M7150

Teorie kategorií

výpisky ke zkoušce

Zpracoval Jiří Kalina 2011

http://jza.smerem.cz

Úvod

Následující stránky obsahují zdigitalizované výpisky z přednášek předmětu M7150 Teorie kategorií na brněnské Masarykově univerzitě v podzimním semestru akademického roku 2010/2011 a dále z knihy Category theory od Steva Awodeye. Na závěr jsou přidány naskenovné zápisky ze dvou přednášek, které jsem měl k dispozici v tomto semestru.

Vybrané definice a tvrzení odpovídají pouze představám autora o požadavcích na ústní zkoušku a v žádném případě nejsou oficiálním výběrem látky potřebné k jejímu úspěšnému složení.

Důležitá hesla, definované termíny a některá tvrzení jsou zanesena do výpisků i ve formě vyhledávatelného textu - v prohlížeči pdf dokumentů je tedy možné vyhledávat např. mezi nadpisy hlavních kapitol a definicemi.

Vzhledem k tomu, že byl z velké části využit zdroj v anglickém jazyce, neodpovídá na několika místech terminologie českým zvyklostem (konečný vs. terminální prvek apod.), nicméně tento drobný nedostatek by neměl mít vliv na správnost obsažených tvrzení.

Závěrem přeji, ať tato pomůcka slouží co nejlépe a přivítám vaše komentáře a připomínky na emailu kalina@mail.muni.cz.

Autor

Další zdroje informací

Category theory / Steve Awodey.. -- 1st. pub.. -- Oxford : Clarendon Press, 2006.. -- xi, 256 s.

http://dml.cz/browse-author-items?id=3494

http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf

M7150 TEORIE KATEGORII

KATEGORIE: ALGEBRAICKÁ STRUKTURA SLOŽENÁ Z:

1.1.
1. OBJEKTŮ $A, B, C, \dots$
2. ŠIPEK $f, g, h, \dots$
3. PRO KAŽDOU ŠIPKU $f: A \to B$ JSOU DÁNY OBJEKTY DOMÉNA $dom(f) = A$ A KODOMÉNA $cod(f) = B$
4. POKUD PRO ŠIPKY $f: A \to B$ A $g: B \to C$ PLATÍ $cod(f) = dom(g)$, EXISTUJE ŠIPKA $g \circ f: A \to C$ ZVANÁ KOMPOZIT f A g.
5. PRO KAŽDÝ OBJEKT A EXISTUJE IDENTICKÁ ŠIPKA $1_A: A \to A$

SPLŇUJÍCÍCH PODMÍNKY:

6. ASOCIATIVITY – PRO $\forall\, f: A \to B,\ g: B \to C,\ h: C \to D$ PLATÍ:
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
7. JEDNOTKY – PRO $\forall\, f: A \to B$ PLATÍ:
$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

FUNKTOR: ZOBRAZENÍ $F: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ KATEGORIÍ (OBJEKTŮ NA OBJEKTY A ŠIPEK NA ŠIPKY) SPLŇUJÍCÍ:

1.2.
1. $F(f: A \to B) = F(f): F(A) \to F(B)$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
3. $F(1_A) = 1_{F(A)}$

IZOMORFIZMUS: ŠIPKA $f: A \to B$ PRO KTEROU EXISTUJE ŠIPKA $g: B \to A$ V KATEGORII $\mathbb{C}$, SPLŇUJÍCÍ:

1.3.
$$g \circ f = 1_A \qquad f \circ g = 1_B$$

MONOMORFIZMUS: ŠIPKA $f: A \to B$, KTERÁ PRO LIBOVOLNÉ g, h $C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \longrightarrow B$ SPLŇUJE:

2.1.
$$fg = fh \Rightarrow g = h$$

EPIMORFIZMUS: ŠIPKA $f: A \to B$, KTERÁ PRO LIBOVOLNÉ g, h $A \xrightarrow{f} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C$ SPLŇUJE:

2.1.
$$gf = hf \Rightarrow g = h$$

POČÁTEČNÍ OBJEKT: OBJEKT 0 SPLŇUJÍCÍ PRO LIBOVOLNÝ OBJEKT C: $\exists!\ 0 \to C$.

2.7.
TERMINÁLNÍ OBJEKT: OBJEKT 1 SPLŇUJÍCÍ PRO LIBOVOLNÝ OBJEKT C: $\exists!\ C \to 1$.

2.7.
ŠTĚPENÍ: MONO/EPI JE ŠIPKA S LEVOU/PRAVOU INVERZÍ.

2.13.
KATEGORIE S KONEČNÝMI PRODUKTY: KATEGORIE, KTERÁ MÁ KONCOVÝ OBJEKT A VŠECHNY BINÁRNÍ (n-ÁRNÍ) PRODUKTY. KATEGORIE S MALÝMI PRODUKTY MÁ PRODUKTY VE VŠECH SVÝCH PODMNOŽINÁCH.

SOUČINOVÝ DIAGRAM: DIAGRAM PRO OBJEKTY A, B: $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$

SPLŇUJÍCÍ PODMÍNKU UMP: PRO DANÝ DIAGRAM:

$$A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$$

$\exists$ JEDNOZNAČNÉ ZOBRAZENÍ $u: X \to P$ PODLE DIAGRAMU:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\ A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

TAK, ŽE KOMUTUJE, TEDY: $x_1 = p_1 u \quad x_2 = p_2 u$.

ZACHOVÁVÁ BINÁRNÍ SOČIN: FUNKTOR $F: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ POKUD PŘENÁŠÍ SOUČINOVÝ DIAGRAM:

$$A \xleftarrow[p_1]{} A \times B \xrightarrow[p_2]{} B \qquad \text{z } \mathbb{C}$$

NA SOUČINOVÝ DIAGRAM:

$$FA \xleftarrow[Fp_1]{} F(A \times B) \xrightarrow[Fp_2]{} FB \qquad \text{do } \mathbb{D}.$$

SOUČIN (OBJEKTŮ): DIAGRAM, V NĚMŽ PRO LIBOVOLNÉ Z A $A \xleftarrow{r_1} Z \xrightarrow{r_2} B$ EXISTUJE

3.3 JEDINÉ ZOBRAZENÍ $u: Z \to P$ SPLŇUJÍCÍ $p_i \circ u = r_i$ TAKTO:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "r_2"] & \\ A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

EKVALIZÉR: OBJEKT E A ZOBRAZENÍ $e: E \to A$, KTERÉ PRO DANÉ PARALELNÍ ŠIP-

3.13. KY $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ SPLŇUJE $f \circ e = g \circ e$.

KOEKVALIZÉR: OBJEKT Q A ZOBRAZENÍ $q: B \to Q$, KTERÉ PRO LIBOVOLNÉ PARALELNÍ ŠIP-

3.17 KY $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ SPLŇUJE $q \circ f = q \circ g$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "r"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "r"'] & Q \arrow[d, dashed, "u"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

EKVALIZÉR KOEKVALIZÉR

GRUPA V KATEGORII $\mathbb{C}$ SE SKLÁDÁ Z OBJEKTŮ A ŠIPEK TAK, ŽE:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] & G & G \arrow[l, "i"'] \\
& 1 \arrow[u, "u"] &
\end{tikzcd}$$

① ZA DODRŽENÍ NÁSLEDUJÍCÍCH PODMÍNEK:

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "m \times 1"'] & & G \times (G \times G) \arrow[d, "1 \times m"] \\
G \times G \arrow[dr, "m"'] & & G \times G \arrow[dl, "m"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

$\cong$ KANONICKÝ ASOCIATIVNÍ IZOMORFIZMUS

② u JE JEDNIČKA PRO m, TEDY KOMUTUJÍ TROJÚHELNÍKY:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\langle u, 1_G \rangle"] \arrow[d, "\langle 1_G, u \rangle"'] \arrow[dr, "1_G"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

u JE KONSTATNÍ ŠIPKA

$u: G \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{u} G$

③ i JE INVERZE:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[d, "\langle i; 1_G \rangle"'] & G \arrow[l, "\langle 1_G; 1_G \rangle"'] \arrow[r, "\langle 1_G; 1_G \rangle"] \arrow[d, "u"] & G \times G \arrow[d, "\langle 1_G; i \rangle"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G & G \times G \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

HOMOMORFIZMUS GRUP V KATEGORII $\mathbb{C}$ JE ŠIPKA h SPLŇUJÍCÍ:

① ZACHOVÁVÁ m

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"'] & H \times H \arrow[d, "m"] \\
G \arrow[r, "h"] & H
\end{tikzcd}$$

② ZACHOVÁVÁ u (KONSTANTA 1)

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "h"] & H \\
1 \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

③ ZACHOVÁVÁ i (INVERZE)

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & H \arrow[d, "i"] \\
G \arrow[r, "h"'] & H
\end{tikzcd}$$

① KATEGORIE: DEFINICE, PŘÍKLADY, KONSTRUKCE KATEGORIÍ, SPECIÁLNÍ OBJEKTY A MORFIZMY

KATEGORIE:

1) OBJEKTY A, B, C
2) ŠIPKY f, g, h (TÉŽ MORFIZMY)
3) PRO KAŽDOU ŠIPKU dom, cod

   $f: \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(f)$
4) PLATÍ, ŽE PRO $f: A \to B$ $g: B \to C$ $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ EXISTUJE KOMPOZIT $g \circ f: A \to C$
5) PRO KAŽDÝ OBJEKT A EXISTUJE IDENTICKÁ ŠIPKA $1_A: A \to A$
6) PRO VŠECHNA $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ PLATÍ ASOCIATIVITA:

   $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
7) PRO VŠECHNA $f: A \to B$ JEDNIČKA:

   $$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

FUNKTOR:

ZOBRAZENÍ OBJEKTŮ NA OBJEKTY A MORFIZMŮ NA MORFIZMY TAK, ŽE:

1) $F(f: A \to B) = F(f): F(A) \to F(B)$
2) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
3) $F(1_A) = 1_{F(A)}$

IZOMORFIZMUS:

MORFIZMUS $f: A \to B$ PRO KTERÝ EXISTUJE MORFIZMUS $g: B \to A$ A PLATÍ:

$$g \circ f = 1_A \quad \text{A} \quad f \circ g = 1_B$$

ZNAČÍME $g = f^{-1}$, $A \cong B$

UMP:

$$M(A) \xrightarrow{\bar{f}} N$$

$$\begin{tikzcd} {|M(A)|} \arrow[r, "{|\bar{f}|}"] & {|N|} \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

MONOID $M(A)$ NAD MNOŽINOU A.

EXISTUJE-LI FCE i PAK PRO LIBOVOLNÝ MONOID N PLATÍ, ŽE EXISTUJE JEDNOZNAČNÝ HOMOMORFIZMUS $\bar{f}$ SPLŇUJÍCÍ:

$|\bar{f}| \circ i = f$ JAKO NA OBRÁZKU

PŘÍKLADY KATEGORIÍ:

1) $\mathbf{Sets}$ KATEGORIE MNOŽIN A MNOŽINOVÝCH FUNKCÍ
2) $\mathbf{Sets}_{FIN}$ KATEGORIE KONEČNÝCH MNOŽIN
3) $\mathbf{Sets}_{INJ}$ MNOŽINY S INJEKTIVNÍMI FUNKCEMI
4) $\mathbf{Pos}$ (ČÁSTEČNĚ) USPOŘÁDANÉ MNOŽINY S MONOTÓNNÍMI ŠIPKAMI
5) $\mathbf{Rel}$ KATEGORIE RELACÍ NA MNOŽINÁCH (TJ. ŠIPKY NEJSOU FCE)
6) MNOŽINY S OPERACÍ NÁSOBENÍ MATIC
7) PODMNOŽINY MNOŽINY S ŠIPKAMI $A \subseteq B \iff A \to B$
8) LOGICKÉ FORMULE S ŠIPKAMI $\varphi \to \psi \iff \varphi \vdash \psi$

KONSTRUKCE KATEGORIÍ:

1) SOUČIN KATEGORIÍ $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ S OBJEKTY (C, D) A ŠIPKAMI $(f, g): (C, D) \to (C', D')$
2) DUÁLNÍ KATEGORIE $\mathbb{C}^{op}$ SE STEJNÝMI OBJEKTY JAKO $\mathbb{C}$ A ŠIPKAMI $f: C \to D$ TAM, KDE $\bar{f}: D \to C$ V $\mathbb{C}$.

   $\bar{f} \circ \bar{g} = \overline{g \circ f}$ A TAKY $1_{\bar{C}} = \bar{1}_C$.
3) KATEGORIE $\mathbb{C}^{\to}$ PRO KATEGORII $\mathbb{C}$. OBJEKTY $\mathbb{C}^{\to}$ JSOU ŠIPKY Z $\mathbb{C}$ A ŠIPKY $f: (g: A \to B) \longrightarrow (g': A' \to B')$ ZOBRAZENÍ MEZI ŠIPKAMI V $\mathbb{C}$ ZNAČENÉ (g, g').

   1_f JE $(1_A, 1_B)$ A DÁLE $(f_1, f_2) \circ (f'_1, f'_2) = (f_1 \circ f'_1, f_2 \circ f'_2)$

   ZAJÍMAVÁ JE DVOJICE FUNKTORŮ $\mathbb{C} \xleftarrow{\mathrm{dom}} \mathbb{C}^{\to} \xrightarrow{\mathrm{cod}} \mathbb{C}$
4) FAKTORKATEGORIE $\mathbb{C}/C$ KATEGORIE $\mathbb{C}$ NAD OBJEKTEM C

   OBJEKTY JSOU ŠIPKY $f \in \mathbb{C}$ TAKOVÉ, ŽE $\mathrm{cod}(f) = C$

   ŠIPKY JSOU $g: f(X \to C) \to f'(X' \to C')$ NEBOLI $g: X \to X'$ TAKOVÉ, ŽE $f' \circ g = f$:

   $$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

MONOMORFIZMUS: $C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \quad fg = fh \Rightarrow g = h$

EPIMORFIZMUS: $A \xrightarrow{f} B \overset{i}{\underset{j}{\rightrightarrows}} D \quad if = jh \Rightarrow i = j$

POČÁTEČNÍ OBJEKT: 0 OBJEKT POKUD EXISTUJE JEDNOZNAČNĚ ZADANÝ MORFIZMUS $0 \to C$ PRO VŠECHNY C

TERMINÁLNÍ OBJEKT: 1 POKUD EXISTUJE JEDNOZNAČNĚ ZADANÝ MORFIZMUS $C \to 1$ PRO VŠECHNA C.

KAŽDÝ IZOMORFIZMUS JE MONOMORFIZMUS I EPIMORFIZMUS:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & B \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "1"'] & C \arrow[d, "e"] & \\
& & B \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & E
\end{tikzcd}
$$

POKUD m JE IZOMORFIZMUS S INVERZÍ e, PAK $mx = my \Rightarrow x = emx = emy = y \Rightarrow m$ JE MONOMORFIZMUS. PRO e JE EPIMORFIZMUS OBDOBNÉ.

KAŽDÁ KATEGORIE S MNOŽINOU MORFIZMŮ JE IZOMORFNÍ NĚJAKÉ KATEGORII S OBJEKTY = MNOŽINAMI, KDE MORFIZMY JSOU FUNKCE.

DLE CAYLEYOVY REPREZENTACE JSOU OBJEKTY MNOŽINY

$$\bar{C} = \{f \in \mathbb{C} \mid cod(f) = C\}$$

A MORFIZMY FUNKCE

$$\bar{g} : \bar{C} \to \bar{D}$$

KDE $g : C \to D$ V $\mathbb{C}$ JE DEFINOVÁNO JAKO $\bar{g}(f) = g \circ f$

MALÁ KATEGORIE: $\mathbb{C}_0$ I $\mathbb{C}_1$ MNOŽINY.

LOKÁLNĚ MALÁ KATEGORIE: PRO VŠECHNY OBJEKTY X, Y PLATÍ, ŽE JE $Hom_{\mathbb{C}}(X,Y) = \{f \in \mathbb{C}_1 \mid f : X \to Y\}$ MNOŽINA.

PRO DVOJICI MONOIDŮ S UMP (VOLNÝCH MONOIDŮ NAD A) EXISTUJE JEDNOZNAČNÝ IZOMORFIZMUS $M \to N$

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\bar{j}"] & N \arrow[r, "\bar{i}"] & M \\
{|M|} \arrow[r, "|\bar{j}|"] & {|N|} \arrow[r, "|\bar{i}|"] & {|M|} \\
& A \arrow[ul, "i"] \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$

POČÁTEČNÍ A KONCOVÝ OBJEKT JSOU JEDNOZNAČNÉ AŽ NA HOMOMORFIZMUS.

PŘEDPOKLAD, ŽE $0, 0'$ JSOU POČÁTEČNÍ.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "1_0"'] & 0' \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "1_{0'}"] & \\
& 0 \arrow[r, "u"'] & 0'
\end{tikzcd}
$$

ZJEVNĚ $\exists$ JEDNOZNAČNÝ HOMOMORFIZMUS $0 \to 0'$.

OBDOBNĚ PRO POČÁTEČNÍ OBJEKTY 1 A $1'$.

② SOUČINY A SOUČTY: DEFINICE, PŘÍKLADY

KARTÉZSKÝ SOUČIN: U MNOŽIN

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$

SOUČINOVÝ DIAGRAM:

OBJEKT P A ŠIPKY p_1 A p_2 SPLŇUJÍCÍ NÁSLEDUJÍCÍ UMP:

PRO $A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$ EXISTUJE JEDNOZNAČNÉ ZOBRAZENÍ $u: X \to P$ TAKTO:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\ A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

SOUČINY JSOU JEDNOZNAČNÉ AŽ NA IZOMORFIZMUS:

$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$

$A \xleftarrow[q_1]{} Q \xrightarrow[q_2]{} B$

EXISTUJE JEDINÉ $i: P \to Q$ TAK, ŽE

$q_1 \circ i = p_1$

$q_2 \circ i = p_2$

STEJNĚ TAK $j: Q \to P$.

$p_1 \circ j \circ i = p_1 \quad p_2 \circ j \circ i = p_2 \Rightarrow j \circ i = 1_P$

SOUČIN: SOUČIN OBJEKTŮ $A, B \in \mathcal{K}$ JE OBJEKT $A \times B$ SPOLU S MORFIZMY $p_1: A \times B \to A$, $p_2: A \times B \to B$ TAKOVÝ, ŽE PRO LIBOVOLNÝ OBJEKT X S MORFIZMY $f_1: X \to A$, $f_2: X \to B$ EXISTUJE JEDINEČNÝ MORFIZMUS $f: X \to A \times B$ SPLŇUJÍCÍ $p_1 \circ f = f_1$ A $p_2 \circ f = f_2$

SOUČET: SOUČET OBJEKTŮ $A, B \in \mathcal{K}$ JE OBJEKT $A + B$ SPOLU S MORFIZMY $i_1: A \to A + B$, $i_2: B \to i + B$ TAKOVÝ, ŽE PRO LIBOVOLNÝ OBJEKT X S MORFIZMY $f_1: A \to X$, $f_2: B \to X$ EXISTUJE JEDINEČNÝ MORFIZMUS $f: A + B \to X$ SPLŇUJÍCÍ $f \circ i_1 = f_1$ A $f \circ i_2 = f_2$.

SOUČET OBJEKTŮ A, B V KATEGORII $\mathcal{K}$ JE JEJICH SOUČINEM V KATEGORII $\mathcal{K}^{op}$

PŘÍKLADY SOUČINŮ:

1. V KATEGORII MNOŽIN $\mathbf{Set}$ - KARTÉZSKÝ SOUČIN
2. V KATEGORII TVOŘENÉ USPOŘÁDANOU MNOŽINOU INFIMUM
3. V KATEGORII VEKTOROVÝCH PROSTORŮ $\mathbf{Vect}_P$ VEKT. PROSTOR $V \times W$ S LINEÁRNÍ TRANSFORMACÍ DO V I W.
4. V KATEGORII KATEGORIÍ KARTÉZSKÝ SOUČIN DEFINOVANÝ PO SLOŽKÁCH.
5. NEKARTÉZSKÝ SOUČIN, NAPŘ. $A \times' B$: $a \times b \mapsto \{\{a\}, \{a, b\}\} \ldots$ JSOU VŠAK IZOMORFNÍ

PŘÍKLADY SOUČTŮ:

1. V KATEGORII TVOŘENÉ USPOŘÁDANOU MNOŽINOU SUPRÉMUM
2. V LOGICE DISJUNKCE
3. SOUČET MONOIDŮ JE MONOID GENEROVANÝ PRVKY OBOU MONOIDŮ

③ FUNKTORY: DEFINICE, PŘÍKLADY, DIAGRAMY

FUNKTOR: $F: \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ PŘIŘAZUJE KAŽDÉMU OBJEKTU K KATEGORIE $\mathcal{K}$ OBJEKT $F(K)$ KATEGORIE $\mathcal{L}$ A KAŽDÉMU MORFIZMU $f: K_1 \to K_2$ KATEGORIE $\mathcal{K}$ MORFIZMUS $F(f): F(K_1) \to F(K_2)$ TAK, ŽE PLATÍ:

① $F(id_{\mathcal{K}}) = id_{FK}$ PRO VŠECHNA $K \in \mathcal{K}$,

② $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ PRO LIBOVOLNÉ $K_1 \xrightarrow{f} K_2 \xrightarrow{g} K_3$

VĚRNÝ FUNKTOR: FUNKTOR F SPLŇUJÍCÍ PRO $\forall f, g \in \mathcal{K}_2$ VLASTNOST. $f \neq g \Rightarrow F(f) \neq F(g)$.

NAPŘÍKLAD ZAPOMÍNAJÍCÍ FUNKTOR $U: \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$.

PLNÝ FUNKTOR: FUNKTOR $F: \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ SPLŇUJÍCÍ PRO LIBOVOLNÝ MORFIZMUS $h: F(K_1) \to F(K_2)$ VLASTNOST: $\exists g \in \mathcal{K}_2$ TAK, ŽE $F(g) = h$. NAPŘÍKLAD

MONOMORFIZMUS: MORFIZMUS $f: K_1 \to K_2$ PRÁVĚ KDYŽ $\mathcal{K}(X, f)$ JE PROSTÉ PRO $\forall X \in \mathcal{K}$.

KONTRAVARIANTNÍ FUNKTOR: PRO KATEGORII $\mathcal{K}$ FUNKTOR $F: \mathcal{K}^{op} \to \mathcal{L}$ KTERÝ ZOBRAZÍ MORFIZMUS $f: K_1 \to K_2$ NA MORFIZMUS $F(f): K_2 \to K_1$ A $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

DIAGRAMY NA KATEGORII $\mathcal{K}$ JSOU OBJEKTY KATEGORIE $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}}$ PŘEDSTAVUJÍCÍ TZV. MNOŽINOVÉ OHODNOCENÍ, TEDY ZOBRAZENÍ $\mathcal{K} \to \mathbf{Set}$.

PRO $\forall$ OBJEKTY $K \in \mathcal{K}$ LOKÁLNĚ MALÝCH KATEGORIÍ LZE PRO LIBOVOLNÝ OBJEKT K OHODNOTIT LIBOVOLNÝ DIAGRAM V $\mathbf{Set}^{\mathcal{K}}$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta\circ\alpha"'] & Q \arrow[d, "\beta"] \\ & R \end{tikzcd} \quad \to \quad \begin{tikzcd} PC \arrow[r, "\alpha C"] \arrow[dr, "(\beta\circ\alpha)C"'] & QC \arrow[d, "\beta C"] \\ & RC \end{tikzcd}$$

DIAGRAM (OBECNĚ): FUNKTOR $D: J \to C$ Z INDEXOVÉ KATEGORIE J DO KATEGORIE C.

FORMÁLNĚ JDE O JAKÝKOLIV FUNKTOR, SPECIFIČNOST SPOČÍVÁ V TOM, ŽE KATEGORIE J JE BRÁNA JAKO INDEXOVÁ, PEVNĚ DANÁ.

PŘÍKLADY FUNKTORŮ:

① $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ MONOIDY, F HOMOMORFIZMUS MONOIDŮ

② $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ USPOŘÁDANÉ MNOŽINY, F IZOTONNÍ ZOBRAZENÍ.

③ ZAPOMÍNAJÍCÍ FUNKTOR $U: \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ Z MONOIDU NA JEHO NOSNOU MNOŽINU

④ ČÁSTEČNĚ ZAPOMÍNAJÍCÍ FUNKTOR $V: \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$ Z OKRUHŮ DO KOMUTATIVNÍCH GRUP

MORFIZMUS $f: K_1 \to K_2$ JE MONOMORFIZMUS $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}(X, f)$ JE PROSTÉ PRO LIBOVOLNÉ $X \in \mathcal{K}$.

MONOMORFIZMUS: $X \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} K_1 \xrightarrow{f} K_2$

SPLŇUJE: $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

$\mathcal{K}(X, f)$ JE PROSTÉ

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, "f"] & K_2 \\ X \arrow[u, "{g,h}"] \arrow[ur, "{\mathcal{K}(X,f)}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{K}(X, f)g = \mathcal{K}(X, f)(h) \Rightarrow g = h$

$\downarrow$ PODSTATNÉ! $\downarrow$

$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

UVĚDOMME SI $\mathcal{K}(X, f)(g) = f \circ g$!

④ PŘIROZENÉ TRANSFORMACE: DEFINICE, PŘÍKLADY, YONEDOVO LEMMA, REPREZENTOVATELNÉ FUNKTORY

PŘIROZENÁ TRANSFORMACE:

$\varphi: F \to G$ JE SOUBOR MORFIZMŮ $\varphi_K: FK \to GK$ KDE $K \in \mathcal{K}$ A F, G JSOU FUNKTORY $\mathcal{K} \to \mathcal{L}$, KTERÁ SPLŇUJE:

$$\varphi_{K_2} \circ F(f) = G(f) \circ \varphi_{K_1}$$

KOMUTUJÍCÍ DIAGRAM V KATEGORII $\mathcal{L}$:

$$\begin{tikzcd} FK_1 \arrow[r, "\varphi_{K_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] & GK_1 \arrow[d, "G(f)"] \\ FK_2 \arrow[r, "\varphi_{K_2}"] & GK_2 \end{tikzcd}$$

POSTUP K YONEDOVU VNOŘENÍ:

ODSUD TO ZAČÍNÁ

KOVARIANTNÍ REPREZENTOVATELNÉ FUNKTORY V $\mathcal{S}et^{\mathcal{K}}$ JSOU TĚŽ: $\mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(K,-): \mathcal{K} \to \mathcal{S}et$.

PRO $\forall\, h: K_1 \to K_2$ EXISTUJE PŘIROZENÁ TRANSFORMACE:

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(h,-): \underbrace{\mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(K_2,-)}_{\text{JEDEN FUNKTOR}} \to \underbrace{\mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(K_1,-)}_{\text{DRUHÝ FUNKTOR}}$$

$$(f: K_2 \to X) \mapsto (f \circ h: K_1 \to X)$$

ZÍSKÁME TAK KONTRAVARIANTNÍ FUNKTOR $h: \mathcal{K}^{OP} \to \mathcal{S}et^{\mathcal{K}}$

EXPONENCIÁLNÍMI TRANSPOZICEMI: $\mathcal{H}om_{\mathcal{K}}: \mathcal{K}^{OP} \times \mathcal{K} \to \mathcal{S}et$

$$y: \mathcal{K} \to \mathcal{S}et^{\mathcal{K}^{OP}}$$

PŘÍKLADY PŘIROZENÝCH TRANSFORMACÍ:

① IDENTITA $id_F\ F \to F$

$$\begin{tikzcd} F(K_1) \arrow[r, "id\,K_1"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(K_1) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(K_2) \arrow[r, "id\,K_2"] & F(K_2) \end{tikzcd}$$

② POTENČNÍ MNOŽINA

$\mathcal{S}et(-,2): \mathcal{S}et^{OP} \to \mathcal{S}et \cong \mathcal{P}: \mathcal{S}et^{OP} \to \mathcal{S}et$

TRANSFORMACE $\varphi: \mathcal{S}et(-,2) \to \mathcal{P}(-)$

$\varphi_x: \mathcal{S}et(x,2) \to \mathcal{P}(x)$

POZOR – OP!

$X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{h} \{0,1\}$

$$\begin{tikzcd} 2^{X_1} \arrow[r, "\varphi_{X_1}"] & \mathcal{P}(X_1) \arrow[r, dotted, dash] & f^{-1}(h^{-1}(1)) \\ 2^{X_2} \arrow[r, "\varphi_{X_2}"] \arrow[u, "2f"] & \mathcal{P}(X_2) \arrow[u, "\mathcal{P}(f)"'] \arrow[r, dotted, dash] & h^{-1}(1) \end{tikzcd}$$

$X_2 \xrightarrow{h} \{0,1\}$

③ ZAPOMNĚTLIVÝ FUNKTOR

$$\mathcal{H}om(F(1), G) \cong U(G)$$

ZOBRAZENÍ $1 \to G \cong$ PRVEK G

YONEDOVO VNOŘENÍ:

FUNKTOR $y: \mathcal{K} \to \mathcal{S}et^{\mathcal{K}^{OP}}$ ZOBRAZUJÍCÍ $K \in \mathcal{K}_1$ NA KONTRAVARIANTNÍ REPREZENTOVATELNÝ FUNKTOR $yK = \mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(-,K): \mathcal{K}^{OP} \to \mathcal{S}et$ A $\overset{K \to L}{f} \in \mathcal{K}_2$ NA PŘIROZENOU TRANSFORMACI

$$yf = \mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(-,f): \mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(-,K) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(-,L).$$

REPREZENTOVATELNÝ FUNKTOR: (KOVARIANTNÍ)

FUNKTOR $\mathcal{H}om(A,-): \mathcal{K} \to \mathcal{S}et$ PRO OBJEKT $A \in \mathcal{K}_1$.

$$\mathcal{H}om(A, 1_X) = 1_{\mathcal{H}om(A,X)} \wedge \mathcal{H}om(A, g \circ f) = \mathcal{H}om(A,g) \circ \mathcal{H}om(A,f)$$

$$\mathcal{H}om(A,1_X)(x) = 1_X \circ x = x = 1_{\mathcal{H}om(A,X)}(x)$$

$$\mathcal{H}om(A, g\circ f)(x) = (g \circ f) \circ x = g \circ (f \circ x) = \mathcal{H}om(A,g)\ \mathcal{H}om(A,f)(x)$$

YONEDOVO LEMMA:

NECHŤ $\mathcal{K}$ JE LOKÁLNĚ MALÁ, PRO LIBOVOLNÝ OBJEKT $K \in \mathcal{K}_1$ A LIBOVOLNÝ FUNKTOR $F \in \mathcal{S}et^{\mathcal{K}^{OP}}$ EXISTUJE IZOMORFIZMUS:

$$\mathcal{H}om(y(K), F) \cong F(K)$$

KTERÝ JE NAVÍC PŘIROZENÝ PRO K I F.

POZN: $\mathcal{H}om$ JE $\mathcal{H}om_{\mathcal{S}et^{\mathcal{K}^{OP}}}$

PŘIROZENOST PRO F:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}om(y(K), F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathcal{H}om(y(K),\psi)"'] & F(K) \arrow[d, "\psi_K"] \\ \mathcal{H}om(y(K), G) \arrow[r, "\cong"] & G(K) \end{tikzcd}$$

PŘIROZENOST PRO K:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}om(y(K_1), F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathcal{H}om(y(h),F)"'] & F(K_1) \arrow[d, "F(h)"] \\ \mathcal{H}om(y(K_2), F) \arrow[r, "\cong"] & F(K_2) \end{tikzcd}$$

PAMATUJ! $\mathcal{H}om(A,g)(f) = g \circ f$

⑤ KARTÉZSKY UZAVŘENÉ KATEGORIE: DEFINICE, PŘÍKLADY, SOUVISLOST S TYPOVANÝM λ-KALKULEM

<u>KARTÉZSKY UZAVŘENÁ KATEGORIE</u> (CCC): KATEGORIE, JEŽ OBSAHUJE VŠECHNY KONEČNÉ SOUČINY A MOCNINY.

V KAŽDÉ KARTÉZSKY UZAVŘENÉ KATEGORII JE MOCNĚNÍ DANÝM OBJEKTEM A FUNKTOR $-^A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$

<u>MOCNINA</u> OBJEKTŮ B A C JE SLOŽENA Z OBJEKTU C^B A MORFIZMU ZVANÉHO <u>HODNOCENÍ</u> $\varepsilon : C^B \times B \to C$ TAKOVÉHO, ŽE PRO LIBOVOLNÝ OBJEKT Z A MORFIZMUS $f : Z \times B \to C$ EXISTUJE UNIKÁTNÍ MORFIZMUS $\bar{f} : Z \to C^B$ TAK, ŽE $\varepsilon \circ (\bar{f} \times 1_B) = f$ JAKO VE VYOBRAZENÉM DIAGRAMU.

$$
\begin{tikzcd}
C^B & C^B \times B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \\
Z \arrow[u, "\bar{f}"] & Z \times B \arrow[u, "\bar{f} \times 1_B"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{f}$ SE NAZÝVÁ <u>TRANSPOZICE</u> f.

PLATÍ $Hom_{SET}(A \times B, C) \cong Hom_{SET}(A, C^B)$

<u>KATEGORIE TYPŮ</u> λ-KALKULU NECHŤ JE DEFINOVÁNA JAKO:

1. OBJEKTY: TYPY $A, B, \ldots$
2. MORFIZMY $A \to B$: TŘÍDY EKVIVALENCE UZAVŘENÝCH TERMŮ $[c]$, PŘIČEMŽ $[a] = [b] \iff \mathcal{L} \vdash a = b$
3. IDENTITY $1_A = \lambda x.x$ (KDE $x : A$)
4. SKLÁDÁNÍ $c \circ b = \lambda x. c(bx)$

TATO KATEGORIE JE KARTÉZSKY UZAVŘENÁ, TJ. JSOU SPLNĚNY NÁSLEDUJÍCÍ PODMÍNKY PRO HODNOCENÍ ε A TRANSPOZICI $\tilde{f}$:

$$\varepsilon = \lambda z. fst(z)\, snd(z) : B^A \times A \to B \quad (z : Z)$$

$$\tilde{f} = \lambda z \lambda x. f\langle z, x\rangle : Z \to B^A$$

PLATÍ: $\varepsilon \circ (\tilde{f} \times 1_A) = f \quad \wedge \quad (\varepsilon \circ (g \times 1_A)) = \tilde{g}$

PRO DŮKAZ VYUŽIJME $\alpha \times \beta = \lambda w. \langle \alpha\, fst(w), \beta\, snd(w)\rangle$

DÁLE $\varepsilon \circ (\tilde{f} \times 1_A) = (\lambda z. fst(z)\, snd(z)) \circ [(\lambda y \lambda x. f\langle x, y\rangle) \times \lambda u. u]$ S. 120 AWODEY

$= \lambda v. (\lambda z. fst(z)\, snd(z)) [(\lambda y \lambda x. f\langle x, y\rangle) \times \lambda u. u]\, v$

$= \lambda v. (\lambda z. fst(z)\, snd(z)) [\lambda w. \langle (\lambda y \lambda x. f\langle y, x\rangle)\, fst(w), (\lambda u. u)\, snd(w)\rangle]\, v$

$\vdots$

$= \lambda v\, (\lambda x. f\langle fst(v), x\rangle)\, snd(v)$

$\vdots$

$= f.$

<u>PŘÍKLADY CCC:</u>

① KATEGORIE $\mathbf{Set}$ A $\mathbf{Set}_{FIN}$ NEBOŤ $|M \times N| = |M| \times |N|$ A $|M^N| = |M|^{|N|}$.

② KATEGORIE (ČÁSTEČNĚ) USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN $\mathbf{Pos}$.

$P \times Q : (p; q) \leq (p'; q') \iff$
$\iff p \leq p' \wedge q \leq q'$

$Q^P = \{ f : P \to Q \text{ IZOTONNÍ} \}$

$f \leq g \iff f(p) \leq g(p)$ PRO $\forall p \in P$

ZJEVNĚ, POKUD $(f, p) \leq (f', p')$ V $Q^P \times P$, TEDY:

$e(f, p) = f(p) \leq f(p') \leq f'(p') = e(f', p')$

ZJEVNĚ, POKUD $x \leq x'$ PRO $f : X \times P \to Q$, TEDY:

$\tilde{f}(x, p) = f(x, p) \leq f(x', p) \leq f'(x', p) = \tilde{f}(x')(p)$

③ CPO S. 109

6 Limity: (ko)ekvalizátory, pullbacky, pushouty, limity, kolimity, limity pomocí součinů a ekvalizátorů

Ekvalizátor: V kategorii $\mathcal{K}$ (univerzální) objekt E a morfizmus $e: E \to A$ takový, že pro dané morfizmy $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ platí: $f \circ e = g \circ e$. Neboli pro dané $r: Z \to A$ s vlastností $f \circ r = g \circ r$ existuje jediné $u: Z \to E$ tak, že $e \circ u = r$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, "u \text{ unikátní}"] \arrow[ur, "r"'] & & \end{tikzcd}$$

Příklad ekvalizátoru: Pro množiny A, B a funkce $f, g: A \to B$ je ekvalizátorem inkluze do A s podmnožinou danou rovností:

$$i: \{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \hookrightarrow A$$

Ekvalizátor je vždy monický (jeho složka e).
Koekvalizátor je vždy epický (jeho složka q).

Příklad koekvalizátoru: Nechť $R \subseteq X \times X$ je relace na množině X. Uvažme $R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} X$ kde r_1, r_2 jsou složková zobrazení (projekce). Pak $\pi: X \to X/R$ je koekvalizátor:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & X/R \arrow[d, "u"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

$u \circ \pi = \varphi$

$(x, x') \in R \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x')$

π je epi $\Rightarrow \exists!\, u$

Koekvalizátor: V kategorii $\mathcal{K}$ (univerzální) objekt Q a morfizmus $q: B \to Q$ takový, že pro dané morfizmy $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ platí: $q \circ f = q \circ g$. Neboli pro dané $r: B \to Z$ s vlastností $r \circ f = r \circ g$ existuje jediné $u: Q \to Z$ tak, že $u \circ q = r$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "r"'] & Q \arrow[d, "u \text{ unikátní}"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Pro každý monoid M existují množiny R a G a diagram koekvalizátoru: (platí obecně pro algebry)

$$\begin{tikzcd} \underset{\text{relace}}{F(R)} \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & \underset{\text{generátory}}{F(G)} \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

kde $F(G)$ a $F(R)$ jsou volné monoidy a tedy $M \cong F(G)/_{r_1 = r_2}$

Pullback: V kategorii $\mathcal{K}$ pro morfizmy f, g, $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$ je složen z morfizmů p_1, p_2 takových, že $f p_1 = g p_2$. Neboli pro daná $r_1: Z \to A$, $r_2: Z \to B$ splňující $f r_1 = g r_2$ existuje jedinečné $u: Z \to P$ splňující $r_1 = p_1 u$ a $r_2 = p_2 u$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "r_2"] \arrow[ddr, bend right, "r_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Pushout: V kategorii $\mathcal{K}$ pro morfizmy f, g $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ je složen z morfizmů i_1, i_2 takových, že $i_1 f = i_2 g$. Neboli pro daná $r_1: A \to Z$, $r_2: B \to Z$ splňující $r_1 f = r_2 g$ existuje jedinečné $u: P \to Z$ splňující $r_1 = u i_1$ a $r_2 = u i_2$.

$$\begin{tikzcd} Z & & \\ & P \arrow[ul, "u"'] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[ull, bend right, "r_2"'] \\ & A \arrow[u, "i_1"] \arrow[uul, bend left, "r_1"] & C \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Ekvalizátor určuje pullback a opačně. Uvažme následující diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\ & A \times B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Zjevně e je ekvalizátor pro $f\pi_1$ a $g\pi_2$ přičemž $p_1 = \pi_1 e$ a $p_2 = \pi_2 e$. Pak E, p_1, p_2 je pullback pro f a g. Naopak pullback $E\, p_1, p_2$ určuje ekvalizátor

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \times B \arrow[r, shift left, "g\pi_2"] \arrow[r, shift right, "f\pi_1"'] & C \end{tikzcd}$$

V kategorii $\mathcal{K}$ s binárními součiny a ekvalizátory existují pullbacky. $\{(a, b) \mid fa = gb\} = A \times_C B \hookrightarrow A \times B$

Pokud jsou oba čtverce pullbacky, je i obdélník pullback. Pokud jsou obdélník a pravý čtverec pullbacky, je i levý čtverec pullback.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h''"'] & E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"] & D \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$A \times_B (B \times_C D) \cong A \times_C D$$

KATEGORIE $\mathcal{K}$ MÁ KONEČNÉ SOUČINY A EKVALIZÁTORY PRÁVĚ KDYŽ MÁ PULLBACKY A KONCOVÝ OBJEKT 1.

DŮKAZ "⇐" ZŘEJMĚ KOMUTUJE NÁSLEDUJÍCÍ ČTVEREC, TEDY $A \times B \cong A \times_1 B$, PROTO MÁ KONEČNÝ SOUČIN.

PULLBACK

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

EKVALIZÉR PAK LZE SESTROJIT JAKO PULLBACK NA SCHÉMATU.

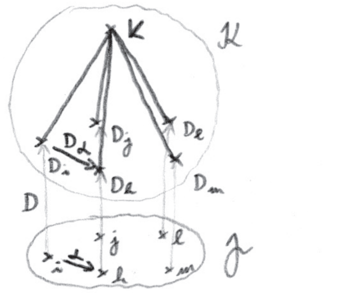
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[d, "\Delta=(1_B,1_B)"] \\ A \arrow[r, "(f,g)"] & B\times B \end{tikzcd}$$

KUŽEL: MĚJME FUNKTOR (DIAGRAM) $D: \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ A OZNAČME POŘADĚ $D_i = D(i)$, $D_j = D(j)$, ... PRO $\forall\, i, j \in \mathcal{J}$, INDEXOVÁ KATEGORIE.

KUŽEL DIAGRAMU D JE OBJEKT $K \in \mathcal{K}$ A SOUBOR MORFIZMŮ $k_i : K \to D_i$ PRO KAŽDÝ OBJEKT $i \in J$ PRÁVĚ JEDEN.

PRO $\forall\, d : i \to j$ V $\mathcal{J}$ NAVÍC KOMUTUJE

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "k_i"'] \arrow[dr, "k_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "D_d"] & & D_j \end{tikzcd}$$



MORFIZMUS KUŽELŮ: MORFIZMUS η V $\mathcal{K}$ Z (K, k_i) DO (K', k'_i) TAKOVÝ, ŽE NÁSLEDUJÍCÍ DIAGRAM KOMUTUJE, TEDY PLATÍ $k_i = k'_i \circ \eta$ PRO VŠECHNA $i \in J$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[dr, "k_i"'] & K' \arrow[d, "k'_i"] \\ & D_i \end{tikzcd}$$

KUŽELY A KUŽELOVÉ MORFIZMY TVOŘÍ KATEGORII $\mathrm{Cone}(D)$. JDE TEDY O KUŽELY DANÉ DIAGRAMEM D V $\mathcal{K}$!

LIMITA PRO DIAGRAM $D : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ JE KONCOVÝ OBJEKT KATEGORIE $\mathrm{Cone}(D)$. LIMITU NAZVEME KONEČNOU, POKUD JE KONEČNÁ INDEXOVÁ KATEGORIE $\mathcal{J}$. LIMITU ZNAČÍME $f_i : \varprojlim_j D_j \to D_i$.

PŘÍKLAD LIMITY: NECHŤ INDEXOVÁ KATEGORIE $\mathcal{J} = \{1, 2\}$, BEZ MORFIZMŮ MIMO IDENTIT. KUŽEL $D : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ PAK MÁ PODOBU $D_1 \xleftarrow{k_1} K \xrightarrow{k_2} D_2$ A LIMITA D JE KONCOVÝ OBJEKT TAKOVÝCH KUŽELŮ: $D_1 \xleftarrow{\pi_1} D_1 \times D_2 \xrightarrow{\pi_2} D_2$. TEDY $\varprojlim_j D_j \cong D_1 \times D_2$.

KATEGORIE MÁ VŠECHNY KONEČNÉ LIMITY, POKUD MÁ KONEČNÉ PRODUKTY A EKVALIZÁTORY.

S. 93 AWODEY DOUČIT!

NÁZNAK DŮKAZU: $D : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$

UKÁŽE SE, ŽE (E, e_i) JE $\varprojlim_i D_i$

$$E \xrightarrow{e} \prod_i D_i \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_{d : i \to j} D_j$$

REPREZENTOVATELNÝ FUNKTOR ZACHOVÁVÁ LIMITY

DŮKAZ POMOCÍ SKUTEČNOSTI, ŽE $\mathrm{Hom}(C, -)$ ZACHOVÁVÁ SOUČINY A EKVALIZÁTORY.

KONTRAVARIANTNÍ REPREZENTOVATELNÝ FUNKTOR ZOBRAZUJE VŠECHNY KOLIMITY NA LIMITY.

KOLIMITA PRO DIAGRAM $D : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ JE POČÁTEČNÍ OBJEKT V KATEGORII KOKUŽELŮ $\mathrm{Cocone}(D)$.

KOLIMITA JE TEDY SLOŽENA Z OBJEKTŮ K A MORFIZMŮ $k_i : D_i \to K$ PRO $\forall\, i \in J$ TAK, ŽE PRO $d : i \to j$ JE SPLNĚNO $k_j \circ D_d = k_i$.

PŘÍKLAD KOLIMITY: HLEDÁME-LI PŘÍMOU LIMITU GRUP $G_0 \xrightarrow{g_0} G_1 \xrightarrow{g_1} G_2 \to \dots$ OZNAČENOU G_∞ S HOMOMORFIZMY $u_n : G_n \to G_\infty$, SPLŇUJÍCÍMI $u_{n+1} \circ g_n = u_n$ A JEDINOU S TOUTO VLASTNOSTÍ, MUSÍ PLATIT:

1. INDEXOVÁ KATEGORIE JE $\omega = (\mathbb{N}, \leq)$
2. SEKVENCE $G_0 \xrightarrow{g_0} G_1 \to \dots$ JE DIAGRAM ω V KATEGORII GRUP
3. $G_\infty \cong \varinjlim_{n \in \omega} G_n$

TATO GRUPA EXISTUJE A LZE JI ZKONSTRUOVAT JAKO SOUČET $\coprod_{n \in \omega} G_n$. POTÉ JE TŘEBA ZTOTOŽNIT $\overset{\in G_n}{x_n} \sim \overset{\in G_m}{y_m}$ TAK, ABY $x_n \sim g_n(x_n)$ NEBOLI ABY PRVKY G_∞ BYLY TŘÍDY EKVIVALENCE $[x_n]$.

$[x_n] = [y_m] \Leftrightarrow g_{n,k}(x_n) = g_{m,k}(y_m)$, KDE $g_{i,j} = g_{j-1} \circ \dots \circ g_i$.

NAVÍC NA G_∞ DEFINUJEME OPERACE:

$[x \cdot y] = [x] \cdot [y]$ | $u_G = [u_0]$ | $[x]^{-1} = [x^{-1}]$

7 ADJUNGOVANÉ FUNKTORY: DEFINICE, PŘÍKLADY, FREYDOVA VĚTA

ADJUNKCE: DVOJICE FUNKTORŮ F, U PODLE DIAGRAMU $C \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$ SPOLEČNĚ S PŘIROZENÝM IZOMORFIZMEM:

$$\varphi : \mathrm{Hom}_D(F(C), D) \cong \mathrm{Hom}_C(C, U(D)) : \psi$$

TATO ADJUNKCE MÁ
- JEDNOTKU $\eta : 1_C \to U \circ F$
- KOJEDNOTKU $\varepsilon : F \circ U \to 1_D$

ADJOINT FUNCTOR THEOREM = AFT

FREYDOVA VĚTA: PRO LOKÁLNĚ MALOU A ÚPLNOU KATEGORII C, LIBOVOLNOU KATEGORII X A FUNKTOR $U : C \to X$ JSOU NÁSLEDUJÍCÍ TVRZENÍ EKVIVALENTNÍ:

1. U MÁ LEVOU ADJUNKCI.
2. U ZACHOVÁVÁ LIMITY A PRO $\forall X \in X$ FUNKTOR U SPLŇUJE:

   EXISTUJE MNOŽINA OBJEKTŮ $C_{i \in I}$ V KATEGORII C VE KTERÉ PRO LIBOVOLNÝ OBJEKT $C \in C$ A MORFIZMUS $f : X \to UC$ EXISTUJE INDEX $i \in I$ A MORFIZMY $\varphi : X \to UC_i$ A $\bar{f} : C_i \to C$ TAK, ŽE $f = U(\bar{f}) \circ \varphi$.

FREYDOVA VĚTA ODPOVÍDÁ NA OTÁZKU, KDY MÁ FUNKTOR LEVOU ADJUNKCI...

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & UC_i \arrow[d, "U\bar{f}"] \\ & UC \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_i \arrow[d, "\bar{f}"] \\ C \end{tikzcd}$$

NEBOLI: KAŽDÝ MORFIZMUS $X \to UC$ FAKTORIZUJE V NĚJAKÉM OBJEKTU C_i DO MNOŽINY ŘEŠENÍ.

PŘÍKLADY ADJUNKCÍ: MĚJME KATEGORII C S BINÁRNÍMI SOUČINY. UVAŽME PEVNÝ OBJEKT $A \in C$ A FUNKTOR $- \times A : C \to C$, KTERÝ OBJEKT X ZOBRAZÍ NA $X \times A$ A MORFIZMUS $h : X \to Y$ NA $X \times A \to Y \times A$.

HLEDEJME K NĚMU PRAVOU ADJUNKCI. JE TŘEBA NALÉZT FUNKTOR $U : C \to C$ S PŘIROZENOU BIJEKCÍ

$$\frac{X \times A \longrightarrow Y}{X \longrightarrow U(Y)}$$

COŽ SPLŇUJE $U : Y \to Y^A$

$$U : (X \to Y) \longrightarrow (X^A \to Y^A)$$

DOSAZENÍM ZA X:

$$\frac{Y^A \times A \xrightarrow{\varepsilon} Y}{Y^A \xrightarrow{1_C} Y^A}$$

JE ALE NUTNÉ, ABY ε BYLO UNIKÁTNÍ, COŽ PLYNE Z UMP PRO MOCNINY:

$$\begin{tikzcd} Y^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"] & Y \\ X \times A \arrow[u, "\bar{f} \times 1_A"] \arrow[ur, "f"'] \end{tikzcd}$$

PRO KAŽDÉ f EXISTUJE JEDNOZNAČNĚ DANÉ $\bar{f}$ SPLŇUJÍCÍ $\varepsilon \circ (\bar{f} \times 1_A) = f$.

DALŠÍ PŘÍKLAD: $C \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} 1$ HLEDÁME $U : 1 \to C$ SPLŇUJÍCÍ KORESPONDENCI:

$$\frac{F(C) = 1 \longrightarrow 1}{C \longrightarrow U(1)}$$

TEDY $U(1)$ JE KONCOVÝ OBJEKT C. TO OVŠEM PLATÍ PRO PRAVOU ADJUNKCI, PRO LEVOU PŮJDE O OBJEKT POČÁTEČNÍ.

POSLEDNÍ PŘÍKLAD: MĚJME FUNKTOR Δ Z C DO $C \times C$ $\Delta(C) = (C, C)$ A HLEDEJME JEHO LEVOU ADJUNKCI.

$$\frac{L(X,Y) \longrightarrow C}{(X,Y) \longrightarrow (C,C)} \Rightarrow L(X,Y) = \underset{\text{SOUČET}}{X + Y}$$

(8) MONOIDÁLNÍ KATEGORIE: DEFINICE, PŘÍKLADY, SOUVISLOST S LINEÁRNÍ LOGIKOU, OBOHACENÉ KATEGORIE

OKRUH 8 NEBUDE ZKOUŠEN.

DEFINICE: MORFIZMUS $f: X \to Y$ KATEGORIE $\mathcal{K}$ SE NAZÝVÁ MONOMORFIZMUS JESTLIŽE PRO LIBOVOLNÉ MORFIZMY g, h $Z \to X$ PLATÍ $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.

Př: PROSTÉ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ = MONOMORFIZMUS

$$P \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

U VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

Př: NEBO MONOIDY .... VOLNÉ MONOIDY S JEDNÍM GENERÁTOREM ODPOVÍDAJÍ BÁZI ?

DEFINICE: ZOBRAZENÍ NA: $X \xrightarrow{f} Y \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z$ POKUD $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ EPIMORFIZMUS.

NEBOLI LZE ŘÍCT, ŽE EPIMORFIZMUS V $\mathcal{K}$ JE MONOMORFIZMUS V $\mathcal{K}^{op.}$

Př: 1) **Set** ZOBRAZENÍ NA

2) $\mathbf{Vect}_P$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ NA

3) **Mon** U MONOIDŮ ∃ EPIMORFIZMY, KTERÉ NEJSOU ZOBRAZENÍ NA (PŘÍKLAD PŘÍŠTĚ)

POZNÁMKA: SLOŽENÍ MONOMORFIZMŮ JE MONOMORFIZMUS.

$$f_2 f_1 g = f_2 f_1 h \Rightarrow f_1 g = f_1 h \Rightarrow g = h$$

STEJNĚ PRO EPIMORFIZMY.

VĚTA: KAŽDÝ IZOMORFIZMUS JE MONOMORFIZMUS.

DŮKAZ: $f^{-1} f g = f^{-1} f h \Rightarrow g = h$

VĚTA: KAŽDÝ ~~EZO~~IZOMORFIZMUS JE EPIMORFIZMUS.

DŮKAZ: TOTOŽNÝ.

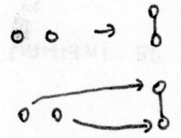
POZNÁMKA: IZOMORFIZMUS JE AUTODUÁLNÍ POJEM.

POZNÁMKA: NEPAMATOVAT – BALANCOVANÁ KATEGORIE SPLŇUJE: Izo = Mono ∩ Epi

Př: KATEGORIE USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN A IZOTONNÍCH ZOBRAZENÍ.

ZDE PLATÍ: Mono = PROSTÉ ZOBRAZENÍ

Epi = ZOBRAZENÍ NA



JE MONO A EPI A NENÍ IZO.

⇓

NEBALANCOVANÁ KATEGORIE

⋮

SPLNĚNO SICE PRO VRCHOLY, ALE NENÍ SPLNĚNO PRO HRANY !

OBDOBNÝ PŘÍPAD NEBALANCOVANÝCH KATEGORIÍ LZE NALÉZT NAPŘ. V GRAFECH

DEFINICE: KATEGORIE GRAFŮ **Gra** MŮŽE MÍT ORIENTOVANÉ A NEORIENTOVANÉ HRANY.

KATEGORIE **MGra** MULTIGRAFŮ MŮŽE MÍT VÍCE HRAN MEZI UZLY – KATEGORIE BEZ KOMPOZICE A BEZ IDENTITY.

POZDNÍ PŘÍCHOD

Př: ZOBRAZENÍ $\begin{matrix} 0 & 0 \\ {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} \end{matrix} \to \begin{matrix} 0 - 0 \\ {\scriptstyle 0 \quad 1} \end{matrix}$ JE V GRAFU $\mathcal{E}pi$, ALE V MULTIGRAFU NIKOLIV.

DEFINICE: PODOBJEKT OBJEKTU Y ODPOVÍDÁ (AŽ NA IZOMORFIZMUS) PROSTÉMU ZOBRAZENÍ DO Y.

DUÁLNÍM POJMEM K PODOBJEKTU JE FAKTOROVÝ OBJEKT.

POZNÁMKA: PODOBJEKT JE VLASTNĚ PODMNOŽINA S PROSTÝM ZOBRAZENÍM.

Mono ZNAČÍME $\hookrightarrow$ NEBO $\rightarrowtail$, Epi ZNAČÍME $\twoheadrightarrow$.

2 SOUČINY A SOUČTY

POZNÁMKA:

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ A & & B \\ & X \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \exists!\ f \quad X \to A \times B$$

A ZJEVNĚ $f(x) = (f_1(x); f_2(x))$

NEBO TŘEBA $(A \times B)^X \cong A^X \times B^X$.

DEFINICE: SOUČINEM $A \times B$ OBJEKTŮ A, B V KATEGORII $\mathcal{K}$ JE OBJEKT $A \times B$ SPOLU S MORFIZMY $p_1: A \times B \to A$, $p_2: A \times B \to B$ TAKOVÝ, ŽE PRO LIBOVOLNÝ OBJEKT X S MORFIZMY $f_1: X \to A$, $f_2: X \to B$ $\exists!$ MORFIZMUS $f: X \to A \times B$ TAKOVÝ, ŽE PRO $p_1 \circ f = f_1$ A $p_2 \circ f = f_2$.

POZNÁMKA: UVAŽUJME NOVOU KATEGORII (BEZ OZNAČENÍ). PEVNĚ DÁNY MĚJME $\mathcal{K}, A, B$.

OBJEKTY NOVÉ KATEGORIE NECHŤ JSOU TYTO STRUKTURY: $\begin{tikzcd} A & & B \\ & X \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$

UVAŽUJME OBJEKT $\begin{tikzcd} A & & B \\ & X' \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ ("KATEGORIE VIDLIČEK $\nwarrow X \nearrow$ NA PEVNÁ A, B.")

PAK SOUČIN $(A \times B, p_1, p_2)$ JE V KATEGORII TERMINÁLNÍ OBJEKT (PEVNĚ URČENÝ AŽ NA IZO.)

TEDY SOUČIN OBJEKTŮ JE JEDNOZNAČNĚ URČEN AŽ NA IZOMORFIZMUS.

Př: 1) $\mathcal{S}et$ KARTÉZSKÝ SOUČIN

2) P USPOŘ. MNOŽ. SOUČIN JE INFIMUM

3) $\mathcal{V}ect_P$

$$\begin{tikzcd} & V \times W \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ V & & W \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} v_1 + v_2 \\ w_1 + w_2 \end{matrix} \qquad (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

DEFINICE: SOUČET $A + B$ OBJEKTŮ A, B V $\mathcal{K}$ JE JEJICH SOUČIN V $\mathcal{K}^{op}$.

POZNÁMKA: PROJEKCE NAHRADÍME INJEKCEMI:

$$\begin{tikzcd} & A + B \arrow[dd, "\exists f"] & \\ A \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & & B \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

JDE O DISJUNKTNÍ SJEDNOCENÍ $A \dot{\cup} B$

TJ. $\{0, 1\} \dot{\cup} \{1, 2\} = \{0, 1, 1', 2\}$.

Př: 1) P uspoř. mn. součet odpovídá supremu

2) v logice součet odpovídá disjunkci (nebo) tj. v uspoř. mn.…

3) Vect$_P$

4) Mon součet v monoidech je monoid generovaný všemi prvky obou monoidů.

3. FUNKTORY

DEFINICE: FUNKTOR $F: \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ KATEGORIE $\mathcal{K}$ DO KATEGORIE $\mathcal{L}$ PŘIŘAZUJE KAŽDÉMU OBJEKTU K KATEGORIE $\mathcal{K}$ OBJEKT $F(K)$ KATEGORIE $\mathcal{L}$ A KAŽDÉMU MORFIZMU $f: K_1 \to K_2$ KATEGORIE $\mathcal{K}$ MORFIZMUS $F(f): FK_1 \to FK_2$.

PŘITOM PLATÍ: $F(id_K) = id_{FK}$ PRO LIBOVOLNÉ $K \in ob(\mathcal{K})$

$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ PRO LIBOVOLNÉ $K_1 \xrightarrow{f} K_2 \xrightarrow{g} K_3$

P:

① $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ MONOIDY $\Rightarrow$ FUNKTOR JE HOMOMORFIZMEM MONOIDŮ

② $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ USPOŘÁDANÉ MNOŽINY $\Rightarrow$ FUNKTOR JE IZOTONNÍ ZOBRAZENÍ

③ FUNKTOR $U: \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ Z MONOIDU NA JEHO NOSNOU MNOŽINU (ZAPOMÍNAJÍCÍ FUNKTOR)

④ FUNKTOR $V: \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$ Z OKRUHŮ DO KOMUTATIVNÍCH GRUP (ČÁSTEČNĚ ZAPOM. FUNKTOR)

⑤ FUNKTOR $F: \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$ Z NOSNÉ MNOŽINY NA MONOID

$$\begin{tikzcd}
\text{MONOIDY} & UFX \arrow[r, "UFf", "\exists!"'] & UFY \\
\text{MNOŽINY} & X \arrow[u, "\eta_X"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "\eta_Y"']
\end{tikzcd}$$

$\eta_X(x) = x$

$\eta_Y(y) = y$

DEFINUJEME F JAKO:

$F(f)(x_1 \dots x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$

$$\begin{tikzcd}
UFX \arrow[r, "UFf"] \arrow[rr, bend left, "UF(g\circ f)"] & UFY \arrow[r, "UFg"] & UFZ \\
X \arrow[u, "\eta_X"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "\eta_Y"'] \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[u, "\eta_Z"']
\end{tikzcd}$$

FUNKTOR VOLNÝCH MONOIDŮ.

⑥ $K \in ob(\mathcal{K})$

MNOŽINA ZOBRAZENÍ Z K

$\mathcal{K}(K,-): \mathcal{K} \to \mathbf{Set}$

POZN: $-$ ZNAČÍ PROMĚNNOU

$\mathcal{K}(K,-)$ JE ZNAČKA FUNKTORU

$\mathcal{K}(K,-)(X) = \mathcal{K}(K,X)$ OBJEKTU PŘIŘAZUJEME MNOŽINU

$f: X \to Y$ ZOBRAZÍME $\mathcal{K}(K,X) \xrightarrow{\mathcal{K}(K,f)} \mathcal{K}(K,Y)$

CHÁPU-LI TO SPRÁVNĚ, JE $\mathcal{K}(K,X)$ MNOŽINA VŠECH ZOBRAZENÍ $K \to A$ A $\mathcal{K}(K,f)$ MNOŽINA VŠECH ZOBRAZENÍ $\mathcal{K}(K,X) \to \mathcal{K}(K,Y)$

UVAŽME $K \xrightarrow{h} X$ $\quad K \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y$

$$\mathcal{K}(K,f)(h) = f \circ h$$

PRO FUNKTOR MUSÍ BÝT SPLNĚNO: ZACHOVÁVÁ IDENTITU A KOMPOZICI

$\mathcal{K}(K, id_X)(h) = h \qquad id_X \circ h = h$

$K \xrightarrow{h} X \xrightarrow{id_X} X$

KOMPOZICE: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f\circ h"] \arrow[ddr, "g\circ(f\circ h)"] \arrow[ddr, bend right, "(g\circ f)\circ h"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{K}(K, g\circ f)(h) = (g\circ f)\circ h$$

$$(\mathcal{K}(K,g)\circ \mathcal{K}(K,f))(h) = \mathcal{K}(K,g)(\mathcal{K}(K,f)(h)) = \mathcal{K}(K,g)(f\circ h) = g(f\circ h)$$

A DALŠÍ VARIANTA:

$\mathcal{K}(-,K) = \mathcal{K}^{op}(K,-)$? $\mathcal{K}(X,K)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[d, "g"] \\ Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "h\circ f"] & \\ Y \arrow[r, "h"] & K \end{tikzcd}$$

$\mathcal{K}(-,K) : \mathcal{K}^{op} \longrightarrow \mathcal{S}et$

KONTRAVARIANTNÍ FUNKTOR

NEBOLI KON-FUNKTOR

$\mathcal{K}(f,K) : \mathcal{K}(Y,K) \longrightarrow \mathcal{K}(X,K)$

v $\mathcal{K}^{op}$ TOTIŽ $f: Y \to X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \arrow[ddr] & \\ Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr] & \\ Z \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

VSUVKA – SOUČIN KATEGORIÍ

$\mathcal{K}\times\mathcal{L}$ OBJEKTY (K,L) $K\in\mathcal{K}$, $L\in\mathcal{L}$

MORFIZMY $(h_1,h_2) : (K_1,L_1) \to (K_2,L_2)$ $h_1 : K_1 \to L_1$, $h_2 : K_2 \to L_2$

Př: PŘÍKLAD KONTRAVARIANTNÍHO FUNKTORU

$\mathcal{S}et(-,2) : \mathcal{S}et^{op} \to \mathcal{S}et$

TEDY: $\mathcal{S}et(X,2) \cong \mathbb{P}(X)$ POTENČNÍ MNOŽINA (MNOŽINA VŠECH PODMNOŽIN) X.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "h\circ f"] & \\ Y \arrow[r, "h"] & 2 \end{tikzcd}$$

$\{x \mid h(f(x)) = 1\} = f^{-1}(A)$ (1 ... SPLŇUJÍCÍ PODMÍNKU)

$\{y \mid h(y) = 1\} = A$

$\mathbb{P}(f)(A) = f^{-1}(A)$

$f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g\circ f)^{-1}(A)$

Př: $\mathbf{Vect}(-,P)$ $\quad \mathbf{Vect}^{op} \to \mathbf{Set}$ $\quad$ DOKONCE LZE CHÁPAT JAKO: $\mathbf{Vect}^{op} \to \mathbf{Vect}$

POZNÁMKA: SKLÁDÁNÍ FUNKTORŮ

$$\mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{L} \xrightarrow{G} \mathcal{M} \qquad (G \circ F)(K) = GFK$$

$$Id_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$$

POZNÁMKA: FUNKTOR $F: \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ JE VĚRNÝ POKUD PRO $f \neq g : K_1 \to K_2$ PLATÍ $F(f) \neq F(g)$. PODOBNOST S INJEKTIVITOU.

PŘÍKLADEM VĚRNÉHO FUNKTORU JE ZAPOMÍNAJÍCÍ FUNKTOR $\mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$.

POZN.: $\mathbf{Set}$ ZNAČÍ OBECNĚ NOSNOU MNOŽINU.

POZNÁMKA: FUNKTOR $F: \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ JE PLNÝ (FULL) POKUD PRO LIBOVOLNÝ $h : FK_1 \to FK_2$ EXISTUJE $g: K_1 \to K_2$ TAK, ŽE $Fg = h$.

POZNÁMKA: LIBOVOLNÝ FUNKTOR ZACHOVÁVÁ IZOMORFIZMUS

$$F(f \circ f^{-1}) = F(f) \circ F(f^{-1}) \Rightarrow F(f)^{-1} = F(f^{-1})$$

POZNÁMKA: MORFIZMUS $f: K_1 \to K_2$ JE MONOMORFIZMUS $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}(X,f)$ JE PROSTÉ PRO LIB. $X \in \mathcal{K}$.

$$X \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} K_1 \xrightarrow{f} K_2 \qquad f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h \quad \text{Z DEFINICE MONOMORFIZMU}$$

$$\mathcal{K}(X,f)(g) = \mathcal{K}(X,f)(h) \Rightarrow g = h$$

MORFIZMUS $f: K_1 \to K_2$ JE EPIMORFIZMUS $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}(f,X)$ JE PROSTÉ PRO LIB. $X \in \mathcal{K}$.

4. PŘIROZENÉ TRANSFORMACE

POZNÁMKA: MĚJME DVA FUNKTORY $F, G : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$

PŘIROZENÁ TRANSFORMACE $\varphi : F \to G$ JE SOUBOR MORFIZMŮ

$$\varphi_K : FK \to GK, \quad K \in \mathcal{K}$$

SPLŇUJÍCÍ, ŽE PRO LIBOVOLNÝ $f: K_1 \to K_2$ KOMUTUJE:

$$\begin{tikzcd} FK_1 \arrow[r, "\varphi_{K_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] & GK_1 \arrow[d, "G(f)"] \\ FK_2 \arrow[r, "\varphi_{K_2}"'] & GK_2 \end{tikzcd}$$

Př: $Set(-,2): Set^{op} \to Set \cong P: Set^{op} \to Set$

FUNKTOR F FUNKTOR G

$$\underset{F(x)}{2^x} \cong \underset{G(x)}{P(x)}$$

PŘIROZENÁ TRANSFORMACE $\varphi: Set(-,2) \to P(-)$

$$\varphi_x : Set(x,2) \to P(x) \qquad \varphi_x(h) = h^{-1}(1) \qquad 2 = \{0,1\}$$

$$x_1 \xrightarrow{f} x_2 \xrightarrow{h} 2 \qquad\qquad f^{-1}(h^{-1}(1))$$

$$\begin{tikzcd}
2^{x_1} \arrow[r, "\varphi_{x_1}"] & P(x_1) \\
2^{x_2} \arrow[r, "\varphi_{x_2}"'] \arrow[u, "2^f"] & P(x_2) \arrow[u, "P(f)"']
\end{tikzcd}$$

$$x_2 \xrightarrow{h} 2 \qquad\qquad h^{-1}(1)$$

Př: V: KONEČNĚROZMĚRNÝ VEKTOROVÝ PROSTOR

$\tilde{V} = Vect(V, P)$ $\qquad \dim \tilde{V} = \dim V$

$\tilde{V} \cong V$

$\tilde{\tilde{V}} \cong V$ DVAKRÁT DUÁLNÍ V.P.

$Vect(Vect(V,P),P)$ $\qquad F: \tilde{\tilde{V}} \to V$

$F(\varphi)(f) =$ $\qquad \varphi: \tilde{V} \to P \qquad f(v): \tilde{V} \to P$

$f: V \to P$

$v \;\ldots\; F(v)(f) = f(v)$

Př: PŘÍKLADEM PŘIROZENÉ TRANSFORMACE JE I IDENTITA $\quad id_F \; F \to F$

$$(id_F)_k = id_{Fk}$$

$$\begin{tikzcd}
Fk_1 \arrow[r, "id_{k_1}"] \arrow[d, "Ff"'] & Fk_1 \arrow[d, "Ff"] \\
Fk_2 \arrow[r, "id_{k_2}"'] & Fk_2
\end{tikzcd}$$

POZNÁMKA: SKLÁDÁNÍ PŘIROZENÝCH TRANSFORMACÍ

$$(\psi \circ \varphi)_k = \psi_k \circ \varphi_k$$

DALŠÍMI KONSTRUKCEMI LZE Z FUNKTORŮ (MALÝCH) KATEGORIÍ A TRANSFORMACÍ NA TĚCHTO FUNKTORECH ZÍSKAT (V NAŠEM POJETÍ) KATEGORII!