimmt.

164. In einem Kreise sind zwei Radien gegeben; man ziehe eine Sehne, welche von diesen in drei gleiche Theile getheilt wird.

165. In ein Viereck einen Rhombus zu beschreiben, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel sind.

166. Ein Dreieck XYZ soll in ein gegebenes Dreieck beschrieben werden; man kennt die Richtung von YZ, den Punkt von BC, auf welchen X fallen soll und das Verhältniss $XY:XZ$.
Man betrachte BC als nicht vorhanden (aber nicht die Linie von A durch den auf BC gegebenen Punkt) und nehme A als Aehnlichkeitspunkt.

167. Eine Linie mit gegebener Richtung zu ziehen, welche das eine Paar gegenüberliegender Seiten eines Vierecks nach gleichem Verhältniss theilt (154).

168. In einem Dreieck soll eine Linie parallel der einen Seite so gezogen werden, dass sie die mittlere Proportionale zwischen den Stücken ist, in welche sie eine von den anderen Seiten theilt.

169. Gegeben sind ein Punkt B und zwei Parallelen, die eine durch A. Durch A und B sollen zwei neue Parallelen gezogen werden, welche in Verbindung mit den gegebenen 1) einen Rhombus bilden; 2) ein Parallelogramm mit gegebenem Umfang; 3) ein Parallelogramm mit gegebenem Verhältniss der Seiten.

170. In ein Dreieck einen Rhombus zu beschreiben, dessen einer Winkel mit einem Winkel des Dreiecks zusammenfällt.

171. In einen Kreis ein gleichschenkeliges Dreieck zu beschreiben, wenn die Summe aus Höhe und Grundlinie gegeben ist.
Man nehme $\triangle\ ABC$ als das verlangte an und führe die gegebene Summe in die Figur ein, indem man die Höhe BD bis E verlängert; dann muss $DE = 2\ AD$ sein, so dass die

Form von $\triangle ADE$ bekannt ist; die Aufgabe ist dann leicht gelöst, wenn man E als Aehnlichkeitspunkt nimmt.

172. In ein Dreieck ein Rechteck mit gegebenem Umfang zu beschreiben.

Man führe den halben Umfang in die Figur ein.

173. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, dessen einer Eckpunkt A auf einen gegebenen Punkt der einen Seite fällt; ferner ist $\angle A$ gegeben, und die diesem Winkel gegenüberliegende Seite soll einer gegebenen Geraden parallel sein.

174. In ein Dreieck ein Parallelogramm zu beschreiben, dessen Seiten in einem gegebenen Verhältniss stehen. Die eine Seite soll auf BC fallen und zwar der eine Endpunkt auf einen gegebenen Punkt.

175. Man soll auf der einen Seite eines gegebenen Dreiecks einen solchen Punkt bestimmen, dass die von ihm aus in gegebener Richtung bis an die beiden anderen Seiten gezogenen Geraden eine gegebene Summe haben.

176. Gegeben sind ein Punkt B und zwei Parallelen AX und CY. Man soll durch B eine Gerade ziehen, welche die beiden Parallelen in zwei Punkten X und Y so schneidet, dass AX und AY in einem gegebenen Verhältniss stehen.

Man betrachte B als nicht vorhanden, wähle auf AX den Punkt X_1 beliebig statt X, und bestimme den Y entsprechenden Punkt Y_1 auf AY.

177. Gegeben sind ein Winkel und ein Punkt. Man soll durch letzteren eine Gerade XY ziehen, welche die Schenkel des Winkels in X und Y so schneidet, dass der Abstand des Scheitelpunkts des Winkels von XY in einem gegebenen Verhältniss zu der XZ steht, welche eine gegebene Richtung hat und X mit einem Punkte Z auf dem anderen Schenkel des Winkels verbindet.

Man nehme P fort und wähle auf AX den Punkt X_1 beliebig statt X.

178. In einem Dreieck ABC eine Linie mit gegebener Richtung zu ziehen, welche AB in X, BC in Y so schneidet, dass AX und CY in einem gegebenen Verhältniss stehen.

Die Form von $AXYC$ ist bekannt; man nehme A als Aehnlichkeitspunkt und wähle B statt X.

179. In dem Dreieck ABC soll eine Transversale XY so gezogen werden, dass $BX = XY = YC$.
Die Form von $BXYC$ ist bekannt.
Auf diese Aufgabe lässt sich folgende zurückführen: Ein Dreieck zu construiren aus A, $a + b$ und $a + c$.

180. In einem Dreieck ABC soll eine Transversale XY parallel der BC gezogen werden, so dass eine gegebene homogene Relation zwischen XY, XB und YC statt findet (z. B. $\overline{XY}^2 = \overline{XB} . \overline{YC}$; $\overline{XY}^2 = \overline{XB}^2 + \overline{YC}^2$ u. s. w.).

181. Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt A geht und zwei gegebene Gerade, die sich in O schneiden, berührt.
Ein beliebiger Kreis, welcher die beiden Geraden berührt, muss gegen den gesuchten ähnlich liegen, wenn O der Aehnlichkeitspunkt ist. Die Linie OA muss den gezeichneten Kreis in einem Punkte schneiden, welcher dem Punkte A in dem gesuchten Kreise homolog ist. Die zwei Durchschnittspunkte entsprechen deshalb zwei Lösungen. Zieht man in dem gezeichneten Kreise Radien nach den Durchschnittspunkten, so erhält man die Mittelpunkte der gesuchten Kreise, wenn man durch A Parallelen zu diesen Radien zieht.

182. Man soll auf einer gegebenen Geraden einen Punkt bestimmen, der gleiche Abstände von einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Geraden hat. (Durchschnitt zwischen einer Geraden und einer Parabel).
Man nehme den gegebenen Punkt fort und wähle den Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden zum Aehnlichkeitspunkt. In Wirklichkeit ist die Aufgabe dieselbe, wie die vorhergehende.

183. Auf einer gegebenen Geraden soll man einen Punkt bestimmen, dessen Abstände von einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Verhältnisse stehen. (Durchschnitt zwischen einer Geraden und einem Kegelschnitt, der durch Brennpunkt, Leitlinie und Excentricität bestimmt ist). An Stelle der Senkrechten von dem gesuchten Punkte

auf die gegebene Gerade kann man eine Gerade nehmen, welche mit der gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bildet, ohne dass die Lösung wesentlich verändert wird.

184. Einen Kreis zu zeichnen, der seinen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden hat, durch einen gegebenen Punkt geht, und von dem eine gegebene Gerade einen Bogen mit gegebenem Centriwinkel abschneidet.

185. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

186. In einem Dreieck ABC eine Linie mit gegebener Richtung zu ziehen, welche AB in X, BC in Y so schneidet, dass XY und YA eine gegebene Summe haben.

187. Ein Dreieck zu construiren aus a, B und $b - h_a$.
Man verlängere h_a um das gegebene Stück $b - h_a$ über a hinaus. (182).

188. Ein Dreieck zu construiren aus A, $a - c$ und $h_b + CD$, wo D den Fusspunkt von h_b bedeutet.
Man verlängere CD bis E, so dass $DE = h_b$, und BA bis F, so dass $AF = a - c$. Wie leicht ersichtlich kann man CE hinlegen, ebenso $\angle CEB = 45°$ und eine Gerade durch F, parallel der CE. Darauf bestimme man B (183).

189. Ein Dreieck zu construiren aus a, A und $b + nc$, wo n eine gegebene Zahl ist.

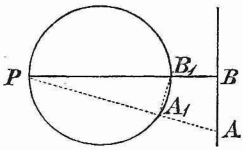
190. Ein Dreieck zu construiren aus A, $b + c$ und $a + c$.
Man verlängere b um c über A hinaus bis D, und c um a über B hinaus; dann trage man CD ab, ziehe DB und bestimme B.

191. In ein gegebenes Dreieck ABC einen Halbkreis zu beschreiben, welcher BC in einem gegebenen Punkt P berührt und dessen beiden Endpunkte auf den beiden anderen Seiten liegen.
Multiplicirt man AB oder AC mit -1 mit Beziehung auf P, so wird die Aufgabe auf 173 reducirt.

Inverse Figuren.

Eine Gerade drehe sich um einen festen Punkt P (das Inversionscentrum), während zugleich ein beweglicher Punkt A der

Geraden einer gegebenen Curve K folgt. Auf der Geraden bestimme man einen Punkt A_1 derartig, dass $PA \,.\, PA_1 = I$, wo I (die Inversionspotenz) constant ist (positiv oder negativ). Der Punkt A_1 wird dann eine Curve K_1 beschreiben. Von den Curven K und K_1 heisst die eine die *inverse* Curve der anderen (die transformirte durch reciproke Radien). A und A_1 heissen *correspondirende* Punkte.



Die inverse Curve einer geraden Linie ist ein Kreis durch das Inversionscentrum.

PB sei senkrecht auf der gegebenen Geraden und B_1 sei der B correspondirende Punkt, während A und A_1 zwei andere correspondirende Punkte seien. Aus

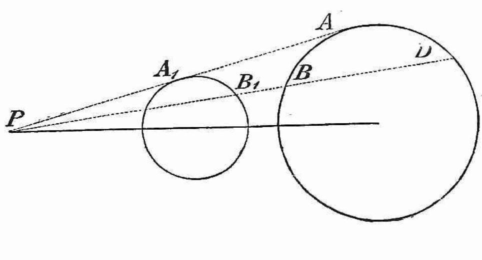
$$PA \,.\, PA_1 = PB \,.\, PB_1.$$

folgt dann, dass die Dreiecke BPA und A_1PB_1 ähnlich sind, so dass $\angle\ PA_1B_1 = R$. Der geometrische Ort für A_1 ist deshalb ein Kreis mit dem Durchmesser PB_1.

Geht die gegebene Gerade durch das Inversionscentrum, so ist sie ihre eigene inverse Curve.

Durchläuft A_1 die Kreislinie, so wird A die Gerade durchlaufen; *die inverse Curve eines durch das Inversionscentrum gehenden Kreises ist deshalb eine Gerade.*

Die inverse Curve eines Kreises, welcher nicht durch das Inversionscentrum geht, ist ein Kreis, und das Inversionscentrnm ist ein Aehnlichkeitspunkt für diesen und den gegebenen.



B und B_1 seien zwei correspondirende Punkte, während PB den Kreis zum zweiten Male in D schneidet. Beide Producte $PB \,.\, PB_1$ und $PB \,.\, PD$ sind dann constant, und deshalb ist auch das Verhältniss $PB_1 : PD$ constant. Man findet deshalb den geometrischen Ort für B_1, wenn man den geometrischen Ort für D (den gegebenen Kreis) mit einer Constanten mit Beziehung auf P multiplicirt. Der Ort ist also ein Kreis, ähnlich liegend gegen den gegebenen, mit P als Aehnlichkeitspunkt. Ist die Inversionspotenz gleich der Potenz von P mit Beziehung auf den gegebenen Kreis, so wird dieser seine eigene inverse Curve.

Es wurde bewiesen, dass B und B_1 gleichzeitig Kreislinien durchlaufen; indessen muss man beachten, dass sie nicht gleichzeitig ähnliche Bogen durchlaufen; dagegen durchlaufen B_1 und D ähnliche und ähnlich liegende Bogen.

Nun kann man folgende allgemeine Aufgabe lösen:

Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, von welcher zwei gegebene Curven K und K_1 zwei Stücke PX und PY mit gegebenem Product abschneiden.

Nimmt man nämlich K_1 fort, so wird der geometrische Ort für Y die inverse Curve von K mit P als Inversionscentrum und dem gegebenen Product als Inversionspotenz. Y wird also als Durchschnittspunkt zwischen dieser Curve und K_1 bestimmt. Die Aufgabe lässt sich mit Zirkel und Lineal lösen, sobald die gegebenen Curven aus geraden Linien und Kreisbogen zusammengesetzt sind.

192. Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche die Schenkel eines gegebenen Winkels in A und B so schneidet, dass $PA \,.\, PB = a^2$, wo a eine gegebene Strecke ist.

193. Gegeben ist ein Kreis, in demselben ein Durchmesser und ein Punkt P; man soll durch P eine Gerade ziehen, welche den Kreis in X und den Durchmesser in Y so schneidet, dass $PX \,.\, PY = a^2$.

194. Durch den einen Durchschnittspunkt zweier Kreise eine Gerade so zu ziehen, dass die durch die beiden Kreise abgeschnittenen Sehnen ein gegebenes Product haben.

195. Man soll ein Dreieck ABC construiren; bekannt sind: Die Seite des einbeschriebenen Quadrats, von dem zwei Eckpunkte auf BC liegen, $\angle A$ und das Product der beiden Abschnitte in welche AB durch einen Eckpunkt des Quadrates getheilt wird.

196. Ein Dreieck zu construiren aus a, A und $BD \,.\, BA$, wo D der Fusspunkt von h_c ist.

Oft wendet man mit Vortheil Inversion an, wenn man eine Construction ausführen oder einen Beweis führen soll, da die inverse Figur oft einfacher ist als die gegebene; namentlich sind hier folgende Verbindungen zwischen zwei inversen Figuren zu merken:

a) *Falls zwei Curven sich in A schneiden oder berühren, werden die inversen Curven sich in dem A correspondirenden Punkte A_1 schneiden oder berühren.*

Liegt nämlich A auf beiden Curven, so muss A_1 auf beiden inversen Curven liegen, und fallen zwei Durchschnittspunkte in A zusammen, so müssen die entsprechenden in A_1 zusammenfallen.

Fällt A auf das Inversionscentrum so gilt der Satz nicht, indem dieser Punkt im Allgemeinen nicht einem Punkt, sondern der unendlich fernen Geraden entspricht.

b) *Schneiden zwei Curven sich in A unter einem gewissen Winkel* (dem Winkel zwischen den Tangenten), *so werden die inversen Curven sich in A_1 unter demselben Winkel schneiden*, (mit entgegengesetztem Vorzeichen, sobald man den Winkel von einer bestimmten der beiden Curven bis zur anderen misst).

Man sieht leicht (Fig. S. 35), dass der Satz gilt, sobald die eine Curve ein Kreis und die andere eine Gerade durch das Inversionscentrum ist. Derselbe gilt dann auch für zwei beliebige Kreise, denn eine gerade Linie von A nach dem Inversionscentrum geht durch A_1. Hierdurch zeigt man dann wieder leicht, dass der Satz für zwei beliebige Curven gilt, denn diese bilden in A denselben Winkel mit einander wie zwei beliebige Kreise, von denen jeder eine der beiden Curven in A berührt.

Anwendungen.

197. Einen Kreis zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Kreise berührt.

Durch Inversion mit P als Inversionscentrum wird die Aufgabe darauf reducirt, an zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen. Die Inversionspotenz kann so gewählt werden, dass der eine gegebene Kreis nicht verändert wird.

198. Man beweise, dass ein beliebiger Kreis durch die Durchschnittspunkte zweier Kreise ein System von Kreisen, welche die beiden gegebenen berühren (darunter eine gemeinschaftliche Tangente), unter gleichen Winkeln schneidet.

Der Satz wird durch Inversion aus folgendem gebildet: Eine beliebige gerade Linie durch den Aehnlichkeitspunkt eines Systems ähnlich liegender Kreise schneidet alle Kreise unter gleichen Winkeln.

199. Einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise berührt, welche alle durch denselben Punkt gehen.

200. In einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, dessen Seiten jede durch einen gegebenen Punkt gehen.

Die Seiten AB, BC, CD und DA mögen beziehungsweise durch die Punkte a, b, c und d gehen. Man benutze diese Punkte als Inversionscentra, indem man für jeden Punkt die Potenz desselben mit Beziehung auf den Kreis als Inversionspotenz nimmt. A wird dann durch vier successive Inversionen um a, b, c und d wieder auf A fallen. P sei der Punkt, welcher durch drei Inversionen um a, b und c auf d fällt; man findet diesen Punkt, indem man nach und nach d um c, b und a invertirt. Jeder Kreis oder jede Gerade durch P geht durch Inversion um a, b und c über in einen Kreis durch d und darauf, durch Inversion um d, über in eine Gerade. Die Gerade PA geht deshalb nach den vier Inversionen über in eine Gerade P_1A, wo P_1 der Punkt ist, welchen man erhält, wenn man a nach und nach um b, c und d invertirt. Da nun der Winkel zwischen PA und dem Kreise weder Grösse noch Vorzeichen bei den vier Inversionen verändert, und der Kreis liegen bleibt, müssen PA und P_1A eine gerade Linie bilden.

Die Lösung wird hiernach folgende: Man bestimme P_1 durch Inversion von a um b, c und d; darauf P durch Inversion von d um c, b und a. Die Linie PP_1 schneidet dann den Kreis in A.

Die Lösung lässt sich leicht auf jede Figur mit gerader Seitenzahl ausdehnen.

201. In einen Kreis ein Dreieck ABC zu beschreiben, so dass jede Seite durch einen gegebenen Punkt (a, b und c) geht.
Man verfährt wie in der vorigen Aufgabe, wobei man nur drei Inversionen anstatt vier erhält. Die Folge hiervon ist indessen, dass PA und P_1A keine gerade Linie bilden, da die Winkel mit dem Kreise entgegengesetzte Vorzeichen bekommen. Man invertire deshalb einen der Punkte, in welchen Pa den Kreis schneidet, um a, b und c; der dadurch gefundene Punkt sei Q. Die Linien aP und PA sind dann nach der Inversion übergegangen in QP_1 und P_1A, welche deshalb denselben Winkel mit einander bilden wie die beiden ersten Linien. Diese Winkel haben dasselbe Vorzeichen (den Grund hierfür begreift man leicht, wenn man den Inversionen folgt; die geraden Linien entsprechen sich paarweise, aber ihre Durchschnittspunkte entsprechen sich nicht), und die vier Linien begrenzen deshalb ein Sehnenviereck, so dass A durch einen Kreis durch P, P_1 und den Durchschnittspunkt von aP und P_1Q bestimmt wird.
Die Lösung lässt sich leicht auf jedes Polygon von ungerader Seitenzahl ausdehnen.

Geometrische Oerter im Allgemeinen.

Ausser den geometrischen Oertern, welche im Vorhergehenden Erwähnung fanden, giebt es viele, welche häufig angewandt werden, deren einzelne Aufführung aber zu weitläufig werden würde. Man muss deshalb bei jeder Aufgabe, bei welcher die früher erwähnten Oerter sich nicht anwenden lassen, selbst suchen gerade Linien oder Kreise zu finden, welche geometrische Oerter für die Punkte der Figur sind. Eine genau ausgeführte Zeichnung kann hier ein, allerdings wenig wissenschaftliches, aber sehr practisches Hülfsmittel abgeben.

Häufig kommt es vor, dass man, wenn man eine Figur in einer gewissen bestimmten Lage zeichnen soll, dieselbe nach Fortnahme einer der gestellten Bedingungen in einer zum Theil willkührlichen Lage zeichnen, und darauf durch paralleles Verschieben oder durch Drehen um einen gewissen Punkt in die verlangte Lage bringen kann Die geometrischen Oerter für die Punkte der Figur sind dann beziehungsweise parallele Gerade oder concentrische Kreise.

Beispiele.

202. Einen Kreis mit gegebenem Radius zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen geraden Linie liegt, und der eine andere gegebene Gerade unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet.
Man zeichne den Kreis, so dass er an einer beliebigen Stelle von der gegebenen Geraden die gegebene Sehne abschneidet; darauf kann man ihn in die verlangte Lage bringen, indem man den Mittelpunkt eine der gegebenen parallele Gerade beschreiben lässt.
203. Einen Kreis mit gegebenem Radius zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Kreisperipherie liegt, und der einen anderen Kreis unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet.
204. Einen Kreis mit gegebenem Radius zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade unter einer gegebenen Sehne schneidet.
205. Ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck congruent ist, so dass eine Seite desselben auf eine gegebene Gerade und die gegenüberliegende Ecke auf eine andere gegebene Gerade fällt.
206. In einen gegebenen Kreisabschnitt ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreieck congruent ist.
207. Einen Kreis mit gegebenem Radius zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden oder zwei Kreise unter gegebenen Sehnen schneidet.
208. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, von welcher zwei gegebene Parallelen oder zwei gegebene concentrische Kreise ein Stück von gegebener Länge abschneiden.
209. Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, so dass das Stück derselben, welches zwischen zwei concentrischen Kreisen ab-

geschnitten wird, von dem Mittelpunkt dieser aus unter einem gegebenen Winkel gesehen wird.

210. Gegeben sind zwei Kreise; man soll einen solchen Punkt bestimmen, dass die von ihm an die beiden Kreise gezogenen Tangenten einen gegebenen Winkel einschliessen, und die eine eine gegebene Länge hat.
Man zeichne die Tangente, deren Länge gegeben ist, so dass sie den einen Kreis in einem beliebigen Punkte berührt und trage an dem Endpunkt derselben den gegebenen Winkel an; dann drehe man den anderen Kreis um den Mittelpunkt des ersten, bis er die soeben gezogene Linie berührt, und führe ihn dann nebst der Tangente in seine frühere Stellung zurück.

211. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Parallelen berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

212. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, von welcher zwei gegebene Paare von Parallelen gleich grosse Stücke abschneiden.
Die Linie muss der Diagonale des Parallelogrammes parallel sein, welches von den beiden Paaren von Parallelen gebildet wird.

213. Zwei Kreise mit gegebenen Radien zu zeichnen, so dass der eine eine Gerade unter einer gegebenen Sehne, der andere eine zweite Gerade unter einer anderen gegebenen Sehne schneidet; zugleich sollen die Kreise sich berühren und die an den Berührungspunkt gezogene gemeinsame Tangente eine gegebene Richtung haben.

214. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck mit gegebener Seite zu beschreiben, so dass die zu dieser Seite gehörige Mediane durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Länge hat.

215. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, von dem eine Seite und die zu einer der anderen Seiten gehörige Mediane gegeben ist, wenn zugleich der Durchschnittspunkt der Medianen auf einen gegebenen Durchmesser fallen soll.

216. In einem gegebenen Kreise soll man eine Sehne von gegebener Länge ziehen, so dass sie von einem gegebenen Durchmesser nach gegebenem Verhältniss getheilt werde.

217. In ein gegebenes Viereck ein Parallelogramm zu beschreiben, dessen Seiten gegebene Richtungen haben.
Nimmt man eine von den Seiten des Vierecks fort, so beschreibt die freie Ecke des Parallelogramms eine gerade Linie.

218. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche drei gegebene gerade Linien so schneidet, dass die drei Durchschnittspunkte und der gegebene Punkt harmonisch liegen.
Nimmt man eine der gegebenen Geraden fort, so beschreibt der freie Punkt eine gerade Linie durch den Durchschnittspunkt der beiden anderen gegebenen Geraden.

219. Ein Dreieck zu construiren aus w_a, B und dem Abstande von C von w_a.
Man lege w_a hin und errichte eine Senkrechte auf w_a in A. Die Aufgabe ist nun auf die vorhergehende reducirt, indem nur der Bogen, welcher $\angle A$ fasst, an die Stelle der einen gegebenen Geraden getreten ist.

B. Geometrische Oerter für Linien.

Die gerade Linie ist ebenso wie der Punkt dadurch bestimmt, dass sie zwei Bedingungen erfüllen soll, und ebenso wie dieser wird sie zum Theil durch eine Bedingung bestimmt, da es immer die eine oder andere Curve giebt, welche alle Linien, die diese Bedingung erfüllen, berühren müssen. Nach Analogie kann man deshalb diese Curve den geometrischen Ort für die Linien nennen. In besonderen Fällen kann diese Curve ein Punkt werden, so dass also alle Linien von der verlangten Eigenschaft durch diesen Punkt gehen. Mit Ausnahme dieses Falles kommen hier nur solche Fälle in Betracht, in denen die Curve ein Kreis wird.

Sofern man also zwei geometrische Oerter für eine Linie bestimmen kann, ist die Aufgabe auf eine der folgenden zurückgeführt:

1. Eine gerade Linie durch zwei gegebene Punkte zu ziehen.
2. Von einem gegebenen Punkte eine Tangente an einen Kreis zu ziehen. (16).

3. An zwei Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen. (137).

Im Folgenden werden die wichtigsten geometrischen Oerter für Linien angeführt.

l. *Der geometrische Ort für alle gleich grossen Sehnen desselben Kreises ist ein dem gegebenen concentrischer Kreis.*

Man trage die Sehne von gegebener Länge in den Kreis ein und zeichne den concentrischen Kreis, welcher diese berührt.

m. *Der geometrische Ort für die Linien, deren Abstände von zwei festen Punkten in einem gegebenen Verhältniss stehen, ist der Punkt, welcher die Verbindungslinie der gegebenen Punkte nach dem gegebenen Verhältniss theilt.* Die Abstände sind mit Vorzeichen zu nehmen.

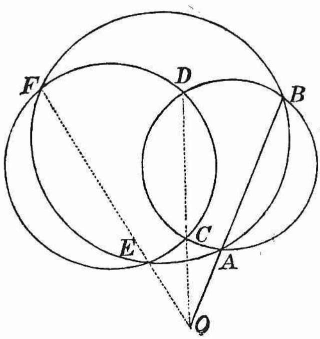
n. *Der geometrische Ort für die Linien, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten eine gegebene Summe haben, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Mitte der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte liegt.*

Soll *die Differenz der Abstände* gleich einer gegebenen Linie sein, so besteht der geometrische Ort aus zwei unendlich fernen Punkten, und die Linien bilden also zwei Systeme von Parallelen. Die Richtung dieser wird durch die Tangenten bestimmt, welche man von dem einen Punkt an den Kreis zieht, welcher um den anderen Punkt als Mittelpunkt mit der gegebenen Linie als Radius beschrieben wird.

Anmerkung. Die Abstände sind hier mit Vorzeichen genommen. Wird der Abstand von einem bestimmten der gegebenen Punkte zum Minuendus genommen, so wird der geometrische Ort nur von einem der beiden unendlich fernen Punkte gebildet.

o. *Zeichnet man in einem Kreise Peripheriewinkel auf demselben Bogen und theilt alle in dieselben beiden Winkel, so wird der geometrische Ort für die Theilungslinien der Punkt des Bogens, welchen man erhält, wenn man einen beliebigen der Peripheriewinkel auf die gegebene Weise theilt.*

p. *Zeichnet man durch zwei gegebene Punkte Kreise, welche einen gegebenen Kreis schneiden (oder berühren), so ist der geometrische Ort für die gemeinschaftlichen Sehnen ein Punkt auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte.*



Die gegebenen Punkte seien A und B; ein beliebiger durch diese beiden gezogener Kreis schneide den gegebenen Kreis in C und D. Die Linie CD wird dann die AB in dem gesuchten geometrischen Ort O schneiden; denn schneidet ein anderer beliebiger Kreis, welcher durch A und B geht, den festen Kreis in den Punkten E und F, so sind die Linien FE, DC und BA die Potenzlinien der drei Kreise, und da diese sich in einem Punkte schneiden, muss EF durch O gehen.

Beispiele.

220. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche von einem gegebenen Kreise unter einer Sehne von gegebener Länge geschnitten wird.
Die Aufgabe wird durch I auf 16 reducirt.

221. Eine gerade Linie zu ziehen, welche von zwei gegebenen Kreisen unter gegebenen Sehnen geschnitten wird.

222. Eine gerade Linie zu ziehen, welche eine gegebene Gerade in X und einen gegebenen Kreis in Y und Z so schneidet, dass XY und YZ gegebene Längen haben.
Wird durch I auf 11 reducirt.

223. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist, so dass die eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

224. In einem gegebenen Kreise eine Sehne von gegebener Länge und Richtung zu ziehen.

225. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen eine Seite einer gegebenen Linie gleich und parallel ist, wenn zugleich die Halbirungslinie des gegenüberliegenden Winkels durch einen gegebenen Punkt gehen soll.
Die eine Seite erhält man sofort (I); man kennt dann zwei Punkte von der Halbirungslinie des gegenüberliegenden Winkels.

226. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, wenn man die Richtung der einen Seite kennt, die Halbirungslinie des gegenüberliegenden Winkels, sowie einen Punkt dieser letzteren.
Die gegebene Richtung der einen Seite bestimmt die Mitte des zugehörigen Bogens, und dadurch ist die Halbirungslinie des gegenüberliegenden Winkels bestimmt.

227. Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Gerade ziehen, deren Abstand von einem gegebenen Punkt gleich der Summe ihrer Abstände von zwei anderen gegebenen Punkten ist.

228. Auf einer gegebenen Kreisperipherie sind die Punkte A und B gegeben; man soll durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade ziehen, welche den Kreis in den beiden Punkten X und Y so schneidet, dass AX und BY einen gegebenen Winkel mit einander bilden. (220).

229. Einen gegebenen Kreisbogen in zwei Stücke zu theilen, deren Sehnen in einem gegebenen Verhältniss stehen.
Der Winkel, welchen die gesuchten Sehnen mit einander bilden, wird von der Linie halbirt, welche die Sehne des gegebenen Bogens nach dem gegebenen Verhältniss theilt und durch die Mitte des Bogens geht, welcher den gegebenen Bogen zu einem Vollkreise ergänzt.

230. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche durch den Durchschnittspunkt zweier gerader Linien geht, ohne dass man die letzteren bis zum Durchschnitt verlängert.
Zieht man zwischen den gegebenen Linien zwei Parallelen, die eine durch den gegebenen Punkt, so theilt die gesuchte Gerade beide Parallelen nach demselben Verhältniss.

231. Ein Dreieck zu construiren, wenn man die Stücke kennt, in welche $\angle A$ und a durch eine Linie AD getheilt werden.
Man zeichne den umbeschriebenen Kreis mit a als Sehne; dann kennt man zwei Punkte der AD. (o).

232. Ein Dreieck zu construiren aus h_a, w_a und m_a.
Die rechtwinkeligen Dreiecke, welche durch die drei gegebenen Linien bestimmt sind, lassen sich sofort zeichnen; man kennt nun A und die Gerade auf der a liegt; es kommt darauf an, die Punkte B und C zu bestimmen. Diese erhält man, wenn

man den umbeschriebenen Kreis des Dreiecks construirt. Verlängert man nämlich w_a, und errichtet eine Senkrechte auf der Mitte von a, so müssen diese Linien sich auf der Mitte des zu a gehörigen Bogens schneiden; hat man diesen Punkt gefunden, so ist der Kreis leicht gezeichnet.

233. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten eine gegebene Summe haben.

234. Gegeben ist ein Viereck $ABCD$; man soll durch dasselbe eine Gerade ziehen, welche gleichen Abstand von A und C, sowie gleichen Abstand von B und D hat. (Die gleich grossen Abstände mit entgegengesetzten Vorzeichen).

235. In einen gegebenen Kreis ein Viereck $ABCD$ zu beschreiben, wenn die Diagonale AC gegeben ist, ferner der Winkel zwischen den Diagonalen, und wenn sich zugleich in das gesuchte Viereck ein Kreis beschreiben lassen soll.

Man trage die Diagonale AC als Sehne in den Kreis ein; dann kennt man die Richtung von BD und folglich auch die Mitten der zu BD gehörigen Bogen. Die Linien, welche die Winkel A und C halbiren, lassen sich dann ziehen und müssen sich in dem Mittelpunkte des in das Viereck beschriebenen Kreises schneiden. Die Linien, welche die Winkel B und D halbiren, müssen durch diesen und durch die Mitten der zu AC gehörigen Bogen gehen; sie lassen sich also jetzt ziehen, und dadurch sind B und D bestimmt.

236. Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seiten einzeln durch einen der vier Punkte A, B, C und D gehen.

Ueber AB und CD als Durchmesser beschreibe man Kreise, welche also geometrische Oerter für zwei Eckpunkte des Quadrats sind; da die Diagonale des Quadrats die Winkel halbirt, muss dieselbe durch die Mitten von den beiden Halbkreisbogen gehen und lässt sich also sofort ziehen. Durch diese werden zwei Eckpunkte des Quadrats bestimmt und dadurch leicht die beiden anderen.

237. Ein Viereck zu zeichnen, welches einem gegebenen ähnlich ist, und dessen Seiten einzeln durch vier gegebene Punkte gehen.

Diese Aufgabe ist eine leichte Erweiterung der vorhergehenden und lässt sich auf ähnliche Weise lösen, da die Diagonalen die Winkel des Vierecks in bekannte Theile theilen.

238. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen, welcher einen gegebenen Kreis berührt.

Durch die beiden gegebenen Punkte A und B ziehe man einen beliebigen Kreis, welcher den gegebenen schneidet. Die gemeinschaftliche Sehne schneidet AB in einem Punkte, welcher auch auf der gemeinschaftlichen Tangente an den gegebenen und den gesuchten Kreis liegen muss; wenn man diese Tangente zieht, erhält man also den Berührungspunkt der beiden Kreise und darauf leicht den gesuchten Mittelpunkt.

Diese Aufgabe kann auch folgendermassen ausgedrückt werden: Gegeben sind ein Kreis und zwei Punkte A und B; man soll auf der Peripherie des Kreises einen Punkt X bestimmen so dass XA und XB den Kreis in zwei Punkten schneiden, deren Verbindungslinie der AB parallel ist.

239. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis unter einer gegebenen Sehne schneidet.

240. Ein Sehnenviereck zu construiren aus CA, BD, $\angle A$ und $\angle ACB$.

Man lege BD hin und bestimme den Punkt A durch **e** und **o**.

241. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis so schneidet, dass die gemeinschaftliche Sehne einen anderen gegebenen Kreis berührt.

242. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis so schneidet, dass die Abstände der gemeinschaftlichen Sehne von zwei gegebenen Punkten in einem gegebenen Verhältniss stehen.

243. Ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen congruent ist, so dass zwei Seiten durch gegebene Punkte gehen und die Halbirungslinie des von diesen gebildeten Winkels einen gegebenen Kreis berührt.

244. Gegeben sind zwei Parallelen, auf der einen ein Punkt A, auf der anderen ein Punkt B; man soll durch einen ge-

gebenen Punkt P eine Gerade ziehen, welche die Parallelen in X und Y so schneidet, dass AX und BY in einem gegebenen Verhältniss stehen.

245. Gegeben sind ein Kreis und drei Punkte, A, B und C. Man soll durch A und B zwei Sehnen ZX und VY ziehen, so dass XY und ZV durch C gehen.

Zweites Kapitel.

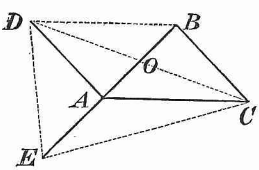
Umformung der Figur.

Die Bedingung für die Anwendbarkeit der in dem vorhergehenden Abschnitt entwickelten Methoden ist, dass die gegebenen Stücke in der gezeichneten Figur in einigermassen einfachen Verbindungen mit einander vorkommen, und namentlich, dass sie ziemlich *beisammen liegen*, da es dadurch oft gelingt, einen grösseren Theil der Figur gleich zu zeichnen, so dass die Aufgabe sich darauf reducirt, einen Punkt oder eine Linie zu bestimmen. Sobald dieses nicht der Fall ist, kann man nicht unmittelbar geometrische Oerter anwenden; das Vorhergehende selber führt aber leicht zu dem Princip, welches man dann zu befolgen hat und welches die Grundlage für die nachfolgende Auseinandersetzung bilden soll. *Man muss nämlich suchen aus der gezeichneten Figur eine andere zu bilden, in der die gegebenen Stücke so zusammengerückt sind, dass man die Construction ausführen kann.* Ist diese Figur gezeichnet, so kann man in der Regel leicht auf die verlangte Figur zurückgehen. Die Methoden, welche zu dieser Umformung dienen können, sind:

A. Parallelverschiebung,
B. Umlegung und
C. Drehung.

A. Parallelverschiebung.

Man bedient sich dieser Methode um die gegebenen Stücke zusammen zu rücken, indem man einige Linien der Figur in neue Lagen verschiebt, die den ursprünglichen parallel sind. Im Besonderen wird sich diese Methode oft anwenden lassen, wenn man von der Figur zwei Linien und den Winkel, welchen sie mit einander bilden, kennt, da man, wenn man die eine Linie so verschiebt, dass ihr einer Endpunkt mit dem einen Endpunkt der anderen zusammenfällt, ein Dreieck erhält, welches sich sofort construiren lässt. Bei einem beliebigen Polygon kann man die Stücke in der Weise zusammenbringen, dass man alle Seiten derartig verschiebt, dass sie alle von demselben Punkte ausgehen. Die Linien können in solcher Richtung gezogen werden, dass die Winkel welche sie mit einander bilden, gleich den Aussenwinkeln des ursprünglichen Polygons sind, deren Summe bekanntlich 4 Rechte beträgt. Verbindet man die Endpunkte der Linien, so erhält man ein neues Polygon, welches oft leichter zu construiren ist als das ursprüngliche. Die folgenden speciellen Fälle werden dieses genauer erläutern.



Das Dreieck. Durch Verschiebung bildet man aus dem Dreieck ABC das Dreieck CDE, $AE = AB$, und $DB = AC$. Die Linien, welche von A ausgehen, sind dann die Seiten des ursprünglichen Dreiecks, und die Winkel bei A die Aussenwinkel desselben. Da $DC = 2\ CO$, so sind die Seiten des neuen Dreiecks die doppelten Medianen des ursprünglichen, während umgekehrt A der Durchschnittspunkt der Medianen des neuen Dreiecks ist. Da B und D gleiche Entfernung von AC haben, so werden die Höhen des Dreiecks ABC auch Höhen der in A zusammenstossenden Dreiecke sein. Da die Winkel bei paralleler Verschiebung nicht verändert werden, werden alle Winkel, welche Seiten, Höhen und Medianen mit einander bilden, auch in der neuen Figur vorkommen. Da $\triangle\ DAC = \triangle\ ABC$, ist der Flächeninhalt von DEC dreimal so gross wie der von ABC. Sobald man $\triangle\ DEC$ oder eins der kleinen Dreiecke zeichnen kann, kann man leicht von diesem auf das $\triangle\ ABC$ zurückkommen.

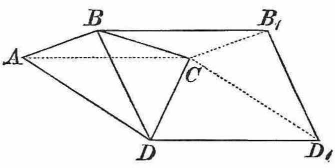
Beispiele.

246. Ein Dreieck aus seinen drei Medianen zu construiren.
Man zeichne DEC und bestimme darauf A und B.

247. Ein Dreieck zu construiren aus m_c, h_a und h_b.
Man zeichne DOC (35); darauf ziehe man $OB = OA$.

Ein Dreieck zu construiren aus

248. h_a, m_a und m_b.
249. h_a, m_b und h_c.
250. h_a, m_b und m_c.
251. A, h_a und m_a.
252. h_a, m_a und $h_c : b$.
253. A, h_a und m_b.
254. m_a, m_c und $\angle\ (m_b,\ a)$.
255. m_a, h_a und h_b.
256. h_a, h_b und $\angle\ (m_a,\ b)$.
257. h_a, a und $\angle\ (m_b,\ c)$.
258. h_a, $b + c$ und $h_b : h_c$.



Das Viereck. Beim Viereck kann man AB und AD bis in die Lagen CB_1 und CD_1 verschieben; das gebildete Parallelogramm BB_1D_1D wird dann viele Stücke des Vierecks in einfacher Verbindung mit einander enthalten:

Die von C ausgehenden Linien sind die Seiten des Vierecks.

Die um C herum liegenden Winkel sind die Winkel des Vierecks.

Die Seiten des Parallelogramms sind die Diagonalen des Vierecks, und die Winkel desselben, die Winkel zwischen den Diagonalen des Vierecks.

Die Winkel zwischen den von C ausgehenden Linien und den Seiten des Parallelogrammes sind die Winkel zwischen den Diagonalen und Seiten des Vierecks.

Der Flächeninhalt des Parallelogrammes ist doppelt so gross wie der des Vierecks.

Die Diagonalen des Parallelogramms sind doppelt so gross wie die Linien, welche die Mitten der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks mit einander verbinden; das ergiebt sich leicht wenn man das Parallelogramm betrachtet, welches entsteht, wenn man die Mitten der Seiten des Vierecks der Reihe nach mit einander verbindet.

Es kommen also in dem Parallelogramm alle die Grössen vor, welche man im Allgemeinen beim Viereck betrachtet. Die Verschiebung erweist sich namentlich nützlich, wenn man die Diagonalen und deren Winkel kennt, denn in diesem Falle lässt das Parallelogramm sich sofort zeichnen, und dadurch wird die Aufgabe darauf reducirt, den Punkt C zu bestimmen. Für diesen giebt es sofort zwei geometrische Oerter, sobald man von den oben genannten Stücken zwei oder eine gewisse Abhängigkeit zwischen mehreren kennt (z. B. das Verhältniss zweier Seiten, die Summe oder Differenz ihrer Quadrate u. s. w.). Die zahlreiche Klasse von Aufgaben, welche sich hierdurch ohne weiteres lösen lässt, wird noch ferner vermehrt, wenn man beachtet, dass man in einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten als Diagonalen und die Diagonalen als Seiten betrachten kann; dadurch lassen sich nämlich alle entsprechenden Aufgaben lösen, bei denen statt der Diagonalen und deren Winkel zwei gegenüberliegende Seiten und deren Winkel gegeben sind.

Zur genaueren Darlegung der Methode soll in dem Folgenden die Anwendung derselben auf einige Aufgaben verschiedener Art gezeigt werden.

Beispiele.

259. Ein Trapez aus den vier Seiten zu construiren.
Verschiebt man die eine der nicht parallelen Seiten bis an die andere, so entsteht ein Dreieck, in dem alle drei Seiten bekannt sind.

260. In einem Kreise sind zwei Sehnen, AB und CD, gezogen; man soll auf der Peripherie einen solchen Punkt X bestimmen, dass die Linien XA und XB von der Sehne CD ein Stück FG abschneiden, welches einer gegebenen Linie gleich ist.

Verschiebt man FG bis F auf A fällt, so wird G auf einen Punkt H fallen, der sich sofort bestimmen lässt; darauf bestimmt man den Punkt G mit Hülfe von **e**, da $\angle\ G = \angle\ X$ (Peripheriewinkel auf dem Bogen AB).

261. Ein Viereck $ABCD$ zu construiren aus den vier Seiten und der Linie EF, welche die Mitten von AB und CD verbindet.

Um die Stücke zusammen zu bringen, verschiebe man BC und AD, bis sie in die Lagen EC_1 und ED_1 kommen. C_1, F und D_1 liegen dann in gerader Linie, da $\triangle\ C_1CF \cong D_1DF$. Nun kann man $\triangle\ C_1ED_1$ construiren (121); darauf bestimme man C und D. Die Construction zeigt, dass der Winkel zwischen den gegenüberliegenden Seiten, $\angle\ C_1ED_1$, unabhängig von der Länge der beiden andern ist.

Die Construction lässt sich auch mit Hülfe der oben gezeigten allgemeinen Verschiebung ausführen.

262. Durch den einen Durchschnittspunkt zweier Kreise eine Gerade zu ziehen, von der die beiden Kreise Sehnen mit gegebener Differenz abschneiden. (Die Sehnen sind mit Vorzeichen zu nehmen, vom Durchschnittspunkte der Kreise aus gerechnet).

Die Projection der Centrale auf die gesuchte Linie ist gleich der halben gegebenen Differenz. Verschiebt man die Projection, bis ihr einer Endpunkt auf den einen Kreismittelpunkt fällt, so wird dieselbe in Verbindung mit der Centrale ein rechtwinkeliges Dreieck bilden, welches man zeichnen kann. Die gesuchte Linie wird dann parallel der einen Seite desselben gezogen. Ist die Summe der Sehnen gegeben, so kann man diese in die Figur einführen, indem man den einen Kreis mit -1 mit Beziehung auf den Durchschnittspunkt der Kreise multiplicirt, den neuen Kreis an Stelle des gegebenen setzt und die oben angegebene Construction ausführt.

263. Ein Rechteck mit einer gegebenen Seite zu zeichnen, so dass jede Seite durch einen gegebenen Punkt geht. (262).

264. In einem gegebenen Dreieck ABC eine Linie von einem Punkte X auf AB bis nach einem Punkte Y auf BC zu

ziehen, so dass XY eine gegebene Länge erhält und $AX : CY = p : q$.
Verschiebt man XY bis in die Lage AY_1, so kann man den Punkt Y_1 bestimmen, da man seine Entfernung von A und die Form des Dreiecks Y_1YC kennt.

265. Durch zwei gegebene Kreise eine gerade Linie in gegebener Richtung zu ziehen, so dass die abgeschnittenen Sehnen eine gegebene Summe oder Differenz bekommen.
Man verschiebe den einen Kreis in der gegebenen Richtung, bis er den anderen auf der gesuchten Linie schneidet; sein Mittelpunkt in dieser Lage lässt sich dann leicht bestimmen.

266. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche von zwei gegebenen Kreisen unter gleichen Sehnen geschnitten wird.
Man verschiebe den einen Kreis, bis die beiden gleich grossen Sehnen zusammenfallen; sein Mittelpunkt in dieser Lage lässt sich dann dadurch bestimmen, dass die gegebene Centrale von ihm aus unter einem rechten Winkel gesehen wird, und dass seine Entfernung von dem gegebenen Punkte bekannt wird die von dem gegebenen Punkte an diesen Kreis gezogene Tangente ist nämlich gleich der Tangente an den festen Kreis.

267. In zwei gegebenen Kreisen mit den Mittelpunkten A und B zwei parallele Radien AX und BY zu ziehen, welche von einem gegebenen Punkte P aus unter gleichen Winkeln gesehen werden.
Man verschiebe das Dreieck AXP um ein Stück, gleich und parallel der Centrale, während man es gleichzeitig mit dem Verhältniss der Radien multiplicirt, so dass AX und BY zusammenfallen. Der Punkt P wird dann in eine neue Lage P_1 kommen, welche sich leicht bestimmen lässt, da man die Länge und Richtung der Linie BP_1 kennt. Da $\angle\ YP_1B = \angle\ XPA$, so müssen die Punkte P, P_1, B und Y auf derselben Kreisperipherie liegen, und dadurch ist Y bestimmt.

268. Ein Parallelogramm aus den Seiten und dem Winkel der Diagonalen zu construiren.
Verschiebt man die eine Diagonale, bis ihr Endpunkt auf den

Endpunkt der anderen Diagonale fällt, so lässt sich das Dreieck construiren, in dem die Diagonalen Seiten sind (18).

269. Ein Trapez zu construiren aus den Diagonalen, der Linie, welche die Mitten der nicht parallelen Seiten verbindet, und einem Winkel.

Die Aufgabe lässt sich durch dasselbe Verfahren, wie bei der vorhergehenden, auf 3 zurückführen.

270. In welchem Falle fällt bei der allgemeinen Verschiebung beim Viereck der Punkt C auf eine der Diagonalen des Parallelogramms?

Mittelst Parallelverschiebung lässt sich eine allgemeine Aufgabe lösen, welche oft vorkommt:

Auf zwei gegebene Curven eine Linie zu legen, welche einer gegebenen gleich und parallel ist.

Verschiebt man die eine Curve um ein Stück gleich und parallel der gegebenen Linie, so muss sie die andere Curve in dem Punkt schneiden, wohin die Linie gezogen werden soll. Die Aufgabe lässt sich immer mit Zirkel und Lineal lösen, sobald die Curven Systeme von geraden Linien und Kreisbogen sind.

271. Eine Linie, welche einer gegebenen gleich und parallel ist, mit ihren Endpunkten auf zwei gegebene Kreisperipherien zu legen.

272. In einem Dreieck eine Transversale von gegebener Länge zu ziehen, welche einer Seite parallel ist.

273. In einem Kreise eine Sehne zu ziehen, welche einer gegebenen Linie gleich und parallel ist.

274. Von einem Schiffe aus sieht man zwei bekannte Punkte unter einem gegebenen Winkel; dasselbe segelt eine gegebene Strecke in gegebener Richtung weiter, und nun sieht man dieselben beiden Punkte unter einem anderen bekannten Winkel; man soll den Ort des Schiffes bestimmen.

Beschreibt man durch die gegebenen Punkte Bogen, welche die gegebenen Winkel fassen, so ist die Aufgabe auf 271 zurückgeführt.

Eine eigenthümliche Art von Parallelverschiebung wird oft angewandt, wenn man es mit Kreisen zu thun hat, welche andere Kreise oder gerade Linien berühren; man denkt sich dann den Radius des einen Kreises bis Null abnehmend, so dass der Kreis auf seinen Mittelpunkt reducirt wird, während gleichzeitig die berührenden Geraden oder Kreise mitfolgen, die ersteren mit Beibehaltung ihrer Richtung, die letzteren mit Beibehaltung ihrer Mittelpunkte. Dadurch gelingt es oft, eine Aufgabe auf eine einfachere zu reduciren, indem die gestellten Bedingungen im Uebrigen dieselben bleiben, aber ein Kreis durch einen Punkt ersetzt wird.

275. An zwei Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.
Lässt man den kleineren Kreis bis auf einen Punkt abnehmen während die Tangenten ihm folgen, so muss der andere Kreis welcher fortfahren soll die Tangenten zu berühren, einen Radius bekommen, welcher gleich der Summe oder Differenz der gegebenen Radien ist, je nachdem man die inneren oder äusseren Tangenten betrachtet. Dadurch ist die Aufgabe auf 16 reducirt.

276. Einen Kreis zu construiren, welcher zwei gegebene gerade Linien und einen gegebenen Kreis berührt.
Lässt man den gegebenen Kreis bis auf seinen Mittelpunkt abnehmen, so wird die Aufgabe auf 181 reducirt. Der gesuchte Kreis kann den gegebenen auf zwei Arten berühren, denen die Verschiebung der Tangenten in entgegengesetzten Richtungen entspricht.

277. Einen Kreis zu construiren, welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt, die letztere in einem gegebenen Punkte.

278. Einen Kreis zu construiren, welcher zwei gegebene Kreise berührt, den einen in einem gegebenen Punkte.

Vermischte Beispiele für Parallelverschiebung.

279. Ein Viereck zu construiren aus den vier Seiten und dem Winkel zwischen zwei gegenüberliegenden Seiten.

280. Ein Viereck zu construiren aus den Diagonalen, dem Winkel derselben und zwei gegenüberliegenden Winkeln.

281. Ein Trapez zu construiren aus den Diagonalen, dem Winkel derselben, und der Summe oder Differenz zweier aneinanderstossender Seiten.

282. Ein Dreieck zu construiren aus m_a, $\angle\ (m_b, m_c)$ und dem Flächeninhalt.

283. In einem Dreieck ABC, in dem $\angle\ B = R$, soll man eine Transversale XY von gegebener Länge so ziehen, dass $\overline{AX}^2 + \overline{XY}^2 + \overline{YC}^2$ gleich einem gegebenen Quadrate ist.
Der Punkt Y (s. 264) wird durch a bestimmt.

284. Ein Sehnenviereck zu construiren aus den Diagonalen, dem Winkel derselben und dem Winkel zwischen der einen Diagonale und einer Seite.

285. Ein Viereck zu construiren aus den Diagonalen, dem Winkel derselben, dem Verhältniss zweier aneinanderstossender Seiten und dem Winkel zwischen den beiden anderen Seiten.

286. Um ein gegebenes Dreieck das grösstmögliche gleichseitige Dreieck zu beschreiben.

287. Ein Viereck zu construiren aus zwei gegenüberliegenden Winkeln, dem Flächeninhalte und den beiden Linien, welche die Mitten von zwei gegenüberliegenden Seiten verbinden.
Der Winkel zwischen den beiden gegebenen Linien wird durch diese und den Flächeninhalt bestimmt. Nun lässt sich die allgemeine Verschiebung für das Viereck anwenden.

288. Ein Viereck $ABCD$ zu construiren aus AB, CD, $\angle\ BAC$, $\angle\ ACD$ und $\angle\ BDA$.

289. Ein Viereck zu construiren aus zwei gegenüberliegenden Seiten und allen Winkeln.

290. Ein Trapez zu construiren aus den Diagonalen, dem Winkel derselben und einer Seite.

291. Ein Viereck zu construiren aus drei Seiten und den Winkeln an der vierten.

292. Ein Viereck $ABCD$ zu construiren aus AB, CD, AC, $\angle\ ABD$ und $\angle\ BDC$.

293. Ein Viereck zu construiren aus $\angle\ BCA$, $\angle\ CAD$, den Diagonalen und dem Winkel zwischen diesen.

294. Gegeben sind zwei Parallelen L und M, eine dritte Gerade

N und ein Punkt P; man soll durch P eine Gerade ziehen, welche die gegebenen beziehungsweise in den Punkten A, B und C so schneidet, dass AB und CP in einem gegebenen Verhältniss stehen.

Man verschiebe AB und CP in die Lagen A_1Q und QP_1, wo Q den Durchschnittspunkt zwischen M und N bedeutet, und bestimme P_1.

295. In einem Dreieck $AXBYC$ soll die XY in gegebener Richtung so gezogen werden, dass AX und YC eine gegebene Summe haben.

296. Ein Trapez aus den Diagonalen und den nicht parallelen Seiten zu construiren (142).

297. Man löse die Aufgaben in 169, wenn A ein beliebiger Punkt ist.

298. Ein Viereck zu construiren aus den Diagonalen, zwei gegenüberliegenden Seiten und dem Winkel zwischen diesen.

299. Ein Viereck zu construiren aus der Linie, welche die Mitten von zwei gegenüberliegenden Seiten verbindet, den Diagonalen, dem Verhälltnisse von zwei gegenüberliegenden Seiten und der Summe der Quadrate der beiden anderen.

Das gewöhnliche Parallelogramm lässt sich construiren, da man die Seiten und eine Diagonale kennt.

300. Ein Viereck zu construiren aus den vier Seiten und der Linie, welche die Mitten der Diagonalen verbindet.

Analog der vorhergehenden oder 261.

301. Ein Dreieck zu construiren aus zwei Medianen und dem Winkel zwischen der dritten Mediane und der zugehörigen Seite.

302. Ein Trapez zu construiren aus den parallelen Seiten und den Diagonalen.

303. In einen gegebenen Kreis ein Trapez zu beschreiben, von dem die Höhe und die Differenz der parallelen Seiten gegeben ist.

304. Ein Viereck zu construiren aus zwei gegenüberliegenden Seiten, der Linie, welche die beiden anderen gegenüberliegen Seiten nach einem gegebenen Verhältniss theilt, dem Winkel zwischen diesen und ihrem Verhältniss.

Analog 261.

305. Ein Trapez zu construiren aus den Diagonalen, der Linie, welche die Mitten der Diagonalen verbindet, und der Linie, welche die Mitten von zwei gegenüberliegenden Seiten verbindet.

306. In einen Kreis ein Trapez zu beschreiben, wenn man die Höhe und die Summe der parallelen Seiten kennt.
Das Trapez lässt sich so hinlegen, dass es von einem beliegen Durchmesser symmetrisch getheilt wird. Die Mitte von einer der nicht parallelen Seiten muss auf einer bekannten Linie liegen, welche dem Durchmesser parallel ist. Der Fusspunkt der Höhe, welche von dem Endpunkt einer der nicht parallelen Seiten gefällt ist, lässt sich nun bestimmen. (271 und 336).

307. Auf eine gegebene gerade Linie AB eine andere CD von gegebener Länge so zu legen, dass C und D die AB harmonisch theilen.
Ueber AB als Sehne beschreibe man einen beliebigen Kreis, und ziehe, indem man die Aufgabe als gelöst ansieht, von C und D die Linien CE und DF an die Mitten der beiden Bogen AB. Diese Linien stehen auf einander senkrecht, und schneiden sich auf der Peripherie des Kreises. Verschiebt man CD parallel bis EG, so wird FG von D aus unter einem rechten Winkel gesehen. — Ist M die Mitte von AB, so kennt man das Product und die Differenz von MC und MD auch hierdurch lässt sich die Aufgabe leicht lösen.

308. Gegeben sind zwei Punkte A und B und zwischen ihnen zwei Parallelen; man soll zwischen diesen eine Linie MN mit gegebener Richtung so ziehen, dass $AM + MN + NB$ ein Minimum werde.

309. Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, deren Abstände AX und BY von zwei gegebenen Punkten A und B ein gegebenes Product haben.
Verschiebt man BY bis AY_1, so wird der Ort für Y_1 eine Gerade, während der Ort für X ein Kreis über AP als Durchmesser ist; verschiebt man die Gerade um dass Stück AB,

so erhällt man eine Gerade und einen Kreis als geometrische Oerter für Y.

310. Von einem gegebenen Punkte P ist eine Linie PA nach einem Punkte A auf einer gegebenen Curve gezogen, und von einem anderen gegebenen Punkte L die Linie LB parallel der PA, so dass $LB : PA = m : n$; was wird der geometrische Ort für B?

B. Umlegung.

Man bedient sich dieser Methode wie der vorhergehenden um eine für die Ausführung der Construction bequemere Lage der gegebenen Stücke zu erhalten. Sie besteht darin, dass ein Theil der Figur in eine neue Lage gebracht wird, indem man dadurch sucht:

1) *Die gegebenen Stücke zusammen zu bringen.*

311. In einen gegebenen Kreis ein Viereck $ABCD$ zu beschreiben, von dem man die Grösse der beiden gegenüberliegenden Seiten AB und CD und das Verhältniss der beiden anderen Seiten kennt.

Legt man das Dreieck ABC so um, dass A auf C und C auf A fällt, so muss A ebenso wie vorher auf der Kreisperipherie liegen. Hierdurch hat man es erreicht, dass die gegebenen Stücke auf eine bequeme Weise liegen, da man jetzt zwei aneinanderstossende Seiten und das Verhältniss der beiden anderen kennt; man kann also die beiden gegebenen Seiten gleich abtragen und darauf den vierten Eckpunkt bestimmen. (229).

Jetzt ist es nur nöthig, das Dreieck ABC in seine ursprüngliche Lage zurück zu bringen.

312. Ein Viereck $ABCD$, in welches sich ein Kreis beschreiben lässt, zu construiren aus AD, AB, $\angle\ D$ und $\angle\ B$.

Dreht man ADC um die Linie, welche $\angle\ A$ halbirt, so werden D und C auf D_1 und C_1 fallen, und D_1C_1 wird fortfahren Tangente zu sein. Man kann jetzt das Dreieck construiren, dessen eine Seite BD_1 ist, da man diese Seite und die beiden anliegenden Winkel kennt; der Kreis lässt sich dann leicht zeichnen, da er die drei Seiten dieses Dreiecks berührt.

2) *Die gegebenen Stücke in die Figur einzuführen.*

313. Ein Dreieck zu construiren aus a, b und $A - B$.
Man lege das Dreieck so um, dass A auf B und B auf A fällt; dann kann man das Dreieck construiren, in dem a und b Seiten sind und $A - B$ der eingeschlossene Winkel.

314. Ein Dreieck zu construiren aus a, h_a und $B - C$.
Man führe $B - C$ ein, indem man das Dreieck so umlegt, dass B auf C, C auf B und A auf einen Punkt A_1 fällt. Nun kann man das Parallelogramm zeichnen, dessen eine Diagonale AA_1, und dessen dritter Eckpunkt B ist, da die von B gezogene Diagonale von A aus unter einem bekannten Winkel gesehen wird.

315. Ein Dreieck zu construiren aus bc, m_a und $B - C$.
Wird das Dreieck in die Lage BA_1C umgelegt, so wird der bekannte Flächeninhalt von A_1BA gleich dem Flächeninhalt des gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Schenkel m_a sind.

3) *Gleichgrosse Linien oder Winkel zur Deckung zu bringen;* dieses thut man am häufigsten, wenn die geichgrossen Stücke unbekannt sind, und die Methode dient dann in gewisser Weise dazu, ein solches Stück zu eliminiren. Einer ähnlichen Methode kann man sich bedienen, wenn das Verhältniss zweier Linien bekannt ist; um dieselben zur Deckung zu bringen lässt man dann den einen Theil der Figur, während man ihn umlegt, in dem gegebenen Verhältniss wachsen.

316. Ein Sehnenviereck $ABCD$ aus den vier Seiten zu construiren.
Man multiplicire die Seiten des Dreiecks ABC mit $AD : AB$ nnd lege dasselbe darauf um in die Lage ADC_1, wo dann DC_1 und CD eine gerade Linie bilden. Nun kann man das Dreieck CAC_1 construiren, denn man kennt das Verhältniss $CA : C_1A$, sowie CD, DC_1 und DA.

317. In einem Kreis ein Dreieck zu beschreiben, wenn die Mitten der drei zugehörigen Bogen gegeben sind.
Das gesuchte Dreieck sei ABC, γ die Mitte von AB, β von

AC und α von BC. Dreht man den Punkt A um γ, und darauf um α und β, so muss er wieder auf A fallen, während ein beliebiger Punkt der Kreisperipherie, welcher in einer gewissen Entfernung von A liegt, durch die gleiche Operation wieder in dieselbe Entfernung von A kommen wird, aber nach der entgegengesetzten Seite. A lässt sich also bestimmen indem man von einem beliebigen Punkt ausgeht, da A in der Mitte zwischen den beiden Lagen dieses Punktes liegen muss. Die Aufgabe lässt sich auf ein n eck ausdehnen; man sieht leicht, dass sie unbestimmt oder unmöglich wird für ein gerades n, aber bestimmt für ein ungerades n.

318. Gegeben ist eine Gerade und darauf ein Punkt A; man ziehe von dem Mittelpunkte O eines gegebenen Kreises eine Gerade, welche die Peripherie in Y und die gegebene Gerade in X so schneidet, dass XY und XA in einem gegebenen Verhältniss stehen.

Bringt man XY (wachsend) zur Deckung mit XA, so fällt O auf einen bekannten Punkt O_1, und AY ist der O_1O parallel.

319. Ein Viereck $ABCD$ zu construiren aus AB, AD, $\angle B$, $\angle D$ und dem Verhältniss $BC : CD$.

Man benutze dieselbe Umlegung wie bei 316.

4) *Eine symmetrische Figur hervorzubringen, so dass ein gesuchter Punkt auf der Symmetrieaxe liegt.*

320. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, welcher gleiche Abstände von einem gegebenen Punkte derselben Geraden und von einer anderen gegebenen geraden Linie hat.

Man errichte eine Senkrechte in dem gegebenen Punkte und halbire den Winkel zwischen dieser und der anderen gegebenen Geraden.

321. Einen Kreis zu construiren, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneidet.

Legt man den gegebenen Kreis so um, dass er die gegebene Gerade in dem gegebenen Punkte unter dem gegebenen

Winkel schneidet, so muss die Symmetrieaxe der beiden Kreise durch den Mittelpunkt des gesuchten Kreises gehen.

5) *Einen Theil der Figur in eine solche Lage zu bringen, dass zwei unbekannte Punkte in einen zusammen fallen, während zwei hierdurch gehende gerade Linien einen bekannten Winkel mit einander bilden und jede einen bekannten Punkt enthalten.* Man kann dann einen Kreis zeichnen, welcher durch den Durchschnittspunkt der beiden Linien geht.

322. Gegeben sind zwei Kreise, und auf der Peripherie des einen die Punkte A und B; man soll auf dieser Peripherie einen solchen Punkt X bestimmen, dass, wenn AX und BX den anderen Kreis beziehungsweise in den Punkten M und N schneiden, die Sehne MN eine gegebene Länge habe.

Ist O der Mittelpunkt des zweiten Kreises, so ist $\angle MON$ bekannt. Dreht man MA um diesen Winkel um O, so fällt M auf N und A auf einen bekannten Punkt A_1. Da MA und NB einen bekannten Winkel mit einander bilden, ist der Winkel BNA_1 bekannt und dadurch ist N bestimmt.

Vermischte Beispiele für Umlegung.

323. In einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, wenn man zwei gegenüberliegende Seiten und die Summe der beiden anderen Seiten kennt.

324. Ein Dreieck zu construiren aus A, h_a und m_a.

Man lege das Dreieck so um, das B auf C und C auf B fällt, während A nach der entgegengesetzten Seite auf A_1 fällt. Nun kann man AA_1 abtragen und darauf B bestimmen.

325. Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, so dass die drei Eckpunkte auf drei gegebene vom Kreismittelpunkt ausgehende gerade Linien fallen.

Die Aufgabe ist 317 analog.

326. Einen Rhombus zu construiren, so dass zwei Seiten auf gegebenen Parallelen liegen und die beiden anderen bezüglich durch die Punkte A und B gehen.

Legt man den Rhombus mit den beiden anderen Seiten auf die Parallelen, so fällt AB in eine neue Lage, deren Richtung bekannt ist. Der Winkel zwischen dieser und AB bestimmt den Winkel des Rhombus.

327. Ein Dreieck mit gegebener Grundlinie zu construiren, dessen Spitze auf einer gegebenen Linie liegt, wenn zugleich die Differenz der Winkel an der Grundlinie gegeben ist.
Man lege das Dreieck um wie in 313 und benutze die Aehnlichkeitsmethode.

328. In einem Dreieck ist eine Linie von der Spitze bis an einen gegebenen Punkt der Grundlinie gezogen; man soll auf dieser Linie einen Punkt bestimmen, von dem aus die beiden Abschnitte der Grundlinie unter gleichgrossen Winkeln gesehen werden.

329. In einem Dreieck ABC ist AC in die Abschnitte AD und DC getheilt; man soll auf der AB einen Punkt X bestimmen, von dem aus AD und DC unter gleichen Winkeln gesehen werden.
Man kann den Punkt auf AB bestimmen, welcher symmetrisch zu C liegt, DX als Symmetrieaxe genommen.

330. Durch den Eckpunkt B eines Dreiecks soll man eine solche Gerade ziehen, dass die auf dieselbe gefällten Senkrechten AP und CQ zwei Dreiecke ABP und CBQ abgrenzen, deren Flächeninhalte ein gegebenes Verhältniss haben.
Man bringe ABP, indem man zugleich die Grösse verändert, in die Lage CBP_1, und zeichne über BC als Durchmesser einen Kreis; die Sehne P_1Q hat dann eine bekannte Länge und wird von BC nach einem bekannten Verhältniss getheilt.

331. Ein Dreieck zu construiren aus m_a, $b^2 - c^2$ und $\angle\ (a, m_a)$.

332. Ein Viereck aus den vier Seiten so zu construiren, dass die eine Diagonale den einen Winkel des Vierecks halbirt.

333. Zwei Kreise mit den Mittelpunkten A und B sind gegeben; man zeichne einen Kreis, welcher durch A und B geht und die beiden Kreise beziehungsweise in X und Y (auf verschiedenen Seiten von AB) schneidet, so dass die Summe der Winkel ABY und BAX einem gegebenen Winkel gleich ist.

Man bringe das Dreieck ABY in die Lage BAY_1, so dass $\angle\ XAY_1$ der gegebene Winkel ist.

334. Ein Dreieck zu construiren aus A, ρ und $c - b$.
Nennt man den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises O, so kennt man von dem Dreieck BOC drei Stücke, nämlich $\angle\ O$, die Höhe OF und den Abstand des Punktes F von der Mitte von BC.

335. Ein Dreieck zu construiren aus ρ, $c - b$ und $C - B$.
Man zeichne dasselbe Dreieck wie bei der vorhergehenden Aufgabe.

Drehung um eine Axe

ist nur ein besonderer Fall der Umlegung, aber sie wird so oft angewandt, dass sie verdient besonders hervorgehoben zu werden. Man sucht durch diese dieselben Vortheile zu erreichen, indem man einen Theil der Figur sich um eine gerade Linie drehen lässt, so dass die beiden Lagen mit Beziehung auf diese symmetrisch werden. Hierdurch löst man zum Beispiel leicht die allgemeine Aufgabe:

336. *Eine gerade Linie, senkrecht auf einer gegebenen, so zu legen, dass zwei gegebene Curven von ihr gleiche Stücke abschneiden.*
Dreht man nämlich die eine Curve um die gegebene Linie als Axe, so wird sie die andere in den gesuchten Punkten schneiden.

337. Ein Quadrat so zu legen, dass zwei gegenüberliegende Eckpunkte auf eine gegebene Gerade und die beiden anderen auf zwei gegebene Kreisperipherien fallen (336).

338. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt X zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit zwei gegebenen Punkten A und B auf derselben Seite der Linie gleiche Winkel mit der gegebenen Linie bilden.
Dreht man den einen der gegebenen Punkte A um die gegebene Gerade bis in die Lage A_1 so ist BXA_1 eine gerade Linie.
Anmerkung. Diese Aufgabe kommt oft in der Natur vor, da ein elastischer Körper, welcher gegen eine Ebene gestossen

wird, ein Lichtstrahl, welcher einen Spiegel, eine Welle, welche eine Ebene trifft, u. s. w., so zurückgeworfen werden, dass der Ausfallswinkel gleich dem Einfallswinkel ist. Man kann sich z. B. unter A einen leuchtenden Punkt und unter der Linie den Durchschnitt eines Spiegels vorstellen. Die Aufgabe besteht dann darin, den Weg zu finden, welchen der Lichtstrahl einschlagen muss, um nach der Zurückwerfung B zu treffen. Da der Gesammtweg, welchen der Lichtstrahl zurücklegt, gleich der geraden Linie BA_1 ist, während derselbe für jeden anderen Punkt als X gleich einer gebrochenen Linie zwischen denselben beiden Punkten sein würde, so sieht man, dass der Lichtstrahl sein Ziel *auf dem kürzesten Wege* erreicht.

Würde der Strahl nach einem anderen Punkte als X gehen, so würde er doch so zurückgeworfen werden, als ob er von A_1 ausginge, so dass man bei solchen Aufgaben sich die Linie als nicht vorhanden denken kann, wenn man den Punkt A durch A_1 ersetzt.

339. Auf einem Billard, welches die Form eines $n$ecks hat, liegen zwei Bälle M und N; man soll M gegen die Seite AB stossen, so dass er gegen BC zurückgeworfen wird und so fort, bis er, nachdem er alle Seiten berührt hat, N trifft.

Man drehe M um AB in die Lage M_1; nun kann man von AB absehen, indem man M durch M_1 ersetzt. Auf diese Weise fährt man fort, bis die Aufgabe auf die vorhergehende reducirt ist. Den gesuchten Punkt auf der letzten Seite bestimmt man also zuerst, und von da geht man leicht zu den anderen zurück. Sobald einer der gesuchten Punkte auf die Verlängerung der Seite fällt, ist die Aufgabe unmöglich.

340. In ein gegebenes Polygon ein anderes zu beschreiben, dessen Umfang ein Minimum ist.

Zwei aneinanderstossende Seiten müssen gleiche Winkel mit der Seite des gegebenen Polygons bilden, auf welche ihr Durchschnittspunkt fällt, denn würde dieses für einen der Punkte nicht der Fall sein, so würde der Umfang kleiner werden, wenn man den Punkt so legte, dass es der Fall wäre. Die

Aufgabe ist also verwandt mit der vorhergehenden und lässt sich auf analoge Weise lösen.

Man kann mit dem gesuchten Punkt auf einer der Seiten beginnen, aber da man nicht weiss, wo er liegt, muss man die ganze Seite nach und nach um alle übrigen Seiten des Polygons drehen. Auf diese Weise setzt man sämmtliche Seiten der gesuchte Figur nach und nach zu einer geraden Linie an einander, und die äussersten Stücke dieser werden die beiden Seiten, welche auf der Linie, die man zuerst gedreht hat, zusammenstossen. Da die eine von diesen während der Drehungen beständig die gedrehte Seite begleitet hat, so bleibt ihr Winkel mit dieser unverändert, und die Aufgabe ist jetzt auf folgende reducirt:

Zwischen zwei gleich langen geraden Linien eine dritte zu ziehen, welche mit diesen gleiche Winkel bildet und von denselben, von einem bestimmte Endpunkt aus gerechnet, gleiche Stücke abschneidet.

Falls die gleichen Winkel Wechselwinkel werden, wird die Aufgabe offenbar unbestimmt, wenn die Linien parallel sind, und unmöglich, wenn dies nicht der Fall ist. Dieser Fall tritt ein, wenn die Seitenzahl des gegebenen Polygons gerade ist; ist dieselbe dagegen ungerade, wird die Aufgabe immer möglich sein, sobald man auch solche Polygone als einbeschrieben betrachtet, deren Eckpunkle auf die Verlängerung der Seiten des gegebenen Polygons fallen.

341. Ein Polygon zu construiren, wenn man die Senkrechten auf den Mitten der Seiten der Lage nach kennt.

A sei einer der gesuchten Eckpunkte, B ein beliebiger Punkt; dreht man die Linie AB nach und nach um alle Senkrechten, so muss A zuletzt wieder auf A fallen, während B in eine andere Lage B_1 kommt; da die Linie indessen beständig ihre Länge behält, so mus $BA = B_1A$ sein. Dadurch lässt sich die Aufgabe leicht lösen; man beginnt nämlich mit dem beliebigen Punkt B und bestimmt B_1. A muss dann auf der Mittelsenkrechten auf BB_1 liegen. Benutzt man einen anderen beliebigen Punkt auf dieselbe Weise, so construirt man A vollständig. Die Discussion ist ähnlich wie bei 340.

342. Ein Polygon zu construiren, wenn man die Halbirungslinien der Winkel der Lage nach kennt.

Die Auflösung ist der vorhergehenden analog.

343. An zwei gegebene Kreise Tangenten zu ziehen, welche sich auf einer gegebenen Geraden schneiden und mit dieser gleiche Winkel bilden.

Analog 338; die Aufgabe wird auf 137 reducirt.

344. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt X zu bestimmen, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten A und B eine gegebene Summe haben.

Man führe die gegebene Summe in die Figur ein, indem man AX bis B_1 verlängert, so dass $XB_1 = XB$. X wird nun der Mittelpunkt eines Kreises sein, welcher durch den bekannten Punkt B geht und den bekannten Kreis berührt, dessen Mittelpunkt A und dessen Radius AB_1 ist. Beachtet man, dass der gesuchte Kreis zugleich durch den Punkt gehen muss, welchen man durch Drehung von B um die gegebene Linie erhält, so ist die Aufgabe zu 238 reducirt.

345. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten eine gegebene Differenz haben.

Die Auflösung ist der vorhergehenden analog.

Anmerkung. Die beiden letzten Aufgaben können auch folgendermassen ausgedrückt werde:

Man soll die Durchnittspunkte zwischen einer gegebenen Geraden und einem Kegelschnitt finden, dessen Hauptaxe und Brennpunkte gegeben sind. Diese Aufgabe lässt sich also immer mit Zirkel und Lineal lösen. Nimmt man dagegen an Stelle der gegebenen Geraden einen beliebigen Kreis, so lässt sich die Aufgabe nicht mit Zirkel und Lineal lösen.

346. In einem Dreieck ABC halbirt die AD den Winkel A; man soll auf AD einen solchen Punkt M bestimmen, dass die Differenz der Winkel DMC und DMB ein Maximum werde.

Wird durch Drehung der AB um die Halbirungslinie des Winkels auf 185 reducirt.

347. Zwei Kreise gehen beziehungsweise durch A und B; auf ihrer

Potenzlinie soll ein solcher Punkt P bestimmt werden, dass die Linie, welche die beiden Punkte (Q und R) verbindet, in denen PA und PB die Kreise zum zweiten Male schneiden, senkrecht auf der Potenzlinie steht.

Dreht man den Kreis durch A um die Potenzlinie, so fällt A auf einen Punkt A_1 und Q auf Q_1; um die Vierecke $QABR$ und Q_1A_1BR lassen sich Kreise beschreiben, und daraus folgt, dass der Kreis AA_1B durch P geht.

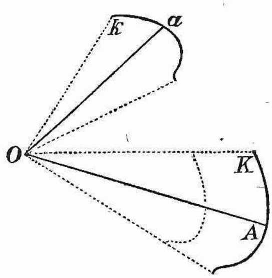
348. Gegeben ist eine Gerade PQ und auf derselben Seite von dieser die Punkte A und B; man soll auf der Geraden einen Punkt X bestimmen, so dass $\angle BXQ = 2 \angle AXP$.

Man drehe AX um PQ in die Lage A_1X und bestimme die Projection von B auf A_1X.

Drittes Kapitel.

Die Drehungstheorie.

1. Wenn man von einem gegebenen Punkte O gerade Linien nach den Punkten einer gegebenen Curve k zieht und diese Linien um einen Winkel v um O dreht, während man sie gleichzeitig nach einem gegebenen Verhältniss f wachsen lässt, so erhält man eine neue Curve K als geometrischen Ort für die Endpunkte der gedrehten Linien. Diese muss k ähnlich sein, denn man kann sich die Operation in der Weise denken, dass man zuerst nur die Drehung ausführt, wodurch nur die Lage der Curve verändert wird, und darauf die Curve mit f mit Beziehung auf O multiplicirt. Ein Punkt a der Curve k wird durch die Drehung einen Punkt A der Curve K bestimmen. Zwei solche Punkte



heissen homolog. Homologe Linien sind solche, welche homologe Punkte verbinden, und homologe Winkel solche, welche von homologen Linien gebildet werden. Der Punkt O möge der Drehungspunkt heissen, v der Drehungswinkel, f das Drehungsverhältniss. Für zwei beliebige homologe Punkte A und a muss dass Dreieck AOa dieselbe Form haben, da $\angle\, aOA = v$ und $\frac{AO}{aO} = f$ constant sind. Man kann deshalb auch sagen, dass die Curve K von dem einen Eckpunkt A eines Dreiecks AOa beschrieben wird, welches sich unter Beibehaltung seiner Form um seinen anderen Eckpunkt O dreht, während der dritte Eckpunkt a die gegebene Curve k durchläuft. Eine Curve um O mit v als Drehungswinkel und f als Drehungsverhältniss zu drehen möge heissen: Die Curve mit f_v mit Beziehung auf O zu multipliciren.

2. Jeder Punkt der Ebene kann als dem einen Systeme zugehörig betrachtet werden und wird dann seinen homologen Punkt in dem anderen System haben. Betrachtet man den Drehungspunkt auf diese Weise, so wird er sein eigener homologer Punkt (ein sich selbst entsprechender Punkt) sein, und könnte auf Grund dieser Eigenschaft auch der Doppelpunkt der Systeme heissen. Man kann sich gleichfalls denken, dass die ganze Ebene sich um O so dreht, dass einer der Punkte eine gegebene Curve durchläuft; wenn dann das ganze System von Punkten in der Ebene während der Drehung seine Form behält, muss auch jeder andere von seinen Punkten eine Curve beschreiben, welche der gegebenen ähnlich ist.

3. Sobald der Drehungspunkt nebst Drehungswinkel und Drehungsverhältniss bekannt ist, kann man mittelst Zirkel und Lineal jedes System von geraden Linien und Kreisbogen drehen. Ein Punkt a wird um einen Punkt O gedreht, indem man $\angle\, aOA$ gleich dem Drehungswinkel und $OA = f\,.\,Oa$ macht. Eine gerade Linie wird gedreht, indem man einen beliebigen Punkt derselben dreht und den Winkel, welchen sie mit der von diesem Punkte bis zum Drehungspunkte gezogenen Geraden bildet, ebenso gross bleiben lässt wie vor der Drehung. Ein Kreis wird gedreht, indem man seinen Mittelpunkt und einen beliebigen Punkt der Peripherie dreht.

4. Mit Hülfe des oben Entwickelten kann man folgende allgemeine Aufgabe lösen:

Ein Dreieck, welches einem gegebenen ähnlich ist, so zu legen, dass der eine Eckpunkt auf einen gegebenen Punkt und die beiden anderen auf zwei gegebene Curven fallen.

Nimmt man nämlich den gegebenen Punkt als Drehungspunkt, und dreht man die eine Curve um diesen, so dass der Drehungswinkel der Winkel des Dreiecks ist, dessen Scheitelpunkt in O liegt, und das Drehungsverhältniss das Verhältniss der diesen Winkel einschliessenden Seiten, so wird die gedrehte Curve die andere gegebene Curve in den Punkten schneiden, auf welche der zweite Eckpunkt des Dreiecks fallen kann; den dritten Eckpunkt erhält man, wenn man den gegebenen Winkel bei O anträgt.

Kennt man statt der Form des Dreiecks den Winkel, dessen Scheitelpunkt auf den gegebenen Punkt fällt, und das Produkt der diesen Winkel einschliessenden Seiten, so wird die Aufgabe in ähnlicher Weise gelöst, indem man nur statt eine Curve zu drehen, welche einer der gegebenen ähnlich ist, die inverse Curve derselben dreht.

Beispiele.

349. Ein gleichseitiges Dreieck mit den Eckpunkten auf drei Parallelen zu legen.
Der eine Eckpunkt kann auf einen beliebigen Punkt der einen Linie gelegt werden; dieser Punkt wird der Drehungspunkt; $v = 60°$, $f = 1$.

350. Ein gleichseitiges Dreieck mit den Eckpunkten auf drei concentrische Kreise zu legen.

351. In ein Parallelogramm ein gleichschenkeliges Dreieck mit einem gegebenen Winkel zu beschreiben; die Spitze soll auf dem einen Eckpunkt des Parallelogrammes liegen.

352. In ein gegebenes Dreieck ein anderes zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist, so dass der eine Eckpunkt auf einen gegebenen Punkt der einen Seite fällt.

353. In einen gegebenen Kreisabschnitt ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist, so dass der eine Eckpunkt auf einen gegebenen Punkt der Sehne fällt.

354. In einem gegebenen Kreise eine Sehne zn ziehen, deren Länge in gegebenen Verhältnissen zu den Abständen ihrer Endpunkte von einem gegebenen Punkt steht.

355. In ein Parallelogramm ein Rechteck zu beschreiben mit gegebenem Winkel zwischen den Diagonalen.
Die Mittelpunkte der beiden Parallelogramme müssen zusammenfallen.

356. In ein Parallelogramm einen Rhombus mit gegebenem Verhältniss der Diagonalen zu beschreiben.

357. In ein Quadrat ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

358. Gegeben sind ein Kreis und zwei Punkte A und B; man soll an den Kreis eine Tangente so ziehen, dass diese und die von B darauf gefällte Senkrechte Abstände von A haben, welche in einem gegebenen Verhältniss stehen.
Durch eine Drehung um A bringt man es dahin, dass B auf der Tangente zu liegen kommt.

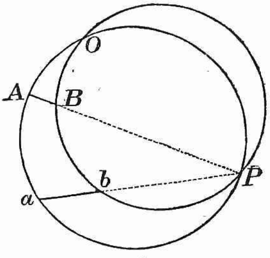
359. In ein gegebenes Parallelogramm einen Rhombus mit gegebenem Flächeninhalt zu beschreiben.

360. Zwei Punkte A und B sind gegeben, sowie zwei Gerade, welche sich in C schneiden; man soll durch A und B zwei gerade Linien ziehen, welche einen gegebenen Winkel einschliessen und die beiden gegebenen Geraden beziehungsweise in X nnd Y so schneiden, dass AX und BY in einem gegegebenen Verhältniss stehen.
Man bringe AX und BY durch Parallelverschiebung in die Lagen $A_1 C$ und $B_1 C$.

361. Ein Dreieck zu construiren aus h_a, $B - C$ und bc.

362. Durch einen gegebenen Punkt A zwei Kreise zu ziehen, welche sich unter einem Winkel v schneiden; das Verhältniss ihrer Radien ist gleich f gegeben, und jeder von ihnen soll eine gegebene Gerade berühren.
Multiplicirt man die eine gegebene Gerade mit f_v mit Beziehung auf A, so wird die Aufgabe auf 181 reducirt.

5. Sind zwei ähnliche Figuren gegeben, so werden sie immer, wenn nur die Stücke in derselben Umlaufsrichtung auf einander folgen (im Allgemeinen wird dies in dem Folgenden bei ähnlichen Figuren vorausgesetzt), einen Drehungspunkt haben, dass heisst einen Punkt, um welchen die eine Figur gedreht werden kann, so dass sie zur Deckung mit der anderen Figur gelangt; das Drehungsverhältniss ist bestimmt, da zwei beliebige homologe Linien in diesem Verhältniss stehen, und der Drehungswinkel ist der Winkel zwischen zwei beliebigen homologen Linien. Um den Drehungspunkt zu bestimmen, könnte man das bekannte Verhältniss seiner Abstände von zwei Paaren homologer Punkte benutzen, aber man kann eine andere einfachere Construction anwenden. A und a, B und b seien zwei Paare homologer Punkte; die homologen Linien



AB und ab müssen dann den Drehungswinkel bilden; dieser Winkel wird auch von den Linien gebildet, welche zwei homologe Punkte mit dem Drehungspunkte verbinden, und *dieser muss folglich auf demselben Kreise liegen wie der Durchschnittspunkt von zwei homologen Linien und zwei homologe Punkte auf diesen Linien.*

Der Drehungspunkt für zwei homologe Linien in zwei ähnlichen Figuren ist der Drehungspunkt für die Figur selber, denn dreht man die eine Linie, so dass sie die andere deckt, so muss die eine Figur auch die andere decken.

Der Drehungspunkt für zwei unendliche gerade Linien, als ähnliche Figuren betrachtet, ist vollkommen unbestimmt; wählt man zwei Punkte auf den Linien als homologe Punkte, so erhält man einen Kreis als geometrischen Ort für den Drehungspunkt; werden noch zwei homologe Punkte gegeben, oder was dasselbe ist, das Drehungsverhältniss, so wird der Drehungspunkt vollkommen bestimmt; es giebt nur einen, da sich die Kreise zum zweiten Male im Durchschnittspunkte der Geraden schneiden.

Für zwei Kreise ist der Drehungspunkt unbestimmt, da zwei beliebige von ihren Punkten als homologe Punkte betrachtet werden können; da die Abstände des Drehungspunktes von den Kreismittelpunkten sich wie die Radien verhalten müssen, so wird der geometrische Ort desselben ein Kreis, welcher die Centrale harmonisch nach diesem Verhältniss theilt (der Kreis durch die Aehnlichkeitspunkte der beiden gegebenen Kreise mit dem Mittelpunkte auf der Centrale). Wählt man zwei Punkte der Kreise als homologe Punkte, so wird der Drehungspunkt bestimmt und lässt sich am leichtesten mit Hülfe der beiden homologen Radien finden, da die Mittelpunkte immer homologe Punkte sind.

6. *Der Drehungspunkt für zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks ist auch der Drehungspunkt für die beiden anderen.*

O sei der Drehungspunkt für BA und CD; dann ist $\triangle ABC \sim \triangle DOC$, aber hieraus folgt leicht, dass $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, und daraus folgt dann wieder, dass O der Drehungspunkt für AD

und BC ist. Im ersten Falle sind B und C, und A und D homologe Punkte, im zweiten B und A, und C und D.

Auf dieselbe Weise sieht man, dass der Drehungspunkt für AB und CD auch der Drehungspunkt für AC und BD ist.

Verlängert man die gegenüberliegenden Seiten bis zum Durchschnitt, so werden die Kreise, durch welche der Drehunspunkt bestimmt wird, um die vier Dreiecke beschrieben sein, welche in der Figur gebildet werden; derselben Kreise muss man sich bedienen um den Drehungspunkt für zwei beliebige Stücke der Figur zu bestimmen, welche sich nicht in einem ihrer Endpunkte schneiden; daraus folgt also folgender Satz:

Bei einem vollständigen Vierseit werden die Kreise, welche um die vier Dreiecke beschrieben werden, die man erhält, wenn man eine Seite nach der anderen fortnimmt, alle durch denselben Punkt gehen, und dieser Punkt wird der Drehungspunkt für zwei beliebige Stücke der Figur sein, welche sich nicht in einem ihrer Endpunkte schneiden.

7. *Theilt man die Linien, welche homologe Punkte ähnlicher Curven verbinden, nach demselben Verhältniss, so wird der geometrische Ort für die Theilungspunkte eine Curve sein, welche den gegebenen ähnlich ist, und zwei beliebige solcher Curven haben denselben Drehungspunkt wie die gegebenen.*

A und a seien zwei homologe Punkte und die Linie Aa werde durch P nach einem gegebenen Verhältniss getheilt. Ist nun O der Drehungspunkt, so muss die Form des Dreiecks AOa constant sein; dasselbe muss dann auch von $\triangle\ AOP$ gelten, und folglich muss P eine Curve beschreiben, welche den gegebenen ähnlich ist, wenn das Dreieck sich um O dreht.

Zusatz. Zieht man in einem Viereck Linien, welche je zwei gegenüberliegende Seiten nach demselben Verhältniss theilen, so werden diese Linien selber nach demselben Verhältniss getheilt.

Anwendungen.

363. Gegeben sind zwei gerade Linien, auf jeder derselben ein Punkt, A und B, und ausserdem ein Punkt P; man soll durch P eine Gerade ziehen, welche die gegebenen Linien in

X und Y so schneidet, dass die Abschnitte AX und BY in einem gegebenen Verhältniss stehen.

Man bestimme den Drehungspunkt O für die gegebenen Linien, indem man A und B sowie X und Y als homologe Punkte betrachtet; das gegebene Verhältniss ist also das Drehungsverhältniss. Da nun $\triangle\ OXY \sim \triangle\ OAB$, so wird die Linie OP von dem Punkte X aus unter einem bekannten Winkel gesehen, und dadurch lässt sich X leicht bestimmen.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist von Apollonius in einer Schrift «de sectione rationis» gestellt und behandelt. Die Schrift selber ist verloren gegangen, aber von Halley nach einer erhaltenen arabischen Uebersetzung wieder hergestellt.

364. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche zwei gegebene ähnliche Curven in zwei homologen Punkten schneidet.

Die Aufgabe ist eine einfache Erweiterung der vorhergehenden und wird ebenso wie diese gelöst.

365. Gegeben sind zwei gerade Linien und auf jeder derselben ein Punkt, A und B, sowie ausserdem ein Punkt P. Man soll durch P eine Gerade ziehen, welche die gegebenen Linien in X und Y so schneidet, dass die Abschnitte AX und BY eine gegebene Summe haben.

Trägt man auf der einen Linie das Stück BD gleich der gegebenen Summe ab, so muss $AX = YD$ sein, und dadurch ist die Aufgabe auf 363 reducirt.

366. Durch einen gegebenen Punkt P eine gerade Linie zu ziehen welche in Verbindung mit zwei gegebenen Geraden ein Dreieck mit gegebenem Flächeninhalt bildet.

A sei der Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden; man stelle den gegebenen Flächeninhalt in Form eines Dreiecks dar, dessen eine Seite AP ist, und dessen andere Seite auf eine der gegebenen Geraden fällt; die gesuchte Linie muss nun so gezogen werden, dass das Flächenstück, welches zu dem Dreieck hinzukommt, gleich dem ist, welches abgeschnitten wird; diese beiden Flächenstücke sind aber zwei Dreiecke, deren Höhen bekannt sind, nämlich die Abstände des Punktes P von den beiden Geraden. Das Verhältniss der Grundlinien dieser Dreiecke ist also bekannt, und dadurch ist die Aufgabe auf 363 zurückgeführt.

Anmerkung. Auch diese Aufgabe rührt von Apollonius her; die davon handelnde Schrift «de sectione spatii» ist verloren gegangen und nur zum Theil von Halley wieder hergestellt.

367. Gegeben sind zwei Kreisperipherien, auf der einen ein Punkt A, auf der anderen ein Punkt B; man soll auf den beiden Peripherien beziehungsweise die Punkte X und Y bestimmen, so dass die Bogen AX und BY ähnlich sind, und XY eine gegebene Länge hat.

Man bestimme den Drehungspunkt der beiden Kreise für A und B als homologe Punkte; X und Y sind dann auch homologe Punkte und die Dreiecke ABO und XYO deshalb ähnlich.

Hierin ist 262 mit einbegriffen, wo der zweite Durchschnittspunkt der Kreise der Drehungspunkt ist.

368. Ein Rechteck zu construiren, dessen vier Seiten jede einen gegebenen Punkt enthalten, und dessen Diagonale eine gegebene Länge hat.

Zeichnet man die beiden Kreise, welche die geometrischen Oerter für zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Rechtecks sind, so wird die Aufgabe auf die vorhergehende reducirt.

369. Gegeben sind zwei gerade Linie AB und CD; man soll einen Kreis zeichnen, welcher durch ihren Durchschnittspunkt geht, und AB in X, CD in Y so schneidet, dass $AX : CY$ und $XB : YD$ gegebenen Verhältnissen gleich sind.

Der Kreis geht durch den Drehungspunkt von AX und CY, und durch den Drehungspunkt von XB und YD.

370. Durch zwei gegebene Punkte A und B zwei gerade Linien zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel v einschliessen, und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis beziehungsweise in X und Y so schneiden, dass $AX : BY$ einem gegebenen Verhältniss $1 : k$ gleich sei.

Man multiplicire die gegebene Gerade mit k_v mit Beziehung auf den Drehungspunkt von AX und BY.

371. Gegeben sind ein Punkt A und zwei gerade Linien BC und DE; man soll auf diesen Linien beziehungsweise die Punkte

X und Y so bestimmen, dass BX und DY in einem gegebenen Verhältniss stehen, und $\angle\ XAY$ einem gegebenen Winkel gleich ist.

Wird BX hinüber auf DY gedreht, so fällt A auf einen bekannten Punkt A_1, und der Winkel AYA_1 ist bekannt.

372. Ein Viereck $ABCD$ so zu legen, dass B und C auf gegebene Punkte, und A und D auf gegebene Linien fallen, wenn zugleich $B - C$ und das Verhältniss $BA : CD$ gegeben ist.

Lässt sich durch eine Umlegung reduciren (4).

373. Durch den einen Durchschnittspunkt S zweier Kreise sollen zwei gerade Linien ASa und BSb (A und B auf der einen, und a und b auf der anderen Peripherie), welche einen gegebenen Winkel einschliessen, so gezogen werden, dass die Dreiecke ASB und aSb gleich gross sind.

Der Durchschnittspunkt der Kreise ist der Drehungspunkt für Aa und Bb, also auch für AB und ab. Dreht man AB hinüber auf ab, so fällt S auf einen bekannten Punkt S_1. ab hat eine bekannte Länge und Abstände von S und S_1, die in einem bekannten Verhältniss stehen.

Eine einfachere Lösung erhält man, wenn man beachtet, dass die in S auf den beiden Sehnen errichteten Senkrechten die Centrale in gleichen Abständen von deren Mitte schneiden.

374. Gegeben sind zwei Kreise, auf dem einen ein Punkt A, auf dem anderen ein Punkt B; man soll durch A und B einen Kreis ziehen, welcher die beiden Kreise in X und Y so schneidet, dass die Bogen AX und BY ähnlich sind.

Man bestimme den Drehungspunkt für die beiden Kreise, A und B als homologe Punkte genommen. Da AX und BY homologe Linien sind, so schneiden sie sich auf dem Kreise ABO, aber sie schneiden sich auch auf der Potenzlinie der beiden gegebenen Kreise.

375. Verbindet man die Mitten der Seiten eines Dreiecks, so entsteht ein Dreieck, welches dem gegebenen ähnlich ist; wie leicht ersichtlich ist der Drehungswinkel für diese beiden Dreiecke 180° und das Drehungsverhältniss $\frac{1}{2}$. Der Drehungspunkt muss also jede Linie, welche zwei homologe Punkte verbindet, in zwei Abschnitte theilen, die in diesem Verhältniss

stehen, und da die Medianen solche Linien sind, muss er auf dem Durchschnittspunkte dieser liegen. Da die Durchschnittspunkte der Höhen homologe Punkte sind, und dieser Punkt des kleinen Dreiecks der Mittelpunkt des um das grosse Dreieck beschriebenen Kreises ist, so sieht man, dass in jedem Dreieck der Durchschnittspunkt der Höhen, der Durchschnittspunkt der Medianen und der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises auf einer Geraden liegen, deren Abschnitte sich wie $1:2$ verhalten.

376. Gegeben sind ein Kreis, die Punkte O und P und ein Winkel v; eine durch P gezogene Gerade schneidet den Kreis in A und B; man bestimme den geometrischen Ort für einen solchen Punkt X, dass $\angle\ OBX = \angle\ OAX = v$.

Der Kreis $AOXB$ schneidet OP in zwei festen Punkten. Er bewegt sich deshalb um O als Drehungspunkt, so dass sein Mittelpunkt eine gerade Linie durchläuft. X durchläuft deshalb auch eine gerade Linie. Falls O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises ist, und $v = 90°$, durchläuft X die Polare von P.

8. Hat man drei ähnliche Systeme A, B und C, und ist ein Punkt O der Drehungspunkt für A und B, und zugleich für B und C, so muss er auch der Drehungspunkt für A und C sein; der Punkt wird also gemeinschaftlicher Drehungspunkt für die drei Systeme, und dasselbe kann natürlich der Fall für eine beliebige Anzahl von Systemen sein.

Verbindet man drei homologe Punkte a, b und c der drei Systeme mit dem Drehungspunkte O, so müssen die Verhältnisse dieser Linien, sowie die Winkel, welche sie mit einander bilden, constant sein; daraus folgt, das die Form des Dreiecks abc auch constant ist, und ich will es deshalb *das Grunddreieck* nennen. Auf dieselbe Weise sieht man, dass mehreren ähnlichen Figuren mit einem gemeinschaftlichen Drehungspunkt ein gewisses Grundpolygon von constanter Form entspricht; dreht dasselbe sich um den Drehungspunkt, so dass der eine Eckpunkt die eine Figur durchläuft, werden die übrigen Eckpunkte die übrigen Figuren durchlaufen, und jeder andere Punkt der Ebene, als zugehörig zum Grundpolygon betrachtet, wird eine den übrigen ähnliche Figur durchlaufen. Da das Grundpolygon nach und nach dazu gelangt alle seine Lagen einzunehmen, wird der Drehungspunkt der gegebenen Figuren zugleich der Drehungspunkt für das Grundpolygon in allen seinen Lagen.

9. Für zwei gerade Linien, auf denen zwei Punkte als homolog gegeben waren, musste der Drehungspunkt auf einen Kreis fallen, der durch die beiden Punkte und den Durchschnittspunkt der Linien gezogen war; für drei gerade Linien, auf denen drei Punkte als homologe Punkte gegeben sind, wird der Drehungspunkt also als Durchschnittspunkt von zwei solchen Kreisen bestimmt; der dritte Kreis muss durch denselben Punkt gehen. Verbindet man die drei Punkte, so entsteht das Grunddreieck, und dieses kann also eine beliebige Form erhalten, da die drei Punkte willkürlich gewählt werden können; den verschiedenen Grunddreiecken entsprechen aber verschiedene Drehungspunkte. Für ein gegebenes Grunddreieck kann man leicht den Drehungspunkt bestimmen, indem man ein dem gegebenen ähnliches Dreieck auf die drei geraden Linien legt, (z. B. durch 154), und auf solche Weise drei homologe Punkte bestimmt.

Gehen die drei Geraden durch denselben Punkt O, wird dieser der Drehungspunkt für jedes Grunddreieck, so dass die einem gegebenen Grunddreieck ähnlichen Dreiecke ähnlich liegen und O zum Aehnlichkeitspunkt haben. Doch wird der Drehungspunkt in einem besonderen Falle unbestimmt; falls nämlich die Eckpunkte A und B des Dreiecks AO und BO durchlaufen und $\angle C = \angle AOB$, wird C eine durch O gehende Gerade durchlaufen.

10. Für zwei Kreise war der Drehungspunkt zufolge **6** unbestimmt, und man kann also für drei Kreise einen gemeinchaftlichen Drehungspunkt bestimmen; da dieser Punkt durch den Durchschnitt von zwei Kreisen bestimmt wird (s. **6**), so giebt es zwei Lösungen, welche beide gültig sind, nämlich die beiden Punkte, deren Abstände von den Kreismittelpunkten sich wie die Radien verhalten.

Wählt man einen dieser Punkte als Drehungspunkt für die Kreise, lassen sich die Drehungswinkel leicht bestimmen, denn die Kreismittelpunkte sind homologe Punkte, und also Linien, welche vom Drehungspunkt nach diesen gezogen sind, homologe Linien;

das Dreieck, dessen Eckpunkte die drei Kreismittelpunkte sind, ist das Grunddreieck, und jedes andere Dreieck, welches man durch Verbindung von drei homologen Punkten erhält, ist also diesem ähnlich.

11. *Wenn ein Polygon, welches einem gegebenen ähnlich ist, sich so bewegt, dass drei von seinen Punkten gerade Linien beschreiben, (welche nicht durch denselben Punkt gehen), dann muss auch jeder andere Punkt der Figur eine gerade Linie beschreiben.*

Das Dreieck, welches man durch Verbindung der drei Punkte erhält, hat constante Form, und nimmt man es zum Grunddreieck so kann man den Drehungspunkt für die drei Linien bestimmen, auf denen die Punkte sich bewegen. Zufolge **8** ist dieser Punkt indessen auch der Drehungspunkt für alle Lagen des Grunddreiecks, und folglich auch für alle Lagen des Polygons, zu dem das Dreieck gehört; da also die Bewegung des gegebenen Polygons darin besteht, dass es sich um einen festen Drehungspunkt dreht, so müssen alle Punkte desselben ähnliche Curven, also gerade Linien beschreiben.

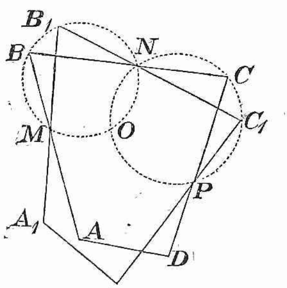
Falls alle drei Linien durch denselben Punkt gehen, kann, wie in **9** gezeigt wurde, ein Fall eintreten, wo der Satz nicht gilt.

Der Satz lässt sich leicht erweitern, denn das Polygon kann mit drei von seinen Punkten auf drei ähnlichen Curven mit gemeinschaftlichem Drehungspunkte gleiten. Die drei Punkte müssen indessen während der Bewegung beständig mit drei homologen Punkten der Curven zusammenfallen, und das Dreieck, welches sie bestimmen, muss also das Grunddreieck der Curven sein; ist dieses der Fall, so sieht man auf dieselbe Weise wie oben, dass jeder andere Punkt des Polygons eine Curve beschreiben muss, welche den gegebenen ähnlich ist. Man sieht nun leicht, dass die genannten Bedingungen zahlreicher sind, als für die Bestimmung der Bewegung nothwendig ist, und es soll deshalb versucht werden, die überflüssigen fortzuschaffen, indem nur Rücksicht genommen wird auf den Fall, wo die drei Curven Kreise sind, denn nur dieser kann hier Bedeutung haben. Es soll dann namentlich untersucht werden, ob hier derselbe Satz wie bei geraden Linien gilt: dass das Grunddreieck nur auf den drei Curven gleiten kann, indem es beständig den homologen Punkten folgt.

Es wurde gezeigt, dass drei Kreisen zwei gemeinschaftliche Drehungspunkte entsprechen; das Grunddreieck muss indessen dasselbe bleiben, welchen von diesen man auch betrachten möge, denn die drei Kreismittelpunkte sind in beiden Fällen homologe Punkte, und man erhält das Grunddreieck, wenn man drei solche Punkte verbindet. Betrachtet man nun einen Punkt A auf dem einen Kreise, so werden diesem die beiden homologen Punkte B und C auf den beiden anderen Kreisen entsprechen, wenn man den einen, b und c, wenn man den anderen Drehungspunkt benutzt. Das Grunddreieck kann also, wenn sein einer Eckpunkt auf A fällt, die beiden Lagen ABC und Abc einnehmen, und man kann leicht beweisen, dass es keine anderen einnehmen kann. Löst man nämlich allgemein die Aufgabe, das Grunddreieck mit dem einen Eckpunkt auf A und mit den beiden anderen auf die beiden Kreise zu legen, so erhält man zufolge der oben angegebenen Construction nur zwei Lösungen, welche also genau mit den hier auf anderem Wege gefundenen übereinstimmen müssen.

Das Grunddreieck kann also nur auf den drei Kreisen gleiten, indem es homologen Punkten folgt, aber dieses kann auf zwei Arten geschehen.

12. *Wenn ein Polygon, welches einem gegebenen ähnlich ist, sich so dreht, dass drei Linien der Figur* (welche nicht von demselben Punkte ausgehen) *jede einen festen Punkt enthalten, so wird sich auch auf jeder anderen zur Figur gehörigen Linie ein fester Punkt befinden.*



Die drei Linien AB, BC und CD mögen beziehungsweise die festen Punkte M, N und P enthalten; es kommt dann darauf an zu beweisen, dass eine vierte Linie DA auch einen festen Punkt enthalten muss. Zunächst ist ersichtlich, das alle Lagen des Polygons einen gemeinschaftlichen Drehungspunkt haben müssen. Sucht man nämlich diesen für zwei Lagen des Polygons, $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$, so muss man zufolge 5 einen Kreis construiren, welcher durch die homologen Punkte B und B_1 und durch den Durchschnittspunkt M der homologen Linien geht; dieser Kreis muss auch durch N gehen, und man kann ihn also sofort zeichnen, da er durch die festen Punkte M und N geht und den bekannten Winkel B fasst. Der Drehungspunkt O ist also fest, da er ausser auf diesem auch noch auf einem anderen Kreise liegen muss, welcher auf ähnliche Weise durch N und P construirt ist. Ein Kreis, welcher durch O, P und D gezogen ist, muss nun auch durch D_1 gehen, sowie durch den Durchschnittspunkt der homologen Linien AD und A_1D_1 für eine beliebige Lage dieser letzten Linie, und folglich ist dieser Durchschnittspunkt fest. Auch dieser Satz lässt naturgemäss eine Erweiterung zu, welche indessen um die Sache von verschiedenen Seiten zu betrachten, auf eine andere Weise bewiesen werden soll.

13. Lässt man ein Polygon, welches einem gegebenen ähnlich ist, sich um einen festen Drehungspunkt drehen, so wurde bis hierher die Bewegung dadurch bestimmt gedacht, dass ein Punkt des Polygons eine gegebene Curve durchlief; die Bestimmung kann indessen auch dadurch geschehen, dass eine Seite des Polygons während der Bewegung beständig eine gegebene Curve berühren (einhüllen, generiren) soll. In diesem Falle muss auch jede andere Linie des Polygons eine Curve einhüllen, welche der gegebenen ähnlich ist. Denkt man sich nämlich, dass AB bei steter Berührung der gegebenen Curve nach und nach die Lagen AB, A_1B_1, A_2B_2 u. s. w. einnimmt, und eine andere Linie BC des Polygons die entsprechenden Lagen BC, B_1C_1, B_2C_2 u. s. w., dann müssen sich diese beiden Systeme von Linien durch eine Drehung um den festen Punkt zur Deckung bringen lassen, wenn man den constanten Winkel zwischen zwei sich entsprechenden Linien zum Drehungswinkel, und das constante Verhältniss der Abstände zweier solcher Linien vom Drehungspunkte zum Drehungsverhältniss nimmt. Die Figuren, welche von den beiden Systemen von Linien gebildet werden, sind folglich ähnlich, und da dieses unabhängig von der Anzahl der Lagen gilt, muss es auch gelten, wenn diese unendlich wird, und also die gebildeten Figuren eben die generirten Curven sind.

Man sieht leicht, das der gegebene Punkt auch der gemeinschaftliche Drehungspunkt für die erzeugten Curven wird, indem der Drehungswinkel gleich dem Winkel zwischen den generirenden Linien ist, und das Drehungsverhältniss gleich dem Verhältniss zwischen den

Abständen dieser Linien vom Drehungspunkt. Nimmt man das Polygon in einer bestimmten Lage, so müssen alle Seiten die generirten Curven in homologen Punkten berühren und also selber homologe Linien der Curven sein. Ein System von beliebigen anderen homologen Linien der Curven wird natürlich ein Polygon bilden, welches dem gegebenen ähnlich ist, und dasselbe erhält also eine Bedeutung, welche der des Grundpolygons vollständig entspricht; ich nenne es daher *das Grundpolygon der zweiten Art.* Es existirt eine innige Verbindung zwischen den beiden Grundpolygonen; das der ersten Art lässt sich in das der zweiten Art beschreiben und es wird fortfahren einbeschrieben zu sein, sobald eins der Polygone so um den festen Punkt gedreht wird, dass der eine Eckpunkt des einbeschriebenen Polygons fortwährend auf der einen Seite des umbeschriebenen liegt.

Die Bewegung des Polygons, welche hier betrachtet wurde, lässt sich auch auf andere Weise bestimmen; indessen soll hier nur der Fall betrachtet werden, wo sie dadurch bestimmt wird, dass drei Seiten des Polygons auf ähnlichen Curven gleiten; damit die Bewegung dieselbe wie oben werden kann, müssen diese drei Curven einen gemeinschaftlichen Drehungspunkt haben und die drei Seiten des Polygons beständig die Curven in homologen Punkten berühren; da dieses ausreichend für die Bestimmung der Bewegung ist, muss diese dieselbe wie oben werden, und also darin bestehen, dass das Polygon sich um den Drehungspunkt der Curven dreht, während jede seiner Linien eine Curve generirt, welche den gegebenen ähnlich ist; das Dreieck, welches von den drei Seiten des Polygons gebildet wird, die auf den gegebenen Curven gleiten, wird für diese das Grunddreieck der zweiten Art. Der Satz in **12** wird ein specieller Fall von diesem, wenn die Curven Punkte sind.

14. Bestimmt man den Drehungspunkt für zwei Kreise, indem man zwei Punkte A und a als homologe Punkte annimmt, so werden die Tangenten an diese Punkte einen durch die Lage der Punkte bestimmten Winkel bilden, und dieser Winkel wird unverändert bleiben, wenn A und a ähnliche Bogen durchlaufen. Umgekehrt kann man, sobald der Winkel gegeben ist, ein Paar homologer Punkte und den diesen entsprechenden Drehungspunkt bestimmen. Zwei beliebige Tangenten, welche den gegebenen Winkel mit einander bilden, werden nämlich die Kreise in den homologen Punkten berühren. (Zwei Auflösungen).

15. *Eine Drehung um einen gegebenen Punkt kann immer durch eine Drehung um einen beliebigen Punkt und eine Parallelverschiebung ersetzt werden*, wobei das Drehungsverhältniss und der Drehungswinkel unverändert bleiben, und die Parallelverschiebung nur von diesen Grössen und der Lage des Drehungspunktes abhängig wird.

Da das Drehungsverhältniss unverändert beibehalten ist, erhält nämlich die Figur durch die neue Drehung die richtige Grösse, und da der Drehungswinkel unverändert beibehalten ist, werden die Linien der Figur in die richtigen Richtungen fallen. Die Parallelverschiebung wird also der Grösse und Richtung nach durch die Linie bestimmt, welche die beiden Lagen verbindet, in welche irgend ein beliebiger Punkt der Curve durch die beiden Drehungen gelangt.

Nun sei O der gegebene Drehungspunkt, O_1 der neue. Durch die Drehung um O wird der Punkt O_1, den man als zu der gegebenen Curve gehörig betrachten kann, auf einen neuen Punkt O_2 kommen, während er bei der Drehung um O_1 liegen bleibt. Die Linie $O_1 O_2$ bestimmt also die Parallelverschiebung. *Die Parallelverschiebung wird also durch die Linie bestimmt, welche der neue Drehungspunkt durchläuft, wenn man ihn um den gegebenen Drehungspunkt dreht.*

Umgekehrt kann eine Parallelverschiebung und eine Drehung immer durch eine Drehung um einen neuen Punkt ersetzt werden, welcher sich nach obiger Auseinandersetzung leicht bestimmen lässt.

16. *Die Reihenfolge, in der zwei auf einander folgende Drehungen vorgenommen werden sollen, kann umgekehrt werden, wenn man eine Parallelverschiebung hinzufügt.*

Denn welche Reihenfolge man auch wählen möge, jede Linie des Systems wird um einen Winkel gedreht, welcher gleich der Summe der gegebenen Drehungswinkel ist, und wird mit dem Producte der gegebenen Drehungsverhältnisse multiplicirt. Die beiden erhaltenen Figuren müssen deshalb dieselbe Grösse, und ihre homologen Seiten dieselbe Richtung bekommen; eine Parallelverschiebung kann deshalb die eine zur Deckung mit der anderen bringen.

Sind die beiden Drehungspunkte A und B, und betrachtet man den Punkt A, so wird dieser bei der Drehung um A liegen bleiben, und bei der Drehung um B auf einen Punkt C fallen. Dreht man dagegen zuerst um B, so fällt A auf C und darauf durch Drehung um A auf einen Punkt D. CD oder DC ist also die Grösse der Parallelverschiebung, welche hinzugefügt werden muss, wenn die Reihenfolge der beiden Drehungen verändert wird.

17. *Zwei Drehungen lassen sich zu einer zusammensetzen.*

Die Drehungen mögen um die Punkte A und B vor sich gehen. Von der Drehung, welche diese beiden ersetzen soll, ist nur der Drehungspunkt C unbekannt. Der Punkt A bleibt bei der Drehung um A liegen, und fällt bei der Drehung um B auf einen Punkt A_1. C muss nun so bestimmt werden, dass $\angle ACA_1$ gleich der Summe der gegebenen Drehungswinkel ist, während das Verhältniss $CA_1 : CA$ gleich dem Producte der gegebenen Drehungsverhältnisse ist. Die gegebenen Drehungswinkel und Drehungsverhältnisse bestimmen also die Winkel und die Verhältnisse der Seiten in dem Dreick, dessen Eckpunkte auf die drei Drehungspunkte fallen. Im Besonderen beachte man, dass, wenn zwei von diesen Punkten zusammenfallen, alle drei zusammenfallen, wie oben gezeigt wurde, und dass, wenn die gegebenen Drehungswinkel Null sind, die drei Drehungspunkte auf einer Geraden liegen. Die Drehungspunkte sind in diesem Falle die Aehnlichkeitspunkte der Figuren, welche paarweise ähnlich liegen. Dieser Satz wird später auf eine andere Art bewiesen werden.

18. Es wurde gezeigt, wie man durch Drehung und Inversion dazu gelangt solche Punktsysteme zu betrachten, wo jedem Punkte des einen Systems ein Punkt des anderen Systems, und jedem Kreise des einen Systems ein Kreis des anderen Systems entspricht (unter den Begriff Kreis die gerade Linie mit einbegriffen), und ferner wurde gezeigt, wie eben dieser Zusammenhang die Bedeutung der erwähnten Transformationen für die elementare Geometrie bedingt. Es liegen deshalb Gründe vor zu untersuchen, ob es nicht auch noch andere Transformationen giebt, bei denen Punkt und Punkt sowie Kreis und Kreis sich gegenseitig entsprechen, wenn alle Punkte der Ebene mit in beide Systeme aufgenommen werden.

A, B und C seien drei beliebige Punkte des einen Systems, und a, b und c die entsprechenden Punkte des anderen Systems. M sei ein beliebiger Punkt des ersten Systems, der nur nicht auf der Kreisperipherie ABC liegen darf. Den beiden Kreisen ABM und BCM entsprechen zwei Kreise abm und bcm des anderen Systems, und M muss deshalb m entsprechen. Die Abhängigkeit zwischen den beiden Systemen ist also vollständig bestimmt durch drei Punktenpaare. Nun beschreibe man in den Kreis ABC ein Dreieck $a_1 b_1 c_1 \sim abc$ derartig, dass Aa_1, Bb_1 und Cc_1 sich in einem Punkte O schneiden. Diese Aufgabe lässt sich leicht lösen, da die Winkel bei O bekannt sind. Hieraus geht hervor, dass man durch Inversion aus dem System ABC ein dem System abc ähnliches System bilden kann, und dieses kann dann wieder durch eine Drehung (und nöthigenfalls durch eine Drehung um eine Axe) in das System abc transformirt werden.

Dadurch ist bewiesen, dass *zwei Systeme, in denen Punkt und Punkt, Kreis und Kreis sich gegenseitig entsprechen, immer durch Drehung und Inversion in einander transformirt werden können.*

19. Aus den in der Drehungstheorie bewiesenen Sätzen lassen sich neue Sätze von allgemeinerer Bedeutung durch die Methoden der neueren Geometrie ableiten. Da diese Anwendungen dem Plane dieses Buches fremd sind, mag es genügen ein Beispiel anzuführen. In **11** wurde bewiesen, dass eine gerade Linie, welche sich so bewegt, dass das Verhältniss der Abschnitte ab und bc, welche auf derselben durch drei feste Linien abgeschnitten werden, constant ist, sich um einen festen Drehungspunkt dreht, woraus folgt, dass jeder Punkt der Linie, welcher durch das Verhältniss bestimmt ist, nach welchem er z. B. ab theilt, auch eine gerade Linie beschreibt. Die genannten Verhältnisse lassen sich durch Doppelverhältnisse ausdrücken, wenn der Durchschnittspunkt der beweglichen Linie mit der unendlich fernen geraden Linie mit in Betracht gezogen wird. In der Form, welche der Satz dadurch erhält, drückt er eine projectivische Eigenschaft aus, nämlich:

Wenn eine bewegliche Gerade vier feste gerade Linien in Punkten mit constantem Doppelverhältniss schneidet, beschreibt jeder Punkt der Geraden (bestimmt durch Doppelverhältnisse) *eine gerade Linie.*

Lässt man zwei von den festen geraden Linien bis an die imaginären unendlich fernen Kreispunkte gehen, so erhält man hieraus:

Wenn ein gegebener Winkel ABC einen festen Scheitelpunkt A hat, und B und C feste gerade Linien durchlaufen, wird jeder Punkt D auf der Linie BC (bestimmt durch den Winkel BAD) *eine gerade Linie beschreiben.*

Anwendungen.

377. In ein gegebenes Dreieck ABC ein anderes Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen congruent ist.

Zufolge **9** hat ein System von ähnlichen Dreiecken, welche einem gegebenen Dreieck einbeschrieben sind, einen gemeinschaftlichen Drehungspunkt; man beschreibt deshalb in das gegebene Dreieck ein Dreieck von der verlangten Form und bestimmt den Drehungspunkt, indem man dieses als Grunddreieck betrachtet; das gesuchte Dreieck erhält man nun durch eine Drehung dieses Dreiecks, und diese Operation führt man am leichtesten dadurch aus, dass man das gezeichnete Grunddreieck mit Beziehung auf den Drehungspunkt multiplicirt, so dass es die verlangte Grösse erhält, und es darauf um denselben Punkt dreht, bis die Eckpunkte auf die Seiten des gegebenen Dreiecks fallen.

378. In ein gegebenes Viereck ein anderes zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist.

Ein Viereck, welches dem gegebenen ähnlich ist, wird mit drei von seinen Eckpunkten auf die Seiten des gegebenen Vierecks gelegt, und dann bestimmt man den Drehungspunkt wie in der vorhergehenden Aufgabe; es kommt nun darauf an, das Viereck um diesen Punkt so zu drehen, dass der vierte Eckpunkt auf die vierte Seite fällt; dieser Eckpunkt beschreibt aber während der Drehung eine gerade Linie (**11**), welche sich leicht zeichnen lässt; man kann nämlich durch eine Wiederholung derselben Construction einen zweiten Punkt dieser geraden Linie bestimmen, oder man kann sie auch erhalten, indem man eine Seite des gegebenen Vierecks um den gefundenen Drehungspunkt dreht. Falls man die erste Construction anwendet, ist es unnöthig den Drehungspunkt zu suchen.

379. Auf vier gegebene gerade Linien eine fünfte so zu legen, dass die auf dieser gebildeten drei Abschnitte in einem gegebenen Verhältniss zu einander stehen.

Die Aufgabe ist ein specieller Fall der vorhergehenden, da die gesuchte gerade Linie als ein Viereck von bekannter Form betrachtet werden kann.

Anmerkung. Diese drei Aufgaben finden sich in dem ersten Buche von Newtons «principia mathematica philosophiae naturalis».

380. In ein gegebenes Dreieck ein anderes zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich, und dessen Flächeninhalt ein Minimum ist.

381. Ein Parallelogramm mit gegebenen Winkeln und gegebenem Umfang zu construiren, so dass jede Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

Die Seiten AB, BC, CD und DA mögen beziehungsweise durch die gegebenen Punkte P, Q, R und S gehen. T sei der Durchschnittspunkt der Kreise SAP und PBQ; dann ist T der Drehungspunkt für AB und eine beliebige zwischen den Kreisperipherien gezogene Linie A_1PB_1, und folglich ist $AT:AB = A_1T:A_1B_1$.

Ist V der Durchschnittspunkt der Kreise PAS und SDR, so findet man auf ähnliche Weise das Verhältniss $AV:AD$, und dann lässt sich A bestimmen (189).

382. Auf drei gegebene Kreisperipherien ein Dreieck zu legen, welches demjenigen congruent ist, dessen Eckpunkte die drei Kreismittelpunkte sind.

Man suche den gemeinschaftlichen Drehungspunkt der drei Kreise; da ihre drei Mittelpunkte homologe Punkte sind, so ist das gegebene Dreieck das Grunddreieck, und der gefundene Drehungspunkt muss also der Drehungspunkt für dieses und das gesuchte sein; man erhält dasselbe also, wenn man das erste dreht, bis einer von seinen Eckpunkten auf die Peripherie fällt. Das gegebene Drehungsverhältniss ist hier 1, aber die

Aufgabe wird für ein anderes Verhältniss auf ähnliche Weise gelöst.

383. Ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen congruent ist, so dass jede der drei Seiten durch einen gegebenen Punkt geht.

Man zeichnet leicht ein Dreieck, welches dem gegebenen ähnlich ist, und dessen Seiten durch die gegebenen Punkte gehen; diese betrachte man als ähnliche Curven und das gezeichnete Dreieck als Grunddreieck der zweiten Art; dann bestimme man den Drehungspunkt, und multiplicire das gezeichnete Dreieck, so dass es die verlangte Grösse erhält. Da das Drehungsverhältniss für das so erhaltene und das gesuchte Dreieck 1 ist, müssen zwei homologe Seiten gleichen Abstand vom Drehungspunkte haben, und eine der gesuchten Linien ist also dadurch bestimmt, dass sie einen bekannten Kreis berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

384. Ein Viereck zu zeichnen, welches einem gegebenen ähnlich ist, so dass die vier Seiten einzeln durch einen von vier gegebenen Punkten gehen.

Man zeichne ein beliebiges Viereck, welches dem gegebenen ähnlich ist, so dass drei Seiten durch drei von den gegebenen Punkten gehen, und bestimme den Drehungspunkt wie in der vorhergehenden Aufgabe. Dieses Viereck muss nun so gedreht werden, dass die vierte Seite durch den vierten Punkt geht; das geschieht leicht, da sie ausser diesem Punkte einen festen Punkt enthält, der sich auf zwei Weisen bestimmen lässt (analog 378).

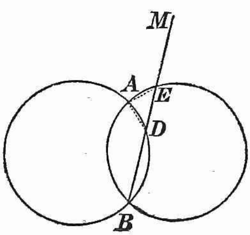
385. Um das Dreieck ABC ist ein Kreis beschrieben; von einem Punkte O auf dessen Peripherie ist an jede Dreiecksseite eine Linie gezogen, welche mit dieser Seite einen gegebenen Winkel bildet; man beweise, dass die Fusspunkte der drei Linien auf einer Geraden liegen.

Wählt man A, B und einen passenden Punkt auf AB zu homologen Punkten auf den drei Seiten, so wird O Drehungspunkt und die drei Fusspunkte homologe Punkte. Diese liegen auf einer Geraden, da das Grunddreieck eine gerade Linie ist.

386. Die Mittelpunkte dreier Kreise liegen auf den drei Eckpunkten B, C und D eines Parallelogramms. Ein Parallelogramm mit gegebenen Winkeln soll mit seinem einen Eckpunkt auf den vierten Eckpunkt A des Parallelogramms gelegt werden, und mit seinen anderen Eckpunkten auf die drei Kreisperipherien.

Multiplicirt man den Kreis C mit $\frac{1}{2}$ mit Beziehung auf A, so erhält man einen neuen Kreis. Dieser und die Kreise B und D haben eine gerade Linie, deren beide Abschnitte gleich gross sind, zum Grunddreieck. Die Diagonale B_1D_1 des gesuchten Parallelogramms muss deshalb diese drei Kreise in homologen Punkten schneiden und wird von A aus unter einem gegebenen Winkel gesehen. Dreht man BB_1 hinüber auf DD_1, so fällt A auf einen bekannten Punkt A_1, und $\angle\ AD_1A_1$ ist bekannt.

387. Man bestimme den geometrischen Ort für die Punkte, von welchen Tangenten an zwei gegebene Kreise in einem gegebenen Verhältniss stehen.



Die Kreise mögen sich in A und B schneiden und M sei einer der gesuchten Punkte; die Linie MB schneidet die beiden Kreise in D und E, und zufolge der gestellten Bedingung ist dann das Verhältniss zwischen $MD\,.\,MB$ und $ME\,.\,MB$, also auch zwischen MD und ME constant; da zugleich die Winkel im Dreieck ADE constant sind, wird die ganze Figur $ADEM$ von constanter Form, und wenn sie sich um A so dreht, dass D und E Kreise beschreiben, muss M auch einen Kreis beschreiben. Da A gemeinschaftlicher Drehungspunkt für diesen und die gegebenen Kreise ist, so muss er ebenso wie diese durch A gehen. DEM stellt dass Grunddreieck dar, und da das Dreieck, welches man durch Verbindung der drei Kreismittelpunkte erhält, diesem ähnlich ist, so sieht man, dass diese auf einer geraden Linie liegen müssen; die Abstände des gesuchten Mittelpunktes von den gegebenen verhalten sich wie

MD zu *ME*, und dieses Verhältniss ist das Quadrat des gegebenen.

388. An zwei gegebene Kreise zwei Tangenten zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel mit einander bilden, und zwar so, dass die Linie, welche die Berührungspunkte der beiden Tangenten verbindet, durch einen gegebenen Punkt geht.
Die Aufgabe wird durch **14** auf 364 zurückgeführt.

389. An zwei gegebene Kreise zwei Tangenten zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel mit einander bilden, und zwar so, dass die Linie, welche die Berührungspunkte der Tangenten verbindet, eine gegebene Richtung hat.
Die Aufgabe ist ein specieller Fall der vorhergehenden, indem der gegebene Punkt hier in unendlicher Ferne liegt.

390. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist, so dass die eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht.
Man bestimme drei homologe Punkte auf den gegebenen Linien, indem man das Dreieck, welches einbeschrieben werden soll, zum Grunddreieck nimmt.
Die Aufgabe ist nun auf 364 reducirt.

391. In ein Dreieck ein anderes Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist, und dessen Schwerpunkt auf eine der Medianen des gegebenen Dreiecks fällt.
Man beschreibe in das Dreieck zwei beliebige Dreiecke, welche dem gegebenen ähnlich sind; die Linie, welche die Schwerpunkte von diesen verbindet, schneidet die gegebene Mediane in dem gesuchten Schwerpunkt. Die Eckpunkte lassen sich nun leicht bestimmen, denn durch ein System von drei Eckpunkten auf einer der Seiten des gegebenen Dreiecks werden Abschnitte bestimmt, welche sich ebenso verhalten wie die Abschnitte, welche von den drei Schwerpunkten bestimmt werden.

392. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, so dass zwei seiner Seiten gegebene Richtungen erhalten und die dritte Seite eine gegebene Länge bekommt.
Das einbeschriebene Dreieck sei *abc*, und *bc* sei die gegebene Seite. Der um *abc* beschriebene Kreis wird die Linie, auf

welche a fällt, in zwei Punkten schneiden, nämlich in a und einem anderen Punkte d. Man kennt nun alle Seiten des Dreiecks dbc.

393. Man soll drei Kreise zeichnen, wenn der Punkt gegeben ist, von dem aus die Kreise gleich gross erscheinen, ein Punkt auf jeder Kreisperipherie, das Verhältniss zwischen den Radien der Kreise und die Winkel, unter denen die Centralen von dem gegebenen Punkte aus gesehen werden.
Man kennt den gemeinschaftlichen Drehungspunkt der drei Kreise, ihre Drehungsverhältnisse und Drehungswinkel. Deshalb kann man die zwei gegebenen Punkte auf denselben Kreis hinüberdrehen, auf dem der dritte liegt, und dann kennt man drei Punkte dieses Kreises.

394. Gegeben sind zwei Kreise, welche sich in A und B schneiden sowie zwei Punkte P und R; man soll in jedem der Kreise eine Sehne so ziehen, dass jede von diesen Sehnen durch einen der gegebenen Punkte geht, und dass die beiden Linien, welche die Endpunkte der Sehnen verbinden, durch A gehen.
Betrachtet man die beiden Sehnen als ähnliche Figuren, so wird B der Drehungspunkt für diese und für die Kreise. Man kennt den Drehungswinkel und das Drehungsverhältniss und kann also den einen der gegebenen Punkte auf die Sehne hinüber drehen, welche den anderen Punkt enthält; nun kennt man zwei Punkte dieser Sehne.

395. X ist der Drehungspunkt für AB und CY, wo A, B und C gegebene Punkte sind; was für eine Curve beschreibt X, wenn Y eine gegebene Curve durchläuft?
Man bringe das Dreieck BAX durch Parallelverschiebung in die Lage B_1CX_1. Die ähnlichen Dreiecke B_1CX_1 und YCX zeigen dann, dass B_1Y und CX_1 ein constantes Product haben und sich in entgegensetzten Richtungen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit drehen. X und Y beschreiben deshalb inverse Curven.

396. Ein Feldmesser kann drei Punkte A, B und C auf dem Felde sehen; die entsprechenden Punkte a, b und c sind auf dem Messtisch abgetragen. Er soll den Punkt auf dem Mess-

tisch bestimmen, der seinem Standpunkte auf dem Felde entspricht.

Der gesuchte Punkt ist der Drehungspunkt für die Dreiecke ABC und abc. Zieht man mit Hülfe des Diopterlineals Linien durch a, b und c, welche verlängert beziehungsweise durch A, B und C gehen würden, so bilden diese Linien das sogenannte Fehlerdreieck; dieses sei $\alpha\beta\gamma$, und zwar mögen sich die Linien durch a und b in γ schneiden u. s. w. Die Winkel α, β und γ können bei kleinen Veränderungen in der Stellung des Messtisches wegen der grossen Entfernung der Punkte A, B und C als constant betrachtet werden. Der gesuchte Punkt ist deshalb der Durchschnittspunkt der Kreise $a\gamma b$ und $a\beta c$. Indessen lassen sich diese Kreise nicht gut für die Construction verwenden, da sie sich nur schwierig genau zeichnen lassen und ihre Mittelpunkte oft ausserhalb des Tischblattes fallen. Nimmt man die inversen Figuren der Kreise mit a als Inversionscentrum und $a\beta \,.\, a\gamma$ als Inversionspotenz, so geht der gesuchte Punkt über in den Durchschnittspunkt von zwei geraden, beziehungsweise durch β und γ gehenden, Linien, welche mit $\beta\gamma$ beziehungsweise die Winkel $ab\gamma$ und $ac\beta$ bilden. Die Construction ist also folgende: Man trägt $\angle\ \beta\gamma O_1 = \beta ca$ und $\angle\ \gamma\beta O_1 = \gamma ba$ ab (die Umlaufsrichtungen der Winkel sind hier berücksichtigt) und bestimmt dadurch einen Punkt O_1. Nun wird der Messtisch gedreht, bis $O_1 a$ die Visirlinie nach A wird; die Dreiecke abc und ABC sind dann ähnlich liegend, und das Fehlerdreieck wird auf den gesuchten Punkt reducirt.

Zusätze.

Ueber den Durchschnitt von Kreisbogen.

Das Vorhergehende hat häufig gezeigt, wie wichtig es ist, eine Figur einer sorgfältigen Untersuchung zu unterwerfen, um die einfachen Beziehungen zu finden, welche zwischen den Stücken der Figur, namentlich zwischen ihren Winkeln statt finden. Eine solche Untersuchung lässt sich in der Regel mit Hülfe der Sätze über die Abhängigkeit zwischen Winkeln und Kreisbogen und ähnlicher elementarer Sätze durchführen; sind aber die Figuren ziemlich zusammengesetzt, so wird die grosse Menge der vorkommenden Winkel das Auffinden der einfachen Beziehungen oft erschweren. Deshalb wird es zweckmässig sein sich Mittel zu verschaffen, welche eine solche Untersuchung erleichtern können. Ein solches Mittel erhält man, wenn man eben die Winkel betrachtet, welche von Kreisbogen gebildet werden, da diese Betrachtung eine Figur oft übersichtlicher macht. Es ist nicht meine Absicht, hier eine erschöpfende Behandlung dieser Frage zu geben, sondern nur einige hierher gehörende Sätze aufzustellen, deren Anwendung in der Praxis man oft bequem finden wird.

1. *In einem Polygon, welches von Kreisbogen gebildet wird, ist die Summe der Seiten vermehrt um die Summe der Nebenwinkel der Polygonwinkel gleich 4 R.*

Eine gerade Linie möge sich nämlich um das Polygon herumdrehen, so dass sie bei einem Eckpunkt anfängt, und die eine Seite berührt, bis sie den nächsten Eckpunkt erreicht hat; dann drehe sie sich um diesen Eckpunkt, bis sie Tangente der folgenden Seite wird, und so fort, bis sie in ihre Anfangslage zurückkehrt; sie hat sich dann nach und nach um Winkel gedreht, welche theils gleich den Seiten des Polygons, theils gleich den Nebenwinkeln der Polygonwinkel sind, aber da sie sich gerade ein Mal herumgedreht hat, ist die Summe dieser Winkel gleich 4 R.

Der Einfachheit wegen wurde vorausgesetzt, dass die Linie nach einer Umdrehung in ihre Anfangslage zurückkehrt; bei nicht convexen Polygonen kann sie sich indessen mehrere Male (oder keinmal) herumgedreht haben, so dass die gesuchte Winkelsumme jedes Vielfache von 4 R sein kann.

Damit der Satz allgemein gelten soll, muss man die Winkel und Bogen mit Vorzeichen nehmen nach der Umlaufsrichtung, in welcher sie durchlaufen werden.

2. *In einem Dreieck ist die Summe der Winkel vermindert um die Summe der Seiten gleich 2 R. Gehen die Seiten durch denselben Punkt* (welcher nicht einer von den Eckpunkten des Dreiecks ist), *so beträgt die Summe der Winkel 2 R und die Summe der Seiten ist Null.*

Der letzte Satz lässt sich leicht beweisen, wenn man statt der Winkel des Dreiecks die ebenso grossen Winkel an dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Seiten nimmt.

3. *In einem Zweieck sind die beiden Winkel gleich gross und gleich der halben Summe der Seiten.*

4. *Ein Peripheriewinkel ist gleich der halben Summe aus seinen Schenkeln und dem Bogen, auf welchem er steht.*

Verlängert man die Schenkel, bis sie ein Zweieck bilden, so wird der Winkel durch die halbe Summe der Seiten dieses Zweiecks gemessen. Die Summe der beiden Verlängerungen ist indessen gleich dem Bogen, auf welchem der Peripheriewinkel steht (2). Dieser Bogen muss mit engegengesetztem Vorzeichen genommen werden, je nachdem man ihn als Seite des einen oder des andern der beiden Dreiecke betrachtet, in welche das Zweieck getheilt ist.

5. *Wenn von zwei Kreispaaren die Durchschnittspunkte jedes Paares jeder auf einem Kreise des anderen Paares liegen, so schneiden die beiden Kreise jedes Paares sich unter demselben Winkel* (2).

6. *In einem einbeschriebenen Viereck ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln gleich der Summe der beiden anderen. Gehen die vier Seiten durch denselben Punkt, so betragen die gleichgrossen Winkelsummen 2 R, und die Summe der Seiten ist Null.* (4).

7. *Falls in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich der Summe der beiden anderen ist, ist das Viereck ein einbeschriebenes.*

Aus 1 folgt nämlich, dass die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln vermindert um die halbe Summe der Seiten gleich 2 R ist. Diese Summe indessen ist eben die Summe der gegenüberliegenden Winkel in dem geradlinigen Viereck, dessen Eckpunkte mit denen des gegebenen zusammenfallen.

8. *Berühren zwei Kreise zwei andere Kreise gleichartig, so liegen die vier Berührungspunkte auf einer Kreisperipherie.* (7).

9. *Jeder Kreis, welcher durch die Durchschnittspunkte von zwei festen Kreisen geht, schneidet ein System von Kreisen, welche die beiden festen* (auf dieselbe Weise) *berühren, unter gleichgrossen Winkeln.*

Dieser Satz wurde früher (198) durch Inversion bewiesen, hier aber soll ein directer Beweis geführt werden, welcher auch gilt, wenn die beiden festen Kreise sich nicht schneiden; unter einem Kreise durch die Durchschnittspunkte dieser ist dann ein solcher Kreis zu verstehen, dass derselbe und die beiden festen Kreise eine gemeinschaftliche Potenzlinie haben.

Als einen Kreis kann man die gemeinschaftliche Tangente nehmen; diese möge die festen Kreise S_1 und S_2 in A und B berühren, während ein anderer Kreis S dieselben in C und D berührt. Der Kreis durch die Durchschnittspunkte der festen Kreise schneidet die gemeinschaftliche Tangente i E und S in F. Die Linien AC und BD schneiden sich auf S in dem Punkte O, dessen Tangente der gemeinschaftlichen Tangente parallel ist. Da die Punkte A, C, D und B auf einer Kreisperipherie liegen, hat O dieselbe Potenz mit Beziehung auf S_1 und S_2. O hat deshalb auch dieselbe Potenz mit Beziehung auf die Kreise ACF, EF und BDF und muss deshalb auf der Potenzlinie von je zwei von diesen drei Kreisen liegen. Da die drei Kreise den Punkt F gemeinsam haben, wird OF ihre gemeinsame Potenzlinie, und sie haben also noch einen gemeinschaftlichen, auf der OF belegenen, Durchschnittspunkt. Da die drei Kreise auf solche Art zwei Punkte gemeinsam haben, müssen ihre Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Da ACF und BDF durch die Berührungspunkte gehen, schneidet jeder von ihnen die gemeinschaftliche Tangente und die Tangente in F unter gleichen Winkeln, und ihre Mittelpunkte liegen deshalb auf einer Linie, welche den Winkel zwischen den beiden Tangenten halbirt. Da nun der Kreis EF seinen Mittelpunkt auf derselben Linie hat, muss er auch die gemeinschaftliche Tangente und die Tangente in F oder den Kreis S unter gleichen Winkeln schneiden.

Systeme von Kreisen.

Von den Bedingungen, durch welche ein Kreis bestimmt werden kann, sind besonders zu bemerken, 1) dass der Kreis durch einen gegebenen Punkt gehen soll, 2) dass er eine gegebene gerade Linie berühren soll und 3) dass er einen gegebenen Kreis berühren soll. Wählt man die drei Bedingungen, welche einen Kreis bestimmen, unter diesen aus, so erhält man eine Gruppe von Aufgaben, welche indessen, mit Ausnahme von vieren, in dem vorhergehenden gelöst worden sind. Bevor nun aber an die Auflösung dieser und einiger anderer damit verwandter Aufgaben gegangen wird, sollen zwei Sätze angeführt werden, welche Anwendung finden werden.

10. *Berührt ein Kreis zwei andere Kreise in A und B, so geht die Linie AB durch einen der Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise.*

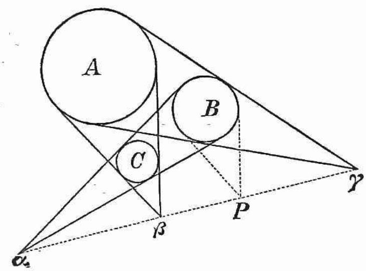
AB möge den Kreis durch B zum zweiten Male in b schneiden. Man sieht dann leicht, dass der Radius nach b parallel dem in dem anderen Kreise nach A gezogenen Radius ist. A und b sind deshalb homologe Punkte in den beiden ähnlichliegenden Kreisen, und Ab geht deshalb durch den Aehnlichkeitspunkt.

Berührt der Kreis die beiden Kreise gleichartig, dass heisst so, dass er beide ausschliessend oder einschliessend berührt, so geht die Linie durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt; berührt dagegen der Kreis die beiden Kreise ungleichartig, so geht die Linie durch den inneren Aehnlichkeitspunkt.

Bedeutet O den Aehnlichkeitspunkt, so sind die beiden Kreise inverse Curven mit O als Inversionscentrum, und das Product $OA \,.\, OB$ ist deshalb constant.

11. *Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte für je zwei von drei Kreisen liegen auf einer geraden Linie.*

Die Kreise seien A, B und C, γ der Aehnlichkeitspunkt für A und B, β für A und C, α für B und C. Man ziehe an den Kreis B zwei Tangenten, welche den gemeinschaftlichen Tangenten an A und C parallel sind und sich in einem Punkte P schneiden. Betrachtet man nun die beiden Kreise A und B, so sind β und P homologe Punkte und liegen also zugleich mit dem Aehnlichkeitspunkt γ auf einer geraden Linie. Betrachtet man die Kreise B und C, so werden P und β gleichfalls homologe Punkte und liegen also zugleich mit α auf einer geraden Linie. Daraus folgt, dass α, β und γ auf einer geraden Linie liegen.



Zusatz 1. Auf dieselbe Weise sieht man, dass eine gerade Linie durch zwei von den inneren Aehnlichkeitspunkten durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt des dritten Kreispaares geht.

Zusatz 2. Der Satz gilt auch für drei beliebige Curven, von denen je zwei ähnlich gegen einander liegen; man kann nämlich zu den drei Curven drei homologe Kreise hinzufügen; der Satz gilt dann für die Aehnlichkeitspunkte dieser, und diese werden auch die Aehnlichkeitspunkte der Curven.

Beispiele.

397. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise berührt, so dass die Linie, welche die beiden Berührungspunkte verbindet, durch einen gegebenen Punkt geht.

398. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise gleichartig berührt und eine durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise gehende gegebene Gerade unter einer gegebenen Sehne schneidet.

399. Gegeben sind zwei Kreise A und B, sowie die Punkte D, E und F; man soll durch D einen Kreis C so ziehen, dass die Potenzlinie für A und C durch E, und die Potenzlinie für B und C durch F geht.

400. In einem Viereck $ABCD$ liegt die Seite AB fest, und die Verhältnisse zwischen den Abschnitten der Diagonalen sind constant; man bestimme den geometrischen Ort für CD.

Die Diagonalen mögen sich in O schneiden, und es sei

$$AO : OC = m : n; \; BO : OD = p : q;$$

man nehme an, dass der Punkt O, welcher beliebig ist, eine gewisse Curve K durchlaufe. Multiplicirt man diese mit Beziehung auf A mit $\frac{m+n}{m}$ und mit Beziehung auf B mit $\frac{p+q}{p}$, so erhält man die Curven, welche gleichzeitig von C und D durchlaufen werden; dieselben sind ähnlich nach dem Verhältniss $\frac{p\,(m+n)}{m\,(p+q)}$ und ihr Aehnlichkeitspunkt ist ein auf der Linie AB belegener Punkt M. (**11.** Zusatz **2**). Da nun C und D homologe Punkte sind, geht die Linie CD durch M, da das Verhältniss $MC : MD$ gleich dem angegebenen ist. Auf dieselbe Weise ist ersichtlich, dass das Verhältniss $MB : MA$ constant ist, so dass M ein fester Punkt und also der geometrische Ort für CD wird.

401. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Man kennt die Potenz des Aehnlichkeitspunktes der gegebenen Kreise mit Beziehung auf den gesuchten Kreis. Dadurch lässt sich noch ein Punkt von diesem bestimmen, und die Aufgabe ist nun auf 238 reducirt.

402. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade sowie einen gegebenen Kreis berührt.

Die Aufgabe ist ein specieller Fall der vorhergehenden, denn man kann die gegebene Gerade als einen Kreis mit unendlich grossem Radius betrachten.

403. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Die Aufgabe lässt sich durch die bei der Parallelverschiebung (S. 56) angeführte Methode auf 401 reduciren.

Diese Aufgabe kann auch durch ein Verfahren gelöst werden, welches ganz dem bei 201 angewendeten gleicht. Das zu construirende Dreieck ist dann dasjenige, dessen Eckpunkte auf die gesuchten Berührungspunkte fallen; die Seiten desselben gehen durch drei von den Aehnlichkeitspunkten der gegebenen Kreise, und benutzt man diese als Inversionscentra und nimmt solche Inversionspotenzen, dass je zwei Kreise durch die Inversion vertauscht werden, so wird jeder der Kreise nach drei Inversionen wieder auf sich selbst zurückfallen. Es ist also kein wesentlicher Unterschied zwischen dieser und der früher gelösten Aufgabe.

Die einfachste und eleganteste Lösung erhält man indessen durch Benutzung des Satzes, dass die Potenzlinie zweier Kreise einen Kreis, der beide berührt, und eine der gemeinschaftlichen Tangenten unter gleichen Winkeln schneidet. Hieraus folgt nämlich, dass die Tangenten, welche den gesuchten Kreis in seinen Durchschnittspunkten mit den Potenzlinien der gegebenen Kreise berühren, denjenigen von den gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Kreise parallel sind, welche zu demselben System berührender Kreise gehören, wie der betrachtede. (Die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise gehören zu dem System von Kreisen, welches die beiden gleichartig, die inneren zu dem, welches die beiden ungleichartig berührt). A, B und C seien die gegebenen Kreise. Betrachtet man den gesuchten Kreis und den Kreis A als ähnlich liegend mit dem Berührungspunkt als Aehnlichkeitspunkt, so sind die beiden Potenzlinien für A und B und für A und C homolog den beiden Linien, von denen die eine die Berührungspunkte zwischen A und den gemeinschaftlichen Tangenten von A und B, und die andere die Berührungspunkte zwischen A und den gemeinschaftlichen Tangenten von A und C verbindet. Diese beiden Linien schneiden sich deshalb in dem Punkte, welcher dem Potenzcentrum der gegebenen Kreise homolog ist, und die Verbindungslinie dieser beiden Punkte geht deshalb durch den gesuchten Berührungspunkt. Die übrigen Aufgaben, in denen der Kreis durch drei der oben genannten Bedingungen bestimmt wird, können sämmtlich als specielle Fälle dieser Aufgabe betrachtet werden.

404. In ein Dreieck ABC sollen drei Kreise S_a, S_b und S_c beschrieben werden, so dass jeder von ihnen die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

Diese berühmte Aufgabe wurde zuerst von dem italienischen Mathematiker Malfatti († 1807) gelöst, welcher die Radien der gesuchten Kreise berechnete und für diese Werthe fand, welche sich leicht construiren liessen. 1826 gab Steiner an, dass jede der gemeinschaftlichen Tangenten in einem der Berührungspunkte von zwei von den Kreisen zugleich zwei von den Kreisen berührt, die sich in die drei Dreiecke beschreiben lassen, in welche das gegebene Dreieck durch die Halbirungslinien der Winkel getheilt wird, ein Satz, welcher sofort eine einfache Construction giebt. Steiner gab indessen keinen Beweis für den Satz, sondern gab an, derselbe lasse sich allein mit Hülfe einer Reihe Sätze über Aehnlichkeitspunkte, Potenzlinien, Potenzkreise u. s. w. lösen, welche Sätze er gleichzeitig aufstellte. Dieser Beweis wurde erst vollkommen übereinstimmend mit Steiners Forderungen im Jahre 1874 von Schröter geführt, der indessen ziemlich zusammengesetzte Inversionen benutzt. Hier soll nun die Steinersche Construction mit Hülfe ganz elementarer Sätze abgeleitet werden.

Die Berührungspunkte mit den Seiten mögen so bezeichnet werden, dass man, indem man den Umfang des Dreiecks durchläuft, nach und nach auf die Punkte A, c_1, c_2, B, a_1, a_2, C, b_1, b_2 trifft, und S_a und S_b mögen sich in γ, S_a und S_c in β, S_b und S_c in α berühren. Ein Kreis, welcher S_a und S_c in β berührt und durch c_2 geht, schneidet AC in einem

Punkte D und bildet gleichgrosse Winkel mit AB und AC (9). Die Tangenten desselben in c_2 und D schneiden sich deshalb auf der Linie, welche $\angle A$ halbirt, und bilden mit den beiden Seiten ein einbeschriebenes Viereck, so dass der Bogen c_2D gleich dem Winkel A ist. Der Kreis $c_2\alpha\beta$ geht auch durch c_1. Dieser Kreis und der Kreis βDb_2 mögen sich in E schneiden. Nun ist $\angle c_1Eb_2 = \angle c_1c_2\beta + \angle b_2D\beta = 180^\circ - \frac{1}{2}A$; hieraus folgt, dass der Kreis c_1Eb_2 seinen Mittelpunkt in A hat. Der Kreis $c_1c_2\alpha\beta$ schneidet AB, AE und die Tangente in c_2 unter gleichen Sehnen, denn $Ac_1 = AE$, und der Kreis schneidet AB und $D\beta c_2$ unter gleichen Winkeln. Auf dieselbe Weise ist ersichtlich, dass der Kreis $E\beta Db_2$ die AE und die Tangente in D unter gleichen Sehnen schneidet. Nun mögen die Tangenten in c_2 und D sich in F schneiden, während sie AE bezüglich in G und H schneiden. Aus $c_2F = DF$, $c_2G = EG$, $DH = EH$ folgt, dass die eine Seite des Dreiecks GFH gleich der Summe der beiden anderen ist. Die Punkte G und H müssen deshalb mit F zusammen fallen, so dass AEF den Winkel A halbirt. Der Kreis $c_1c_2\alpha\beta$ schneidet also AB, AE und die Tangenten in α und β unter gleichen Winkeln, und man kann deshalb einen diesem concentrischen Kreis zeichnen, der die vier Linien berührt. Auf dieselbe Weise wird bewiesen, dass dieser Kreis auch die Linie berührt, welche den Winkel B halbirt, und damit ist dann der Steinersche Satz abgeleitet. Will man auch solche Kreise in Betracht ziehen, welche die Verlängerungen der Seiten berühren, so erhält die Aufgabe andere Lösungen, welche sich durch einfache Aenderungen des hier Entwickelten ergeben.

Wenn man in der Aufgabe an Stelle der Seiten des Dreiecks drei Kreise setzt, so kann man die inverse Figur betrachten mit einem Durchschnittspunkt von zwei von den Kreisen als Inversionscentrum. Man schliesst dann leicht, dass der oben bewiesene Satz sich auf diesen Fall erweitern lässt, wenn man an Stelle der Halbirungslinien der Winkel die Kreise setzt, welche die Winkel zwischen je zwei von den gegebenen halbirt (die Potenzkreise), und an Stelle der Tangente in β den dieser entsprechenden Kreis in der inversen Figur u. s. w.

Ueber die Möglichkeit, eine gegebene Aufgabe mit Hülfe von Zirkel und Lineal zu lösen.

Befindet man sich in der Lage, die Auflösung einer gegebenen Aufgabe nicht finden zu können, so würde die Frage sein, ob der Grund dafür darin liegt, dass man es nicht verstanden hat, die Aufgabe richtig anzufassen, oder ob der Grund vielleicht der ist, dass die Aufgabe zu denen gehört, welche sich mit Hülfe von Zirkel und Lineal nicht lösen lassen. Das Folgende wird Mittel an die Hand geben, um in den meisten Fällen diese Frage zu beantworten.

Sobald sich eine Aufgabe lösen lässt, muss die Lösung, wie complicirt sie auch sein mag, aus den beiden Operationen zusammengesetzt sein: eine gerade Linie durch zwei gegebene Punkte zu ziehen, und einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt und Radius gegeben sind. Jeder Punkt ist bestimmt als Durchschnittspunkt von zwei geraden Linien, oder von einer geraden Linie und einem Kreise, oder von zwei Kreisen. Denkt man sich nun, dass man mit Hülfe der Formeln und Methoden der analytischen Geometrie die Coordinaten der Punkte berechnet, wie man sie nach und nach construirt, so hat man im Laufe der ganzen Rechnung nur nöthig, Gleichungen des ersten und zweiten Grades aufzulösen. Man kann also jede durch die Construction bestimmte Grösse mit Hülfe der gegebenen Grössen ausdrücken, so dass die gefundenen Grössen keine anderen irrationalen Ausdrücke als Quadratwurzeln enthalten; da sich nun andererseits ein jeder solcher Ausdruck construiren lässt, so *ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass sich eine Aufgabe mittelst Zirkel und Lineal lösen lässt, die, dass die gesuchten Grössen rational durch die gegebenen und durch Quadratwurzeln ausgedrückt werden können.*

Eine Untersuchung der Gleichungen, welche sich durch Quadratwurzeln auflösen lassen, findet sich in des Verfassers «Om Ligninger, der kunne løses ved Kvadratrod», und «Theorie der algebraischen Gleichungen, Kopenhagen, Andr. Fred. Høst & Sohn 1878. Kap. VII.» Hierin findet man folgende Sätze bewiesen:

1. *Ausser den Kegelschnitten giebt es keine Curven, deren Durchschnittspunkte mit einer beliebigen geraden Linie durch Zirkel und Lineal bestimmt werden können.*

2. *Ausser den Kegelschnitten giebt es keine Curven, an welche man mit Hülfe von Zirkel und Lineal Tangenten von einem beliebigen Punkte ziehen kann.*

3. *Falls man durch Zirkel und Lineal die Durchschnittspunkte eines beliebigen Strahls eines Strahlenbüschels und einer Curve, welche nicht durch den Scheitel des Strahlenbüschels geht, finden kann, muss die Ordnung der Curve eine Potenz von 2 sein, und in dem Büschel müssen wenigstens zwei Strahlen vorkommen, von deren Durchschnittspunkten mit der Curve je zwei zusammenfallen.*

Aus diesen Sätzen lassen sich neue durch Transformation ableiten, ebenso wie man auch die Untersuchungen weiter führen kann bis an andere Liniensysteme als den Strahlenbüschel, bis an Kreissysteme u. s. w. Hier mag es genügen, in Betreff dieser Erweiterungen auf die erwähnten Schriften zu verweisen, und nur folgende anzuführen:

4. *Es giebt keine anderen Curven als den Kreis und die gerade Linie, deren Durchschnittspunkte mit einem beliebigen Kreise durch Zirkel und Lineal bestimmt werden können.*

Dieser Satz lässt sich durch Inversion leicht aus dem oben zuerst genannten Satze ableiten, da der Kreis und die gerade Linie die einzigen Curven sind, welche durch Inversion mit einem beliebigen Inversionscentrum Kegelschnitte geben.

Diese Sätze sind in mannigfachen Fällen ausreichend.

Man nehme z. B. an, dass bei einer Aufgabe eine Linie gegeben sei, deren Lage ganz willkürlich ist, und dass ein gewisser Punkt X der Figur auf diese Linie fallen solle. Sieht man von dieser Bedingung ab, so erhält X einen geometrischen Ort, und zufolge des ersten der aufgestellten Sätze muss dieser ein Kegelschnitt sein, falls sich die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösen lassen soll. Auf ähnliche Weise lässt sich der zweite Satz benutzen, wenn die Figur einen Punkt enthält, dessen Lage willkürlich ist.

Betrachtet man im Besonderen den ersten Fall, so sieht man, dass aus der vorangehenden Entwickelung eine Art allgemeiner graphischer Methode zur Lösung der Aufgaben folgt. Nimmt man die Linie fort, und construirt zwei beliebige Figuren, welche den übrigen Bedingungen genügen, so erhält man zwei Lagen von X; diese seien X_1 und X_2. Die Linie X_1X_2 schneidet dann die fortgenommene Linie in einem Punkte, und dieser wird der gesuchte sein, sobald der Ort für X eine gerade Linie ist. Ist dieser Punkt nicht der gesuchte, so mache man noch einen Versuch, wodurch man X_3 findet. Wenn nun der Kreis $X_1X_2X_3$ die fortgenommene Linie nicht in den gesuchten Punkten schneidet, so mache man noch zwei Versuche, welche die Punkte X_4 und X_5 geben. Die Durchschnittspunkte der fortgenommenen Linie mit dem durch diese fünf Punkte bestimmten Kegelschnitt lassen sich durch Zirkel und Lineal bestimmen. Sind diese Punkte nicht die gesuchten, so lässt sich die Aufgabe nicht mit Zirkel und Lineal lösen. Ein diesem analoges Verfahren lässt sich im zweiten Falle benutzen.

Wenn man eine Aufgabe mit Zirkel und Lineal gelöst hat, kann man daraus mit Hülfe der oben angeführten Sätze schliessen, dass die geometrischen Oerter für gewisse Punkte Kegelschnitte sind; in der Regel wird es nicht schwierig sein zu entscheiden, ob diese Kegelschnitte speciell Kreise oder gerade Linien sind.

Anwendungen.

405. Man soll durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie ziehen, von der die Schenkel eines gegebenen Winkels ein Stück von gegebener Länge abschneiden.

Nimmt man den einen Schenkel des Winkels fort, so wird der geometrische Ort für den dadurch frei gewordenen Punkt eine Conchoide. Da nun die Lage der fortgenommenen Linie vollkommen willkürlich und unabhängig von der Conchoide ist, so lässt sich die Aufgabe nicht mittelst Zirkel und Lineal lösen. Für gewisse Lagen des Punktes (wenn er z. B. auf der Halbirungslinie des Winkels liegt) kann die Linie eine so besondere Lage im Verhältniss zur Conchoide bekommen, dass die Aufgabe sich lösen lässt.

406. Von zwei festen Punkten sind gerade Linien an einen beliebigen Punkt eines gegebenen Kreises gezogen; man beweise, dass der geometrische Ort für die Linie, welche die beiden anderen Durchschnittspunkte der beiden Linien und des Kreises verbindet, ein Kegelschnitt ist.
Der Satz folgt daraus, dass die Aufgabe 201 sich durch Zirkel und Lineal lösen lässt.

407. Ein gegebenes Dreieck mit jedem seiner Eckpunkte auf eine von drei gegebenen Kreisperipherien zu legen.
Die Aufgabe lässt sich nicht lösen, denn nimmt man den einen Kreis fort, so erhält der dadurch frei gewordene Eckpunkt einen geometrischen Ort, welcher weder ein Kreis noch eine gerade Linie sein kann. In dem besonderen Falle, wo die beiden Kreise gerade Linien sind, und das Dreieck in eine gerade Linie übergegangen ist, sieht man nämlich leicht, dass der geometrische Ort eine Ellipse ist.

408. Ein Dreieck zu construiren aus a, c und $B - C$.
Trägt man BC ab, und zieht von B aus zwei Linien, von denen die eine mit BC einen Winkel bildet, welcher halb so gross wie der gegebene ist, und die andere senkrecht auf der zweiten steht, so wird die Aufgabe auf folgende reducirt: Von C aus eine gerade Linie zu ziehen, von der die Schenkel des rechten Winkels ein Stück $2c$ abschneiden. Da diese Aufgabe ein specieller Fall von 405 ist, muss sie besonders untersucht werden. Nimmt man den Punkt fort, so erzeugt die Linie $2c$, indem sie auf den Schenkeln des rechten Winkels gleitet eine Hypocycloide. Da nun a und der gegebene Winkel so verändert werden können, dass C eine beliebige Lage erhält, ohne dass die Hypocycloide verändert wird, so lässt sich die Aufgabe nicht mit Zirkel und Lineal lösen.

409. Einen gegebenen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.
Die Aufgabe lässt sich leicht in folgende verwandeln: Durch einen gegebenen Punkt A einer Kreisperipherie eine gerade Linie zu ziehen, welche den Kreis in X und einen beliebigen gegebenen Durchmesser in Y so schneidet, dass XY gleich dem Radius ist. Nimmt man den Durchmesser fort, so wird der geometrische Ort für Y eine Curve vierter Ordnung,

welche Doppelpunkte in den unendlich fernen imaginären Kreispunkten und in A hat, während sie zugleich durch den Kreismittelpunkt geht. Da die Durchmesser einen Strahlenbüschel bilden, dessen Scheitel ein nicht ausgezeichneter Punkt der Curve ist, ist es eine nothwendige Bedingung für die Lösung der Aufgabe, dass die Ordnung der Curve um eine Einheit grösser ist als eine Potenz von 2. (S. die oben erwähnten Schriften). Die Aufgabe lässt sich deshalb nicht mit Zirkel und Lineal lösen.

Während auf solche Weise die Unlösbarkeit dieser alten berühmten Aufgabe bewiesen ist, ist dasselbe dagegen nicht der Fall mit der ebenso berühmten Aufgabe, einen Kreis zu quadriren. Hierbei kommt es darauf an zu beweisen, dass π sich nicht durch Quadratwurzeln ausdrücken lässt, aber es ist bis dahin Niemandem gelungen diesen Beweis zu führen.

410. Ein Punkt P und zwei Kreise sind gegeben; man ziehe eine Gerade durch P und eine Tangente an jeden der Kreise, so dass P und die beiden Berührungspunkte die Mitten der Seiten in dem von den drei Linien gebildeten Dreieck werden.

X und Y seien die beiden Berührungspunkte. Das Dreieck XYP muss dann so gelegt werden, dass die Höhen von X und Y durch die Kreismittelpunkte gehen. Dreht man den Kreis durch X um P hinüber auf den Kreis durch Y, fällt X auf einen Punkt X_1, so dass PY und PX_1 gleichgrosse Winkel mit der von P an den Kreismittelpunkt gezogenen Linie bilden. Der nach X_1 gezogene Radius bildet einen bekannten Winkel mit PY, denn vor der Drehung stand er senkrecht auf PY und er wurde um einen bekannten Winkel gedreht. Sucht man nun das Dreieck $PX_1 O$ zu construiren, wo O den Kreismittelpunkt bedeutet, so ist die Aufgabe auf 408 reducirt und lässt sich deshalb nicht mit Zirkel und Lineal lösen.