Lineární operátory

Marek Jukl

Univerzita Palackého v Olomouci
fakulta
PŘÍRODOVĚDECKÁ
Olomouc 2001

Recenzenti: doc. RNDr. Dalibor Klucký, CSc.
doc. RNDr. Alena Vanžurová, CSc.

Za typografické zpracování a jazykovou správnost odpovídá autor

ISBN 80-244-0342-0

O B S A H

* * *

Úvodem

Předložený učební text je věnován základům teorie lineárních operátorů na vektorových prostorech konečné dimenze. Počíná studiem elementárních vlastností operátorů a pokračuje v lineární algebře frekventovanými pojmy invariantních, vlastních a kořenových podprostorů, aby byl završen výkladem teorie Jordanových bazí a matic lineárního operátoru, která představuje jisté vyvrcholení klasické lineární algebry. Ačkoli tyto výsledky náleží konci 19. století, jsou jejich aplikace aktuální i v současné matematice - s teorií lineárních operátorů se čtenář setká nejen např. v analytické či diferenciální geometrii, teorii diferenciálních rovnic, funkcionální analýze nebo matematické statistice, ale i v kvantové fyzice a dalších přírodních a technických vědách (viz např. [14]).

Tento text je především určen studentům kurzu lineární algebry v magisterském studiu oboru matematika a její aplikace (na PřF UP). Z tohoto důvodu je věnována přiměřená pozornost tomu, aby výklad teorie Jordanových bazí a Jordanových tvarů matic vyplynul z vlastností jisté struktury podprostorů, kterou každý lineární operátor přirozeným způsobem indukuje na základním prostoru, což umožňuje hlubší pochopení podstaty tohoto pojmu a motivace k jeho zavedení (s dalším způsobem hledání Jordanových tvarů matic vyplývajícím z vlastností polynomiálních matic (viz např. [3], [6], [1]), jehož výklad dominuje především na školách technického směru, se čtenář v kurzu lineární algebry také seznámí, ovšem následně).

Text mohou přirozeně využít i studenti ostatních oborů matematických, ale i dalších - např. fyzikálních.

Teorie lineárních operátorů je v těsné souvislosti s teorií matic. Tato souvislost je v tomto textu náležitě vyjádřena zejména uváděním aplikací nalézaných výsledků v teorii matic, ale i užitím maticové symboliky, která výklad formálně zjednoduší.

Výklad je v kapitolách 1 - 4 prováděn pro libovolné těleso skalárů, část kapitoly 5 a celá kapitola 6 je prováděna pouze pro těleso komplexních čísel, ale bylo by ji možno stejně tak provést pro libovolné algebraicky uzavřené těleso.

V textu jsou zařazeny i vzorové řešené příklady. Další příklady, jejichž zvládnutí má v neformálním osvojení teorie nezastupitelnou úlohu, nalezne čtenář ve sbírkách úloh - např. [2], [4], [10], [12] - a budou řešeny ve cvičení z lineární algebry.

Předkládaná teorie je poměrně formální. Proto je nutné, aby se čtenář opravdu snažil pochopit její podstatu, uvědomoval si naznačené souvislosti napříč tímto textem. Jako jistou minimální iniciaci této snahy lze chápat otázky „Proč?", pokyny „Ověřte!" a další vřazené v textu. Rovněž je důležité pochopit motivace vedoucí k formulaci výsledků do vět a neustrnout jen na jejich pouhém obsahovém zvládnutí.

Dále bych se ještě rád zmínil o označování vět, definic, poznámek a pod. Jsou v rámci každé z kapitol číslovány zvlášť. Činíme-li na ně odkaz v rámci této kapitoly, uvedeme jen jejich číslo. Odkazujeme-li do jiné kapitoly, předřadíme číslo kapitoly před číslo určované položky. Formule jsou rovněž číslovány, a to tak, že v kulatých závorkách je uvedeno číslo definice/věty k níž se vztahují a za pomlčkou pak číslo formule v rámci uvedené definice či věty.

Pro čtenáře je vhodné seznámit se i s další literaturou, která zpracovává některá zde uváděná témata - jiný způsob či rozsah výkladu nebo odlišný úhel pohledu přispěje k neformálnímu zvládnutí teorie - seznam několika titulů je zařazen na konec textu.

Závěrem chci poděkovat oběma recenzentům - doc.RNDr.Daliboru Kluckému,CSc. a doc.RNDr.Aleně Vanžurové,CSc. - za cenné rady a připomínky, kterými přispěli ke zkvalitnění předloženého textu.

Olomouc, srpen 2001

Autor

1. Lineární operátor

Písmenem **V** (příp. $\mathbf{V}_n$) zde budeme označovat n-rozměrný vektorový prostor nad komutativním tělesem T, a to i v dalších kapitolách, nebude-li uvedeno jinak.

1.1 Lineární operátor a jeho základní vlastnosti

1.Definice Zobrazení $\mathbb{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ se nazývá *lineární operátor na* **V**, jestliže má následující vlastnosti:

(1) $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$: $\quad \mathbb{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbb{A}(\mathbf{u})+\mathbb{A}(\mathbf{v})$,

(2) $\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V}, \forall t\in T$: $\quad \mathbb{A}(t\mathbf{u})=t\mathbb{A}(\mathbf{u})$.

Příklad A

1. Uvažujme vektorový prostor všech polynomů z $R[x]$ stupně nejvýše n-1 a zobrazení $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ definovaná pro libovolný polynom $f(x)$ vztahy:

- $\mathbb{A}$: $f(x) \mapsto f'(x)$,
- $\mathbb{B}$: $f(x) \mapsto \int f(x)dx$ s vlastností $(\int f(x)dx)(0)=0.$[1])

Snadno se ukáže, že $\mathbb{A}$ je lineárním operátorem na zmíněném prostoru polynomů, zatímco $\mathbb{B}$ nikoli - podmínky (1),(2) jsou sice splněny, ale obraz polynomu stupně n-1 nenáleží uvedenému prostoru[2]).

2. Uvažujme těleso komplexních čísel C jakožto vektorový prostor nad C a definujme zobrazení $\mathbb{A}$: $C\to C$ takto:

$$\forall z\in C: \ \mathbb{A}(z)=\bar{z}.$$

Pro libovolné $z,s\in C$, platí $\mathbb{A}(z+s) = \overline{z+s} = \bar{z}+\bar{s} = \mathbb{A}(z)+\mathbb{A}(s)$, a tedy zobrazení $\mathbb{A}$ splňuje podmínku (1) definice 1.

Pro libovolné $z\in C$ a $t\in T=C$, $t\notin R$, však obdržíme

$$\mathbb{A}(t.z) = \overline{t.z} = \bar{t}.\bar{z} \neq t.\mathbb{A}(z),$$

[1]) bez doplňujícího požadavku by se nejednalo o zobrazení, neboť primitivní funkce je určena jednoznačně až na přičtení konstanty.

[2]) pokud bychom uvažovali vektorový prostor $R[x]$ *všech* polynomů, pak by na něm $\mathbb{B}$ byl lineárním operátorem - tento vektorový prostor by však nebyl konečné dimenze a těmito se zde nezabýváme.

čili $\mathbb{A}$ nesplňuje (2) definice 1 a nejedná se tedy o lineární operátor.

Pokud však budeme uvažovat těleso C jakožto vektorový prostor nad R a definujeme-li zobrazení $\mathbb{A}$ shodně jako výše, je opět splněna (1), a protože pro libovolné $z \in C$ a $t \in T = R$ lze psát

$$\mathbb{A}(t.z) = \overline{t.z} = \bar{t}.\bar{z} = t.\bar{z} = t.\mathbb{A}(z),$$

je splněna i (2) a zobrazení $\mathbb{A}$ je lineárním operátorem na C.

3. Buď **V** libovolný vektorový prostor. Definujme nyní pro libovolný $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ následující zobrazení:

- $\mathbb{I}: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$,
- $\mathbb{O}: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{o}$.

Tato zobrazení jsou evidentně lineárními operátory. Budeme je vždy označovat uvedenými symboly a nazývat *identický* ($\mathbb{I}$), resp. *nulový* ($\mathbb{O}$), *lineární operátor*.

2. Poznámka Přímo z definice 1 je zřejmé, že *lineární operátor na* **V** je jen jiným názvem pro *endomorfizmus prostoru* **V**. Proto také množinu všech lineárních operátorů na prostoru **V** budeme značit $\mathcal{E}nd(\mathbf{V})$.

V následující části tohoto odstavce zavedeme některé pojmy a uvedeme některé vlastnosti lineárních operátorů, které jsou specializací pojmů (vlastností) teorie homomorfizmů a jsou zde zahrnuty spíše pro úplnost. Proto zde také nejsou uváděny příklady s tematikou analytických vyjádření, matic operátorů ap.

3. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na **V**, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ nechť je báze prostoru **V**. Označíme-li[3])

$$\boxed{\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_i)\}_{\mathcal{B}} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \ 1 \le i \le n,}$$

pak matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$ řádu n nazýváme *matice lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ *v bázi* $\mathcal{B}$ a značíme ji $(\mathbb{A}, \mathcal{B})$.

---

[3]) symbolem $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}$ rozumíme aritmetický vektor souřadnic vektoru **x** v bázi $\mathcal{B}$, který budeme krátce nazývat *souřadnice*.

4. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**, $\mathcal{B}$ *některá báze. Pak pro každý* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ *platí:*

$$\boxed{\{\mathbb{A}(\mathbf{x})\}_{\mathcal{B}}=\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}(\mathbb{A},\mathcal{B}),} \tag{4-1}$$

neboli:

je-li $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,\dots,x_n)$, *pak pro* $\mathbb{A}(\mathbf{x})$ *platí:*

$$\boxed{\{\mathbb{A}(\mathbf{x})\}_{\mathcal{B}}=(y_1,\dots,y_n) \Leftrightarrow \forall j, 1\le j\le n:\ y_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i,} \tag{4-2}$$

kde $(a_{ij})_n=(\mathbb{A},\mathcal{B})$.

Vztahy (4-1), (4-2) budeme přirozeně nazývat *analytické vyjádření automorfizmu* $\mathbb{A}$ *v bázi* $\mathcal{B}$ (rozepište si sumační zápis (4-2)!).

5. Věta *Buď* $\mathcal{B}$ *některá báze* **V**. *Pak zobrazení* $H_{\mathcal{B}}$: $\mathcal{E}nd(\mathbf{V}_n)\to\mathcal{M}_n(T)$ *definované vztahem*

$$\boxed{\forall\mathbb{A}\in\mathcal{E}nd(V):\ H_{\mathcal{B}}(\mathbb{A})=(\mathbb{A},\mathcal{B})} \tag{5-1}$$

je definováno korektně a je bijekcí uvedených množin.

6. Poznámka Při zvolené bázi má tedy každý lineární operátor v této bázi jedinou matici (řádu n nad T) a současně každá matice řádu n nad T je v této bázi maticí jediného lineárního operátoru na **V**.

7. Věta *Buďte* $\mathbb{A}$ *libovolný lineární operátor na* **V**, $\mathcal{B},\mathcal{C}$ *některé báze* **V**. *Pak platí*[4])

$$\boxed{(\mathbb{A},\mathcal{C})=(\mathcal{B},\mathcal{C})(\mathbb{A},\mathcal{B})(\mathcal{C},\mathcal{B}).} \tag{7-1}$$

---

[4]) Symbolem $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ rozumíme *matici přechodu od* $\mathcal{B}$ *k* $\mathcal{C}$. Přitom se držíme konvence, kdy její řádky jsou tvořeny souřadnicemi prvků báze $\mathcal{C}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.

8.Věta *Buďte* $\mathbb{A}$ *libovolný lineární operátor na* **V**, $\mathcal{B},\mathcal{C}$ *některé báze* **V**. *Pak platí*

$$\boxed{h(\mathbb{A},\mathcal{B})=h(\mathbb{A},\mathcal{C})=\dim \mathrm{Im}\mathbb{A}.}$$

Ze vztahu pro defekt homomorfizmu[5]) plyne tato věta (jak?):

9.Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**. *Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) $\mathbb{A}$ *je automorfizmus prostoru* **V**.

(2) $\mathbb{A}$ *je epimorfizmus prostoru* **V**.

(3) $\mathbb{A}$ *je monorfizmus prostoru* **V**.

Odtud a z věty 8 obdržíme:

10.Věta *Lineární operátor je automorfizmem na* **V**, *právě když jeho matice v jedné (a tudíž v každé) bázi prostoru* **V** *je regulární.*

11.Definice Buďte $\mathbb{A},\mathbb{B}$ lineární operátory na **V**, t skalár z *T*. Pak *součtem operátorů* $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$ rozumíme zobrazení $\mathbb{A}+\mathbb{B}$: $\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ definované vztahem

$$\boxed{\forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}:\ (\mathbb{A}+\mathbb{B})(\mathbf{x})=\mathbb{A}(\mathbf{x})+\mathbb{B}(\mathbf{x}),}$$

skalárním t-*násobkem operátoru* $\mathbb{A}$ nazýváme zobrazení $t\mathbb{A}$: $\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ definované vztahem

$$\boxed{\forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}:\ (t\mathbb{A})(\mathbf{x})=t.\mathbb{A}(\mathbf{x}).}$$

---

[5]) tj. $\dim \mathrm{Ker}\mathbb{A} = \dim\mathbf{V} - \dim \mathrm{Im}\mathbb{A}$.

12. Věta *Buďte* $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ *libovolné lineární operátory na* **V** *a* t *libovolný skalár z* T. *Pak součet* $\mathbb{A}+\mathbb{B}$, t-*násobek* $t\mathbb{A}$ *i složení*[6] $\mathbb{A}\circ\mathbb{B}$ *jsou lineárními operátory na* **V** *a pro jejich matice v libovolné bázi* $\mathcal{B}$ *prostoru* **V** *platí:*

$$\boxed{\begin{gathered}(\mathbb{A}+\mathbb{B},\mathcal{B})=(\mathbb{A},\mathcal{B})+(\mathbb{B},\mathcal{B}),\\(t\mathbb{A},\mathcal{B})=t(\mathbb{A},\mathcal{B}),\\(\mathbb{A}\circ\mathbb{B},\mathcal{B})=(\mathbb{A},\mathcal{B})(\mathbb{B},\mathcal{B}).\end{gathered}}$$

13. Poznámka S přihlédnutím k poznámce 6 by bylo možné definovat součet, skalární násobek a součin čtvercových matic právě pomocí vztahů ve větě 12, což se v některých kurzech lineární algebry užívá.

14. Věta *Množina* $\mathcal{E}nd(\mathbf{V})$ *spolu se sčítáním lineárních operátorů a násobením lineárního operátoru skalárem tvoří vektorový prostor nad tělesem* T, *jehož dimenze je rovna* $(\dim\mathbf{V})^2$.

15. Věta *Buď* $\mathcal{B}$ *báze* **V**. *Zobrazení* $H_{\mathcal{B}}$ *definované vztahem* (5-1) *je izomorfizmem vektorových prostorů* $\mathcal{E}nd(\mathbf{V}_n)$ *a* $\mathcal{M}_n(T)$.

1.2 Lineární algebra $\mathcal{E}nd(\mathbf{V})$

V předešlém odstavci (věta 14) jsme připomněli, že množina lineárních operátorů spolu se sčítáním operátorů a násobením operátoru skalárem z T tvoří vektorový prostor nad T - jde o prostor $\mathcal{H}om(\mathbf{V},\mathbf{V})$. Prozkoumejme nyní množinu lineárních operátorů spolu se sčítáním a skládáním operátorů.

Z věty 14 plyne, že grupoid $(\mathcal{E}nd(\mathbf{V}),+)$ je zřejmě komutativní grupa, jejímž nulovým prvkem je operátor $\mathbb{O}$ a prvkem opačným k operátoru $\mathbb{A}$ operátor $(-1)\mathbb{A}$ značený $-\mathbb{A}$.

Grupoid $(\mathcal{E}nd(\mathbf{V}),\circ)$ je evidentně pologrupa, jejímž jednotkovým prvkem je operátor $\mathbb{I}$.

---

[6]) V tomto textu budeme složení $\mathbb{A}\circ\mathbb{B}$ definovat relací

$$\forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}:\ (\mathbb{A}\circ\mathbb{B})(\mathbf{x})=\mathbb{B}(\mathbb{A}(\mathbf{x})).$$

Buďte nyní $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}$ libovolné operátory a vyšetřujme operátor $\mathbb{A}\circ(\mathbb{B}+\mathbb{C})$. Užijeme-li definice součtu a složení operátorů, lze pro libovolný $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ psát:

$$(\mathbb{A}\circ(\mathbb{B}+\mathbb{C}))(\mathbf{x})=(\mathbb{B}+\mathbb{C})(\mathbb{A}(\mathbf{x}))=\mathbb{B}(\mathbb{A}(\mathbf{x}))+\mathbb{C}(\mathbb{A}(\mathbf{x}))=(\mathbb{A}\circ\mathbb{B})(\mathbf{x})+(\mathbb{A}\circ\mathbb{C})(\mathbf{x})=$$
$$=((\mathbb{A}\circ\mathbb{B})+(\mathbb{A}\circ\mathbb{C}))(\mathbf{x}).$$

To ovšem znamená, že $\mathbb{A}\circ(\mathbb{B}+\mathbb{C})=\mathbb{A}\circ\mathbb{B}+\mathbb{A}\circ\mathbb{C}$.

Podobně bychom ukázali, že také $(\mathbb{B}+\mathbb{C})\circ\mathbb{A}=\mathbb{B}\circ\mathbb{A}+\mathbb{C}\circ\mathbb{A}$.

Z uvedeného vyplývá platnost následující věty:

16. Věta *Množina $\mathcal{E}nd(\mathbf{V})$ spolu se sčítáním a skládáním lineárních operátorů tvoří okruh s jednotkovým prvkem $\mathbb{I}$.*

Užitím věty 12 dále dostáváme:

17. Věta *Buď $\mathcal{B}$ báze $\mathbf{V}$. Zobrazení $H_{\mathcal{B}}$ definované vztahem* (5-1) *je izomorfizmem okruhů $\mathcal{E}nd(\mathbf{V}_n)$ a $\mathcal{M}_n(T)$.*

Uvažme nyní libovolné dva operátory $\mathbb{A},\mathbb{B}$ a skalár t.
Vyšetřeme nyní vztah mezi operátory $(t\mathbb{A})\circ\mathbb{B}$, $\mathbb{A}\circ(t\mathbb{B})$ a $t(\mathbb{A}\circ\mathbb{B})$.
Pro libovolný $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ obdržíme:

$$((t\mathbb{A})\circ\mathbb{B})(\mathbf{x})=\mathbb{B}((t\mathbb{A})(\mathbf{x}))=\mathbb{B}(t(\mathbb{A}(\mathbf{x}))=t(\mathbb{B}(\mathbb{A}(\mathbf{x}))=t((\mathbb{A}\circ\mathbb{B})(\mathbf{x}))=$$
$$=(t(\mathbb{A}\circ\mathbb{B}))(\mathbf{x}),$$

odkud vyplývá rovnost operátorů $(t\mathbb{A})\circ\mathbb{B}$ a $t(\mathbb{A}\circ\mathbb{B})$. Podobně bychom ukázali i druhou rovnost v následujícím tvrzení.

18. Věta *Buďte $\mathbb{A},\mathbb{B}$ lineární operátory na $\mathbf{V}$, t skalár z T. Pak platí:*

$$\boxed{(t\mathbb{A})\circ\mathbb{B}=t(\mathbb{A}\circ\mathbb{B})=\mathbb{A}\circ(t\mathbb{B}).}$$

Této skutečnosti říkáme *kompatibilita násobení operátoru skalárem se skládáním operátorů.*

Jaký je význam rovnosti $(t\mathbb{A})\circ\mathbb{B}=\mathbb{A}\circ(t\mathbb{B})=t(\mathbb{A}\circ\mathbb{B})$?
Vyplývá z ní rovnost skalárního t-násobku jistého operátoru a složení operátoru $(t\mathbb{I})$ s tímto operátorem - tedy:

$$\forall t\in T, \forall \mathbb{A}\in \mathcal{E}nd(\mathbf{V}): \; t\mathbb{A}=(t\mathbb{I})\circ\mathbb{A}$$ [7])

čili můžeme *identifikovat skalár* t *s operátorem* $t\mathbb{I}$. Nemusíme typograficky odlišovat násobení operátoru skalárem (·) od skládání operátorů (∘) a lze psát jen $t\mathbb{A}\mathbb{B}$.

19.Definice Buď A množina, T komutativní těleso a nechť jsou dána zobrazení

$$+: A\times A\to A, \quad \circ: A\times A\to A, \quad \cdot: T\times A\to A.$$

Jsou-li splněny následující podmínky

(1) A spolu se zobrazeními $+,\cdot$ je vektorový prostor nad T,

(2) A spolu se zobrazeními $+,\circ$ je okruh s jednotkovým prvkem,

(3) $\forall \mathbf{a},\mathbf{b}\in A, \forall t\in T: \; t\cdot(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})=(t\cdot\mathbf{a})\circ\mathbf{b}=\mathbf{a}\circ(t\cdot\mathbf{b})$,

nazývá se množina A spolu s uvedenými zobrazeními *lineární algebra nad tělesem T.*

Řádem A rozumíme dimenzi A jakožto vektorového prostoru nad T.

20.Definice Buďte A a B lineární algebry nad týmž tělesem. Řekneme, že *lineární algebra A je izomorfní s lineární algebrou B*, existuje-li zobrazení $H: A\to B$ které je současně izomorfizmem A a B jakožto vektorových prostorů i jako okruhů.

21.Poznámka Dá se ukázat (proveďte!), že zobrazení H zachovává i kompatibilitu t-násobku a skládání operátorů.

Vzhledem k platnosti vět 14, 16 a podmínce kompatibility platí:

22.Věta *Množina* $\mathcal{E}nd(\mathbf{V})$ *spolu se sčítáním a skládáním lineárních operátorů a s násobením operátoru skalárem tvoří lineární algebru nad tělesem T, jejíž řád je roven* $(\dim\mathbf{V})^2$.

23.Poznámka Uvažujme nyní lineární algebru A nad tělesem T (symboly $+,\cdot,\circ$ nechť mají standardní význam zavedený v definici 19). Nechť je dále dána množina B a trojice zobrazení

$$\oplus: B\times B\to B, \quad *: B\times B\to B, \quad \odot: T\times B\to B.$$

Dále nechť existuje bijektivní zobrazení $H: A\to B$ s vlastnostmi

---

[7]) což se samozřejmě rovná operátoru $\mathbb{A}\circ(t\mathbb{I})$.

(1) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in A$: $H(\mathbf{x}+\mathbf{y})=H(\mathbf{x})\oplus H(\mathbf{y})$

(2) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in A$: $H(\mathbf{x}\circ\mathbf{y})=H(\mathbf{x})*H(\mathbf{y})$

(3) $\forall t\in T, \forall \mathbf{x}\in A$: $H(t\cdot\mathbf{x})=t\odot H(\mathbf{x})$.

Čtenáři je (z kurzu algebry) známo, že v tomto případě je B spolu se zobrazeními $\oplus,\odot$ *vektorový prostor nad T izomorfní s A* a že B spolu se zobrazeními $\oplus,*$ je *okruh s jednotkovým prvkem izomorfní s A* [8]. Odtud (užitím poznámky 21) plyne, že B spolu se zobrazeními $\oplus,\odot,*$ *je lineární algebra nad T izomorfní s lineární algebrou A.*

Z vět 15, 17 a poznámky 23 plyne dále[9]:

24. Věta *Buď $\mathcal{B}$ báze* $\mathbf{V}$. *Zobrazení* $H_{\mathcal{B}}$ *definované vztahem* (5-1) *je izomorfizmem lineárních algeber $\mathcal{E}nd(\mathbf{V}_n)$ a $\mathcal{M}_n(T)$.*

---

[8]) naznačme např. ověření faktu, že $(B,\oplus)$ je grupa:

• nechť $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in B$. Pak existují $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in A$, jež jsou vzory po řadě prvků $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ v zobrazení H. Můžeme proto psát (užijeme vlastnost (1) zobrazení H a asociativitu operace + v A):

$$(\mathbf{a}\oplus\mathbf{b})\oplus\mathbf{c}=(H(\mathbf{x})\oplus H(\mathbf{y}))\oplus H(\mathbf{z})=H(\mathbf{x}+\mathbf{y})\oplus H(\mathbf{z})=H((\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z})=H(\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}))=$$
$$=H(\mathbf{x})\oplus H(\mathbf{y}+\mathbf{z})=H(\mathbf{x})\oplus(H(\mathbf{y})\oplus H(\mathbf{z}))=\mathbf{a}\oplus(\mathbf{b}\oplus\mathbf{c}).$$

• podobně ukážeme, že je-li $\mathbf{o}$ nulový prvek grupy $(A,+)$, je $H(\mathbf{o})$ nulovým prvkem v $(B,\oplus)$ (prověřte - užijte faktu $\forall \mathbf{a}\in B$: $\mathbf{a}=H(H^{-1}(\mathbf{a}))$.

• dále lze odvodit, že $H(-(H^{-1}(\mathbf{a}))$ je opačným prvkem k prvku $\mathbf{a}\in B$ (jak?).

[9]) Poznámka 23 je uvedena spíše pro úplnost - čtenáři je jistě známo, že $\mathcal{M}_n(T)$ spolu se sčítáním matic a násobením matice skalárem tvoří vektorový prostor nad T jakož i to, že $\mathcal{M}_n(T)$ spolu se sčítáním a násobením matic je okruh s jednotkovým prvkem $\mathbf{E}$. Stačilo by tedy namísto 23 užít jen poznámku 21.

1.3 Dosazení lineárního operátoru do polynomu

25.Definice Řekneme, že lineární operátory $\mathbb{A},\mathbb{B}$ na témže vektorovém prostoru jsou *záměnné (komutující)*[10]), platí-li

$$\mathbb{A}\mathbb{B}=\mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Příklad B

Nechť v jisté bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}_2$ nad R je dán lineární operátor $\mathbb{A}$ analytickým vyjádřením

$$\mathbb{A}:\ \begin{aligned} y_1 &= -x_1 \\ y_2 &= x_1+x_2. \end{aligned} \qquad \text{(B-1)}$$

Najděte všechny lineární operátory $\mathbb{B}$ na $\mathbf{V}_2$, které jsou s $\mathbb{A}$ záměnné.

Řešení

Z vyjádření (B-1) plyne (viz článek 1.1), že matice $\mathbf{A}=(\mathbb{A},\mathcal{B})$ má tvar

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{B}=(b_{ij})$ matici $(\mathbb{B},\mathcal{B})$. V souladu s větou 12 budou operátory $\mathbb{A},\mathbb{B}$ záměnné, právě když $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, neboli

$$\begin{pmatrix} -b_{11}+b_{21} & -b_{12}+b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b_{11} & b_{11}+b_{12} \\ -b_{21} & b_{21}+b_{22} \end{pmatrix}.$$

Vyřešíme-li odtud plynoucí soustavu lineárních rovnic, zjistíme, že matice $\mathbf{B}$ jsou právě všechny matice ve tvaru

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r+2s \end{pmatrix},\quad r,s\in R.$$

Operátory záměnné s $\mathbb{A}$ jsou tedy právě všechny operátory mající nad $\mathcal{B}$ analytické vyjádření následujícího tvaru (r,s jsou parametry z R):

$$\mathbb{B}_{rs}:\ \begin{aligned} y_1 &= rx_1 \\ y_2 &= sx_1+(r+2s)x_2. \end{aligned}$$

---

[10]) Lineární operátor $\mathbb{A}\mathbb{B}-\mathbb{B}\mathbb{A}$ se nazývá *komutátor operátorů* $\mathbb{A},\mathbb{B}$.

26. Definice Pro libovolný lineární operátor $\mathbb{A}$ na **V** a celé nezáporné číslo m definujeme *m-tou mocninu lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ (označovanou $\mathbb{A}^m$) takto:

(1) pro m=0: $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}$,

(2) pro m≥1: $\mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{m-1} \circ \mathbb{A}$, je-li již $\mathbb{A}^{m-1}$ definováno.

Vzhledem k tomu, že $\mathcal{E}nd(\mathbf{V})$ je spolu se skládáním operátorů monoid, nebylo třeba pojem celé nezáporné mocniny nutno zvlášť definovat stejně, jako není třeba uvádět důkaz následujícího tvrzení:

27. Věta *Pro libovolný lineární operátor* $\mathbb{A}$ *na* **V** *a libovolná celá nezáporná čísla* m,p *platí:*

(1) $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}$,

(2) $(\mathbb{A}^m)^p = \mathbb{A}^{mp}$,

(3) $\mathbb{A}^m \mathbb{A}^p = \mathbb{A}^{m+p}$,

(4) je-li $\mathbb{B}$ *lineární operátor záměnný s* $\mathbb{A}$ *pak* $(\mathbb{A}\mathbb{B})^m = \mathbb{A}^m \mathbb{B}^m$,

(5) je-li $\mathbb{B}$ *lineární operátor záměnný s* $\mathbb{A}$ *pak* $\mathbb{A}^m \mathbb{B}^p = \mathbb{B}^p \mathbb{A}^m$,

(6) $\mathbb{I}^p = \mathbb{I}$.

Vzhledem k tomu, že máme definovánu mocninu a skalární násobek operátoru, jakož i součet operátorů, je následující definice korektní.

28. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na **V**, $f(x)$ polynom z $T[x]$,

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Pak *dosazením operátoru* $\mathbb{A}$ *do polynomu* $f(x)$ rozumíme operátor označovaný $f(\mathbb{A})$ a definovaný takto:

$$\boxed{f(\mathbb{A}) = a_m \mathbb{A}^m + a_{m-1} \mathbb{A}^{m-1} + \ldots + a_1 \mathbb{A} + a_0 \mathbb{I}.} \tag{28-1}$$

Příklad C [11]

Buď $\mathbf{V} = Z_3 \times Z_3$, $f(x) = 2x^2 + x + 1$. Nechť je dán operátor $\mathbb{A}$ analytickým

---

[11]) Prvky tělesa Z_3 (tj. tělesa zbytkových tříd mod3) budeme zna-

vyjádřením v jisté bázi $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \\ y_2 &= \quad\ -x_2. \end{aligned} \tag{C-1}$$

Určete obraz vektoru $\mathbf{x}$, $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(1,2)$ v operátoru $f(\mathbb{A})$.

Řešení

Operátor $f(\mathbb{A})$ je dle definice 28 dán vztahem

$$f(\mathbb{A}) = 2\mathbb{A}^2 + \mathbb{A} + \mathbb{I},$$

V souladu s definicí součtu, mocniny a skalárního násobku lineárních operátorů lze psát:

$$(f(\mathbb{A}))(\mathbf{x}) = (2\mathbb{A}^2 + \mathbb{A} + \mathbb{I})(\mathbf{x}) = 2\mathbb{A}(\mathbb{A}(\mathbf{x})) + \mathbb{A}(\mathbf{x}) + \mathbb{I}(\mathbf{x}).$$

Užitím (C-1) obdržíme $\{\mathbb{A}(\mathbf{x})\}_{\mathcal{B}}=(1,1)$, tudíž $\{\mathbb{A}(\mathbb{A}(\mathbf{x}))\}_{\mathcal{B}}=(0,2)$ a můžeme dále psát:

$$\{(f(\mathbb{A}))(\mathbf{x})\}_{\mathcal{B}}=2(0,2)+(1,1)+(1,2)=(2,1).$$

Nyní se naskýtá otázka, jak nalézt matici (a tím i analytické vyjádření) operátoru $f(\mathbb{A})$, známe-li v jisté bázi $\mathcal{B}$ matici operátoru $\mathbb{A}$.

Její řešení snadno plyne z věty 24, dle níž je pro libovolnou volbu báze $\mathcal{B}$ zobrazení $H_{\mathcal{B}}$, které každému lineárnímu operátoru přiřadí jeho matici v této bázi, izomorfizmem lineární algebry lineárních operátorů na $\mathbf{V}$ a lineární algebry matic $\mathcal{M}_n(T)$.

Uvažujme tedy operátor $\mathbb{A}$ a polynom $f(x) \in T[x]$,

$$f(x)=a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Pro matici $(f(\mathbb{A}),\mathcal{B})$, která je rovna $H_{\mathcal{B}}(f(\mathbb{A}))$, můžeme v souladu s citovanou větou psát:

$$\begin{aligned}
(f(\mathbb{A}),\mathcal{B}) &= H_{\mathcal{B}}(f(\mathbb{A})) = H_{\mathcal{B}}(a_m\mathbb{A}^m + a_{m-1}\mathbb{A}^{m-1} + \ldots + a_1\mathbb{A} + a_0\mathbb{I}) \overset{(1)}{=} \\
&= H_{\mathcal{B}}(a_m\mathbb{A}^m) + H_{\mathcal{B}}(a_{m-1}\mathbb{A}^{m-1}) + \ldots + H_{\mathcal{B}}(a_1\mathbb{A}) + H_{\mathcal{B}}(a_0\mathbb{I}) \overset{(2)}{=} \\
&= a_m H_{\mathcal{B}}(\mathbb{A}^m) + a_{m-1} H_{\mathcal{B}}(\mathbb{A}^{m-1}) + \ldots + a_1 H_{\mathcal{B}}(\mathbb{A}) + a_0 H_{\mathcal{B}}(\mathbb{I}) \overset{(3)}{=} \\
&= a_m (H_{\mathcal{B}}(\mathbb{A}))^m + a_{m-1}(H_{\mathcal{B}}(\mathbb{A}))^{m-1} + \ldots + a_1 H_{\mathcal{B}}(\mathbb{A}) + a_0 H_{\mathcal{B}}(\mathbb{I}) \overset{(4)}{=} \\
&= a_m(\mathbb{A},\mathcal{B})^m + a_{m-1}(\mathbb{A},\mathcal{B})^{m-1} + \ldots + a_1(\mathbb{A},\mathcal{B}) + a_0\mathbf{E},
\end{aligned}$$

kde jsme v kroku (1) a (2) užili faktu, že $H_{\mathcal{B}}$ je homomorfizmem $\mathcal{E}nd(\mathbf{V})$ a $\mathcal{M}_n(T)$ jakožto vektorových prostorů a ve (3) jakožto

---

čit 0,1,2.

okruhů, konečně v kroku (4) pak definice zobrazení $H_{\mathcal{B}}$.

Než vyslovíme zjištěný poznatek ve větě, zaveďme ještě následující užitečný pojem.

29. Definice Buď $\mathbf{A}$ matice libovolného řádu nad T, $f(x)$ polynom z $T[x]$,

$$f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Pak *dosazením matice* $\mathbf{A}$ *do polynomu* $f(x)$ rozumíme matici označovanou $f(\mathbf{A})$ a definovanou takto:

$$\boxed{f(\mathbf{A})=a_m\mathbf{A}^m + a_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \dots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{E}.} \qquad (29\text{-}1)$$

Vyslovme nyní slíbenou větu.

30. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* $\mathbf{V}$, $f(x)$ *polynom z* $T[x]$. *Pak v libovolné bázi* $\mathcal{B}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *platí:*

$$\boxed{(f(\mathbb{A}),\mathcal{B})=f(\mathbb{A},\mathcal{B}).}$$

Příklad D

Nalezněte analytické vyjádření operátoru $f(\mathbb{A})$ z příkladu **C**.

Řešení

Právě uvedená věta říká, že ke zjištění matice operátoru $f(\mathbb{A})$ stačí jen dosadit matici operátoru $\mathbb{A}$ do polynomu $f(x)$.

Matice $\mathbf{A}=(\mathbb{A},\mathcal{B})$ operátoru $\mathbb{A}$ z příkladu **C** zní:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pro matici operátoru $f(\mathbb{A})$ tedy, užijeme-li i (29-1), platí:

$$(f(\mathbb{A}),\mathcal{B})=f(\mathbf{A})=2\mathbf{A}^2+\mathbf{A}+\mathbf{E}=2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

odkud $(f(\mathbb{A}),\mathcal{B})=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Analytické vyjádření operátoru $f(\mathbb{A})$ ve zvolené bázi $\mathcal{B}$ má tvar:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 \\ y_2 &= 2x_2. \end{aligned}$$

Aplikujeme-li právě nalezené analytické vyjádření $f(\mathbb{A})$ pro výpočet obrazu vektoru **x**, $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(1,2)$,obdržíme přirozeně, že je jím vektor o souřadnicích (2,1).

Nalézt analytické vyjádření (matici) operátoru $f(\mathbb{A})$ je jistě efektivnější, než zjišťovat obrazy konkrétních vektorů postupem uplatněným v příkladu **C**.

Uvažujme některý polynom $f(x)$ a ptejme se, kdy bude operátor $f(\mathbb{A})$ nulový. Protože operátor je nulový,právě když je nulová jeho matice v libovolné bázi, dostáváme tento důsledek věty 30:

31.Důsledek *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**, $f(x)$ *polynom z* $T[x]$. *Pak v libovolné bázi* $\mathcal{B}$ *prostoru* **V** *platí:*

$$\boxed{f(\mathbb{A})=\mathbb{O} \ \Leftrightarrow\ f(\mathbb{A},\mathcal{B})=\mathbf{O}.}$$

Příklad E Uvažujme polynom $f(x)=x^2-3x+1$ a lineární operátor daný v jisté bázi $\mathcal{B}$ prostoru R^2 maticí analytickým vyjádřením:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 . \end{aligned}$$

Ilustrujte platnost věty 30!

Řešení

Užitím definice 28 pro operátor $f(\mathbb{A})$ plyne:

$$f(\mathbb{A})=\mathbb{A}^2-3\mathbb{A}+\mathbb{I}.$$

Analytická vyjádření jednotlivých operátorů zní (proveďte!):

$$\mathbb{A}^2\colon \begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2, \\ y_2 &= 3x_1 + 5x_2 \end{aligned} \quad -3\mathbb{A}\colon \begin{aligned} y_1 &= -3x_1 - 3x_2, \\ y_2 &= -3x_1 - 6x_2 \end{aligned} \quad \mathbb{I}\colon \begin{aligned} y_1 &= x_1 \ . \\ y_2 &= \quad x_2 \end{aligned}$$

tudíž analytické vyjádření operátoru $f(\mathbb{A})$ má tvar:

$$f(\mathbb{A})\colon \begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(E-1)}$$

Nyní nalezněme jeho matici užitím věty 30:

Matice operátoru $\mathbb{A}$ v bázi $\mathcal{B}$ má tvar $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Spočtěme matici $f(\mathbf{A})$:

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

což je v souladu s (E-1) očekávaný výsledek.

Tento příklad ovšem navíc ilustruje i platnost důsledku 31 - operátor $f(\mathbb{A})$ je nulový stejně jako matice $f(\mathbf{A})$.

32. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na* **V**, *$f(x)$, $g(x)$ libovolné polynomy z $T[x]$. Pak operátory $f(\mathbb{A})$ a $g(\mathbb{A})$ jsou záměnné.*

Důkaz:

$T[x]$ je komutativní okruh a tudíž $f(x).g(x)=g(x).f(x)$ - vzhledem k tomuto faktu je věta zřejmá. ∎

Z právě uvedené věty a z věty 30 plyne:

33. Důsledek *Buď* **A** *matice nad T, $f(x)$, $g(x)$ libovolné polynomy z $T[x]$. Pak matice $f(\mathbf{A}).g(\mathbf{A})$ a $g(\mathbf{A}).f(\mathbf{A})$ jsou si rovny.*

1.4 Podobnost čtvercových matic

Zaveďme na množině čtvercových matic $\mathcal{M}_n(T)$ následující relaci:

34. Definice Nechť **V** je libovolný n-rozměrný vektorový prostor nad T. Buďte $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_n(T)$. Řekneme, že *matice* **A** *je podobná matici* **B** (což budeme značit $\mathbf{A}\simeq\mathbf{B}$) jestliže existuje lineární operátor $\mathbb{A}$ na **V** a báze $\mathcal{B},\mathcal{C}$ prostoru **V** tak, že

$$\boxed{\mathbf{A}=(\mathbb{A},\mathcal{B}) \wedge \mathbf{B}=(\mathbb{A},\mathcal{C}).}$$

Přímo z definice plyne, že jde o relaci symetrickou. Budeme proto užívat výrazu, že **A**, **B** *jsou podobné matice.* Rovněž je zřejmé, že jde o relaci reflexivní.

Nalezněme nyní *kriterium* podobnosti vyjádřené jazykem teorie matic, čímž mimo jiné vyloučíme závislost definice podobnosti na volbě vektorového prostoru **V**.

Nechť $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_n(T)$ jsou podobné. Buď **V** vektorový prostor, $\mathcal{B},\mathcal{C}$ jeho báze a $\mathbb{A}$ operátor na **V** s vlastnostmi, o nichž hovoří definice 34. Pak v souladu s větou 7 platí:

$$\mathbf{B}=(\mathcal{B},\mathcal{C})\mathbf{A}(\mathcal{C},\mathcal{B}),$$

což ovšem znamená, že existuje regulární matice $\mathbf{Q}\in\mathcal{M}_n(T)$ tak, že platí (proč?):

$$\mathbf{B}=\mathbf{Q}.\mathbf{A}.\mathbf{Q}^{-1}. \tag{35-1}$$

Předpokládejme nyní, že $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_n(T)$, k nimž existuje regulární matice $\mathbf{Q}\in\mathcal{M}_n(T)$ s vlastností (35-1).

Zvolme nyní naprosto libovolně vektorový prostor $\mathbf{V}$ dimenze n nad tělesem T a nechť $\mathcal{B}$ je některá jeho báze.

Uvažujme nyní (v souladu s větou 5) operátor $\mathbb{A}$ na $\mathbf{V}$, jehož maticí v bázi $\mathcal{B}$ je $\mathbf{A}$ a dále zaveďme bázi $\mathcal{C}$ tak,aby $\mathbf{Q}=(\mathcal{B},\mathcal{C})$. Vztah (35-1) lze nyní přepsat: $\mathbf{B}=(\mathcal{B},\mathcal{C})(\mathbb{A},\mathcal{B})(\mathcal{C},\mathcal{B})$, což ovšem (užitím věty 7) znamená, že $(\mathbb{A},\mathcal{C})=\mathbf{B}$ a tudíž matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$ jsou ve smyslu definice 34 podobné.

Vyslovme právě dokázanou větu[12]).

35.Věta *Matice* $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_n(T)$ *jsou podobné, právě když existuje regulární matice* $\mathbf{Q}\in\mathcal{M}_n(T)$ *tak, že platí*

$$\boxed{\mathbf{B}=\mathbf{Q}.\mathbf{A}.\mathbf{Q}^{-1}}\,.$$

Z právě uvedené věty může čtenář snadno ukázat, že relace „býti podobný" je tranzitivní. S ohledem na poznámku za definicí 34 proto platí:

36.Věta *Relace „býti podobný" je relací ekvivalence na množině* $\mathcal{M}_n(T)$.

Každá třída rozkladu množiny $\mathcal{M}_n(T)$ dle relace být podobný je tvořena maticemi téhož operátoru nad různými bázemi prostoru $\mathbf{V}$. Naším cílem, kterého ovšem dosáhneme až v závěru tohoto skripta, bude najít ke každému operátoru vhodného reprezentanta (v určitém jednoduchém *(kanonickém)* tvaru) dané třídy matic *(normální Jordanův tvar matice operátoru)* a také příslušnou bázi *(Jordanova báze)*.

Přímo z definice podobnosti a věty 8 vyplývá (jak?):

37.Věta *Každé dvě podobné matice mají touž hodnost.*

---

[12]) dvojicí podobných matic není matice $\mathbf{Q}$ určena jednoznačně (viz příklad **F**)

Užitím věty 35 a vlastnosti determinantu součinu matic odvodíme větu následující (proveďte):

38. Věta *Každé dvě podobné matice mají týž determinant.*

Poznamenejme, že větu 37 ani větu 38 nelze obrátit - matice **E** a 2**E** mají sice stejnou hodnost, ale nemohou být maticemi téhož operátoru, neboť první je maticí operátoru $\mathbb{I}$ a druhá $2\mathbb{I}$.
Nalezněte protipříklad v druhém případě.

Příklad F

Rozhodněte, zda následující $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_2(R)$ jsou podobné.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Je patrno, že $\det\mathbf{A}=\det\mathbf{B}$, a tudíž podobnost těchto matic není vyloučena (věta 38) a má smysl dále v hledání odpovědi pokračovat.

V souladu s větou 35 budeme tedy hledat regulární matici **Q** s vlastností $\mathbf{B}=\mathbf{Q}.\mathbf{A}.\mathbf{Q}^{-1}$, což je ekvivalentní s

$$\mathbf{BQ}=\mathbf{QA} \wedge \det\mathbf{Q}\neq 0. \qquad (\mathbf{E}\text{-}1)$$

Označíme-li $\mathbf{Q}=(q_{ij})$, je podmínka $\mathbf{BQ}=\mathbf{QA}$ ekvivalentní následující soustavě lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} q_{11} - 2q_{12} + 2q_{21} \phantom{{}- 2q_{22}} &= 0 \\ -2q_{11} + 2q_{12} \phantom{{}- 2q_{21}} + 2q_{22} &= 0 \\ q_{11} \phantom{{}- 2q_{12}} - 2q_{21} - 2q_{22} &= 0 \\ q_{12} - 2q_{21} - q_{22} &= 0, \end{aligned}$$

jejíž parametrické řešení zní:

$q_{11}= 2(r+s)$, $q_{12}= r+2s$, $q_{21}= s$, $q_{22}= r$, $r,s\in R$.

Připojíme-li podmínku $0\neq\det\mathbf{Q}=2r^2+rs-2s^2$, tvoří hledané matice **Q** množinu matic tvaru

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 2(r+s) & r+2s \\ s & r \end{pmatrix},\quad r\neq\tfrac{1}{4}(-1\pm\sqrt{17})s,\ r,s\in R.$$

Tato množina je zřejmě neprázdná a tudíž matice **A**,**B** jsou podobné. Prověřte, že např. $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, náležící uvedené množině, splňuje podmínku věty 35.

Jiný způsob řešení tohoto problému plyne z 6.kap. (viz př.6.D).

2. Minimální a charakteristický polynom lineárního operátoru

1. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na **V**. Polynom z $T[x]$, označovaný $m_{\mathbb{A}}(x)$, se nazývá *minimální polynom operátoru* $\mathbb{A}$, *jestliže platí*

(1) polynom $m_{\mathbb{A}}(x)$ je normovaný,

(2) $m_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})=\mathbb{O}$,

(3) polynom $m_{\mathbb{A}}(x)$ je nejmenšího stupně ze všech polynomů splňujících podmínky (1) a (2).

2. Poznámka Z podmínky (1) vyplývá, že $m_{\mathbb{A}}(x)\neq o$, z podmínky (2) tudíž plyne, že $\mathrm{st}\, m_{\mathbb{A}}(x)\geq 1$ (proč?).

Poznamenejme dále, že zatím nevíme, zda vůbec polynom daných vlastností ke každému operátoru existuje a pokud ano, jaký bude počet těchto polynomů.

Příklad A

1. Určete minimální polynom operátoru $\mathbb{A}=c\mathbb{I}$.

Řešení

Normované polynomy stupně 1 (nižšího stupně nemá smysl uvažovat) mají tvar $f(x)=x-a_0$, tudíž $f(\mathbb{A})=\mathbb{A}-a_0\mathbb{I}$ a podmínka (2) bude proto splněna, právě když $a_0=c$. Zřejmě polynom $x-c$ vyhovuje i podmínce (3), a tudíž se jedná o minimální polynom operátoru $\mathbb{A}$, neboli $m_{\mathbb{A}}(x)=x-c$.

2. Určete minimální polynom operátoru $\mathbb{A}$ na prostoru $\mathbf{V}_3$ nad C, který je ve zvolené bázi dán maticí

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Řešení

V prvním kroku zjistíme, zda by podmínkám (1), (2) definice 1 mohl vyhovět polynom $f(x)\in C[x]$ stupně 1, tj.

$$f(x)=x+a_0 \wedge f(\mathbb{A})=\mathbb{O}.$$

To je (užitím důsledku 1.31) ekvivalentní rovnici pro a_0 tvaru

$$\mathbf{A}+a_0\mathbf{E}=\mathbf{O},$$

která ovšem evidentně nemá řešení. Polynom $m_{\mathbb{A}}(x)$ tedy (pokud existuje) bude vyššího stupně.

V dalším kroku tedy budeme hledat polynomy $f(x)$ vyhovující podmínce $f(x)=x^2+a_1x+a_0 \wedge f(\mathbb{A})=\mathbb{O}$,
která je ekvivalentní následující rovnici o neznámých a_1,a_0:

$$\mathbf{A}^2+a_1\mathbf{A}+a_0\mathbf{E}=\mathbf{0}.$$

Dosazením za $\mathbf{A}$ obdržíme:

$$\begin{pmatrix} -5 & -12 & 30 \\ -2 & -3 & 10 \\ -2 & -4 & 11 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} + a_0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní soustavě rovnic

$$\begin{array}{rcl} a_0+2a_1=5 & & a_0+a_1=3 \\ 6a_1=12 & & -5a_1=10 \\ 15a_1=30 & & a_1=2 \\ a_1=2 & & 2a_1=4 \\ & -6a_1+a_0=-11. & \end{array}$$

Tato soustava je řešitelná a to jednoznačně, řešením je $a_0=1, a_1=2$.
Minimální polynom k operátoru existuje, je jediný a zní

$$m_{\mathbb{A}}(x)=x^2+2x+1.$$

Pokud bychom neuspěli v tomto kroku, zkoumali bychom normované polynomy stupně 3 a tak dále, avšak otázku, zda obecně dospějeme po konečném počtu kroků k řešitelné soustavě[13]), zatím ovšem zodpovědět nedovedeme, stejně tak je otevřený počet řešení takovéto soustavy. V dalším uvidíme, že odpověd na tuto otázku je obecně pozitivní.

Vyřešme nejdříve otázku počtu minimálních polynomů daného lineárního operátoru.

3. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na* $\mathbf{V}$, *$m_{\mathbb{A}}(x)$ jeho minimální polynom. Pak pro libovolný polynom $f(x)$ z $T[x]$ platí:*

$$\boxed{f(\mathbb{A})=\mathbb{O} \Rightarrow m_{\mathbb{A}}(x) \mid f(x)}\ .$$

---

[13]) v $\mathcal{M}_3(C)$ je sice jistě každá aspoň desetiprvková množina matic lineárně závislá (proč?), protože však nelze vyloučit, že nastane $\mathbf{A}^r=0$, pro $r\leq 10$, nemůžeme zaručit, že k ní obecně dospějeme.

Důkaz:

Uvažujme polynom $f(x)$ s vlastností $f(\mathbb{A})=\mathbb{O}$, který však není dělitelný polynomem $m_{\mathbb{A}}(x)$. Pak tedy existují v $T[x]$ polynomy $q(x)$, $z(x)$ tak, že platí

$$f(x)=m_{\mathbb{A}}(x)q(x)+z(x) \wedge \mathrm{st}\,z(x)<\mathrm{st}\,m_{\mathbb{A}}(x). \tag{3-1}$$

Dosadíme-li do rovnosti v (3-1) operátor $\mathbb{A}$, obdržíme:

$$f(\mathbb{A})=m_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})q(\mathbb{A})+z(\mathbb{A}),$$

což implikuje $z(\mathbb{A})=\mathbb{O}$, neboť $f(\mathbb{A})=\mathbb{O}$, $m_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})=\mathbb{O}$.

Označíme-li $m=\mathrm{st}\,z(x)$, lze psát

$$z(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0,\ a_m\neq 0,$$

takže polynom $\bar{z}(x)=(1/a_m)z(x)$ je normovaný polynom s vlastností $\bar{z}(\mathbb{A})=\mathbb{O}$, jehož stupeň je ostře menší než stupeň $m_{\mathbb{A}}(x)$ (viz(3-1)), což je spor s definiční vlastností 1.(3) minimálního polynomu. Polynom $f(x)$ tudíž polynomem $m_{\mathbb{A}}(x)$ dělitelný je. ∎

Právě dokázaná věta má ovšem důležitý důsledek - buďte $m_1(x)$ a $m_2(x)$ minimální polynomy téhož operátoru $\mathbb{A}$. Vzhledem k tomu, že pro ně platí $m_1(\mathbb{A})=\mathbb{O}$ i $m_2(\mathbb{A})=\mathbb{O}$, musí dle věty 3 platit (proč?):

$$m_1(x)\,|\,m_2(x) \wedge m_2(x)\,|\,m_1(x),$$

což znamená $m_1(x)=tm_2(x)$, $t\neq 0$. Protože však jde o polynomy normované, musí být $t=1$. Zformulujme tedy důsledek věty 3:

4. Důsledek *Ke každému lineárnímu operátoru existuje nejvýše jeden minimální polynom.*

Analogicky pojmu minimální polynom operátoru definujeme pojem následující:

5. Definice Buď $\mathbf{A}$ matice libovolného řádu nad T. Polynom z $T[x]$, označovaný $m_{\mathbf{A}}(x)$, se nazývá *minimální polynom matice* $\mathbf{A}$, *jestliže platí*

(1) polynom $m_{\mathbf{A}}(x)$ je normovaný,

(2) $m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})=\mathbf{0}$,

(3) polynom $m_{\mathbf{A}}(x)$ je nejmenšího stupně ze všech polynomů splňujících podmínky (1) a (2).

6. Poznámka Analogicky poznámce 2 obdržíme, že $\mathrm{st}\,m_{\mathbf{A}}(x)\geq 1$.

Zcela analogicky, jak v případě minimálního polynomu operátoru (věta 3) bychom dokázali platnost následující věty i jejího důsledku:

7. Věta *Buď* $\mathbf{A}$ *matice libovolného řádu nad T,* $m_{\mathbf{A}}(x)$ *její minimální polynom. Pak pro libovolný polynom f(x) z T[x] platí:*

$$\boxed{f(\mathbf{A})=\mathbf{0} \Rightarrow m_{\mathbf{A}}(x) \mid f(x)}\,.$$

8. Důsledek *Ke každé čtvercové matici existuje nejvýše jeden minimální polynom.*

Nyní se naskýtá přirozená otázka, jaký je vztah mezi minimálním polynomem operátoru a minimálním polynomem jeho matice ve zvolené bázi.

Uvažujme lineární operátor $\mathbb{A}$ a jeho matici v jisté bázi označme $\mathbf{A}$.

Nechť existuje polynom $m_{\mathbf{A}}(x)$. Pak $m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})=\mathbf{0}$ a dle důsledku 1.31 tudíž

$$m_{\mathbf{A}}(\mathbb{A})=\mathbb{O}, \tag{9-1}$$

což znamená, že polynom $m_{\mathbf{A}}(x)$ splňuje podmínku (2) definice 1 (a samozřejmě i podmínku (1)). Množina polynomů splňujících uvedené podmínky je tedy neprázdná a lze v ní nalézt polynom nejnižšího stupně, který je polynomem $m_{\mathbb{A}}(x)$.

Existuje-li polynom $m_{\mathbb{A}}(x)$, platí $m_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})=\mathbb{O}$, a proto

$$m_{\mathbb{A}}(\mathbf{A})=\mathbf{0} \tag{9-2}$$

(proč?). Polynom $m_{\mathbb{A}}(x)$ tudíž splňuje podmínky (1), (2) definice 5 a odtud analogicky jako výše vyplývá existence polynomu $m_{\mathbf{A}}(x)$.

Z věty 3 a vztahu (9-1) plyne, že $m_{\mathbb{A}}(x) \mid m_{\mathbf{A}}(x)$, z věty 7 a vztahu (9-2) pak $m_{\mathbf{A}}(x) \mid m_{\mathbb{A}}(x)$. Vzhledem k normovanosti obou polynomů[14]) odtud dostáváme, že $m_{\mathbb{A}}(x)=m_{\mathbf{A}}(x)$.

Platí tedy následující věta:

---

[14]) srov. odvození důsledku 4.

9. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**, $\mathcal{B}$ *libovolná báze* **V**. *Pak platí, že polynom* $m_{\mathbb{A}}(x)$ *existuje, právě když existuje polynom* $m_{(\mathbb{A},\mathcal{B})}(x)$, *přičemž platí*

$$\boxed{m_{\mathbb{A}}(x)=m_{(\mathbb{A},\mathcal{B})}(x).}$$

Právě uvedená věta je důsledkem toho, že zobrazení přiřazující lineárnímu operátoru jeho matici ve zvolené bázi je izomorfizmem vektorových prostorů $\mathcal{E}nd(\mathbf{V}_n)$ a $\mathcal{M}_n(T)$.

10. Poznámka

Doposud jsme pracovali s maticemi, jejichž prvky náležely některému *tělesu T*, s nimiž jste se seznámili v předchozích pariích kurzu lineární algebry.

Množinu čtvercových matic $\mathbf{A}=(a_{ij})_n$ řádu n jsme značili $\mathcal{M}_n(T)$.

Zobecněme nyní tento pojem a připusťme za prvky čtvercové matice řádu n *polynomy téže jedné neurčité nad T* - uvažujeme tedy matice

$$\mathbf{A}(x)=(a_{ij}(x))_n,\ a_{ij}(x)\in T[x]$$ [15].

Takové matice budeme nazývat *polynomiální matice nad T* a jejich množinu značit $\mathcal{M}_n(T[x])$ - zřejmě $\mathcal{M}_n(T)\subset\mathcal{M}_n(T[x])$.

Pro polynomiální matice definujeme *součet matic, součin matic a násobení matice polynomem z* $T[x]$ zcela shodnými formulemi, jako jsme to učinili pro matice nad tělesem T.

Shodně budeme rovněž definovat *determinant* polynomiální matice. Pro determinanty polynomiálních matic platí táž tvrzení, jako pro determinanty matic nad T *s výjimkou těch,* pro jejichž odvození je třeba existence inverzních prvků, neboť $T[x]$ není tělesem a inverzní prvky existují jen pro polynomy stupně nula (tj.nenulové prvky z T)[16].

---

[15]) nebude-li označení neurčité významné, nebo bude-li zřejmé, budeme její označení v symbolu matice, resp. jejích prvků, vynechávat a psát jen $\mathbf{A}=(a_{ij})_n$ (tak jak jsme to ostatně zvyklí činit např.při práci s polynomy).

[16]) např. tedy věta Laplaceova platí i pro polynomiální matice,

Podrobně se však problematice polynomiálních matic v tomto textu věnovat nebudeme.

Příkladem polynomiální matice jsou tedy např.

$$\mathbf{A}(x)=\begin{pmatrix} 2x+3 & -2 & 0 \\ x^3+2x-1 & 3x+2 & 10x^5+2x-4 \\ x^2-1 & 1 & x \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}(x)=\begin{pmatrix} x^2+1 & 1 & 2 \\ 2x+2 & -x & 2 \\ x^3+2x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je-li např $f(x)=x^2+1$, má matice $f(x)\mathbf{B}(x)$ zřejmě tvar

$$f(x)\mathbf{B}(x) = \begin{pmatrix} x^4+2x^2+1 & x^2+1 & 2x^2+2 \\ 2x^3+2x^2+2x+2 & -x^3-x & 2x^2+2 \\ x^5+3x^3+2x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a např.prvek na pozici (1,2) matice $\mathbf{C}(x)=\mathbf{A}(x)\mathbf{B}(x)$ získáme takto:

$$c_{12}(x) = (2x+3).1 + (-2)(-x) + 0.0 = 4x+3.$$

Nyní jsme oprávněni vyslovit následující definici:

11.Definice Buď **A** matice libovolného řádu nad T. Polynom $ch_{\mathbf{A}}(x)$ definovaný vztahem

$$\boxed{ch_{\mathbf{A}}(x)=\det(\mathbf{A}-x\mathbf{E})}$$

se nazývá *charakteristický polynom matice* **A**.

12.Věta *Pro charakteristický polynom libovolné matice* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *řádu* n *platí:*

$$ch_{\mathbf{A}}(x)=\begin{vmatrix} (a_{11}-x) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-x) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-x) \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})x^{n-1} + c_2x^{n-2}+\dots+c_{n-1}x + \det\mathbf{A}.$$

<u>Důkaz:</u>

Označme $\mathbf{B}(x)=(b_{ij}(x))$ polynomiální matici $(\mathbf{A}-x\mathbf{E})$ - zřejmě platí:

$$\forall i,j,1\le i,j\le n:\ b_{ij}(x) = a_{ij} - x\delta_{ij}. \qquad (12\text{-}1)$$

Dle definice 11 je $ch_{\mathbf{A}}(x)=\det\mathbf{B}(x)$, což je v souladu s první

---

na druhé straně však ne každá polynomiální matice s nenulovým determinantem je ekvivalentní matici jednotkové.

částí tvrzení věty.

Nyní vyšetřeme dále det**B**(x).

Tento determinant je ovšem roven součtu právě všech následujících součinů vynásobených znaménkem permutace π:

$$b_{1\pi(1)}b_{2\pi(2)}\dots b_{n\pi(n)} \tag{12-2}$$

- je-li π=id, jde o součin $b_{11}b_{22}\dots b_{nn}$, který lze s přihlédnutím k (12-1) dále rozvinout dle mocnin neurčité x takto:

$$(a_{11}-x)(a_{22}-x)\dots(a_{nn}-x)=$$
$$=(-1)^n x^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})x^{n-1}+\Delta(x),$$

kde $\Delta(x)$ je polynom neurčité x stupně nejvýše n-2 (proč?).

- je-li $\pi\neq$id, existují i,j, i≠j, $1\le i,j\le n$, tak, že

$$\pi(i)\neq i \wedge \pi(j)\neq j,$$

což ovšem znamená, že součin (12-2) obsahuje nejvýše n-2 prvků z hlavní diagonály matice **B**(x), a tedy pro všechny takové permutace je polynomem stupně nejvýše n-2. Přičtení libovolného součinu tohoto typu tedy neovlivní členy polynomu det**B**(x) stupně n a n-1.

Nyní zbývá tedy již vyšetřit jen absolutní člen polynomu $ch_{\mathbf{A}}(x)$, tj. hodnotu $ch_{\mathbf{A}}(0)$, která je však evidentně rovna det**A**.

Tím je věta dokázána. ■

Může být charakteristický polynom přiřazen také operátoru prostřednictvím jeho matice?

Dvě matice **A**, **B** (řádu n) jsou maticemi téhož operátoru, právě když jsou podobné, což dle věty 1.35 značí existenci regulární matice **Q** tak, že $\mathbf{B}=\mathbf{Q}.\mathbf{A}.\mathbf{Q}^{-1}$. Zjistěme nyní vztah mezi polynomy $ch_{\mathbf{A}}(x)$ a $ch_{\mathbf{B}}(x)$. Zřejmě lze psát:

$$(\mathbf{B}-x\mathbf{E})=(\mathbf{QAQ}^{-1}-x\mathbf{E})=(\mathbf{QAQ}^{-1}-\mathbf{Q}(x\mathbf{E})\mathbf{Q}^{-1})=\mathbf{Q}(\mathbf{A}-x\mathbf{E})\mathbf{Q}^{-1},$$

a tudíž

$$ch_{\mathbf{B}}(x)=\det(\mathbf{Q}(\mathbf{A}-x\mathbf{E})\mathbf{Q}^{-1})=(\det\mathbf{Q})(\det(\mathbf{A}-x\mathbf{E}))(\det\mathbf{Q}^{-1})=\det(\mathbf{A}-x\mathbf{E})=ch_{\mathbf{A}}(x).$$

Platí tedy následující věta

13. Věta *Každé dvě podobné matice mají týž charakteristický polynom.*

Vzhledem k této větě je korektní následující definice (viz poznámka 15)

14. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor. *Charakteritickým polynomem* $ch_{\mathbb{A}}$ *lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ pak rozumíme charakteristický polynom jeho matice nad libovolnou bází.

15. Poznámka Každý lineární operátor na **V** má *právě jeden* charakteristický polynom. Stupeň tohoto polynomu je roven dim**V**.

Z této poznámky vyplývá[17]):

16. Důsledek *Charakteristický polynom každého lineárního operátoru na* $\mathbf{V}_n$ *má nejvýše* n *různých kořenů.*

17. Důsledek *Charakteristický polynom každého lineárního operátoru na vektorovém prostoru* $\mathbf{V}_n$ *nad* C *má včetně násobnosti*[18]) *právě* n *kořenů.*

Příklad B

Určete charakteristický polynom operátoru $\mathbb{A}$ na prostoru $\mathbf{V}_3$ nad C, který je ve zvolené bázi dán maticí

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

V souladu s definicí 14 platí $ch_{\mathbb{A}}(x)=ch_{\mathbf{A}}(x)$, a tudíž (např. užitím Sarrusova pravidla) dostáváme:

$$ch_{\mathbb{A}}(x)=\begin{vmatrix} 2-x & 6 & -15 \\ 1 & 1-x & -5 \\ 1 & 2 & -6-x \end{vmatrix} = -x^3- 3x^2- 3x - 1.$$

Následující věta, zvaná *Cayley-Hamiltonova*, má zásadní význam pro vyřešení dosud otevřené otázky existence minimálního polynomu

[17]) užijeme též tzv. základní větu algebry

[18]) každý kořen je započítán tolikrát, kolikanásobným je kořenem. Namísto C lze uvažovat libovolné algebraicky uzavřené těleso.

operátoru (matice).

18. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**. *Pak platí:*

$$\boxed{ch_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})=\mathbb{O}}\,.$$

<u>Důkaz:</u>

Položme $\mathbf{A}=(\mathbb{A},\mathcal{B})$, kde $\mathcal{B}$ je libovolná báze prostoru **V**. V souladu s lemmatem 12 lze $ch_{\mathbb{A}}(x)=\det(\mathbf{A}-x\mathbf{E})$ psát takto:

$$ch_{\mathbb{A}}(x)=(-1)^n x^n+ c_1x^{n-1}+ c_2x^{n-2}+\ldots+ c_{n-2}x^2+ c_{n-1}x + c_n. \qquad (18\text{-}1)$$

Pro matici **A** dále platí[19]):

$$\mathcal{A}dj(\mathbf{A}-x\mathbf{E}).(\mathbf{A}-x\mathbf{E})=\det(\mathbf{A}-x\mathbf{E}).\mathbf{E} \qquad (18\text{-}2)$$

Všimněme si matice $\mathcal{A}dj(\mathbf{A}-x\mathbf{E})$. Z definice adjungované matice plyne, že elementy matice $\mathcal{A}dj(\mathbf{A}-x\mathbf{E})$ jsou subdeterminanty řádu n-1 matice $\mathbf{A}-x\mathbf{E}$ - tudíž jde o polynomy z $T[x]$ stupně nejvýše n-1. Existují tedy matice $\mathbf{B}_0,\ldots,\mathbf{B}_{n-1}\in\mathcal{M}_n(T)$, takové, že (proč?):

$$\mathcal{A}dj(\mathbf{A}-x\mathbf{E}) = x^{n-1}\mathbf{B}_0+ x^{n-2}\mathbf{B}_1+\ldots+ x\mathbf{B}_{n-2}+ \mathbf{B}_{n-1},$$

a tudíž levá strana rovnosti (18-2) zní:

$$-x^n\mathbf{B}_0+ x^{n-1}(\mathbf{B}_0\mathbf{A} - \mathbf{B}_1) + x^{n-2}(\mathbf{B}_1\mathbf{A} - \mathbf{B}_2) +\ldots+ x^2(\mathbf{B}_{n-3}\mathbf{A} - \mathbf{B}_{n-2}) + {}$$
$$+ x(\mathbf{B}_{n-2}\mathbf{A} - \mathbf{B}_{n-1}) + \mathbf{B}_{n-1}\mathbf{A} \qquad (18\text{-}3)$$

a pravá strana téže rovnosti má (užitím (18-1)) tvar:

$$(-1)^n x^n\mathbf{E} + x^{n-1}(c_1\mathbf{E}) + x^{n-2}(c_2\mathbf{E})+\ldots+ x^2(c_{n-2}\mathbf{E}) + {}$$
$$+ x(c_{n-1}\mathbf{E}) + c_n\mathbf{E}, \qquad (18\text{-}4)$$

odkud porovnáním s (18-3) obdržíme následující soustavu rovností:

$$-\mathbf{B}_0= (-1)^n\mathbf{E}, \qquad (0)$$
$$\mathbf{B}_0\mathbf{A} - \mathbf{B}_1= c_1\mathbf{E}, \qquad (1)$$
$$\mathbf{B}_1\mathbf{A} - \mathbf{B}_2= c_2\mathbf{E}, \qquad (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{B}_{n-3}\mathbf{A} - \mathbf{B}_{n-2}= c_{n-2}\mathbf{E}, \qquad (n-2)$$

---

[19]) je-li $\mathbf{C}=(c_{ij})\in\mathcal{M}_n(T[x])$, rozumíme *adjungovanou maticí k* **C** matici matici značenou $\mathcal{A}dj\mathbf{C}$, v níž je na pozici (i,j) algebraický doplněk k prvku na pozici (j,i) matice **C** - tedy $\mathcal{A}dj\mathbf{C}=(\mathcal{C}_{ij})^T$, $\mathcal{A}dj\mathbf{C}\in\mathcal{M}_n(T[x])$.

Uvedený vztah je znám pro matice nad tělesem, jeho platnost pro matice polynomiální vyplývá z poznámky 10 (prověřte!).

$$B_{n-2}A - B_{n-1} = c_{n-1}E, \qquad (n-1)$$
$$B_{n-1}A = c_nE. \qquad (n)$$

Je zřejmé, že vynásobíme-li rovnost (n) maticí $\mathbf{E}=\mathbf{A}^0$, (n-1) maticí $\mathbf{A}$, (n-2) maticí $\mathbf{A}^2$, ..., rovnost (2) maticí $\mathbf{A}^{n-2}$, (1) maticí $\mathbf{A}^{n-1}$ a konečně rovnost (0) maticí $\mathbf{A}^n$ a sečteme-li uvedené násobky rovností, je součet levých stran těchto násobků roven **0**, zatímco součet stran pravých je roven roven hodnotě $ch_{\mathbb{A}}(\mathbf{A})$ (viz (18-1)), a tedy platí $ch_{\mathbb{A}}(\mathbf{A})=\mathbf{0}$, odkud v souladu s Důsledkem 1.31 dostáváme, že $ch_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})=\mathbb{O}$. ■

Uvažujme nyní libovolný lineární operátor $\mathbb{A}$ a sestrojme polynom $f(x)=(-1)^n ch_{\mathbb{A}}(x)$. Tento polynom je normovaný[20] a dle Cayley-Hamiltonovy věty je $f(\mathbb{A})=\mathbb{O}$, což znamená, že $f(x)$ splňuje podmínky (1) a (2) definice 1. Množina polynomů splňujících uvedené podmínky proto není prázdná a lze v ní nalézt alespoň jeden polynom nejnižšího stupně, který je polynomem $m_{\mathbb{A}}(x)$, přičemž (viz důsledek 4) je tento polynom jediný.

Platí tudíž následující věta, která zodpovídá otázku položenou v poznámce 2.

19.Věta *Ke každému lineárnímu operátoru existuje právě jeden minimální polynom.*

Uvážíme-li větu 9, pak z věty 19 plyne:

20.Důsledek *Ke každé čtvercové matici existuje právě jeden minimální polynom.*

Přihlédneme-li dále k definici podobnosti matic (1.34) obdržíme (proč?):

21.Důsledek *Každé dvě podobné matice mají týž minimální polynom.*

---

[20]) viz věta 12

Z věty 18 dále vyplývá[21]):

22. Důsledek *Pro minimální a charakteristický polynom libovolného lineárního operátoru $\mathbb{A}$ platí:*

(1) $m_{\mathbb{A}}(x) \mid ch_{\mathbb{A}}(x)$,

(2) $\mathrm{st}\, m_{\mathbb{A}}(x) \le n$.

Z části (1) právě uvedeného důsledku plyne, že každý kořen polynomu $m_{\mathbb{A}}(x)$ je též kořenem polynomu $ch_{\mathbb{A}}(x)$. Lze tuto implikaci obrátit?

Uvažujme $k \in T$, tak, že

$$ch_{\mathbb{A}}(k)=0 \wedge m_{\mathbb{A}}(k) \neq 0, \qquad (23\text{-}1)$$

což značí, že polynomy $m_{\mathbb{A}}(x)$ a $(x-k)$ jsou nesoudělné (proč?), jejich největší společný dělitel je tedy 1, a proto existují polynomy $p(x), q(x) \in T[x]$ s vlastností

$$p(x)(x-k) + q(x)m_{\mathbb{A}}(x) = 1.$$

Zvolme nyní některou bázi $\mathcal{B}$ a označme $\mathbf{A}=(\mathbb{A},\mathcal{B})$.
Protože[22]) $m_{\mathbb{A}}(x)=m_{\mathbf{A}}(x)$, lze právě uvedený vztah psát takto:

$$p(x)(x-k) + q(x)m_{\mathbf{A}}(x) = 1. \qquad (23\text{-}2)$$

Dosadíme-li do obou stran relace (23-2) za x matici $\mathbf{A}$, obdržíme

$$p(\mathbf{A})(\mathbf{A}-k\mathbf{E}) + q(\mathbf{A})m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{E},$$

odkud plyne (proč?)

$$p(\mathbf{A})(\mathbf{A}-k\mathbf{E}) = \mathbf{E}$$

a přejdeme-li k determinantům uvedených matic, dostáváme

$$\det(p(\mathbf{A})).\det(\mathbf{A}-k\mathbf{E})=1, \text{ neboli } \det(p(\mathbf{A})).ch_{\mathbb{A}}(k)=1,$$

což je ovšem vzhledem k předpokladu (23-1) spor.

Odvodili jsme platnost následující věty.

23. Věta *Minimální a charakteristický polynom téhož lineárního operátoru mají stejné kořeny*[23]*).*

---

[21]) bod (1) - užitím věty 3.

[22]) viz věta 9.

[23]) které se ovšem mohou lišit násobností.

Speciálně pro vektorové prostory nad komplexními čísly tedy platí[24]:

24. Důsledek *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na vektorovém prostoru nad* C. *Pak existují* $n_1,\dots,n_r$ *a* $m_1,\dots,m_r \in N$ *a navzájem různá* $t_1,\dots,t_r \in C$ *, tak, že platí:*

(1) $ch_{\mathbb{A}}(x)=(-1)^n(x-t_1)^{n_1}.(x-t_2)^{n_2}\dots(x-t_r)^{n_r}$,

(2) $m_{\mathbb{A}}(x)=(x-t_1)^{m_1}.(x-t_2)^{m_2}\dots(x-t_r)^{m_r}$,

(3) $n_1+n_2+\dots+n_r = n$,

(4) $1\le m_1\le n_1, 1\le m_2\le n_2, \dots, 1\le m_r\le n_r$.

Později (věty 5.19, 5.21) ukážeme, že násobnost kořenů charakteristického a minimálního polynomu daného operátoru velmi úzce souvisí s vlastnostmi jistých podprostorů přiřazených tomuto operátoru.

Příklad C

S využitím důsledku 24 nalezněte minimální polynom operátoru $\mathbb{A}$ na prostoru $\mathbf{V}_3$ nad C, který je ve zvolené bázi dán maticí

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Charakteristický polynom operátoru $\mathbb{A}$ zní (viz příklad B):

$$ch_{\mathbb{A}}(x)= -x^3- 3x^2- 3x - 1.$$

Jeho rozklad na kořenové činitele dle 24(1) má tvar:

$$ch_{\mathbb{A}}(x)= -(x+1)^3,$$

takže pro minimální polynom nastane právě jedna z možností:

$$m_{\mathbb{A}}(x)=(x+1)^m,\ m=1 \vee m=2 \vee m=3.$$

S přihlédnutím k definici minimálního polynomu hledáme nejmenší exponent, pro nějž dosazení matice $\mathbf{A}$ anuluje příslušný polynom.

- $m=1$: evidentně $(\mathbf{A}+\mathbf{E})\neq\mathbf{0}$,
- $m=2$: $(\mathbf{A}+\mathbf{E})^2=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}^2 = \mathbf{0}$,

což znamená, že $m_{\mathbb{A}}(x)=(x+1)^2$ (srv. s výsledkem příkladu A,2).

---

[24]) obecně nad každým algebraicky uzavřeným tělesem

3. Invariantní podprostory vzhledem k lineárnímu operátoru

1. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}$. Podprostor $\mathbf{W}$ prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *invariantní vzhledem k lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$ (krátce *$\mathbb{A}$-invariantní*), jestliže

$$\boxed{\forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}:\ \mathbf{x}\in\mathbf{W} \Rightarrow \mathbb{A}(\mathbf{x})\in\mathbf{W}.}\ ^{25})$$

2. Poznámka Zřejmě zobrazení $\mathbb{A}|\mathbf{W}$ je lineárním operátorem na $\mathbf{W}$, právě když $\mathbf{W}$ je $\mathbb{A}$-invariantní.

A. Příklad

- Následující podprostory jsou zřejmě invariantní vzhledem k libovolnému operátoru $\mathbb{A}$ (prověřte):

$$\mathbf{V},\ \{\mathbf{o}\},\ \mathrm{Im}\mathbb{A},\ \mathrm{Ker}\mathbb{A}.$$

- Uvažujme operátor $\mathbb{A}$ definovaný v příkladu 1.**A** na prostoru všech polynomů z $R[x]$ stupně nejvýše $n-1$. Označíme-li pro libovolné k, $k\le n$, $\mathbf{W}$ podprostor všech polynomů stupně nejvýše $k-1$, je $\mathbf{W}$ zřejmě $\mathbb{A}$-invariantní.

3. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}$, $f(x)$ polynom z $T[x]$. Pak každý podprostor invariantní vzhledem k $\mathbb{A}$ je rovněž invariantní vzhledem k $f(\mathbb{A})$.*

Důkaz:

Buď $\mathbf{W}$ $\mathbb{A}$-invariantní podprostor.

Dokažme nejprve, že $\mathbf{W}$ je pak také $\mathbb{A}^k$-invariantní pro každé $k\in N_0$, což provedeme matematickou indukcí pro k.

(i) je-li $k=0$, pak $\mathbf{W}$ je evidentně $\mathbb{A}^0$-invariantní, neboť $\mathbb{A}^0=\mathbb{I}$.

(ii) předpokládejme, že $\mathbf{W}$ je $\mathbb{A}^k$-invariantní. Zvolíme-li libovolný $\mathbf{x}\in\mathbf{W}$, pak $\mathbf{y}=\mathbb{A}^k(\mathbf{x})\in\mathbf{W}$ a ovšem také $\mathbb{A}(\mathbf{y})\in\mathbf{W}$.
Hodnotu $\mathbb{A}^{k+1}(\mathbf{x})$ lze psát ve tvaru $(\mathbb{A}^k\circ\mathbb{A})(\mathbf{x})=\mathbb{A}(\mathbb{A}^k(\mathbf{x}))=\mathbb{A}(\mathbf{y})$, což znamená, že $\mathbb{A}^{k+1}(\mathbf{x})\in\mathbf{W}$, čímž je $\mathbb{A}^k$-invariance podprostoru $\mathbf{W}$ doká-

---

[25]) neboli $\mathrm{Im}(\mathbb{A}|\mathbf{W})\subseteq\mathbf{W}$.

$\mathbb{A}|\mathbf{W}$ značí *restrikci* $\mathbb{A}$ na $\mathbf{W}$, tj. zobrazení definované vztahem

$$\forall \mathbf{x}\in\mathbf{W}:\ (\mathbb{A}|\mathbf{W})(\mathbf{x})=\mathbb{A}(\mathbf{x}).$$

zána.

Uvažujme nyní některý polynom $f(x)\in T[x]$,

$$f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Je-li $\mathbf{x}$ libovolný vektor z $\mathbf{W}$, můžeme psát:

$$f(\mathbb{A})(\mathbf{x})=(a_m\mathbb{A}^m + a_{m-1}\mathbb{A}^{m-1} + \dots + a_1\mathbb{A} + a_0\mathbb{I})(\mathbf{x}),$$

což lze upravit na tvar[26]

$$f(\mathbb{A})(\mathbf{x})=a_m(\mathbb{A}^m(\mathbf{x}))+a_{m-1}(\mathbb{A}^{m-1}(\mathbf{x}))+\dots+a_1\mathbb{A}(\mathbf{x})+a_0\mathbb{I}(\mathbf{x}),$$

který (vzhledem k první části důkazu) je lineární kombinací vektorů z $\mathbf{W}$, a tudíž $f(\mathbb{A})(\mathbf{x})$ náleží $\mathbf{W}$. ∎

Připomeňme nyní dva pojmy teorie matic – *rozdělení matice na bloky* a *blokově diagonální matice:*

4. Definice Buď $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m.p}$ matice nad T a zvolme přirozená čísla $h_0,\dots,h_r,\ k_0,\dots,k_s$ taková, že

$$0=h_0<h_1<h_2<\dots<h_{r-1}<h_r=m,\quad 0=k_0<k_1<k_2<\dots<k_{s-1}<k_s=p.$$

Řekneme, že systém submatic

$$\mathbf{A}_{11},\dots,\mathbf{A}_{1s},\ \mathbf{A}_{21},\dots,\mathbf{A}_{2s},\dots,\ \mathbf{A}_{r1},\dots,\mathbf{A}_{rs}$$

matice $\mathbf{A}$ *tvoří bloky matice* $\mathbf{A}$[27], platí-li pro všechna $1\le u\le r$, $1\le v\le s$, že submatice $\mathbf{A}_{uv}$ je tvořena právě a_{ij} majícími následující vlastnost:

$$\boxed{(h_{u-1}+1\le i\le h_u \wedge k_{v-1}+1\le j\le k_v),\ 1\le i\le m, 1\le j\le p.}$$

O matici $\mathbf{A}$ pak říkáme, že *je na uvedené bloky rozdělena*. Matici $\mathbf{A}$ pak zapisujeme rovněž relací $\mathbf{A}=(\mathbf{A}_{uv})_{r.s}$, případně

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11},\dots,\mathbf{A}_{1s} \\ \mathbf{A}_{21},\dots,\mathbf{A}_{2s} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{A}_{r1},\dots,\mathbf{A}_{rs} \end{pmatrix}$$ [28].

---

[26]) užitím definice součtu a skalárního násobku lin. operátorů.

[27]) užívá se též pojmu *pole*.

[28]) Rozdělení matice $\mathbf{A}$ na bloky si můžeme znázornit následujícím

5. Poznámka Uveďme příklad jednoho z možných rozdělení matice na bloky:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 9 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ \hline 0 & 8 & 1 & 7 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix},$$

přitom např. $A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{12}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_{13}=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ a $A_{23}=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Definice Čtvercová matice A rozdělená na bloky

$$A = \begin{pmatrix} A_{11},\dots,A_{1s} \\ A_{21},\dots,A_{2s} \\ \dots\dots\dots \\ A_{r1},\dots,A_{rs} \end{pmatrix}$$

se nazývá *blokově diagonální*, jsou-li splněny následující podmínky:

(1) $s=r$,

(2) pro všechna i, $1\le i\le r$, je A_{ii} čtvercová matice,

(3) pro všechna i,j, $1\le i,j\le r$, $i\ne j$, je A_{ij} nulová matice.

7. Poznámka Příkladem blokově diagonální je následující matice:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|cc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Užitečnost tohoto pojmu vyplyne zanedlouho. Zaveďme však ještě jeden z pomocných pojmů:

---

způsobem:

Veďme maticí A systém *dělících čar*

a) vodorovně - mezi řádky h_1 a h_1+1, h_2 a $h_2+1,\dots,h_{r-1}$ a $h_{r-1}+1$,

b) svisle - mezi sloupci k_1 a k_1+1, k_2 a $k_2+1,\dots,k_{s-1}$ a $k_{s-1}+1$.

Tím je původní matice rozdělena na celkem r vodorovných a s svislých pásů neboli na (r×s) submatic - *bloků matice* A - a značíme je postupně dvojicí indexů, z nichž první udává příslušnost vertikálnímu a druhý horizontálnímu pásu.

8. Definice Buďte $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(r)}$ netriviální podprostory ve $\mathbf{V}$ takové, že $\quad \mathbf{V}=U^{(1)}\oplus U^{(2)}\oplus\ldots\oplus U^{(r)}$.

Buďte dále $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r$ po řadě báze těchto podprostorů a očíslujme jejich prvky následujícím způsobem:

$$\mathcal{B}_i=\langle \mathbf{e}_{k_{i-1}+1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_i}\rangle,\ 1\le i\le r,\ \text{kde } k_0=0,\ k_r=n. \tag{8-1}$$

Pak uspořádaná n-tice

$$\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_1+1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \mathbf{e}_{k_{r-1}+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\rangle$$

se nazývá *báze prostoru* $\mathbf{V}$ *sestavená z bází* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r$ [29]).

Uvažujme nyní lineární operátor $\mathbb{A}$ takový, že existují $\mathbb{A}$-*invariantní* netriviální podprostory $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(r)}$, tak, že $\mathbf{V}$ je jejich direktním součtem. Buď $\mathcal{B}$ báze sestavená z bází $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r$ těchto podprostorů a nechť jsou její členy očíslovány dle (8-1). Zkoumejme matici operátoru $\mathbb{A}$ v bázi $\mathcal{B}$.

Vyberme nyní $\mathbf{e}_j$ z báze $\mathcal{B}$. Pak existuje jediná báze $\mathcal{B}_i$, $1\le i\le r$, obsahující $\mathbf{e}_j$, a tedy $\mathbf{e}_j\in U^{(i)}$. Indexy i,j ovšem vyhovují relaci

$$(k_{i-1}+1)\le j\le k_i \tag{9-1}$$

Protože $U^{(i)}$ je $\mathbb{A}$-invariantní, platí $\mathbb{A}(\mathbf{e}_j)\in U^{(i)}$, a tudíž $\mathbb{A}(\mathbf{e}_j)$ je lineární kombinací právě vektorů z $\mathcal{B}_i = \langle \mathbf{e}_{k_{i-1}+1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_i}\rangle$, čili pro souřadnice $(a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ obrazu $\mathbb{A}(\mathbf{e}_j)$ v bázi $\mathcal{B}$ platí:

---

[29]) protože součet podprostorů $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(r)}$ je direktní, je sjednocení bází $\mathcal{B}_1\cup \mathcal{B}_2\cup\ldots\cup \mathcal{B}_r$ bází součtu těchto podprostorů.

$$a_{j1}=\dots=a_{j,k_{i-1}}=0 \wedge a_{j,k_i+1}=\dots=a_{jn}=0. \tag{9-2}$$

To ovšem znamená, že v matici $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ má submatice tvořená j-tými řádky pro j splňující (9-1) následující tvar:

$$\begin{pmatrix} 0,\dots,0 & a_{k_{i-1}+1,k_{i-1}+1},\dots,a_{k_{i-1}+1,k_i} & 0,\dots,0 \\ 0,\dots,0 & a_{k_{i-1}+2,k_{i-1}+1},\dots,a_{k_{i-1}+2,k_i} & 0,\dots,0 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ 0,\dots,0 & a_{k_i,k_{i-1}+1},\dots\dots,a_{k_i,k_i} & 0,\dots,0 \end{pmatrix} \tag{9-3}$$

Vyznačený blok je zřejmě blokem $\mathbf{A}_{ii}$ matice $\mathbf{A}$. Matice $\mathbf{A}$ je tedy blokově diagonální s bloky $\mathbf{A}_{11},\dots,\mathbf{A}_{rr}$.

Dále je patrno, že $\mathbf{A}_{ii}$ je maticí restrikce operátoru $\mathbb{A}$ na podprostor $\mathbf{U}^{(i)}$ v bázi $\mathcal{B}_i$ (proč?).

Předpokládejme nyní naopak, že jsme k operátoru $\mathbb{A}$ nalezli bázi $\mathcal{B}$, takovou, že matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ je blokově diagonální s bloky

$$\mathbf{A}_{11},\dots,\mathbf{A}_{rr}.$$

Označme řády těchto bloků po řadě $p_1,\dots,p_r$. Nyní rozdělíme bázi $\mathcal{B}$ na podmnožiny $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_r$ takto:

Označíme $k_0=0$, $k_1=p_1$, $k_2=p_1+p_2$, ..., $k_r=p_1+p_2+\dots p_r$ $(k_r=n)$ a definujeme $\mathcal{B}_i=\langle \mathbf{e}_{k_{i-1}+1},\dots,\mathbf{e}_{k_i}\rangle$, $1\le i\le r$, tedy shodně s (8-1).

Dále zkonstruujeme podprostory $\mathbf{U}^{(1)},\dots,\mathbf{U}^{(r)}$ tak, že bází podprostoru $\mathbf{U}^{(i)}$ bude $\mathcal{B}_i$, $1\le i\le r$.

Je zřejmé, že báze $\mathcal{B}$ je sestavena z bází $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_r$ a prostor $\mathbf{V}$ je direktním součtem podprostorů $\mathbf{U}^{(1)},\dots,\mathbf{U}^{(r)}$.

Zkoumejme nyní, zda jsou tyto podprostory $\mathbb{A}$-invariantní: Zvolme i, $1\le i\le r$, a vyberme $\mathbf{e}_j$ z $\mathcal{B}_i$. Protože $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ je blokově diagonální, má submatice tvořená j-tými řádky, kde $(k_{i-1}+1)\le j\le k_i$ [30]), zřejmě tvar (9-3), což ovšem znamená, že obraz $\mathbb{A}(\mathbf{e}_j)$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{e}_{k_{i-1}+1},\dots,\mathbf{e}_{k_i}$, tedy prvků z $\mathcal{B}_i$ (proč?).

Uvážíme-li nyní libovolný $\mathbf{x}\in\mathbf{U}^{(i)}$, je lineární kombinací prvků z $\mathcal{B}_i$ a jeho obraz tudíž lineární kombinací prvků $\mathbb{A}(\mathbf{e}_{(k_{i-1})+1}),\dots,$

---

[30]) což je relace (9-1)

$\mathbb{A}(\mathbf{e}_{k_i})$, která je ovšem opět lineární kombinací prvků z $\mathcal{B}_i$ (viz výše), a proto $\mathbb{A}(\mathbf{x})$ opět náleží $\mathbf{U}^{(i)}$, čímž je $\mathbb{A}$-invariance podprostoru $\mathbf{U}^{(i)}$ dokázána.

Odvodili jsme tím platnost následující věty:

9. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}$. Pak platí, že matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ je blokově diagonální řádu r právě tehdy, když existují netriviální $\mathbb{A}$-invariantní podprostory $\mathbf{U}^{(1)},\mathbf{U}^{(2)},\dots,\mathbf{U}^{(r)}$ o bázích po řadě $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\dots,\mathcal{B}_r$ tak, že $\mathbf{V}=\mathbf{U}^{(1)}\oplus\mathbf{U}^{(2)}\oplus\dots\oplus\mathbf{U}^{(r)}$ a báze $\mathcal{B}$ je sestavena z bází $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\dots,\mathcal{B}_r$.*

Přitom pro blok $\mathbf{A}_{ii}$, $1\le i\le r$, matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ platí, že

$$\mathbf{A}_{ii}=(\mathbb{A}|\mathbf{U}^{(i)},\mathcal{B}_i).$$

Významným rozkladem podprostoru $\mathbf{V}$ na direktní sumu invariantních podprostorů se budeme zabývat v kapitole 5.

Vlastnosti blokově diagonálních matic doplňuje následující lemma:

10. Lemma *Buď* **A** *blokově diagonální matice s bloky* $\mathbf{A}_{11},\dots,\mathbf{A}_{rr}$. *Pak platí* $\det\mathbf{A} = \prod_{i=1}^{r}\det\mathbf{A}_{ii}$.

<u>Důkaz:</u>

Pro r=2 je čtenáři platnost lemmatu jistě známa. Pro obecné r se platnost snadno dokáže matematickou indukcí. ■

Zajímavým důsledkem věty 1.32 je následující tvrzení:

11. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**, *f(x) libovolný polynom z T[x]. Pak platí, že podprostory* $\mathrm{Im}f(\mathbb{A})$ *a* $\mathrm{Ker}f(\mathbb{A})$ *jsou* $\mathbb{A}$*-invariantní.*

<u>Důkaz:</u>

(1) Buď $\mathbf{x}$ libovolný element z $\mathrm{Im}f(\mathbb{A})$ - existuje tedy $\mathbf{y}\in\mathbf{V}$ tak, že $\mathbf{x}=f(\mathbb{A})(\mathbf{y})$. Pak $\mathbb{A}(\mathbf{x})=\mathbb{A}(f(\mathbb{A})(\mathbf{y}))=(f(\mathbb{A})\circ\mathbb{A})(\mathbf{y})$.
V souladu s větou 1.32 je $f(\mathbb{A})\circ\mathbb{A}=\mathbb{A}\circ f(\mathbb{A})$ (proč?) a lze tedy psát: $\mathbb{A}(\mathbf{x})=(\mathbb{A}\circ f(\mathbb{A}))(\mathbf{y})=f(\mathbb{A})(\mathbb{A}(\mathbf{y}))$, což znamená, že $\mathbb{A}(\mathbf{x})\in\mathrm{Im}f(\mathbb{A})$, čímž je $\mathbb{A}$-invariance $\mathrm{Im}f(\mathbb{A})$ dokázána.

(2) Zvolme $\mathbf{x}\in\mathrm{Ker}f(\mathbb{A})$ - $f(\mathbb{A})(\mathbf{x})=\mathbf{o}$. Pak $f(\mathbb{A})(\mathbb{A}(\mathbf{x}))=(\mathbb{A}\circ f(\mathbb{A}))(\mathbf{x})$, a díky záměnnosti $\mathbb{A},f(\mathbb{A})$, lze dále psát: $f(\mathbb{A})(\mathbb{A}(\mathbf{x}))=(f(\mathbb{A})\circ\mathbb{A})(\mathbf{x})=$ $=\mathbb{A}(f(\mathbb{A})(\mathbf{x}))=\mathbb{A}(\mathbf{o})=\mathbf{o}$, neboli $\mathbb{A}(\mathbf{x})\in\mathrm{Ker}f(\mathbb{A})$ - $\mathrm{Ker}f(\mathbb{A})$ je tedy $\mathbb{A}$-invariantní. ■

12. Poznámka Buď **A** libovolná matice řádu n nad *T*. Položme $\mathbf{V}=T^n$ (tzv. aritmetický vektorový prostor) a zvolme v T^n standardní bázi $\mathcal{S}$.
Definujme nyní lineární operátor $\mathbb{A}$ na $\mathbf{V}=T^n$ maticí **A**, tj. $(\mathbb{A},\mathcal{S})=\mathbf{A}$. Pak pro každý $\mathbf{x}\in T^n$ platí $\mathbb{A}(\mathbf{x})=\mathbf{x}\mathbf{A}$ [31]), takže uvážíme-li definici 1, bude podprostor $\mathbf{W}\subseteq T^n$ $\mathbb{A}$-invariantní, právě když

$$\boxed{\forall\mathbf{x}\in T^n;\ \mathbf{x}\in\mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{x}.\mathbf{A}\in\mathbf{W}}\ .$$

Podprostor **W** této vlastnosti se proto nazývá *invariantní podprostor matice* **A**.

---

[31]) dle věty 1.4 je $\{\mathbb{A}(\mathbf{x})\}_{\mathcal{S}}=\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{S}}(\mathbb{A},\mathcal{S})=\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{S}}\mathbf{A}$, a protože ve standardní bázi pro libovolný $\mathbf{v}\in T^n$ platí $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{S}}=\mathbf{v}$, dostáváme $\mathbb{A}(\mathbf{x})=\mathbf{x}.\mathbf{A}$.

Vlastnosti invariantních podprostorů matic můžeme tedy snadno vyvodit z vlastností podprostorů invariantních vůči lineárnímu operátoru.

4. Vlastní podprostory lineárního operátoru

1. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na **V**. Platí-li pro skalár $\lambda \in T$ a nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

$$\boxed{\mathbb{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}}, \qquad (1\text{-}1)$$

řekneme, že λ je *vlastní hodnota lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ a $\mathbf{x}$ *vlastní vektor lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ *příslušný vlastní hodnotě* λ.[1])

Množina vlastních hodnot lineárního operátoru $\mathbb{A}$ se nazývá *spektrum lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ a značí se $\mathcal{S}pec\mathbb{A}$.

Otázku, kolika vlastním hodnotám může týž vlastní vektor náležet, vyřešíme později - viz důsledek 10.

2. Označení Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor, λ některá jeho vlastní hodnota. Pak symbolem $\mathbf{N}_\lambda$ budeme značit následující množinu:[2])

$$\boxed{\mathbf{N}_\lambda = \{\ \mathbf{x} \in \mathbf{V};\ \mathbb{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}\ \}} \qquad (2\text{-}1)$$

Zabývejme se nyní postupem nalezení vlastních vektorů operátoru příslušných vlastní hodnotě λ.

V souladu s (2-1) lze psát:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda \Leftrightarrow \mathbb{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbb{A}(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbb{A}(\mathbf{x}) - \lambda \mathbb{I}(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \Leftrightarrow (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})(\mathbf{x}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}),$$

a $\mathbf{N}_\lambda$ je tedy podprostorem ve **V**.[3])

---

[1]) užívá se též pojmu *charakteristický vektor (hodnota)*. Je-li T číselné těleso, hovoří se také o *charakteristickém čísle* namísto o charakteristické hodnotě.

Přesto, že λ je skalár z T, bývá zvykem jej značit písmenem alfabety.

[2]) $\mathbf{N}_\lambda$ je zřejmě tvořena *vlastními vektory* operátoru $\mathbb{A}$ příslušnými λ spolu s *vektorem nulovým*. Z definice 1 plyne $\mathbf{N}_\lambda \neq \{\mathbf{o}\}$ (jak?).

[3]) tento fakt lze snadno vyvodit přímo z 2 - proveďte.

Zvolme nyní ve **V** bázi $\mathcal{B}$. Uvážíme-li, že $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I},\mathcal{B})=(\mathbb{A},\mathcal{B})-\lambda E$ (věta 1.12), můžeme s využitím shora uvedeného a věty 1.4 psát:

$$\mathbf{x}\in\mathbf{N}_\lambda \Leftrightarrow (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{x})=\mathbf{o} \Leftrightarrow \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}[(\mathbb{A},\mathcal{B})-\lambda E]=\{\mathbf{o}\}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow [(\mathbb{A},\mathcal{B})-\lambda E]^T\{\mathbf{x}\}^T_{\mathcal{B}}=\{\mathbf{o}\}^T_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\mathbb{A},\mathcal{B})^T-\lambda E]\{\mathbf{x}\}^T_{\mathcal{B}}=\{\mathbf{o}\}^T_{\mathcal{B}}.$$

Právě získané výsledky shrňme do věty.

3.Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**, λ *nechť je jeho některá vlastní hodnota. Pak platí:*

(1) $\mathbf{N}_\lambda \subseteq\subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{N}_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})$,

(2) je-li $\mathcal{B}$ *některá báze* **V**, *pak* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ *je vlastním vektorem operátoru* $\mathbb{A}$ *příslušným* λ, *právě když jeho souřadnice v bázi* $\mathcal{B}$ *jsou netriviálním řešením soustavy lineárních homogenních rovnic o matici* $\boxed{(\mathbb{A},\mathcal{B})^T-\lambda E}$.

Vzhledem k části (1) uvedené věty je následující definice korektní.

4.Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor, λ některá jeho vlastní hodnota. Pak množina $\mathbf{N}_\lambda$ definovaná vztahem (2-1) se nazývá *vlastní podprostor lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ *příslušný vlastní hodnotě* λ.

Ze zavedení $\mathbf{N}_\lambda$ vyplývá:

5.Důsledek *Každý vlastní podprostor lineárního operátoru je vzhledem k němu invariantní.*

Z věty 3 obdržíme:

6.Důsledek *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**, $\lambda\in\mathcal{S}pec\mathbb{A}$, $\mathcal{B}$ *libovolná báze. Označíme-li* $(\mathbb{A},\mathcal{B})=(a_{ij})$, *pak vektor* $\mathbf{x}$, $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}}=(x_1,\dots,x_n)$, *náleží vlastnímu podprostoru* $\mathbf{N}_\lambda$, *právě když*

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{21}x_2+\dots+a_{n1}x_n&=0\\ a_{12}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\dots+a_{n2}x_n&=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)x_n&=0\end{aligned} \qquad (6\text{-}1)$$

Nyní vyšetříme, které hodnoty náleží spektru lineárního operátoru. Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor, $\mathcal{B}$ některá báze.

V souladu s definicí 1 je $\lambda \in T$ vlastní hodnotou operátoru $\mathbb{A}$, právě když existuje $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, tak, že $\mathbb{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, což (viz 3) znamená, že homogenní soustava rovnic o matici $(\mathbb{A},\mathcal{B})^T - \lambda\mathbf{E}$ má netriviální řešení. Tento požadavek je ovšem ekvivalentní nulovosti determinantu matice soustavy - tj. $\det[(\mathbb{A},\mathcal{B})^T - \lambda\mathbf{E}] = 0$, což lze dále upravit (viz též def. 2.14)

$$0 = \det[(\mathbb{A},\mathcal{B})^T - \lambda\mathbf{E}]^T = \det[(\mathbb{A},\mathcal{B}) - \lambda\mathbf{E}] = ch_{\mathbb{A}}(\lambda).\,^{4})$$

Platí tedy tato věta:

7. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}$. Pak spektrum operátoru $\mathbb{A}$ je rovno množině kořenů jeho charakteristického polynomu.[5])*

Vlastními hodnotami jsou tedy právě ta $\lambda \in T$, pro něž je matice $(\mathbb{A},\mathcal{B}) - \lambda\mathbf{E} = (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I},\mathcal{B})$ singulární. To znamená, že spektrum operátoru lze také charakterizovat takto:

8. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}$. Spektrum operátoru $\mathbb{A}$ je množina právě těch $\lambda \in T$, pro něž operátor $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$ není automorfizmem prostoru $\mathbf{V}$.*

Příklad A

Nechť v jisté bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$ nad R je lineární operátor $\mathbb{A}$ dán maticí $\mathbf{A}$ a operátor $\mathbb{B}$ maticí $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní hodnoty a vlastní podprostory operátoru $\mathbb{A}$.

---

[4]) rovnice $ch_{\mathbb{A}}(x) = 0$ se obvykle nazývá *charakteristická rovnice lineárního operátoru $\mathbb{A}$.*

[5]) Připomeňme, že o počtu vlastních hodnot lineárního operátoru vypovídají např. důsledky 2.16 a 2.17.

Řešení:

1. operátor $\mathbb{A}$:

Nejprve nalezneme vlastní hodnoty operátoru $\mathbb{A}$ (věta 7). Jeho charakteristický polynom $ch_{\mathbb{A}}(x)=ch_{\mathbf{A}}(x)$ zní

$$ch_{\mathbb{A}}(x)=\det(\mathbf{A}-x\mathrm{E})=(1-x)(x^2-3x+2)=-(x-1)^2(x-2),$$

jeho kořeny tvoří $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{1,2\}$ (kořen 2 je jednoduchý a 1 je dvojnásobný)

Nyní postupujeme dle důsledku 6 - soustava rovnic (6-1) pro $\mathbf{N}_\lambda$ má tvar:

$$\begin{aligned}(3-\lambda)u_1 + 1u_2 - 1u_3 &= 0\\ (1-\lambda)u_2 &= 0.\\ 2u_1 + 1u_2 - \lambda u_3 &= 0\end{aligned}$$

Tuto soustavu budeme řešit nejprve pro $\lambda=1$ (a obdržíme tak vlastní podprostor $\mathbf{N}_1$) a pak pro $\lambda=2$ (tím získáme podprostor $\mathbf{N}_2$):

- $\lambda=1$ Matice soustavy zní:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Vyřešením obdržíme $\mathbf{N}_1=[(1,0,2),(0,1,1)]$.

- $\lambda=2$ Matice soustavy zní:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Vyřešením obdržíme $\mathbf{N}_2=[(1,0,1)]$.

Ověřme, že např. pro $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}=(1,1,3)$, $\mathbf{u}\in\mathbf{N}_1$, platí $\mathbb{A}(\mathbf{u})=\lambda\mathbf{u}$:

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{u})\}_{\mathcal{B}}=\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}\mathbf{A}=(1,1,3)\mathbf{A}=(1,1,3),\ \text{tj. } \mathbb{A}(\mathbf{u})=1\mathbf{u},$$

a např. pro $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}=(\pi,0,\pi)$ - $\mathbf{v}\in\mathbf{N}_2$ - obdržíme:

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{v})\}_{\mathcal{B}}=\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}\mathbf{A}=(\pi,0,\pi)\mathbf{A}=(2\pi,0,2\pi)=2(\pi,0,\pi),\ \text{tj. } \mathbb{A}(\mathbf{v})=2\mathbf{v}.$$

2. operátor $\mathbb{B}$:

Analogicky jako v případě operátoru $\mathbb{A}$ zjistíme, že

$$ch_{\mathbb{B}}(x)=(x+1)^2(-x+3),$$

$\mathcal{S}pec\mathbb{B}=\{-1,3\}$ (kořen 3 je jednoduchý a -1 je dvojnásobný).

Snadno zjistíme (proveďte!), že:

$$\mathbf{N}_{-1}=[(-2,1,0)],\ \mathbf{N}_3=[(1,-1,1)].$$

Již jsme zmínili přirozenou otázku, zda týž vlastní vektor daného operátoru může náležet různým vlastním hodnotám, což zřejmě souvisí s otázkou obecnější - je součet různých vlastních podprostorů téhož operátoru direktní?

9. Věta *Buďte* $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ *navzájem různé vlastní hodnoty některého lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ *na prostoru* $\mathbf{V}$. *Označíme-li* $\mathbf{N}_{\lambda_1},\dots,\mathbf{N}_{\lambda_r}$ *příslušné vlastní podprostory, pak platí:*

$$\boxed{\mathbf{N}_{\lambda_1}+\dots+\mathbf{N}_{\lambda_r}=\mathbf{N}_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus\mathbf{N}_{\lambda_r}.}$$

Důkaz:

Důkaz provedeme matematickou indukcí pro r.

Pro r=1 je situace jasná. Předpokládejme tedy platnost věty pro jisté r.

Buďte $\lambda_1,\dots,\lambda_r,\lambda$ navzájem různé vlastní hodnoty operátoru $\mathbb{A}$ a uvažujme (r+1)-tici vlastních vektorů $\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_r,\mathbf{y}$ náležících po řadě podprostorům $\mathbf{N}_{\lambda_1},\dots,\mathbf{N}_{\lambda_r},\mathbf{N}_{\lambda}$ s vlastností:

$$\mathbf{y}_1+\dots+\mathbf{y}_r+\mathbf{y}=\mathbf{o}. \tag{9-1}$$

Odtud vyplývá:

$$\lambda\mathbf{y}_1+\dots+\lambda\mathbf{y}_r+\lambda\mathbf{y}=\mathbf{o}. \tag{9-2}$$

Zároveň ale můžeme psát (proč?):

$$\lambda_1\mathbf{y}_1+\dots+\lambda_r\mathbf{y}_r+\lambda\mathbf{y}=\mathbb{A}(\mathbf{y}_1)+\dots+\mathbb{A}(\mathbf{y}_r)+\mathbb{A}(\mathbf{y})=\mathbb{A}(\mathbf{y}_1+\dots+\mathbf{y}_r+\mathbf{y}),$$

což však vzhledem k (9-1) implikuje

$$\lambda_1\mathbf{y}_1+\dots+\lambda_r\mathbf{y}_r+\lambda\mathbf{y}=\mathbf{o}.$$

Porovnáním právě uvedeného vztahu s (9-2) obdržíme

$$(\lambda-\lambda_1)\mathbf{y}_1+\dots+(\lambda-\lambda_r)\mathbf{y}_r+(\lambda-\lambda)\mathbf{y}=\mathbf{o},\ \text{čili}$$
$$(\lambda-\lambda_1)\mathbf{y}_1+\dots+(\lambda-\lambda_r)\mathbf{y}_r=\mathbf{o}.$$

Přitom $(\lambda-\lambda_1)\neq 0,\dots,(\lambda-\lambda_r)\neq 0$, takže z indukčního předpokladu vyplývá

$$\mathbf{y}_1=\dots=\mathbf{y}_r=\mathbf{o},$$

odkud díky (9-1) dostáváme $\mathbf{y}=\mathbf{o}$, čímž máme dokázáno, že suma (r+1) vlastních podprostorů $\mathbf{N}_{\lambda_1},\dots,\mathbf{N}_{\lambda_r},\mathbf{N}_{\lambda}$ je skutečně direktní. ∎

10. Důsledky

(1) Každý vlastní vektor přísluší jediné vlastní hodnotě daného lineárního operátoru.

(2) Vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám téhož lineárního operátoru jsou lineárně nezávislé.

V příkladu **A** jsme si povšimli, že dimenze vlastního podprostoru $\mathbf{N}_\lambda$ operátoru $\mathbb{A}$ byla pro jednoduchý kořen charakteristického polynomu rovna jedné, pro dvojnásobný dvěma a v případě operátoru $\mathbb{B}$ byla tato dimenze rovna jedné pro jednoduchý i dvojnásobný kořen. Existuje nějaká obecná souvislost mezi $\dim\mathbf{N}_\lambda$ a násobností λ jakožto kořene $ch_{\mathbb{A}}(x)$?

Uvažujme lineární operátor $\mathbb{A}$, λ nechť je m-násobný kořen $ch_{\mathbb{A}}(x)$ a $d=\dim\mathbf{N}_\lambda$. V tomto případě tedy

$$ch_{\mathbb{A}}(x)=(x-\lambda)^m.q(x), \text{ kde } q(x)\in T[x], \tag{11-1}$$

přičemž polynomy $(x-\lambda)$ a $q(x)$ jsou již nesoudělné.

Buď $\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d\rangle$ báze podprostoru $\mathbf{N}_\lambda$. Doplňme ji na bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$ vektory $\mathbf{e}_{d+1},\dots,\mathbf{e}_n$.

Jelikož $\mathbb{A}(\mathbf{e}_i)=\lambda\mathbf{e}_i$, $1\le i\le d$, má matice operátoru $\mathbb{A}$ v této bázi evidentně následující tvar:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{d+1,1} & \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & a_{d+1,n} \end{matrix} \\ \dots & \dots \\ \begin{matrix} a_{n1} & \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & a_{nn} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Zkonstruujme charakteristický polynom $ch_{\mathbb{A}}(x)$:

$$ch_{\mathbb{A}}(x) = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda-x \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{d+1,1} & \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & a_{d+1,n} \end{matrix} \\ \dots & \dots \\ \begin{matrix} a_{n1} & \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & a_{nn}-x \end{matrix} \end{vmatrix},$$

a tedy $ch_{\mathbb{A}}(x)=(\lambda-x)^d.h(x)=(x-\lambda)^d.\bar{h}(x)$, $h(x),\bar{h}(x)\in T[x]$. Vezmeme-li v úvahu (11-1), vyplývá odtud, že d není větší než m (proč?). Odvodili jsme tím platnost následující věty:

11. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}$, λ jeho libovolná vlastní hodnota. Je-li m násobnost λ jakožto kořene polynomu $ch_{\mathbb{A}}(x)$, pak pro dimenzi příslušného vlastního podprostoru $\mathbf{N}_\lambda$ platí:*

$$\boxed{\dim\mathbf{N}_\lambda \le m}\ .$$

Poznamenejme, že uvedená dimenze není obecně rovna násobnosti příslušného kořene - viz příklad **A**.

12. Definice Lineární operátor $\mathbb{A}$ na prostoru **V** se nazývá *diagonalizovatelný lineární operátor*, jestliže existuje báze $\mathcal{B}$ prostoru **V** tak, že matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ je diagonální.

Najděme nyní kriterium diagonalizovatelnosti operátoru.

● Buď $\mathbb{A}$ diagonalizovatelný lineární operátor a $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ báze požadovaná v definici 12.

Matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})=(a_{ij})$ je tudíž diagonální a v souladu s definicí matice operátoru proto musí platit

$$\forall i,\ 1\le i\le n;\ \{\mathbb{A}(\mathbf{e}_i)\}_{\mathcal{B}}=a_{ii}\{\mathbf{e}_i\}_{\mathcal{B}}\ \text{ - tedy}$$

$$\forall i,\ 1\le i\le n;\ \mathbb{A}(\mathbf{e}_i)=a_{ii}\mathbf{e}_i,$$

což ovšem znamená, že $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ jsou vlastními vektory operátoru $\mathbb{A}$ příslušnými po řadě vlastním hodnotám $\lambda_1=a_{11},\dots,\lambda_n=a_{nn}$.

● Je-li naopak $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ báze tvořená vlastními vektory operátoru $\mathbb{A}$ příslušnými po řadě vlastním hodnotám $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, je z právě provedeného rozboru patrno, že matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ bude diagonální (s diagonálou tvořenou spektrem operátoru $\mathbb{A}$) a $\mathbb{A}$ tudíž diagonalizovatelný operátor.

Platí tedy následující věta.

13. Věta *Lineární operátor $\mathbb{A}$ na* **V** *je diagonalizovatelný právě tehdy, když existuje báze prostoru* **V** *tvořená vlastními vektory operátoru $\mathbb{A}$.*

Zkoumejme nyní existenci báze tvořené vlastními vektory daného operátoru $\mathbb{A}$. Nechť $\mathrm{Spec}\mathbb{A}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, $\mathbf{N}_{\lambda_1},\dots,\mathbf{N}_{\lambda_r}$ jsou příslušné vlastní podprostory.

● Je-li $\mathbb{A}$ diagonalizovatelný, pak dle předešlé věty existuje báze $\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ tvořená vlastními vektory operátoru $\mathbb{A}$. Předpokládejme, že její vektory jsou očíslovány tak, že

$e_1,\dots,e_{k_1}$ přísluší vlastní hodnotě λ_1,

$e_{k_1+1},\dots,e_{k_2}$ přísluší vlastní hodnotě λ_2,

....

$e_{k_{r-1}+1},\dots,e_{k_r}$ přísluší vlastní hodnotě λ_r.

Položme $k_0=1$ a definujme podprostory $\mathbf{M}_{(1)}$, $\mathbf{M}_{(2)},\dots,\mathbf{M}_{(r)}$ takto:

$$\mathbf{M}_{(i)}=[e_{k_{i-1}+1},\dots,e_{k_i}],\ 1\le i\le r. \tag{12-1}$$

Evidentně platí: $$\mathbf{M}_{(i)}\subseteq \mathbf{N}_{\lambda_i},\ 1\le i\le r. \tag{12-2}$$

Odtud, z (12-1) a z věty 9 dostáváme:

$$\mathbf{V}=\mathbf{M}_{(1)}\oplus\dots\oplus\mathbf{M}_{(r)}\subseteq \mathbf{N}_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus\mathbf{N}_{\lambda_r},$$

a proto žádná z inkluzí systému (12-2) nemůže být ostrá, neboli

$$\mathbf{M}_{(i)}=\mathbf{N}_{\lambda_i},\ 1\le i\le r,$$

a tudíž $$\mathbf{V}=\mathbf{N}_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus\mathbf{N}_{\lambda_r}.$$

● Předpokládáme-li obráceně, že $\mathbf{V}$ je direktním součtem vlastních podprostorů $\mathbf{N}_{\lambda_1},\dots,\mathbf{N}_{\lambda_r}$, představuje zřejmě báze sestavená z jejich bází bázi prostoru $\mathbf{V}$ tvořenou vlastními vektory operátoru $\mathbb{A}$.

Uvedená fakta vyjadřuje následující věta, kterou ovšem můžeme také pokládat za důsledek věty 3.9 - stejně jako větu 13 (promyslete si).

14. Věta *Lineární operátor $\mathbb{A}$ na prostoru* $\mathbf{V}$ *je diagonalizovatelný právě tehdy, když je prostor* $\mathbf{V}$ *roven (direktnímu) součtu právě všech svých vlastních podprostorů.*

Odtud a z věty 9 plyne, že lineární operátor je diagonalizovatelný, právě když součet dimenzí jeho vlastních podprostorů je roven $\dim\mathbf{V}$ (proč?).

Uvažujme lineární operátor $\mathbb{A}$, $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$. Označíme-li n_i násobnost λ_i jakožto kořene charakteristického polynomu $ch_{\mathbb{A}}(x)$, platí ovšem

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \le n \tag{15-1}$$

a dle věty 11 $$\forall i, 1\le i\le r:\ \dim\mathbf{N}_{\lambda_i}\le n_i. \tag{15-2}$$

Platí-li tedy $\sum_{i=1}^{r} \dim \mathbf{N}_{\lambda_i} = n$, znamená to (s ohledem na (15-1)), že ve vztahu (15-2) nenastane pro žádné i nerovnost.[6]

Obráceně - nastane-li v (15-2) pro každé i rovnost, pak

$$\sum_{i=1}^{r} \dim \mathbf{N}_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{r} n_i .$$

To však implikuje $\sum_{i=1}^{r} \dim \mathbf{N}_{\lambda_i} = n$, jen když v (15-1) nastává rovnost, což je však obecně splněno nad C, resp. nad algebraicky uzavřeným tělesem.

Diagonalizovatelnost lze tudíž popsat také takto:

15. Věta *Je-li lineární operátor $\mathbb{A}$ diagonalizovatelný, pak pro každý jeho vlastní podprostor $\mathbf{N}_\lambda$ platí, že jeho dimenze je rovna násobnosti λ jakožto kořene polynomu $ch_{\mathbb{A}}(x)$.*

Pro lineární operátory na prostorech nad C platí i implikace obrácená.[7]

Z důkazu věty 13 a z věty 15 vyplývá:

16. Důsledek *Diagonála matice operátoru $\mathbb{A}$ v bázi tvořené vlastními vektory operátoru $\mathbb{A}$ je tvořena vlastními hodnotami, jimž jednotlivé vektory báze po řadě odpovídají.*[8]
Každá z vlastního hodnot se přitom na diagonále vyskytuje tolikrát, kolikanásobným je kořenem polynomu $ch_{\mathbb{A}}(x)$.

---

[6]) jinak bychom obdrželi $n = \sum_{i=1}^{r} \dim \mathbf{N}_{\lambda_i} < \sum_{i=1}^{r} n_i \le n$, což není možné.

[7]) Ukažme, že věta 15 obecně není ekvivalencí:
Nechť je dán operátor $\mathbb{A}$ na R^3 v jisté bázi takto:

$$y_1 = x_2,\ y_2 = -x_1,\ y_3 = 0.$$

Jeho charakteristický polynom $(-x)(x^2+1)$ má v R jediný kořen $\lambda=0$ násobnosti 1, dále platí $1=\dim \mathbf{N}_0$, ale přitom $\mathbf{N}_0 \neq R^3$ (prověřte), takže $\mathbb{A}$ není diagonalizovatelný - obrácená implikace neplatí.

[8]) tyto vlastní hodnoty samozřejmě nemusí být navzájem různé.

Má-li některý lineární operátor na $\mathbf{V}_n$ právě n navzájem různých vlastních hodnot, jsou příslušné vlastní vektory lineárně nezávislé (viz 10) a tvoří tudíž bázi $\mathbf{V}_n$. Z věty 13 tudíž plyne[9]):

17. Věta *Má-li charakteristický polynom lineárního operátoru na prostoru nad C pouze jednoduché kořeny, pak je tento operátor diagonalizovatelný.*

Tuto větu zřejmě nelze obrátit - uvažme např. identický operátor.

Z věty 17 vyplývá:

18. Důsledek *Má-li charakteristický polynom matice nad C pouze jednoduché kořeny, pak je tato matice podobná diagonální matici.*

Povšimněme si operátorů $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ v příkladu **A** - operátor $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelný, zatímco operátor $\mathbb{B}$ ne.

Nikoli každá matice z $\mathcal{M}_n(T)$ je tedy podobná některé diagonální matici. Kanonický tvar, který bude reprezentovat každou z tříd podobných matic (o němž se hovoří za větou 1.36), bude tedy „složitější".

19. Poznámka Analogicky úvaze provedené v poznámce 3.12 můžeme dospět k pojmu *vlastní vektor, vlastní hodnota, vlastní podprostor matice* **A** z $\mathcal{M}_n(T)$:

- Platí-li pro skalár $\lambda \in T$ a nenulový aritmetický vektor $\mathbf{x} \in T^n$

$$\boxed{\mathbf{x}.\mathbf{A} = \lambda \mathbf{x}},$$

řekneme, že λ je *vlastní hodnota matice* **A** a **x** *vlastní vektor matice* **A** *příslušný vlastní hodnotě* λ.

- Podprostor $\mathbf{N}_\lambda$ v T^n,

$$\boxed{\mathbf{N}_\lambda = \{\ \mathbf{x} \in T^n;\ \mathbf{x}.\mathbf{A} = \lambda \mathbf{x}\ \}},$$

nazýváme *vlastní podprostor matice* **A** *příslušný vlastní hodnotě* λ.

---

[9]) proč uvažujeme těleso *C* komplexních čísel?

Vlastnosti vlastních podprostorů matic můžeme opět snadno odvodit z vlastností vlastních podprostorů lineárního operátoru.

5. Kořenové podprostory lineárního operátoru

Úvahy této (a následující kapitoly) budeme provádět pouze na vektorových prostorech nad C (nutnost požadavku algebraické uzavřenosti tělesa skalárů počíná větou 14).

V souladu s větou 4.3 můžeme vlastní podprostor operátoru $\mathbb{A}$ příslušný vlastní hodnotě λ psát:

$$\mathbf{N}_\lambda=\{\ \mathbf{x}\in\mathbf{V};\ (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{x})=\mathbf{o}\ \}.$$

Zobecníme nyní pojem vlastního podprostoru následujícím způsobem:

1. Označení Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}$, λ některá jeho vlastní hodnota. Pak symbolem $\mathbf{R}_\lambda$ budeme značit následující množinu:

$$\boxed{\mathbf{R}_\lambda=\{\ \mathbf{x}\in\mathbf{V};\ \exists m\in N:\ (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{x})=\mathbf{o}\ \}}\ . \qquad (1\text{-}1)$$

Evidentně $\mathbf{N}_\lambda\subseteq\mathbf{R}_\lambda$. Vyšetříme nyní, zda je $\mathbf{R}_\lambda$ podrostorem ve $\mathbf{V}$.

Buďte $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{R}_\lambda$, pak dle 1 existují $r,s\in N$ tak, že platí:

$$(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^r(\mathbf{u})=\mathbf{o}\ \wedge\ (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^s(\mathbf{v})=\mathbf{o}.$$

Je jasné, že platí-li pro některé $\mathbb{B}\in\mathcal{E}nd(\mathbf{V})$, $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$, $k\in N$, že $\mathbb{B}^k(\mathbf{x})=\mathbf{o}$, pak také $\mathbb{B}^h(\mathbf{x})=\mathbf{o}$, pro každé $h\in N$, $h\geq k$.

Položíme-li proto $m=\max\{r,s\}$, platí

$$(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{u})=\mathbf{o}\ \wedge\ (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{v})=\mathbf{o},$$

odkud vyplývá[10]):

$$\mathbf{o}=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{u})+(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{v})=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{u}+\mathbf{v}),$$

neboli $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\in\mathbf{R}_\lambda$.

Uvažujme nyní skalár $t\in T$. Pak $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^r(t\mathbf{u})=t((\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^r(\mathbf{u}))=t\mathbf{o}=\mathbf{o}$, čili také $(t\mathbf{u})\in\mathbf{R}_\lambda$.

Jelikož $\mathbf{N}_\lambda\subseteq\mathbf{R}_\lambda$, je $\mathbf{R}_\lambda\neq\{\mathbf{o}\}$.

Následující tvrzení tudíž platí.

---

[10]) $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m$ je lineárním operátorem na $\mathbf{V}$

2. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* $\mathbf{V}$, λ *některá jeho vlastní hodnota. Pak množina* $\mathbf{R}_\lambda$ *definovaná relací (1-1) je netriviálním podprostorem ve* $\mathbf{V}$.

Nyní jsme oprávněni vyslovit následující definici.

3. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}$, λ některá jeho vlastní hodnota. Pak

(1) podprostor $\mathbf{R}_\lambda$ definovaný relací (1-1) se nazývá *kořenový podprostor lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ *příslušný vlastní hodnotě* λ,

(2) nenulové vektory z $\mathbf{R}_\lambda$ se nazývají *adjungované vektory lineárního operátoru* $\mathbb{A}$ *příslušné vlastní hodnotě* λ,

(3) je-li $\mathbf{u}$ adjungovaný vektor příslušný λ, pak přirozené číslo m, pro něž platí[11])

$$(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{u})=\mathbf{o} \wedge (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m-1}(\mathbf{u})\neq\mathbf{o},$$

se nazývá *řád adjungovaného vektoru* $\mathbf{u}$.

4. Poznámka Zřejmě řád každého adjungovaného vektoru je určen jednoznačně.

5. Poznámka Vlastní vektory lineárního operátoru $\mathbb{A}$ příslušné λ jsou adjungovanými vektory příslušnými λ řádu 1.

Ke každému nenulovému vektoru z $\mathbf{R}_\lambda$ lze přiřadit jeho řád. Má takto vzniklá množina řádů jednotlivých adjungovaných vektorů (tj. podmnožina v N) svůj největší prvek? Tuto otázku zodpoví následující věta, jejíž důkaz současně poskytne návod k nalezení $\mathbf{R}_\lambda$ pro jednotlivá $\lambda\in\mathcal{S}pec\mathbb{A}$.

6. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* $\mathbf{V}$ *a* λ *jeho některá vlastní hodnota. Pak existuje jediné* $m\in N$ *tak, že platí:*

(1) $\mathbf{R}_\lambda=\{\mathbf{x}\in\mathbf{V};\ (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{x})=\mathbf{o}\}$,

(2) $\exists\mathbf{y}\in\mathbf{R}_\lambda:\ (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m-1}(\mathbf{y})\neq\mathbf{o}$.

---

[11]) jeho existence vyplývá přímo z definice $\mathbf{R}_\lambda$.

7. Poznámka Tvrzení věty 6 lze ekvivalentně vyjádřit takto:
Existuje $m\in N$ *tak, že platí:*

(1) $R_\lambda=\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m$,

(2) $R_\lambda\neq\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m-1}$.

<u>Důkaz</u> věty 6:

Je-li $R_\lambda=N_\lambda$, pak zřejmě m=1. Předpokládejme tedy $R_\lambda\neq N_\lambda$.
Označme pro všechna $i\in N$:

$$W_{(i)}=\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^i,\ n_i=\dim W_{(i)}. \qquad (6\text{-}1)$$

Protože $\forall i\in N$: $\{(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^i(\mathbf{x})=\mathbf{o}\Rightarrow(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{i+1}(\mathbf{x})=\mathbf{o}\}$, můžeme psát

$$\forall i\in N:\ W_{(i)}\subseteq W_{(i+1)}. \qquad (6\text{-}2)$$

To ovšem znamená, že posloupnost $n_1,n_2,n_3,\ldots$ příslušných dimenzí je neklesající, přitom je však shora omezená ($n_i\leq\dim\mathbf{V}$), a tudíž existuje index k, $k\neq1$, od nějž je již tato posloupnost konstantní, tj. $n_k=n_{k+1}=n_{k+2}=\ldots$.
Označíme-li m nejmenší takovýto index, pak vzhledem k (6-2) platí

$$\forall i\in N:\ \{i<m\Rightarrow W_{(i)}\subset W_{(m)}\}\wedge\{i\geq m\Rightarrow W_{(i)}=W_{(m)}\}.^{12)} \qquad (6\text{-}3)$$

Dle (6-1) je evidentní, že $W_{(m)}\subseteq R_\lambda$.
Na druhé straně, pokud $\mathbf{x}\in R_\lambda$, pak dle 1 existuje $i\in N$ tak, že $\mathbf{x}\in W_{(i)}$, pak však dle (6-3) $\mathbf{x}\in W_{(m)}$.
Celkem tedy $R_\lambda=W_{(m)}$, tj. $R_\lambda=\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m$. Vzhledem k tomu, že $W_{(m-1)}\subset W_{(m)}$, existuje $\mathbf{y}\in R_\lambda$, pro nějž $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m-1}(\mathbf{y})\neq\mathbf{o}$.
Jednoznačnost existence čísla m plyne z jeho nalezení. ∎

Uvážíme-li tvrzení právě uvedené věty (ve znění bodu (1) poznámky 7) spolu s větou 3.11 (čemu je roven polynom $f(x)$?), platí:

8. Důsledek *Každý kořenový podprostor lineárního operátoru je vzhledem k němu invariantní.*

Jak jsme uvedli v souvislosti s definováním pojmu kořenového podprostoru, jde o zobecnění pojmu vlastní podprostor. Právě formulovaný důsledek ukazuje, že jde současně o speciální případ podprostoru $\mathbb{A}$-invariantního.

---

[12]) symbolem $\subset$ rozumíme ostrou inkluzi (vylučující rovnost)

Závažnou skutečností je, že právě systém kořenových podprostorů daného lineárního operátoru $\mathbb{A}$ bude představovat vhodné východisko k rozkladu $\mathbf{V}$ na systém $\mathbb{A}$-invariantních podprostorů a povede ve svém důsledku k nalezení kanonického reprezentanta třídy podobných matic (viz věta 13).

9. Poznámka Naskýtá se přirozená otázka, zda v posloupnosti podprostorů $\qquad \mathbf{W}_{(1)}, \mathbf{W}_{(2)}, \mathbf{W}_{(3)}, \ldots$
sestrojené v důkazu věty 6 může nastat rovnost konečného počtu z nich ještě před dosažením indexu m (řádu podprostoru $\mathbf{R}_\lambda$), tj. zda existuje $j \in N$: $\qquad \mathbf{W}_{(j)} = \mathbf{W}_{(j+1)} \neq \mathbf{W}_{(j+2)} \qquad$ (6-4)

Tato situace sice nemá význam pro provedení zmíněného důkazu, ale její existence by byla vážnou překážkou pro užití tohoto důkazu jako metody pro hledání řádu kořenového podprostoru konkrétního operátoru (proč?).

Předpokládejme tedy, že jsme k danému $\mathbb{A} \in \mathcal{E}nd\mathbf{V}$ a $\lambda \in \mathcal{S}pec\mathbb{A}$ sestrojili výše uvedenou posloupnost podprostorů definovaných (6-1) a že existuje $j \in N$ s vlastností (6-4).
Pro zjednodušení zápisu zaveďme operátor $\mathbb{B}$: $\mathbb{B} = (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$.
Zvolíme-li $\mathbf{x} \in \mathbf{W}_{(j+2)} = \mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j+2}$, pak platí $\mathbf{o} = \mathbb{B}^{j+2}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}^{j+1}(\mathbb{B}(\mathbf{x}))$,
což značí, že $\qquad \mathbb{B}(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j+1} = \mathbf{W}_{(j+1)}$.
To však dle (6-4) implikuje, že

$$\mathbb{B}(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}_{(j)} = \mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j},$$

neboli $\qquad \mathbf{o} = \mathbb{B}^{j}(\mathbb{B}(\mathbf{x})) = \mathbb{B}^{j+1}(\mathbf{x})$, tedy $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j+1} = \mathbf{W}_{(j+1)}$.
Ukázali jsme, že $\mathbf{W}_{(j+2)} \subseteq \mathbf{W}_{(j+1)}$, a vzhledem k (6-2) proto platí $\mathbf{W}_{(j+1)} = \mathbf{W}_{(j+2)}$, což je spor s (6-4).

Máme tudíž zaručeno, že nejmenší index j, pro nějž nastává $\mathbf{W}_{(j)} = \mathbf{W}_{(j+1)}$, je současně indexem s vlastností $\mathbf{W}_{(i)} = \mathbf{W}_{(j)}$, $\forall i, i \geq j$ a udává proto řád m kořenového podprostoru $\mathbf{R}_\lambda$ (viz příklad A).

10. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}$ a λ jeho některá vlastní hodnota. Pak číslo $m \in \mathbb{N}$ přiřazené k $\mathbf{R}_\lambda$ ve větě 6 se nazývá *řád kořenového podprostoru* $\mathbf{R}_\lambda$ a značí se m_λ.

Zaregistrujme, že *řád podprostoru* $\mathbf{R}_\lambda$ je *největší* z řádů jednotlivých adjungovaných vektorů příslušných k λ.

Z věty 6 dále vyplývá[13])

11. Důsledek *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* $\mathbf{V}$, λ *jeho některá vlastní hodnota a* m_λ *řád kořenového podprostoru* $\mathbf{R}_\lambda$. *Je-li* $\mathcal{B}$ *některá báze* $\mathbf{V}$, *pak* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ *náleží* $\mathbf{R}_\lambda$, *právě když jeho souřadnice v bázi* $\mathcal{B}$ *jsou řešením soustavy lineárních homogenních rovnic o matici*

$$\boxed{((\mathbb{A},\mathcal{B})-\lambda\mathbf{E})^{m_\lambda})^T}\,.$$

Příklad A

Nechť v jisté bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$ nad R je lineární operátor $\mathbb{A}$ dán maticí $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Určete kořenové podprostory tohoto lineárního operátoru.

Řešení

Budeme postupovat tak, že nejprve vyšetříme spektrum operátoru, dále zjistíme řády jednotlivých kořenových podprostorů (užijeme postup vyplývající z důkazu věty 6 a poznámky 9) a nakonec užitím věty 6 (ve znění (1) poznámky 7) najdeme jednotlivé kořenové podprostory.

1. $\mathcal{S}pec\,\mathbb{A}$: Známým postupem (viz operátor $\mathbb{B}$, příklad 4.A) zjistíme $\mathcal{S}pec\,\mathbb{A}=\{-1,3\}$.

2. Podprostory $\mathbf{R}_{-1}$, $\mathbf{R}_3$

a) podprostor $\mathbf{R}_{-1}$

Postupujeme dle důkazu věty 6 - sestrojíme posloupnost dimenzí $n_1, n_2, \ldots$ podprostorů $\mathbf{W}_{(1)}, \mathbf{W}_{(2)}, \ldots$, přičemž řádem m je nejmenší index s vlastností $n_m = n_{m+1}$. V tom případě je kořenový podprostor roven $\mathbf{W}_{(m)}$.

---

[13]) analogicky odvození věty 4.3 (triviálně z věty 1.4).

- $n_1=\dim W_{(1)}=\dim \mathrm{Ker}(\mathbb{A}+\mathbb{I})$. Podprostor $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}+\mathbb{I})$ nalezneme řešením soustavy homogenních lineárních rovnic o matici $(\mathbf{A}+\mathbf{E})^T$,[14]) tudíž jeho dimenze $n_1=\dim V-h(\mathbf{A}+\mathbf{E})$:

$$h(\mathbf{A}+\mathbf{E})=h\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}=2, \text{ tj. } n_1=1.$$

- $n_2=\dim W_{(2)}=\dim \mathrm{Ker}(\mathbb{A}+\mathbb{I})^2=\dim V-h(\mathbf{A}+\mathbf{E})^2$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{E})^2=\begin{pmatrix} 16 & -16 & 16 \\ 32 & -32 & 32 \\ 32 & -32 & 32 \end{pmatrix}, \text{ tedy } h(\mathbf{A}+\mathbf{E})^2=1, \text{ tj. } n_2=2.$$

- $n_3=\dim W_{(3)}=\dim \mathrm{Ker}(\mathbb{A}+\mathbb{I})^3=\dim V-h(\mathbf{A}+\mathbf{E})^3$

Spočteme, že $h(\mathbf{A}+\mathbf{E})^3=1$, tj. $n_3=2$.

Z právě uvedeného je patrno, že řád podprostoru $\mathbf{R}_{-1}$ je $m_{-1}=2$ (neboť $W_{(1)}\subset W_{(2)}=W_{(3)}$ a dle 9 platí $W_{(3)}=W_{(4)}=W_{(5)}=\ldots$)
To znamená, že $\mathbf{R}_{-1}=W_{(2)}=\mathrm{Ker}(\mathbb{A}+\mathbb{I})^2$, takže jej najdeme vyřešením soustavy lineárních homogenních rovnic o matici $((\mathbf{A}+\mathbf{E})^2)^T$.

$$((\mathbf{A}+\mathbf{E})^2)^T\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

takže $\mathbf{R}_{-1}=[(2,0,-1),(0,1,-1)]$.

b) podprostor $\mathbf{R}_3$

Postupujeme zcela analogicky jako výše:

- $n_1=\dim W_{(1)}=\dim \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-3\mathbb{I})=\dim V-h(\mathbf{A}-3\mathbf{E})$

obdržíme $h(\mathbf{A}-3\mathbf{E})=2$, tj. $n_1=1$

- $n_2=\dim W_{(2)}=\dim \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-3\mathbb{I})^2=\dim V-h(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^2$

obdržíme $h(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^2=2$, tj. $n_2=1$

Řád podprostoru $\mathbf{R}_3$ – tj. m_{-1} – je roven 1.
Platí tedy, že $\mathbf{R}_3=W_{(1)}=\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-3\mathbb{I})$, najdeme jej proto vyřešením soustavy lineárních homogenních rovnic o matici $(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^T$.

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{E})^T\sim\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

což značí, že $\mathbf{R}_3=[(1,-1,1)]$.

---

[14]) tento fakt snadno odvodíme z věty 1.4 (jak?)

Povšimněme si, že opravdu $\mathbf{N}_{-1} \subseteq \mathbf{R}_{-1}$, $\mathbf{N}_3 \subseteq \mathbf{R}_3$ a dále, že $\mathbf{R}_3 \oplus \mathbf{R}_{-1} = \mathbf{V}$, zatímco $\mathbf{N}_3 \oplus \mathbf{N}_{-1} \neq \mathbf{V}$.

Všimněme si nyní významného direktního komplementu kořenového podprostoru lineárního operátoru.

12. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* $\mathbf{V}$, λ *jeho některá vlastní hodnota,* m_λ *řád kořenového podprostoru* $\mathbf{R}_\lambda$ *operátoru* $\mathbb{A}$. *Označíme-li*

$$\mathbf{M}_\lambda = \operatorname{Im}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m_\lambda},$$

pak platí

$$\boxed{\mathbf{V}=\mathbf{R}_\lambda \oplus \mathbf{M}_\lambda}.$$

<u>Důkaz:</u>

Pro účely důkazu pišme namísto m_λ jen m.

Ze vztahu (1) poznámky 7 a relace pro defekt homomorfizmu plyne:

$$\dim \mathbf{R}_\lambda + \dim \mathbf{M}_\lambda = n,$$

a tedy pro důkaz tvrzení 11 stačí ukázat, že $\mathbf{R}_\lambda \cap \mathbf{M}_\lambda$ je triviální.

Uvažujme $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_\lambda \cap \mathbf{M}_\lambda$.

Z toho, že $\mathbf{v} \in \mathbf{M}_\lambda$, plyne: $\exists \mathbf{u} \in \mathbf{V}$; $\mathbf{v} = (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{u})$.

Jelikož $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_\lambda$ můžeme psát:

$$\mathbf{o} = (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{v}) = (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m((\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{u})) = (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{2m}(\mathbf{u}),$$

což znamená, že $\mathbf{u} \in \mathbf{R}_\lambda$ a neboť m je řád podprostoru $\mathbf{R}_\lambda$, platí:

$$\mathbf{o} = (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{u}) = \mathbf{v},$$

čímž je dokázána trivialita průniku $\mathbf{R}_\lambda \cap \mathbf{M}_\lambda$. ■

Přímo ze zavedení podprostoru $\mathbf{M}_\lambda$ a věty 3.11 vyplývá:

13. Věta *Podprostor* $\mathbf{M}_\lambda$ *přiřazený k lineárnímu operátotu* $\mathbb{A}$ *ve větě 12 je vzhledem k* $\mathbb{A}$ *invariantní.*

V závěru předešlé kapitoly jsme ukázali, že prostor $\mathbf{V}$ není obecně součtem vlastních podprostorů téhož lineárního operátoru. Systém kořenových podprostorů libovolného lineárního operátoru však tuto vlastnost má, jak ukáže následující významná věta.

14. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**. *Pak je prostor* **V** *roven direktnímu součtu právě všech kořenových podprostorů lineárního operátoru* $\mathbb{A}$.

Důkaz:

Provedeme matematickou indukcí pro počet r vlastních hodnot operátoru $\mathbb{A}$.

1. Nechť $r=1$ - tj. $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda\}$.

Máme tedy dokázat $\mathbf{V}=\mathbf{R}_\lambda$.

Dle věty 12 platí $\mathbf{V}=\mathbf{R}_\lambda\oplus\mathbf{M}_\lambda$, tudíž stačí ukázat $\mathbf{M}_\lambda=\{\mathbf{o}\}$.

Předpokládejme $\mathbf{M}_\lambda\neq\{\mathbf{o}\}$. Označme $\mathbb{B}$ restrikci $\mathbb{A}$ na $\mathbf{M}_\lambda$ - jelikož $\mathbf{M}_\lambda$ je $\mathbb{A}$-invariantní, je $\mathbb{B}$ lineární operátor na $\mathbf{M}_\lambda$ (zdůvodněte).

V souladu s důsledkem 2.17 (a větou 4.7) má operátor $\mathbb{B}$ aspoň jednu vlastní hodnotu ξ a k ní příslušný vlastní vektor **u**.[15])

Pro vektor **u** tedy lze psát:

$$\mathbb{A}(\mathbf{u})=\mathbb{B}(\mathbf{u})=\xi\mathbf{u},$$

což ovšem značí, že **u** je vlastní vektor operátoru $\mathbb{A}$ a ξ tudíž jeho vlastní hodnotou - dle předpokladu $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda\}$ tedy $\xi=\lambda$. To však implikuje, že **u** je vlastním vektorem operátoru $\mathbb{A}$ příslušným λ - tj. $\mathbf{u}\in\mathbf{N}_\lambda$. Vzhledem k tomu, že $\mathbf{N}_\lambda\subseteq\mathbf{R}_\lambda$, dostáváme $\mathbf{u}\in\mathbf{R}_\lambda$.

Zjišťujeme tak, že $\mathbf{R}_\lambda\cap\mathbf{M}_\lambda$ je netriviální, což je spor s větou 12, a proto $\mathbf{M}_\lambda=\{\mathbf{o}\}$.

2. Předpokládejme nyní platnost věty pro $r\in\mathbb{N}$, tj. pro všechny operátory, jejichž spektrum má r prvků.

Nechť $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r,\lambda\}$. Buď $\mathbf{M}_\lambda=\mathrm{Im}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m_\lambda}$, pak dle věty 12

$$\mathbf{V}=\mathbf{R}_\lambda\oplus\mathbf{M}_\lambda. \tag{14-1}$$

Namísto m_λ pišme dále jen m a řády ostatních kořenových podprostorů operátoru $\mathbb{A}$ označme též jen $m_1,\dots,m_r$.

Označíme-li $\mathbb{B}=\mathbb{A}|\mathbf{M}_\lambda$, tak $\mathbb{B}$ náleží $\mathcal{E}nd(\mathbf{M}_\lambda)$ (neboť $\mathbf{M}_\lambda$ je $\mathbb{A}$-invariantní).

Naším cílem bude (nejprve) dokázat, že $\mathcal{S}pec\mathbb{B}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, neboť pak dle indukčního předpokladu bude $\mathbf{M}_\lambda$ rozložitelný na sumu kořenových podprostorů operátoru $\mathbb{B}$.

---

[15]) Platí tedy $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$.

Nechť $\xi\in\mathcal{S}pec\mathbb{B}$, $\mathbf{v}$ nechť je příslušný vlastní vektor ($\mathbf{v}\in\mathbf{M}_\lambda$). Pak můžeme psát: $\mathbb{A}(\mathbf{v})=\mathbb{B}(\mathbf{v})=\xi\mathbf{v}$,
to ovšem znamená, že $\mathbf{v}$ je vlastní vektor operátoru $\mathbb{A}$ a ξ tudíž náleží $\mathcal{S}pec\mathbb{A}$. Může být $\xi=\lambda$? Pak by $\mathbf{v}$ náleželo $\mathbf{N}_\lambda\subseteq\mathbf{R}_\lambda$, což ovšem vzhledem k trivialitě průniku $\mathbf{R}_\lambda\cap\mathbf{M}_\lambda$ není možné.
Proto tedy $\xi\in\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, neboli $\mathcal{S}pec\mathbb{B}\subseteq\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$.

Buď nyní $\xi\in\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, $\mathbf{v}$ nechť je příslušný vlastní vektor operátoru $\mathbb{A}$, tj. $\mathbb{A}(\mathbf{v})=\xi\mathbf{v}$ (14-2)

Ukážeme-li, že $\mathbf{v}\in\mathbf{M}_\lambda$, obdržíme, že $\mathbf{v}$ je vlastním vektorem operátoru $\mathbb{B}$ příslušným k ξ, a tím $\xi\in\mathcal{S}pec\mathbb{B}$.
Jelikož $\xi\neq\lambda$, jsou polynomy $(x-\lambda)^m$ a $(x-\xi)$ nesoudělné, je jejich největší společný dělitel roven 1, a existují tedy polynomy $p(x)$, $q(x)\in C[x]$, tak, že platí

$$p(x)(x-\lambda)^m+(x-\xi)q(x)=1.$$ [16])

Dosadíme-li do obou stran této rovnosti operátor $\mathbb{A}$, dostáváme

$$p(\mathbb{A})(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m+(\mathbb{A}-\xi\mathbb{I})q(\mathbb{A})=\mathbb{I}$$

a s jeho využitím můžeme vektor $\mathbf{v}$ psát takto:

$$\mathbf{v}=\mathbb{I}(\mathbf{v})=(p(\mathbb{A})(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m+(\mathbb{A}-\xi\mathbb{I})q(\mathbb{A}))(\mathbf{v})=$$
$$=((\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m)(p(\mathbb{A})(\mathbf{v}))+q(\mathbb{A})((\mathbb{A}-\xi\mathbb{I})(\mathbf{v})).$$

Vzhledem k tomu, že $(\mathbb{A}-\xi\mathbb{I})(\mathbf{v})=\mathbb{A}(\mathbf{v})-\xi\mathbf{v}=\xi\mathbf{v}-\xi\mathbf{v}=\mathbf{o}$ (viz 14-2), můžeme vektor $\mathbf{v}$ dále psát ve tvaru $\mathbf{v}=((\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m)(p(\mathbb{A})(\mathbf{v}))$, což ale znamená

$$\mathbf{v}\in\mathrm{Im}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m=\mathbf{M}_\lambda.$$

Následkem toho $\mathbb{B}(\mathbf{v})=\mathbb{A}(\mathbf{v})=\xi\mathbf{v}$,
a tedy ξ je vlastní hodnotou operátoru $\mathbb{B}$.

Máme tak dokázáno, že $\mathcal{S}pec\mathbb{B}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$.

Označme nyní $\mathbf{K}_{\lambda_1},\dots,\mathbf{K}_{\lambda_r}$ příslušné kořenové podprostory operátoru $\mathbb{B}$. Naším cílem přirozeně je ukázat, že jde o kořenové podprostory operátoru $\mathbb{A}$ (proč?).

Zvolme i, $1\le i\le r$.

Protože $\mathbb{B}=\mathbb{A}|\mathbf{M}_\lambda$, tak zřejmě $\mathbf{K}_{\lambda_i}\subseteq\mathbf{R}_{\lambda_i}$,

Je-li $\mathbf{x}\in\mathbf{R}_{\lambda_i}$, pak: $(\mathbb{A}-\lambda_i\mathbb{I})^{m_i}(\mathbf{x})=\mathbf{o}$. (14-3)

---

[16]) Samozřejmě bychom mohli psát i $p(x)(x-\lambda)^m+q(x)(x-\xi)=1$ a po dosazení využít záměnnosti operátorů dle věty 1.32.

Vzhledem k tomu, že $\lambda \neq \lambda_i$, jsou polynomy $(x-\lambda)^m$ a $(x-\lambda_i)^{m_i}$ nesoudělné a existují proto polynomy $f(x), g(x) \in C[x]$, tak, že platí

$$f(x)(x-\lambda)^m + (x-\lambda_i)^{m_i}\, g(x) = 1.$$

Dosazením operátoru $\mathbb{A}$ do obou stran této rovnosti obdržíme

$$f(\mathbb{A})(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m + (\mathbb{A}-\lambda_i\mathbb{I})^{m_i}\, g(\mathbb{A}) = \mathbb{I},$$

a tudíž můžeme pro vektor $\mathbf{x}$ psát:

$$\mathbf{x} = \mathbb{I}(\mathbf{x}) = (f(\mathbb{A})(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m + (\mathbb{A}-\lambda_i\mathbb{I})^{m_i}\, g(\mathbb{A}))(\mathbf{x}) =$$
$$= ((\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m)(f(\mathbb{A})(\mathbf{x})) + g(\mathbb{A})((\mathbb{A}-\lambda_i\mathbb{I})^{m_i}(\mathbf{x}))$$

a s využitím (14-3) dále

$$\mathbf{x} = (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m)(f(\mathbb{A})(\mathbf{x})),$$

neboli

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m = \mathbf{M}_\lambda.$$

Protože $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_\lambda$, platí $\mathbb{B}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}(\mathbf{x})$, což spolu s (14-3) implikuje

$$\mathbf{o} = (\mathbb{A}-\lambda_i\mathbb{I})^{m_i}(\mathbf{x}) = (\mathbb{B}-\lambda_i\mathbb{I})^{m_i}(\mathbf{x}),$$

následkem čehož $\mathbf{x} \in \mathbf{K}_{\lambda_i}$.

Dokázali jsme tím, že $\mathbf{K}_{\lambda_i} = \mathbf{R}_{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq r$.

Nyní využijme indukční předpoklad aplikovaný na operátor $\mathbb{B}$ na prostoru $\mathbf{M}_\lambda$, dále relaci (14-1) a právě dokázaný fakt:

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}_\lambda \oplus \mathbf{R}_\lambda = (\mathbf{K}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{K}_{\lambda_r}) \oplus \mathbf{R}_\lambda = \mathbf{R}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{R}_{\lambda_r} \oplus \mathbf{R}_\lambda.$$

Tím je důkaz věty 14 proveden. ∎

Platnost této věty ilustruje příklad **A**.

Poznamenejme výslovně, že z této věty nijak nevyplývá, že by každý vektor z **V** měl být adjungovaným vektorem k danému lineárnímu operátoru. Tak je tomu obecně jen v případě, o němž hovoří následující důsledek.

15. Důsledek *Lineární operátor $\mathbb{A}$ na $\mathbf{V}$ má jedinou vlastní hodnotu λ, právě když je $\mathbf{V}$ roven kořenovému podprostoru operátoru $\mathbb{A}$ příslušnému vlastní hodnotě λ.*

Věta 14 má i další důsledky[17])

---

[17]) srv. s důsledkem 4.10

16. Důsledky

(1) Každý adjungovaný vektor přísluší jediné vlastní hodnotě daného lineárního operátoru.

(2) Adjungované vektory příslušné různým vlastním hodnotám téhož lineárního operátoru jsou lineárně nezávislé.

17. Poznámka Je-li dán lineární operátor $\mathbb{A}$ na $\mathbf{V}$, $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, pak dle věty 14 je vektorový prostor $\mathbf{V}$ roven direktnímu součtu kořenových podprostorů $\mathbf{R}_{\lambda_1},\dots,\mathbf{R}_{\lambda_r}$ daného lineárního operátoru $\mathbb{A}$, přičemž tyto podprostory jsou $\mathbb{A}$-invariantní (věta 8). Sestavíme-li tedy bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$ z bází $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_r$ jednotlivých kořenových podprostorů, bude matice operátoru $\mathbb{A}$ v bázi $\mathcal{B}$ blokově diagonální (věta 3.9)

$$(\mathbb{A},\mathcal{B})=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_r \end{pmatrix}$$

a matice $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_r$ jsou maticemi restrikcí operátoru $\mathbb{A}$ na jednotlivé kořenové podprostory, tj. $\mathbf{A}_i=(\mathbb{A}|\mathbf{R}_{\lambda_i},\mathcal{B}_i)$, $1\le i\le r$. Na těchto podprostorech má operátor $\mathbb{A}|\mathbf{R}_{\lambda_i}$ vždy jedinou vlastní hodnotu λ_i (důsledek 15).

Budeme-li se snažit najít kanonický tvar matice operátoru a kanonickou bázi, učiníme tak proto nejdříve pro operátory, které na vektorovém prostoru mají jedinou vlastní hodnotu a pak snadno zkonstruujeme kanonickou bázi v obecném případě.

V závěrečné části této kapitoly stanovíme význam exponentů v rozkladech charakteristického a minimálního polynomu na kořenové činitele (srv. 2.24).

18. Lemma *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**, $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, $r\geq 2$. *Označme* m_j *řád kořenového podprostoru* $\mathbf{R}_{\lambda_j}$, $j=1,\dots,r$, *a definujme polynomy* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots f_r(x)$ *vztahy*

$$f_i(x) = \prod_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i}} (x-\lambda_j)^{m_j},\ 1\leq i\leq r. \tag{18-1}$$

Pak platí
$$\boxed{\mathbf{R}_{\lambda_i} = \mathrm{Im}\, f_i(\mathbb{A}),\ 1\leq i\leq r.}$$

<u>Důkaz:</u>

Zvolme i, $1\leq i\leq r$.

- Z konstrukce (18-1) plyne, že polynomy $f_i(x)$ a $(x-\lambda_i)^{m_i}$ jsou nesoudělné a existují tudíž polynomy $p(x), q(x)\in T[x]$ s vlastností

$$(x-\lambda_i)^{m_i}\, p(x) + q(x)\, f_i(x) = 1.$$

Dosazením operátoru $\mathbb{A}$ dostáváme:

$$(\mathbb{A}-\lambda_i\mathbb{I})^{m_i}\, p(\mathbb{A}) + q(\mathbb{A})\, f_i(\mathbb{A}) = \mathbb{I}.$$

Uvažujme nyní libovolný vektor $\mathbf{x}\in\mathbf{R}_{\lambda_i}$. S využitím předcházející rovnosti jej lze vyjádřit takto:

$$\mathbf{x}=\mathbb{I}(\mathbf{x})=((\mathbb{A}-\lambda_i\mathbb{I})^{m_i}\, p(\mathbb{A}) + q(\mathbb{A})\, f_i(\mathbb{A}))(\mathbf{x})=$$
$$=p(\mathbb{A})((\mathbb{A}-\lambda_i\mathbb{I})^{m_i}(\mathbf{x})) + f_i(\mathbb{A})(q(\mathbb{A})(\mathbf{x})).$$

Protože $(\mathbb{A}-\lambda_i\mathbb{I})^{m_i}(\mathbf{x})=\mathbf{o}$ (proč?), můžeme psát $\mathbf{x}=f_i(\mathbb{A})(q(\mathbb{A})(\mathbf{x}))$, což ovšem značí, že $\qquad \mathbf{x}\in \mathrm{Im} f_i(\mathbb{A})$,

a proto $\qquad \mathbf{R}_{\lambda_i}\subseteq \mathrm{Im} f_i(\mathbb{A})$.

- Buď nyní $\mathbf{x}\in\mathrm{Im} f_i(\mathbb{A})$ – existuje tedy $\mathbf{y}\in\mathbf{V}$ tak, že

$$\mathbf{x}=f_i(\mathbb{A})(\mathbf{y}). \tag{18-2}$$

S ohledem na větu 14 lze $\mathbf{y}$ psát jediným způsobem ve tvaru

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2+\dots+\mathbf{y}_r,\ \text{kde}\ \mathbf{y}_h\in\mathbf{R}_{\lambda_h},\ 1\leq h\leq r. \tag{18-3}$$

Zvolme některé $h\neq i$ a spočtěme nyní $f_i(\mathbb{A})(\mathbf{y}_h)$, přičemž rovnost (∗) je důsledkem záměnnosti dosazení operátorů dle věty 1.32:

$$f_i(\mathbb{A})(\mathbf{y}_h)= \prod_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i}} (\mathbb{A}-\lambda_j\mathbb{I})^{m_j} \overset{(*)}{=} [((\mathbb{A}-\lambda_h\mathbb{I})^{m_h})\circ(\prod_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i,h}} (\mathbb{A}-\lambda_j\mathbb{I})^{m_j})](\mathbf{y}_h)=$$
$$= (\prod_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i,h}} (\mathbb{A}-\lambda_j\mathbb{I})^{m_j})((\mathbb{A}-\lambda_h\mathbb{I})^{m_h}(\mathbf{y}_h)),$$

avšak $(\mathbb{A}-\lambda_h\mathbb{I})^{m_h}(\mathbf{y}_h)=\mathbf{o}$ (proč?), a tudíž

$$\forall h, h\neq i, 1\leq h\leq r:\ f_i(\mathbb{A})(\mathbf{y}_h)=\mathbf{o}. \tag{18-4}$$

S využitím rovností (18-2) a (18-3) zjišťujeme, že

$$\mathbf{x} = f_i(\mathbb{A})\Big(\sum_{1\le h\le r}\mathbf{y}_h\Big) = f_i(\mathbb{A})\Big(\mathbf{y}_i+\sum_{\substack{1\le h\le r\\ h\ne i}}\mathbf{y}_h\Big) = f_i(\mathbb{A})(\mathbf{y}_i) + \sum_{\substack{1\le h\le r\\ h\ne i}} f_i(\mathbb{A})(\mathbf{y}_h)$$

a konečně, s ohledem na (18-4),

$$\mathbf{x}=f_i(\mathbb{A})(\mathbf{y}_i). \qquad (18\text{-}5)$$

Dle předpokladu $\mathbf{y}_i\in\mathbf{R}_{\lambda_i}$, který dle 8 je $\mathbb{A}$-invariantní a dle věty 3.3 ovšem taktéž $f_i(\mathbb{A})$-invariantní - (18-5) proto implikuje

$$\mathbf{x}\in\mathbf{R}_{\lambda_i}, \text{ neboli } \operatorname{Im} f_i(\mathbb{A})\subseteq\mathbf{R}_{\lambda_i}.$$

Dokázali jsme tak rovnost $\operatorname{Im} f_i(\mathbb{A})$ a $\mathbf{R}_{\lambda_i}$ pro každé i, $1\le i\le r$. ■

Zkoumejme nyní významy jednotlivých exponentů v rozkladu minimálního polynomu na kořenové činitele.

Uvažujme lineární operátor $\mathbb{A}$ na $\mathbf{V}$, $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ a označme m_j řád kořenového podprostoru $\mathbf{R}_{\lambda_j}$, $j=1,\dots,r$.

S ohledem na větu 2.23 (důsledek 2.24) a ovšemže též 4.7 lze minimální polynom operátoru $\mathbb{A}$ psát[18]):

$$m_{\mathbb{A}}(x)=(x-\lambda_1)^{m'_1}.(x-\lambda_2)^{m'_2}\dots(x-\lambda_r)^{m'_r}.$$

Uvažujme dále polynom

$$f(x)=(x-\lambda_1)^{g_1}.(x-\lambda_2)^{g_2}\dots(x-\lambda_r)^{g_r}$$

a hledejme podmínky, které musí $g_1,g_2,\dots,g_r$ splňovat, aby $f(x)$ byl minimálním polynomem operátoru $\mathbb{A}$ - viz definici 2.1.

Polynom $f(x)$ je zřejmě normovaný, zabývejme se nyní požadavkem $f(\mathbb{A})=\mathbb{O}$.

Studujme operátor $\quad f(\mathbb{A})=\prod_{1\le j\le r}(\mathbb{A}-\lambda_j\mathbb{I})^{g_j}.$

Zvolme libovolně $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$, dle věty 14 jej lze jednoznačně psát ve tvaru

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\dots+\mathbf{x}_r, \text{ kde } \mathbf{x}_h\in\mathbf{R}_{\lambda_h},\ 1\le h\le r. \qquad (19\text{-}1)$$

Hodnotu $f(\mathbb{A})(\mathbf{x})$ lze pak psát

$$f(\mathbb{A})(\mathbf{x})=\Big(\prod_{1\le j\le r}(\mathbb{A}-\lambda_j\mathbb{I})^{g_j}\Big)\Big(\sum_{1\le h\le r}\mathbf{x}_h\Big) = \sum_{1\le h\le r}\Big(\prod_{1\le j\le r}(\mathbb{A}-\lambda_j\mathbb{I})^{g_j}\Big)(\mathbf{x}_h) \qquad (19\text{-}2)$$

---

[18]) exponenty musíme samozřejmě označit odlišně od řádů $m_1,\dots,m_r$.

Vzhledem ke skutečnosti $\mathbf{x}_h \in \mathbf{R}_{\lambda_h}$, $1 \le h \le r$,

$$(\mathbb{A}-\lambda_j \mathbb{I})^{m_h})(\mathbf{x}_h)=\mathbf{o} \tag{19-3}$$

bude s využitím záměnnosti operátorů vzniklých dosazením do polynomu (věta 1.32) užitečné vztah (19-2) dále upravit takto:

$$f(\mathbb{A})(\mathbf{x}) = \sum_{1 \le h \le r} \left(((\mathbb{A}-\lambda_h \mathbb{I})^{g_h}) \circ (\prod_{\substack{1 \le j \le r \\ j \ne h}} (\mathbb{A}-\lambda_j \mathbb{I})^{g_j}) \right) (\mathbf{x}_h) \tag{19-4}$$

tj. $$f(\mathbb{A})(\mathbf{x}) = \sum_{1 \le h \le r} \left(\prod_{\substack{1 \le j \le r \\ j \ne h}} (\mathbb{A}-\lambda_j \mathbb{I})^{g_j} \right) \left((\mathbb{A}-\lambda_h \mathbb{I})^{g_h}(\mathbf{x}_h) \right).$$

Odtud je patrno, že položíme-li

$$g_1=m_1,\ g_2=m_2, \dots,\ g_r=m_r, \tag{19-5}$$

bude s ohledem na (19-3) hodnota $f(\mathbb{A})(\mathbf{x})$ rovna nule, neboli $f(\mathbb{A})$ bude operátor nulový.

Zbývá vyšetřit, zda lze stupeň polynomu $f(x)$ snížit, či nikoli (podmínka (3) definice 2.1).

Z toho, že $f(\mathbb{A})=\mathbb{O}$, plyne dle 2.3 $m_{\mathbb{A}}(x) | f(x)$, což vzhledem k nesoudělnosti polynomů $(x-\lambda_1)$, $(x-\lambda_2), \dots,$ $(x-\lambda_r)$ značí, že:[19])

$$1 \le m'_j \le m_j,\quad 1 \le j \le r.$$

Nechť nadále $r \ge 2$.

Předpokládejme, že pro jisté h je $m'_h < m_h$, a zkonstruujme polynom $g(x)$:

$$g(x) = (\prod_{\substack{1 \le j \le r \\ j \ne h}} (x-\lambda_j)^{m_j})(x-\lambda_h)^{m'_h}, \tag{19-6}$$

což lze dále upravit na tvar

$$g(x) = (\prod_{\substack{1 \le j \le r \\ j \ne h}} (x-\lambda_j)^{m_j-m'_j})(\prod_{\substack{1 \le j \le r \\ j \ne h}} (x-\lambda_j)^{m'_j})(x-\lambda_h)^{m'_h} =$$

$$= (\prod_{\substack{1 \le j \le r \\ j \ne h}} (x-\lambda_j)^{m_j-m'_j})\ m_{\mathbb{A}}(x).$$

Odtud evidentně plyne, že $g(\mathbb{A})=\mathbb{O}$.

---

[19]) vzhledem k (19-5) je $f(x)= \prod_{1 \le j \le r} (x-\lambda_j)^{m_j}$

Buď $\mathbf{x}$ některý vektor z $\mathbf{V}$ a spočtěme hodnotu $g(\mathbb{A})(\mathbf{x})$. Užitím věty 1.32 vyplývá z (19-6):

$$g(\mathbb{A})(\mathbf{x}) = \Big(\big(\prod_{\substack{1\le j\le r\\ j\ne h}} (\mathbb{A}-\lambda_j \mathbb{I})^{m_j}\big)\circ\big((\mathbb{A}-\lambda_h \mathbb{I})^{m'_h}\big)\Big)(\mathbf{x}) =$$

$$= \Big((\mathbb{A}-\lambda_h \mathbb{I})^{m'_h}\Big)\Big(\prod_{\substack{1\le j\le r\\ j\ne h}} (\mathbb{A}-\lambda_j \mathbb{I})^{m_j}(\mathbf{x})\Big),$$

neboli (viz (18-1)):

$$g(\mathbb{A})(\mathbf{x}) = \Big((\mathbb{A}-\lambda_h \mathbb{I})^{m'_h}\Big)\Big(f_h(\mathbb{A})(\mathbf{x})\Big). \tag{19-7}$$

K tomu, abychom předpoklad $m'_h<m_h$ dovedli ke sporu, postačí nalézt $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ tak, aby $g(\mathbb{A})(\mathbf{x})\ne\mathbf{o}$.
V podprostoru $\mathbf{R}_{\lambda_h}$ jistě existuje $\mathbf{y}$, jehož řád je právě m_h (viz věta 6). Protože operátor $f_h(\mathbb{A})$ je surjekcí $\mathbf{V}$ na $\mathbf{R}_{\lambda_h}$, lze k $\mathbf{y}$ nalézt $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$:[20] $\qquad \mathbf{y}=f_h(\mathbb{A})(\mathbf{x})$.
Dosadíme-li právě tento $\mathbf{x}$ do (19-7), dostáváme (proč?)

$$g(\mathbb{A})(\mathbf{x}) = ((\mathbb{A}-\lambda_h \mathbb{I})^{m'_h})(\mathbf{y})\ne\mathbf{o},$$

což je ovšem spor s výše odvozenou nulovostí operátoru $g(\mathbb{A})$. Tím jsme ukázali, že $\qquad m'_j=m_j,\ 1\le j\le r,$

v důsledku čehož $\qquad m_{\mathbb{A}}(x)=f(x)=\prod_{1\le j\le r} (x-\lambda_j)^{m_j}.$

A jak tomu bude v případě r=1, tj. $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda\}$?
V tomto případě je $\mathbf{V}=\mathbf{R}_\lambda$ (dle 15), tedy

$$f(x)=(x-\lambda)^{m_\lambda} \text{ a } m_{\mathbb{A}}(x)=(x-\lambda)^{m'}.$$

Předpoklad $m'<m$ vede s ohledem na větu 6 ke sporu evidentně.

Tím je dokázána platnost následující věty:

19. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na* $\mathbf{V}$, $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, *a označme* m_j *řád kořenového podprostoru příslušnému* λ_j, $j=1,\dots,r$. *Pak pro minimální polynom lineárního operátoru $\mathbb{A}$ platí:*

$$\boxed{m_{\mathbb{A}}(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}.(x-\lambda_2)^{m_2}\dots(x-\lambda_r)^{m_r}.}$$

---

[20]) odtud je patrno, proč v lemmatu 18 byly zkoumány právě polynomy tvaru (18-1) a obraz operátorů $f_i(\mathbb{A})$.

Z věty 19 vyplývá:[21])

20. Důsledek *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor. Jestliže je jeho minimální polynom zapsán ve tvaru*

$$m_{\mathbb{A}}(x)=(x-t_1)^{g_1}.(x-t_2)^{g_2}...(x-t_r)^{g_r},$$

kde $t_1,...,t_r \in C$ *jsou navzájem různá, pak*

(1) $\{t_1,...,t_r\}=\mathcal{S}pec\mathbb{A}$,

(2) pro $i=1,...,r$ *udává* g_i *řád kořenového podprostoru* $\mathbf{R}_{t_i}$.

Zabývejme se nyní exponenty v rozkladu polynomu charakteristického.

Uvažujme lineární operátor $\mathbb{A}$ na $\mathbf{V}$. V případě, kdy má $\mathbb{A}$ jedinou vlastní hodnotu λ, lze jeho charakteristický polynom psát

$$ch_{\mathbb{A}}(x)=(-1)^n(x-\lambda)^n,$$

protože stupeň charakteristického polynomu je roven $\dim\mathbf{V}$.

Nechť $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda_1,...,\lambda_r\}$.

Víme, že restrikce operátoru $\mathbb{A}$ na některý z jeho kořenových podprostorů $\mathbf{R}_\lambda$ má jedinou vlastní hodnotu - totiž λ (důsledek 15).

Sestrojme tedy příslušné kořenové podprostory $\mathbf{R}_{\lambda_1},...,\mathbf{R}_{\lambda_r}$ a jejich báze $\mathcal{B}_1,...,\mathcal{B}_r$, z nichž sestavíme bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$.

Z důvodů shrnutých v poznámce 17 má matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ tvar

$$(\mathbb{A},\mathcal{B})=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}_r \end{pmatrix},$$

přičemž $\qquad \mathbf{A}_i=(\mathbb{A}|\mathbf{R}_{\lambda_i},\mathcal{B}_i),\quad 1\le i\le r.$

Řády matic $\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_r$ tedy jsou po řadě rovny dimenzím podprostorů $\mathbf{R}_{\lambda_1},...,\mathbf{R}_{\lambda_r}$ - označme je postupně $n_1,...,n_r$.

---

[21]) jak je známo z algebry, lze totiž za dále uvedených podmínek vyjádřit polynom $m_{\mathbb{A}}$ jednoznačně.

Vzhledem k tomu, že matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})-x\mathbf{E}$ zní[22])

$$(\mathbb{A},\mathcal{B})-x\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1-x\mathbf{E}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2-x\mathbf{E}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}_r-x\mathbf{E}_r \end{pmatrix},$$

můžeme psát (viz též 3.10)

$$ch_{\mathbb{A}}(x)=\det((\mathbb{A},\mathcal{B})-x\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}_1-x\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{A}_2-x\mathbf{E}_2)\dots\det(\mathbf{A}_r-x\mathbf{E}_r).$$

Zvolme i, $1\le i\le r$. Jelikož $\mathbf{A}_i=(\mathbb{A}|\mathbf{R}_{\lambda_i},\mathcal{B}_i)$, je zřejmě $\det(\mathbf{A}_i-x\mathbf{E}_i)$ charakteristickým polynomem operátoru $\mathbb{A}_i=\mathbb{A}|\mathbf{R}_{\lambda_i}$. $\mathbb{A}_i$ je ovšem operátor na prostoru dimenze n_i mající jedinou vlastní hodnotu λ_i, a tudíž jeho charakteristický polynom zní

$$(-1)^{n_i}(x-\lambda_i)^{n_i}.$$

Charakteristický polynom operátoru $\mathbb{A}$ lze následně psát

$$ch_{\mathbb{A}}(x)=(-1)^{n_1}(x-\lambda_1)^{n_1}.(-1)^{n_2}(x-\lambda_2)^{n_2}\dots(-1)^{n_r}(x-\lambda_r)^{n_r}.$$

Odvodili jsme tedy platnost tohoto tvrzení:

21. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na* $\mathbf{V}$, *$\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$, a označme n_j dimenzi kořenového podprostoru příslušnému λ_j*, $1\le j\le r$. *Pak pro charakteristický polynom lineárního operátoru $\mathbb{A}$ platí:*

$$\boxed{ch_{\mathbb{A}}(x)=(-1)^{n}(x-\lambda_1)^{n_1}.(x-\lambda_2)^{n_2}\dots(x-\lambda_r)^{n_r}.}$$

Z této věty dále plyne:

22. Důsledek *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor. Jestliže jeho charakteristický polynom je zapsán ve tvaru*

$$ch_{\mathbb{A}}(x)=(-1)^{n}(x-t_1)^{g_1}.(x-t_2)^{g_2}\dots(x-t_r)^{g_r},$$

kde $t_1,\dots,t_r\in C$ jsou navzájem různá, pak

(1) $\{t_1,\dots,t_r\}=\mathcal{S}pec\mathbb{A}$,

(2) pro $i=1,\dots,r$ *udává g_i dimenzi kořenového podprostoru* $\mathbf{R}_{t_i}$.

[22]) $\mathbf{E}_i$ značí jednotkovou matici řádu n_i

Uvážíme-li, že minimální polynom vždy dělí polynom charakteristický, dostáváme tento důsledek vět 19 a 21:[23])

23. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na* **V**. *Pak pro libovolný z kořenových podprostorů lineárního operátoru $\mathbb{A}$ platí, že jeho řád je nejvýše roven dimenzi tohoto podprostoru.*

Příklad B

Nechť v jisté bázi $\mathcal{B}$ prostoru **V** nad R je lineární operátor $\mathbb{A}$ dán maticí **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dále jsou dány vektory **u**, **v**, **w**, **z**:

$$\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}=(-2,1,0),\ \{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}=(2,1,-2),\ \{\mathbf{w}\}_{\mathcal{B}}=(1,-1,1),\ \{\mathbf{z}\}_{\mathcal{B}}=(1,0,0).$$

Rozhodněte, zda jde o adjungované vektory operátoru $\mathbb{A}$ a v kladném případě stanovte jejich řád.

Řešení

Nejprve nalezneme vlastní hodnoty operátoru $\mathbb{A}$: $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{-1,3\}$.[24])
Dále budeme pokračovat dle definice 3 - pro jednotlivé vlastní hodnoty.
Budeme proto zjišťovat hodnoty operátorů

$$(\mathbb{A}+\mathbb{I}),\ (\mathbb{A}+\mathbb{I})^2,\ (\mathbb{A}+\mathbb{I})^3,\ \dots$$
$$(\mathbb{A}-3\mathbb{I}),\ (\mathbb{A}-3\mathbb{I})^2,\ (\mathbb{A}-3\mathbb{I})^3,\ \dots$$

na jednotlivých vektorech až do okamžiku, kdy výsledkem bude vektor nulový.
Bude tento algoritmus bude mít konečný počet kroků - je tímto postupem tato úloha vůbec řešitelná? Protože řád adjungovaného vektoru nemůže převýšit dimenzi prostoru (věta 23), vede právě nastíněný postup skutečně po konečném počtu kroků k cíli.

---

[23]) viz důsledek 2.24

[24]) viz příklad 4.A, operátor $\mathbb{B}$

1. $\lambda=-1$

Matice operátoru $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}=\mathbb{A}+\mathbb{I}$ je

$$\mathbf{A+E}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Počítejme nyní hodnoty operátorů (dle věty 1.4)

$$(\mathbb{A}+\mathbb{I}),\ (\mathbb{A}+\mathbb{I})^2,\ (\mathbb{A}+\mathbb{I})^3,\ \dots$$

postupně na vektorech **u**,**v** a **w**.

- vektor **u**

$$\{(\mathbb{A}+\mathbb{I})(\mathbf{u})\}_{\mathcal{B}}=\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}(\mathbb{A}+\mathbb{I},\mathcal{B})=(-2,1,0)(\mathbf{A+E})=(0,0,0),$$

tj. **u** je adjungovaný vektor řádu 1 příslušný $\lambda=-1$.[25]

- vektor **v**

$$\{(\mathbb{A}+\mathbb{I})(\mathbf{v})\}_{\mathcal{B}}=(1,1,0)(\mathbf{A+E})=(-4,2,0)\neq(0,0,0),$$

tudíž pokračujeme hodnotou $(\mathbb{A}+\mathbb{I})^2(\mathbf{v})=(\mathbb{A}+\mathbb{I})((\mathbb{A}+\mathbb{I})(\mathbf{v}))$ - tedy

$$\{(\mathbb{A}+\mathbb{I})^2(\mathbf{v})\}_{\mathcal{B}}=\{(\mathbb{A}+\mathbb{I})(\mathbf{v})\}_{\mathcal{B}}(\mathbf{A+E})=(-4,2,0)(\mathbf{A+E})=(0,0,0),$$

což značí, že **v** je adjungovaný vektor řádu 2 příslušný $\lambda=-1$.

- vektor **w**

U tohoto vektoru zjistíme, že $(\mathbb{A}+\mathbb{I})(\mathbf{w})$, $(\mathbb{A}+\mathbb{I})^2(\mathbf{w})$, $(\mathbb{A}+\mathbb{I})^3(\mathbf{w})$ jsou nenulové, tudíž dle věty 23 i další mocniny operátoru $\mathbb{A}+\mathbb{I}$ na **w** jsou nenulové a nejedná se tudíž o adjungovaný vektor příslušný $\lambda=-1$.

Stejný výsledek obdržíme i pro vektor **z**.

2. $\lambda=3$

Vektory **u**,**v** již vyšetřovat nemusíme (viz důsledek 16).

Matice operátoru $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}=\mathbb{A}-3\mathbb{I}$ je

$$\mathbf{A-3E}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

- vektor **w**

Zjistíme, že $(\mathbb{A}-3\mathbb{I})(\mathbf{w})=\mathbf{o}$ - **w** je adjungovaný vektor řádu 1 příslušný $\lambda=3$.[26]

- vektor **z**

Zde zjistíme, že že $(\mathbb{A}-3\mathbb{I})(\mathbf{z})$, $(\mathbb{A}-3\mathbb{I})^2(\mathbf{z})$, $(\mathbb{A}-3\mathbb{I})^3(\mathbf{z})$ jsou nenu-

---

[25]) tj. *vlastní vektor* příslušný $\lambda=-1$ - srv. s příkladem 4.A!

[26]) tj. *vlastní vektor* příslušný $\lambda=3$ - viz opět příklad 4.A

lové, nejedná se tudíž ani o adjungovaný vektor příslušný $\lambda=3$.

Pokud bychom nalezli kořenové podprostory operátoru $\mathbb{A}$ (viz příklad **A**), mohli bychom nejdříve vyloučit ty vektory, které nenáleží žádnému $\mathbf{R}_\lambda$ (zde vektor **z**) a u ostatních nejprve určit, kterému z $\mathbf{R}_\lambda$ náleží - např. $\mathbf{w}\in\mathbf{R}_3$ a nemá tedy smysl zjišťovat hodnoty mocnin operátoru $(\mathbb{A}+\mathbb{I})$ na **w**.

Povšimněte si, že opravdu $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{R}_{-1}$, jakož i toho, že jejich řád nepřevyšuje dimenzi $\mathbf{R}_{-1}$.

24. Poznámka Stejně jako v případě invariantních a vlastních podprostorů můžeme i zde - s využitím postupů unedených v poznámce 3.12 - zavést pojmy *kořenový podprostor*, *adjungovaný vektor matice* **A** z $\mathcal{M}_n(\mathcal{C})$:

- Buď λ některá vlastní hodnota matice **A**. Pak podprostor $\mathbf{R}_\lambda$ v $\mathcal{C}^n$,

$$\boxed{\mathbf{R}_\lambda=\{\ \mathbf{x}\in\mathcal{C}^n;\ \exists m\in\mathcal{N}:\ \mathbf{x}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^m=\mathbf{o}\ \}}$$

nazýváme *kořenový podprostor matice* **A** *příslušný vlastní hodnotě* λ,

- nenulové vektory z $\mathbf{R}_\lambda$ se nazývají *adjungované vektory matice* **A** *příslušné vlastní hodnotě* λ,

- je-li **u** adjungovaný vektor příslušný λ, pak přirozené číslo m, pro něž platí
$$\mathbf{u}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^m=\mathbf{o}\ \wedge\ \mathbf{u}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^{m-1}\neq\mathbf{o},$$
se nazývá *řád adjungovaného vektoru* **u**,

- buď λ některá vlastní hodnota matice **A**. Pak přirozené číslo m s vlastnostmi
  (1) $\mathbf{R}_\lambda=\{\mathbf{x}\in\mathcal{C}^n;\ \mathbf{x}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^m=\mathbf{o}\}$,
  (2) $\exists\mathbf{y}\in\mathbf{R}_\lambda:\ \mathbf{y}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^{m-1}\neq\mathbf{o}$,

se nazývá *řád kořenového podprostoru* $\mathbf{R}_\lambda$.

Vlastnosti kořenových podprostorů matic snadno nalezneme z vlastností kořenových podprostorů lineárních operátorů.

6. Jordanova báze příslušná lineárnímu operátoru

Úvahy této kapitoly budeme provádět v prostorech nad tělesem komplexních čísel (postačuje požadovat algebraickou uzavřenost tělesa skalárů).

Nalezneme zde konstrukci *kanonické báze* prostoru **V** vzhledem k danému lineárnímu operátoru, tedy báze, o níž jsme se zmínili v podkapitole 1.4.

6.1 Úvodní poznámky

V této úvodní části zavedeme několik pojmů, které zjednoduší naše vyjadřování oproti jazyku teorie faktorových vektorových prostorů.[1]

1. Definice Buď **V** vektorový prostor nad T, **W** jeho podprostor, $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ vektory z **V**. Řekneme, že[2]

(1) *vektor* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ *je lineární kombinací vektorů* $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *modulo* **W**, jestliže existují skaláry $t_1,\dots,t_m\in T$ a vektor $\mathbf{y}\in\mathbf{W}$ tak, že

$$\boxed{\mathbf{x}=t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m+\mathbf{y},}$$ [3]

(2) *vektory* $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *jsou lineárně nezávislé modulo* **W**, vyplývá-li z $t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m\in\mathbf{W}$, že $t_1=\dots=t_m=0$. V opačném případě řekneme, že *vektory* $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *jsou lineárně závislé modulo* **W**,

(3) *vektory* $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *generují prostor* **V** *modulo* **W**, lze-li každý $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ psát jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ modulo **W**,

---

[1]) tato teorie v kurzu lineární algebry předchází lineárním operátorům. Ostatní čtenáři ji naleznou např. v [11].

[2]) ve všech případech lze užít též obratu *vzhledem k* **W**

[3]) neboli $\mathbf{x}-(t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m)\in\mathbf{W}$

(4) *vektory* $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *tvoří bázi prostoru* $\mathbf{V}$ *modulo* $\mathbf{W}$, jsou-li $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ jsou lineárně nezávislé modulo $\mathbf{W}$ a generují-li $\mathbf{V}$ modulo $\mathbf{W}$.

(5) *prostor* $\mathbf{V}$ *má modulo* $\mathbf{W}$ *dimenzi* m [značíme $m=\dim\mathbf{V}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$], existuje-li m-členná báze $\mathbf{V}$ modulo $\mathbf{W}$.

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{o}$ náleží libovolnému podprostoru, platí:

2. Věta *Buďte* $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *vektory z* $\mathbf{V}$. *Pak platí:*

(1) je-li $\mathbf{x}$ *lineární kombinací vektorů* $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$, *pak je jejich lineární kombinací modulo* $\mathbf{W}$ *pro libovolný* $\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$,

(2) jsou-li $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *lineárně nezávislé modulo* $\mathbf{W}$ *pro některý* $\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$, *pak jsou lineárně nezávislé,*

(3) jsou-li $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *lineárně závislé, pak jsou lineárně závislé modulo* $\mathbf{W}$ *pro libovolný* $\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$.

Uveďme nyní definicí 1 nově zavedené pojmy do souvislosti se známými pojmy teorie faktorových vektorových prostorů.

Uvažujme $\mathbf{W}\subseteq\subseteq\mathbf{V}$.

- Vektor $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ modulo $\mathbf{W}$, právě existuje-li $\mathbf{y}\in\mathbf{W}$ a $t_1,\dots,t_m\in T$ tak, že:

$$\mathbf{x}=t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m+\mathbf{y}.$$

Uvážíme-li následující řetězec ekvivalencí

$$\mathbf{x}=t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m+\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x}-(t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m)\in\mathbf{W} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x}\equiv(t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m)\ (\mathrm{mod}\mathbf{W}) \Leftrightarrow \mathbf{x}+\mathbf{W}=(t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m)+\mathbf{W} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x}+\mathbf{W}=(t_1\mathbf{u}_1+\mathbf{W})+\dots+(t_m\mathbf{u}_m+\mathbf{W}) \Leftrightarrow \mathbf{x}+\mathbf{W}=t_1(\mathbf{u}_1+\mathbf{W})+\dots+t_m(\mathbf{u}_m+\mathbf{W}),$$

je patrno, že vektor $\mathbf{x}$ je uvažovanou lineární kombinací tehdy a jen tehdy, je-li lineární varieta $\mathbf{x}+\mathbf{W}$ lineární kombinací variet $\mathbf{u}_1+\mathbf{W},\dots,\mathbf{u}_m+\mathbf{W}$.

- Buďte $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ vektory $\mathbf{V}$ a $t_1,\dots,t_m\in T$.

Pak můžeme psát:

$$t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m\in\mathbf{W} \Leftrightarrow (t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m)+\mathbf{W}=\mathbf{o}+\mathbf{W} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t_1(\mathbf{u}_1+\mathbf{W})+\dots+t_m(\mathbf{u}_m+\mathbf{W})=\mathbf{o}+\mathbf{W},$$

čili variety $(\mathbf{u}_1+\mathbf{W}),\dots,(\mathbf{u}_m+\mathbf{W})$ jsou lineárně nezávislými elementy faktorizace **V/W**, právě když $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ jsou lineárně nezávislé modulo **W**.

● Uvažme $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ generující prostor **V** modulo **W**. Pak lze libovolný $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ psát ve tvaru $\mathbf{x}=t_1\mathbf{u}_1+\dots+t_m\mathbf{u}_m+\mathbf{y}$, $\mathbf{y}\in\mathbf{W}$, což je však ekvivalentní tomu, že $\mathbf{x}+\mathbf{W}=t_1(\mathbf{u}_1+\mathbf{W})+\dots+t_m(\mathbf{u}_m+\mathbf{W})$, což značí, že variety $(\mathbf{u}_1+\mathbf{W}),\dots,(\mathbf{u}_m+\mathbf{W})$ generují faktorový prostor **V/W**. Obrácená implikace je zřejmá.

Zjištěná fakta shrňme ve větu (části (4),(5) jsou triviálními důsledky předchozích)

3.**Věta** *Buď* **V** *vektorový prostor nad* T, **W** *jeho podprostor,* $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *vektory z* **V**. *Pak platí:*

(1) vektor $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ *je lineární kombinací vektorů* $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *modulo* **W** *s koeficienty* $t_1,\dots,t_m\in T$, *právě když lineární varieta* $\mathbf{x}+\mathbf{W}\in\mathbf{V}/\mathbf{W}$ *je lineární kombinací variet* $\mathbf{u}_1+\mathbf{W},\dots,\mathbf{u}_m+\mathbf{W}$ *s týmiž koeficienty,*

(2) vektory $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *jsou lineárně nezávislé modulo* **W**, *právě když jsou lineárně nezávislé lineární variety* $\mathbf{u}_1+\mathbf{W},\dots,\mathbf{u}_m+\mathbf{W}$,

(3) vektory $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *generují prostor* **V** *modulo* **W**, *právě když lineární variety* $\mathbf{u}_1+\mathbf{W},\dots,\mathbf{u}_m+\mathbf{W}$ *generují prostor* **V/W**,

(4) vektory $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ *tvoří bázi prostoru* **V** *modulo* **W**, *právě když lineární variety* $\mathbf{u}_1+\mathbf{W},\dots,\mathbf{u}_m+\mathbf{W}$ *tvoří bázi* **V/W**,

(5) prostor **V** *má modulo* **W** *dimenzi rovnu dimenzi faktorového prostoru* **V/W**.

6.2 Podprostory cyklické vzhledem k lineárnímu operátoru

4. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na **V**. Báze $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ se nazývá *báze cyklická vzhledem k lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$, existuje-li $\lambda \in C$ tak, že platí:[4])

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{A}(\mathbf{e}_i)=\lambda\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{i+1}, \quad 1\le i\le n-1, \\ &\mathbb{A}(\mathbf{e}_n)=\lambda\mathbf{e}_n. \end{aligned}}$$

5. Poznámka Podmínky definice 4 pro bázi $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ jsou zřejmě ekvivaletní následujícím:

$$\mathbf{e}_i=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{e}_{i-1})=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{i-1}(\mathbf{e}_1), \quad 2\le i\le n,$$

$$\mathbf{o}=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{e}_n)=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{n}(\mathbf{e}_1).$$

6. Poznámka Z předchozího plyne, že $\mathbf{e}_1$ je *adjungovaný vektor řádu* n a $\mathbf{e}_n$ je *vlastní vektor*[5]) operátoru $\mathbb{A}$ příslušný *vlastní hodnotě* λ.

Obecněji - lze nahlédnout, že vektor $\mathbf{e}_i$, $1\le i\le n$, je adjungovaným vektorem řádu $(n-i+1)$ [6])

V dalším ukážeme, že právě pomocí cyklických bází je možné zkonstruovat pro daný operátor báze kanonické.

7. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor, λ některá jeho vlastní hodnota. Pak pro každý adjungovaný vektor* **u** *operátoru $\mathbb{A}$ řádu m příslušný λ platí, že vektory*

$$\mathbf{u},\ (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{u}),\ (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^2(\mathbf{u}), \dots,\ (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m-1}(\mathbf{u}),$$

jsou lineárně nezávislé.[7])

---

4) neboli $\mathbb{A}(\mathbf{e}_1)=\lambda\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, $\mathbb{A}(\mathbf{e}_2)=\lambda\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \dots, \mathbb{A}(\mathbf{e}_{n-1})=\lambda\mathbf{e}_{n-1}+\mathbf{e}_n$ a $\mathbb{A}(\mathbf{e}_n)=\lambda\mathbf{e}_n$.
o této bázi budeme též hovořit jako o *bázi λ-cyklické*.

5) tj. adjungovaný řádu 1

6) zřejmě $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{n-i+1}(\mathbf{e}_i)=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{n}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{o}$, $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{n-i}(\mathbf{e}_i)=\mathbf{e}_n\neq\mathbf{o}$.

7) větu 5.23 lze tudíž vyvodit i odtud (proč?)

<u>Důkaz:</u>

Pro účely tohoto důkazu položme $\mathbb{B}=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})$. Máme tedy dokázat lineární nezávislost vektorů

$$\mathbb{B}^0(\mathbf{u}),\ \mathbb{B}^1(\mathbf{u}),\ \mathbb{B}^2(\mathbf{u}),\dots,\ \mathbb{B}^{m-1}(\mathbf{u}).$$

Uvažujme proto lineární kombinaci

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_j\mathbb{B}^j(\mathbf{u})=\mathbf{o} \tag{7-1}$$

a nechť k je nejmenší index, pro nejž $b_k\neq 0$, takže (7-1) má tvar:

$$\sum_{j=k}^{m-1} b_j\mathbb{B}^j(\mathbf{u})=\mathbf{o}. \tag{7-2}$$

Je-li $k=m-1$, dostáváme $\mathbf{o}=b_{m-1}\mathbb{B}^{m-1}(\mathbf{u})=b_{m-1}((\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m-1}(\mathbf{u}))$, a protože řád $\mathbf{u}$ je právě m [8], dostáváme $b_{m-1}=0$, což je spor.

Nechť $k\neq m-1$. Aplikujeme-li na obě strany rovnosti (7-2) operátor $\mathbb{B}^{m-k-1}$, obdržíme:

$$b_k\mathbb{B}^{m-1}(\mathbf{u}) + \sum_{j=k+1}^{m-1} b_j\mathbb{B}^{j-k-1}(\mathbb{B}^m(\mathbf{u}))=\mathbf{o},$$

což ($\mathbf{u}$ je adjungovaný řádu m, a tedy $\mathbb{B}^m(\mathbf{u})=\mathbf{o}$) znamená, že

$$\mathbf{o}=b_k\mathbb{B}^{m-1}(\mathbf{u})=b_k((\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m-1}(\mathbf{u})),$$

což (analogicky jako výše) implikuje $b_k=0$ - tedy spor. ■

Hledejme nyní některé nutné a postačující podmínky existence báze cyklické vzhledem k danému operátoru $\mathbb{A}$. Shrneme je po té ve větě 8.

(i) Již jsme ukázali (poznámka 6), že z existence λ-cyklické báze ve $\mathbf{V}_n$ plyne existence adjungovaného vektoru příslušného λ řádu n.

Obráceně, předpokládejme existenci takovéhoto vektoru - nechť je označen $\mathbf{e}$. Sestrojme nyní systém vektorů $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ takto:

$$\mathbf{e}_i=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{i-1}(\mathbf{e}),\quad 1\le i\le n. \tag{8-1}$$

V souladu s větou 7 dostáváme n-člennou lineárně nezávislou mno-

---

[8]) a tudíž $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m-1}(\mathbf{u})\neq\mathbf{o}$

žinu vektorů - tj. bázi prostoru $\mathbf{V}$.

Protože kromě relací (8-1) dále platí (proč?)

$$\mathbf{o}=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^n(\mathbf{e})=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{e}_n),$$

jedná se - v souladu s poznámkou 5 - o bázi λ-cyklickou.

(ii) Jak jsme zjistili dříve (opět 6), plyne z existence λ-cyklické báze $\mathcal{B}$, že λ je vlastní hodnotou operátoru $\mathbb{A}$ a poslední vektor z $\mathcal{B}$ náleží $\mathbf{N}_\lambda$. Jaké další vlastní hodnoty (vektory) může $\mathbb{A}$ v tomto případě mít?

Buď tedy $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$ zmíněnou bází a nechť $\xi\in\mathcal{S}pec\mathbb{A}$. Pak existuje $\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$, tak že

$$\mathbb{A}(\mathbf{v})=\xi\mathbf{v}. \tag{8-2}$$

Vyjádřeme vektor $\mathbf{v}$ pomocí elementů z $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+\ldots+v_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}+v_n\mathbf{e}_n.$$

Pak s ohledem na (8-2) lze psát

$$\mathbb{A}(\mathbf{v})=(v_1\xi)\mathbf{e}_1+(v_2\xi)\mathbf{e}_2+\ldots+(v_{n-1}\xi)\mathbf{e}_{n-1}+(v_n\xi)\mathbf{e}_n. \tag{8-3}$$

Současně však také zřejmě

$$\mathbb{A}(\mathbf{v})=v_1\mathbb{A}(\mathbf{e}_1)+v_2\mathbb{A}(\mathbf{e}_2)+\ldots+v_{n-1}\mathbb{A}(\mathbf{e}_{n-1})+v_n\mathbb{A}(\mathbf{e}_n),$$

což lze vzhledem k λ-cykličnosti báze $\mathcal{B}$ (def.4) dále upravit

$$\mathbb{A}(\mathbf{v})=(v_1\lambda)\mathbf{e}_1+(v_1+v_2\lambda)\mathbf{e}_2+\ldots+(v_{n-1}+v_n\lambda)\mathbf{e}_n.$$

Porovnáme-li právě získané vyjádření $\mathbb{A}(\mathbf{v})$ s (8-3), obdržíme tento systém relací:

$$v_1\lambda=v_1\xi \tag{1}$$
$$v_1+v_2\lambda=v_2\xi \tag{2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_{n-1}+v_n\lambda=v_n\xi \tag{n-1}$$

Předpokládejme $\xi\neq\lambda$.

Z (1) pak plyne $v_1=0$, takže (2) pak dává $v_2=0$, až konečně z (n-1) plyne $v_n=0$. Dostali jsme tak $\mathbf{v}=\mathbf{o}$, což je spor, a proto $\xi=\lambda$, neboli $\mathbb{A}$ nemá dalších vlastních hodnot.

Užitím rovnosti $\xi=\lambda$ dostáváme z rovností (2),...,(n-1) postupně, že

$$v_1=v_2=\ldots=v_{n-1}=0,$$

což značí, že $\mathbf{v}=v_n\mathbf{e}_n$, a tudíž $\mathbf{N}_\lambda=[\mathbf{e}_n]$, čili $\dim\mathbf{N}_\lambda=1$.

(iii) Předpokládejme nyní, že $\mathbb{A}$ má jedinou vlastní hodnotu λ a ať $\dim\mathbf{N}_\lambda=1$. Bude existovat λ-cyklická báze $\mathbf{V}$ vzhledem k operátoru $\mathbb{A}$?

Dle důsledku 5.15 v tomto případě platí

$$\mathbf{V}=\mathbf{R}_\lambda .$$

Dle 5.7 tedy $\quad \mathbf{V}=\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m \wedge \mathbf{V}\neq\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m-1}$,

odkud vyplývá existence adjungovaného vektoru $\mathbf{e}$ řádu m příslušného λ.

Utvořme systém vektorů $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m$ takto:

$$\mathbf{e}_i=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{i-1}(\mathbf{e}),\ 1\le i\le m. \tag{8-4}$$

Zřejmě platí (proč?)

$$\mathbf{o}=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m(\mathbf{e})=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{e}_m),$$

a tedy $\mathbf{e}_m$ je vlastním vektorem přílušným λ, tj. $\mathbf{N}_\lambda=[\mathbf{e}_m]$.

Dle věty 7 je množina $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m$ lineárně nezávislá. Ukážeme-li, že se jedná o bázi (následkem čehož m=n), půjde evidentně o bázi λ-cyklickou (srv. s analogickým důsledkem (8-1)).

Máme tedy ukázat, že $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m$ generují $\mathbf{V}$.

Označme nadále $\quad \mathbb{B}=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})$.

Jedná se tedy o nilpotentní operátor řádu m - tj. $\mathbb{B}^m=\mathbb{O} \wedge \mathbb{B}^{m-1}\neq\mathbb{O}$.

Vztah (8-4) ekvivalentně přepíšeme

$$\mathbf{e}_i=\mathbb{B}^{i-1}(\mathbf{e}),\ 1\le i\le m. \tag{8-5}$$

Pro jádra mocnin operátoru $\mathbb{B}$ zřejmě platí (proč?):[9]

$$\{\mathbf{o}\}=\mathrm{Ker}\mathbb{B}^0\subset\mathrm{Ker}\mathbb{B}^1\subset\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2\subset\dots\subset\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{m-1}\subset\mathrm{Ker}\mathbb{B}^m=\mathbf{V}. \tag{8-6}$$

Evidentně platí $\mathrm{Ker}\mathbb{B}=\mathbf{N}_\lambda$, a tudíž $\mathrm{Ker}\mathbb{B}=[\mathbf{e}_m]$, vektor $\mathbf{e}_m$ lze proto doplnit na báze všech jader v řetězci (8-6). Ukážeme-li, že[10]

$$\mathrm{Ker}\mathbb{B}^j=[\mathbf{e}_{m-j+1},\mathbf{e}_{m-j+2},\dots,\mathbf{e}_m],\ j=1,\dots,m, \tag{8-7}$$

vyplyne odtud pro j=m, že $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m$ generují $\mathbf{V}$.

K důkazu (8-7) užijme matematickou indukci pro j.

Platnost tvrzení pro j=1 již byla ukázána, pokračujme proto indukčním krokem - předpokládáme platnost pro j, $1\le j\le m-1$.

---

[9]) ostrost inkluzí vyplyne přímo z (8-7), pro jehož odvození by případná rovnost v (8-6) nebyla podstatná. Lze ji též odvodit nyní - postupem analogickým tomu, který byl použit v poznámce 5.9.

[10]) tento předpoklad se jeví celkem logický, neboť (8-6) představuje rostoucí řetězec inkluzí.

Buď $\mathbf{x}$ vektor z $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j+1}$. Pak můžeme psát:

$$\mathbf{o}=\mathbb{B}^{j+1}(\mathbf{x})=\mathbb{B}^{j}(\mathbb{B}(\mathbf{x})) \Rightarrow \mathbb{B}(\mathbf{x})\in\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j}.$$

Užijeme-li indukční předpoklad, dostáváme dále existenci skalárů $b_{m-j+1}, b_{m-j+2}, \dots, b_m$ takových, že platí

$$\mathbb{B}(\mathbf{x})=b_{m-j+1}\mathbf{e}_{m-j+1}+b_{m-j+2}\mathbf{e}_{m-j+2}+\dots+b_m\mathbf{e}_m,$$

a s ohledem na (8-5) [11]) obdržíme

$$\mathbb{B}(\mathbf{x})=b_{m-j+1}\mathbb{B}(\mathbf{e}_{m-j})+b_{m-j+2}\mathbb{B}(\mathbf{e}_{m-j+1})+\dots+b_m\mathbb{B}(\mathbf{e}_{m-1}),$$

neboli

$$\mathbb{B}(\mathbf{x})-b_{m-j+1}\mathbb{B}(\mathbf{e}_{m-j})-b_{m-j+2}\mathbb{B}(\mathbf{e}_{m-j+1})-\dots-b_m\mathbb{B}(\mathbf{e}_{m-1})=\mathbf{o},$$

což přepíšeme na tvar

$$\mathbb{B}(\mathbf{x}-b_{m-j+1}\mathbf{e}_{m-j}-b_{m-j+2}\mathbf{e}_{m-j+1}-\dots-b_m\mathbf{e}_{m-1})=\mathbf{o}.$$

Zjistili jsme, že

$$(\mathbf{x}-b_{m-j+1}\mathbf{e}_{m-j}-b_{m-j+2}\mathbf{e}_{m-j+1}-\dots-b_m\mathbf{e}_{m-1})\in\mathrm{Ker}\mathbb{B},$$

a jelikož $\mathrm{Ker}\mathbb{B}=[\mathbf{e}_m]$, plyne z toho, že $\mathbf{x}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{e}_{m-j}, \mathbf{e}_{m-j+1}, \dots, \mathbf{e}_{m-1}, \mathbf{e}_m$.

To ovšem značí, že $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j+1}\subseteq[\mathbf{e}_{m-j},\mathbf{e}_{m-j+1}\dots, \mathbf{e}_m]$.

Zabývejme se nyní inkluzí obrácenou.

Dle indukčního předpokladu $\mathbf{e}_{m-j+1},\mathbf{e}_{m-j+2},\dots,\mathbf{e}_m \in \mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j}$, což spolu s (8-6) značí, že

$$\mathbf{e}_{m-j+1},\mathbf{e}_{m-j+2},\dots,\mathbf{e}_m \in \mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j+1}.$$

Vyšetřeme, zda i $\mathbf{e}_{m-j}$ náleží $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j+1}$:

Především dle (8-5) je $\mathbf{e}_{m-j}=\mathbb{B}^{m-j-1}(\mathbf{e})$, a tudíž s přihlédnutím k (8-6) platí

$$\mathbf{o}=\mathbb{B}^{m}(\mathbf{e})=\mathbb{B}^{j+1}(\mathbf{e}_{m-j}).$$

Zjišťujeme tak, že $[\mathbf{e}_{m-j},\mathbf{e}_{m-j+1},\mathbf{e}_{m-j+2},\dots,\mathbf{e}_m]\subseteq\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{j+1}$.

Výrok (8-7) je tedy dokázán pro libovolné přirozené j.

Vzhledem k tomu, co jsme uvedli výše, je $\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ bází $\mathbf{V}$ λ-cyklickou vzhledem k operátoru $\mathbb{A}$.

---

[11]) z něhož plyne $\mathbf{e}_{i+1}=\mathbb{B}(\mathbf{e}_i)$, $1\le i\le m-1$.

(iv) Všimněme si dále minimálního polynomu operátoru, vzhledem k němuž lze nalézt cyklickou bázi.

Existuje-li vzhledem k $\mathbb{A}$ λ-cyklická báze $\mathbf{V}_n$, je (dle odstavce (ii)) $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda\}$, a tudíž (dle věty 5.19)

$$m_{\mathbb{A}}(x)=(x-\lambda)^m, \text{kde m je řád } \mathbf{V}=\mathbf{R}_\lambda \text{ (proč?).}$$

Obecně platí, že $1\le m\le n$. Z existence cyklické báze plyne ale též existence adjungovaného vektoru příslušného λ řádu n (viz odstavec (i)), a tedy $n\le m$ [12]), takže pro minimální polynom operátoru $\mathbb{A}$ platí $m_{\mathbb{A}}(x)=(x-\lambda)^n$.

Obráceně - nechť pro některý operátor $\mathbb{A}$ na $\mathbf{V}_n$ platí $m_{\mathbb{A}}(x)=(x-\lambda)^n$. Chceme-li ukázat existenci adjungovaného vektoru řádu n (a tím dle (ii) i λ-cyklické báze), je třeba ukázat nenulovost operátoru $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{n-1}$. [13])
Polynom $f(x)=(x-\lambda)^{n-1}$ je ovšem nižšího stupně než $m_{\mathbb{A}}(x)$, a proto operátor $f(\mathbb{A})$ nemůže být nulovým.

Poznatky získané v odstavcích (i) až (iv) vyjadřuje tato věta:

8.**Věta** *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}_n$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) ve $\mathbf{V}_n$ existuje báze cyklická vzhledem k $\mathbb{A}$,

(2) existuje adjungovaný vektor řádu n operátoru $\mathbb{A}$.

(3) $\mathbb{A}$ má jedinou vlastní hodnotu λ a $\dim\mathbf{N}_\lambda=1$,

(4) $m_{\mathbb{A}}(x)=(x-\lambda)^n$.

---

[12]) viz poznámka za definicí 5.10.

[13]) každý $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, pro nějž $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{n-1}(\mathbf{u})\neq\mathbf{o}$, je adjungovaným vektorem řádu n, neboť současně $\mathbf{o}=m_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})(\mathbf{u})=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^n(\mathbf{u})$.

9. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na **V**. O vektorovém prostoru **V** řekneme, že je *prostorem cyklickým vzhledem k lineárnímu operátoru*, existuje-li báze **V** cyklická vzhledem k $\mathbb{A}$.[14])

10. Poznámka Věta 8 uvádí některé nutné a postačující podmínky pro to, aby **V** byl vzhledem k $\mathbb{A}$ cyklický.

Příklad A

Nechť v jisté bázi $\mathcal{B}$ prostoru **V** nad R je lineární operátor $\mathbb{A}$ dán maticí **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je prostor **V** cyklický vzhledem k operátoru $\mathbb{A}$. V kladném případě nalezněte některou cyklickou bázi.

Řešení

Vyšetřeme $\mathcal{S}pec\mathbb{A}$. Známým postupem spočteme, že $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{1\}$[15]). Dále snadno zjistíme, že $\dim\mathbf{N}_1=1$ a tím je (dle věty 8) zřejmé, že prostor **V** vzhledem k $\mathbb{A}$ cyklický je. Tudíž řád $\mathbf{V}=\mathbf{R}_1$ je roven $n=3$ (proč?).

Zaměříme se na existenci adjungovaného vektoru řádu $n=3$ (viz věta 8) a pomocí něj zkonstruujeme cyklickou bázi (užitím (8-1))

Adjungované vektory řádu 3 (příslušné $\lambda=1$) jsou právě všechny vektory náležející rozdílu $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\mathbb{I})^3\setminus\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\mathbb{I})^2$, kde ovšem $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\mathbb{I})^3=\mathbf{V}$ (viz (8-6) pro $m=n$).

Souřadnice vektorů z $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\mathbb{I})^2$ řeší soustavu o matici $((\mathbf{A}-\mathbf{E})^2)^T$, která zní

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a tudíž $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\mathbb{I})^2=[(1,0,0),(0,1,0)]$.

Adjungovanými vektory řádu 3 jsou proto všechny vektory z **V** nená-

---

[14]) je-li tato báze λ-cyklická, můžeme o dotčeném prostoru hovořit jako o *λ-cyklickém*. Korektnost tohoto pojmu plyne z toho, že $\mathbb{A}$ má v tomto případě jedinou vlastní hodnotu.

[16]) a proto $\mathbf{V}=\mathbf{R}_1$

[16]) viz (8-6).

ležící podprostoru $[(1,0,0),(0,1,0)]$.

Zvolme např. $\mathbf{e}$, $\{\mathbf{e}\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1)$.

Aplikací (8-1) dostáváme (proveďte!):[17])

$$\{\mathbf{e}_1\}_{\mathcal{B}}=(1,1,1),\ \{\mathbf{e}_2\}_{\mathcal{B}}=(1,0,0),\ \{\mathbf{e}_3\}_{\mathcal{B}}=(0,1,0).$$

Právě nalezená trojice vektorů je jednou z cyklických bází operátoru $\mathbb{A}$ (jinou volbou výchozího vektoru $\mathbf{e}$ získáme další cyklické báze).

Nyní přirozeným způsobem zavedeme pojmy cyklická báze podprostoru a cyklický podprostor.

11. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ některý podprostor ve $\mathbf{V}$ invariantní vzhledem k $\mathbb{A}$.

Řekneme, že *báze podprostoru* $\mathbf{W}$ *je cyklická vzhledem k lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$, je-li cyklická vzhledem k lineárnímu operátoru $\mathbb{A}|\mathbf{W}$.

Dále řekneme, že $\mathbf{W}$ *je podprostor cyklický vzhledem k lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$, jestliže existuje báze $\mathbf{W}$ cyklická vzhledem k $\mathbb{A}$.

6.3 Jordanova báze příslušná lineárnímu operátoru

12. Definice Buďte $t\in C$, $m\in N$. Pak *Jordanovou buňkou řádu* m *příslušnou číslu* t rozumíme matici náležící $M_m(C)$ označovanou $J_t^{(m)}$ a definovanou takto:

$J_t^{(m)}=(a_{ij})_m$, kde

(1) $a_{ij}=t$ pro $j=i$, $i=1,\dots,m$,

(2) $a_{ij}=1$ pro $j=i+1$, $i=1,\dots,m-1$,

(3) $a_{ij}=0$ v ostatních případech.

---

[17]) přesvědčte se i o tom, že $\mathbf{e}_3$ je opravdu vlastním vektorem $\mathbb{A}$ příslušným $\lambda=1$.

13. Poznámka Jordanova buňka řádu m příslušná číslu t má zřejmě následující tvar:

$$J_t^{(m)} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Z definice 4 cyklické báze (a definice matice lineárního operátoru) bezprostředně plyne

14. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na $\mathbf{V}_n$, $\mathcal{B}$ nechť je báze $\mathbf{V}_n$ a λ komplexní číslo. Pak platí, že matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ je Jordanovou buňkou řádu n příslušnou číslu λ, právě když $\mathcal{B}$ je bází λ-cyklickou vzhledem k operátoru $\mathbb{A}$. V tomto případě je λ vlastní hodnotou $\mathbb{A}$.*

Důsledkem této věty spolu s definicí 9 cyklického prostoru (a definicí podobnosti matic) je následující tvrzení

15. Důsledek *Vektorový prostor* **V** *je cyklický vzhledem k lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$, právě když jeho matice v některé (a pak ovšem v každé) bázi je podobná Jordanově buňce.*

V následující definici zavedeme jistou speciální bázi prostoru vzhledem k danému lineárnímu operátoru. Vyvrcholením této kapitoly (a tím i celého textu) bude zjištění, že uvedenou bázi lze sestrojit ke každému z lineárních operátorů.

16. Definice Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na **V**. Nechť dále $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)},\dots,\mathbf{U}^{(r)}$ jsou netriviální $\mathbb{A}$-invariantní podprostory ve **V** a $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\dots,\mathcal{B}_r$ po řadě báze těchto podprostorů cyklické vzhledem k $\mathbb{A}$. Pak bázi $\mathcal{B}$ prostoru **V** sestavenou z bází $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\dots,\mathcal{B}_r$[18]) nazýváme *Jordanova báze vektorového prostoru* **V** *příslušná lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$.*

Báze $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\dots,\mathcal{B}_r$ nazýváme *cyklické složky báze $\mathcal{B}$*, počty jejich

[18]) odtud plyne nevyřčený předpoklad, že $\mathbf{V}=\mathbf{U}^{(1)}\oplus \mathbf{U}^{(2)}\oplus\dots\oplus \mathbf{U}^{(r)}$.

prvků pak *délky složek.*

Z definice 9 a 11 zřejmě dostáváme:[19])

17. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**. *Jordanova báze prostoru* **V** *příslušná lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$ *existuje tehdy a jen tehdy, je-li* **V** *direktním součtem podprostorů cyklických vzhledem k* $\mathbb{A}$.

Uvažujme nyní lineární operátor $\mathbb{A}$ a nechť existuje Jordanova báze $\mathcal{B}$ příslušná tomuto operátoru. Jaký bude mít tvar matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})$?

Vzhledem k tomu, že **V** je direktním součtem $\mathbb{A}$-invariantních podprostorů $\mathbf{U}^{(1)},\dots,\mathbf{U}^{(r)}$, z jejichž bází $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_r$ je $\mathcal{B}$ sestavena (viz def.16), bude (v souladu s větou 3.9) matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ blokově diagonální - tyto bloky označme $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_r$.
Dle citované věty 3.9 jsou jednotlivé bloky maticemi restrikcí operátoru $\mathbb{A}$ na příslušné podprostory, tedy

$$\mathbf{A}_i=(\mathbb{A}|\mathbf{U}^{(i)},\mathcal{B}_i),\quad 1\le i\le r.$$

Báze $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_r$ jsou ovšem cyklické (po řadě $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ cyklické), a tudíž dle věty 14 je každá matice $\mathbf{A}_i$ *Jordanovou buňkou* příslušnou číslu λ_i a řádu rovnému $\dim\mathbf{U}^{(i)}$ (tj. délce složky $\mathcal{B}_i$).

Máme-li dán lineární operátor $\mathbb{A}$ a existuje-li báze $\mathcal{B}$ taková, že matice $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ má tvar právě popsaný - tj. je blokově diagonální maticí, jejíž bloky jsou Jordanovými buňkami - pak snadno (opět užitím vět 14 a 3.9) ukážeme, že $\mathcal{B}$ je Jordanovou bází příslušnou operátoru $\mathbb{A}$ (promyslete si!).

Pojmenujme nyní matici výše popsaného tvaru.

---

[19]) proč je cyklický podprostor podprostorem invariantním?

18. Definice Blokově diagonální matici, jejímiž diagonálními bloky jsou Jordanovy buňky, nazýváme *Jordanovou maticí* nebo *maticí v normálním Jordanově tvaru* (užívá se i pojem *kanonický Jordanův tvar*).

Z úvahy předcházející této definici plyne platnost následující věty.

19. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V**, $\mathcal{B}$ *nechť je báze* **V**. *Pak platí, že matice* $(\mathbb{A},\mathcal{B})$ *je Jordanovou maticí, právě když* $\mathcal{B}$ *je Jordanova báze* **V** *příslušná lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$.

20. Poznámka Vzhledem k předešlé větě jsme oprávněni hovořit o *Jordanově matici příslušné danému lineárnímu operátoru.*

Nyní již máme v podstatě vybudován aparát pro to, abychom ukázali existenci Jordanovy báze příslušné libovolnému operátoru. V souladu s poznámkou 5.17 tak učiníme nejdříve pro operátory mající jedinou vlastní hodnotu.

6.3.1 Lineární operátory s jedinou vlastní hodnotou

Uvažme nadále lineární operátor $\mathbb{A}$ na **V** s vlastností $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{\lambda\}$. Pak platí, že $\mathbf{V}=\mathbf{R}_\lambda$. Označme m řád **V** jakožto kořenového podprostoru - zřejmě $m\leq n$ (viz 5.23) - a tohoto označení se nadále přidržme.

Z definice Jordanovy báze plyne (její složky jsou cyklické), že její vektory jsou adjungovanými vektory operátoru $\mathbb{A}$ příslušnými λ (srv. pozn. 6). Prozkoumejme nyní *počty adjungovaných vektorů jednotlivých řádů*. Uvidíme, jaký geometrický význam lze těmto počtům přiřadit.

Buď $\mathcal{B}$ Jordanova báze příslušná operátoru $\mathbb{A}$.

Zvolme dále h, $1\leq h\leq m$, a označme n(h) počet vektorů z $\mathcal{B}$, které jsou adjungované řádu h. Jejich soustavu označme $\mathcal{H}$ (je podsoustavou báze $\mathcal{B}$) a její elementy pak takto:

$$\mathcal{H}=<\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n(h)}>.$$

Dále zaveďme operátor $\mathbb{B}=\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}$.

Ze zavedení množiny $\mathcal{H}$ vyplývá, že její prvky jsou z $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$.

Jelikož každý vektor $\mathbf{a}_i$ z $\mathcal{H}$ je členem některé cyklické složky báze $\mathcal{B}$, vyplývá z definice 4 cyklické báze, že i všechny *nenulové* vektory ve tvaru $\mathbb{B}^r(\mathbf{a}_i)$ jsou opět členy téže cyklické složky a tím prvky Jordanovy báze $\mathcal{B}$.

Vektory z $\mathcal{H}$ jsou adjungované vektory řádu h. To značí, že pro všechna $i=1,\ldots,n(h)$ platí, že $\mathbb{B}^{h-1}(\mathbf{a}_i)\neq\mathbf{o}$, a tudíž dle právě provedené úvahy vektory $\mathbb{B}^{h-1}(\mathbf{a}_1),\ldots,\mathbb{B}^{h-1}(\mathbf{a}_{n(h)})$ náleží bázi $\mathcal{B}$ a jsou proto lineárně nezávislé. Odtud vyplývá, že soustava $\mathcal{H}$ *je lineárně nezávislá modulo* $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$.[20])

Nyní prozkoumejme, zda množina $\mathcal{H}$ (která je částí $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$) *generuje* podprostor $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$ *modulo* $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$. V kladném případě bude $\mathcal{H}$ bází $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$ mod $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$, čímž bude nalezen význam n(h).

Jelikož se zajímáme o vlastnosti množiny $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{B}$, $\mathcal{H}\subset\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$, bude užitečné rozlišit elementy báze $\mathcal{B}$ na vektory:

- nenáležící $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$ - množinu jejich indexů označme I,
- náležící $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$ adjungované řádu h - množinu jejich indexů označme J,
- náležící $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$, jejichž řád je menší než h - množinu jejich indexů označme K.

Evidentně se tak báze $\mathcal{B}$ rozpadá na tři navzájem disjunktní podmnožiny.

Zvolíme-li libovolný vektor $\mathbf{u}$ z $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$, můžeme jej tedy psát:

$$\mathbf{u} = \sum_{i\in I} u_i\mathbf{e}_i + \sum_{i\in J} u_i\mathbf{e}_i + \sum_{i\in K} u_i\mathbf{e}_i \tag{21-1}$$

a vzhledem k předpokladu $\mathbf{u}\in\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$ dále

---

[20]) podrobněji: Nechť $c_1\mathbf{a}_1+\ldots+c_{n(h)}\mathbf{a}_{n(h)}$ náleží $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$. Pak

$$\mathbf{o} = \mathbb{B}^{h-1}(c_1\mathbf{a}_1+\ldots+c_{n(h)}\mathbf{a}_{n(h)}) = c_1\mathbb{B}^{h-1}(\mathbf{a}_1)+\ldots+c_{n(h)}\mathbb{B}^{h-1}(\mathbf{a}_{n(h)}),$$

a odtud $c_1=\ldots=c_{n(h)}=0$.

$$\mathbf{o} = \mathbb{B}^h(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i \mathbb{B}^h(\mathbf{e}_i) + \sum_{i\in J} u_i \mathbb{B}^h(\mathbf{e}_i) + \sum_{i\in K} u_i \mathbb{B}^h(\mathbf{e}_i).$$

Přihlédneme-li k zavedení indexových množin, obdržíme odtud dále

$$\sum_{i\in I} u_i \mathbb{B}^h(\mathbf{e}_i) = \mathbf{o}.$$

Protože vektory $\mathbb{B}^h(\mathbf{e}_i)$ jsou pro všechna $i\in I$ nenulové, jde opět o elementy báze $\mathcal{B}$ (jak bylo zdůvodněno výše), a proto jsou u_i pro všechna $i\in I$ rovna nule. Znamená to, že s využitím (21-1) lze psát:

$$\mathbf{u} = \sum_{i\in J} u_i \mathbf{e}_i + \underline{\sum_{i\in K} u_i \mathbf{e}_i}. \tag{21-2}$$

Zřejmě množina vektorů $\mathbf{e}_i$, pro něž $i\in J$, je rovna množině $\mathcal{H}$ a množina vektorů $\mathbf{e}_i$ s vlastností $i\in K$ (tj. i podtržený sčítanec v (21-2)) je podmnožinou v $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$ (proč?). Relace (21-2) proto implikuje, že $\mathbf{u}$ je lineární kombinací vektorů z $\mathcal{H}$ modulo $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$.

Souhrnně řečeno, ukázali jsme, že soustava *$\mathcal{H}$ je bází* $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$ *modulo* $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$, takže platí následující věta:

21. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na* $\mathbf{V}$ *mající jedinou vlastní hodnotu λ,* m *buď řád prostoru* $\mathbf{V}$. *Nechť ve* $\mathbf{V}$ *existuje Jordanova báze $\mathcal{B}$ příslušná $\mathbb{A}$.*

Pak počet n(h) *adjungovaných vektorů řádu* h *příslušných hodnotě λ náležících bázi $\mathcal{B}$ je pro každé* h, $1\le h\le m$, *dán vztahem*

$$\boxed{n(h)=\dim \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^h \bmod \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-1}.}$$ [21])

Uvažujme lineární operátor $\mathbb{A}$ na $\mathbf{V}$, k němuž existuje Jordanova báze $\mathcal{B}$ sestavená z cyklických složek $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_r$.
Zvolme dále h, $1\le h\le m$, a zkoumejme *počet cyklických složek délky h*,[22]) tento počet označme y(h).
Každý z adjungovaných vektorů řádu h náležící bázi $\mathcal{B}$ je obsažen

---

[21]) Neboli $n(h)=\dim \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^h - \dim \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-1}$.

Pamatujme, že $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^1 \bmod \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^0$ je rovno $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})$.

[22]) jelikož m je řád $\mathbf{V}$ jakožto kořenového podprostoru, nemůže mít přirozeně žádná z cyklických složek délku větší než m.

právě v jedné její cyklické složce. S využitím poznatků o cyklických bázích (viz subparagraf 6.2) zjišťujeme, že délka této složky nemůže být menší než h - činí tedy alespoň h.[23]) Pro počet n(h) tudíž platí:

$$n(h)=y(h)+y(h+1)+...+y(m),$$

odkud můžeme počet složek dané délky vyjádřit následovně:

$$y(h)=n(h)-n(h+1),\ 1\le h\le m-1,$$
$$y(m)=n(m).$$

Speciálně odtud pro počet všech složek báze $\mathcal{B}$ vyplývá

$$y(1)+y(2)+...+y(m)=n(1),$$

přičemž n(1) je dle předešlé věty roven $\dim\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^1$ (proč?), což je ovšem $\dim\mathbf{N}_\lambda$.

Dokázali jsme správnost následujího tvrzení

22. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V** *mající jedinou vlastní hodnotu* λ, m *buď řád prostoru* **V**. *Nechť ve* **V** *existuje Jordanova báze* $\mathcal{B}$ *příslušná* $\mathbb{A}$. *Pak platí:*

(1) počet y(h) *cyklických složek báze* $\mathcal{B}$ *o délce* h *je pro každé* h, $1\le h\le m$, *dán vztahy*

$$\boxed{\begin{array}{l} y(h)=n(h)-n(h+1),\ 1\le h\le m-1,\\ y(m)=n(m). \end{array}}$$

(2) počet všech cyklických složek báze $\mathcal{B}$ *je roven dimenzi vlastního podprostoru* $\mathbf{N}_\lambda$.[24])

Ze zavedení pojmu Jordanovy báze příslušné danému operátoru je zřejmé, že existuje-li alespoň jedna taková báze, není rozhodně jediná. Položme si otázku, co spojuje dvě různé Jordanovy báze (a tím i Jordanovy matice) příslušné témuž lineárnímu operátoru.

Vzhledem k tomu, že dimenze jader mocnin operátoru $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}$ je na

---

[23]) délka složky je rovna h, právě když je uvažovaný vektor jejím prvním vektorem, je rovna h+1 je-li jejím druhým vektorem atd.

[24]) srovnejte s tvrzením věty 8.

volbě Jordanovy báze zcela nezávislá, dostáváme tento důsledek vět 21, 22:

23. Důsledek *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na* **V** *mající jedinou vlastní hodnotu. Pak platí:*

(1) každé dvě Jordanovy báze příslušné $\mathbb{A}$ mají týž počet cyklických složek dané délky,

(2) každé dvě Jordanovy matice příslušné $\mathbb{A}$ se liší nejvýše pořadím diagonálních polí.[25])

Z uvedeného důsledku plyne, že můžeme hovořit o *jednoznačnosti existence* Jordanovy matice *až na pořadí diagonálních polí.*

Zbývá nám nyní vyřešit otázku existence Jordanovy báze.

V případě, kdy k danému operátoru Jordanova báze existuje, tvoří (jak víme) její podsoustava $\mathcal{H}=\langle \mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n(h)}\rangle$ adjungovaných vektorů daného řádu h, $1\le h\le m$, bázi $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^h \bmod \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-1}$.

Tento fakt nás bude inspirovat k následující úvaze: Sestrojíme-li některou bázi $\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n(h)}\rangle$ podprostoru $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^h \bmod \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-1}$, náleží vektory $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{u}_1),\dots,(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{u}_{n(h)})$ zřejmě do $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-1}$. Pokud budou lineárně nezávislé mod $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-2}$, bude je možné doplnit na bázi podprostoru $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-1} \bmod \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-2}$ a analogicky pokračovat k bázi podprostoru $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-2} \bmod \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-3}$ a tak dále, až k bázi $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})$.

Pokud bychom na počátku zvolili h=m (tj. vycházeli z báze prostoru $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^m \bmod \mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{m-1}$), zdá se být oprávněný předpoklad, že po vhodném přeskupení bychom tak obdrželi cyklické složky délek m, m-1, ..., 1 (uvažte konstrukci cyklické báze). Není proto nemyslitelné, že bychom tak získali elementy Jordanovy báze.

V další části proto uvedené úvahy zprecizujeme a provedeme rovněž potřebné důkazy lineární nezávislosti naznačených množin

---

[25] tzn, že počet diagonálních polí (Jordanových buněk) jakož i jejich řády jsou shodné u obou matic.

vektorů.

24. Lemma *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* $\mathbf{V}$ *mající jedinou vlastní hodnotu* λ, m *řád prostoru* $\mathbf{V}$. *Pak pro každé* h, $2 \le h \le m$, *platí: Jsou-li* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ *vektory z* $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^h$ *lineárně nezávislé mod* $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-1}$, *náleží vektory* $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{a}_1), \dots, (\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})(\mathbf{a}_r)$ *podprostoru* $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-1}$ *a jsou lineárně nezávislé mod* $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-2}$.

Důkaz:

První část tvrzení je zřejmá.

Dále pro účely tohoto důkazu položme $\mathbb{B}=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})$.

Předpokládejme, že

$$\sum_{j=1}^{r} c_j \mathbb{B}(\mathbf{a}_j) \in \mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-2}.$$

Můžeme tedy psát

$$\mathbf{o}=\mathbb{B}^{h-2}\Big(\sum_{j=1}^{r} c_j \mathbb{B}(\mathbf{a}_j)\Big)=\mathbb{B}^{h-2}(\mathbb{B}\Big(\sum_{j=1}^{r} c_j \mathbf{a}_j\Big))=\mathbb{B}^{h-1}\Big(\sum_{j=1}^{r} c_j \mathbf{a}_j\Big),$$

což značí, že

$$\sum_{j=1}^{r} c_j \mathbf{a}_j \in \mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}.$$

Protože $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ jsou lineárně nezávislé mod $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-1}$, dostáváme, že $c_1=c_2=c_r=0$, a tudíž vyšetřované vektory $\mathbb{B}(\mathbf{a}_1), \dots, \mathbb{B}(\mathbf{a}_r)$ jsou lineárně nezávislé mod $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-2}$. ∎

25. Lemma *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* $\mathbf{V}$ *mající jedinou vlastní hodnotu* λ, m *řád prostoru* $\mathbf{V}$. *Nechť pro každé* h, $1 \le h \le m$, *je*

$$\mathcal{E}_h=\langle \mathbf{e}_{h1}, \dots, \mathbf{e}_{h,n(h)} \rangle$$

báze podprostoru $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^h$ mod $\mathrm{Ker}(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{h-1}$.[26])

Pak soustava

$$\begin{aligned}\mathcal{E}=\langle &\mathbf{e}_{m,1}, \dots, \mathbf{e}_{m,n(m)},\\ &\mathbf{e}_{m-1,1}, \dots, \mathbf{e}_{m-1,n(m-1)}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\mathbf{e}_{11}, \dots, \mathbf{e}_{1,n(1)} \rangle\end{aligned}$$

je bází prostoru $\mathbf{V}$ *(jde o bázi sestavenou z bází* $\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_{m-1}, \dots, \mathcal{E}_1$*).*

---

[26]) srv. věta 21.

Důkaz:

Pro účely tohoto důkazu položme $\mathbb{B}=(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})$.

1. Vyšetříme lineární nezávislost soustavy $\mathcal{E}$.

Předpokládejme, že

$$\sum_{j=1}^{n(m)} c_{mj}\mathbf{e}_{mj}+\ldots+\sum_{j=1}^{n(h)} c_{hj}\mathbf{e}_{hj}+\ldots+\sum_{j=1}^{n(1)} c_{1j}\mathbf{e}_{1j}=\mathbf{o}, \tag{25-1}$$

přičemž nadále pro $h=1,\ldots,m$ položme

$$\mathbf{v}_h=\sum_{j=1}^{n(h)} c_{hj}\mathbf{e}_{hj}. \tag{25-2}$$

S ohledem na zřejmé skutečnosti platné pro $h=1,\ldots,m$:

$$\mathbf{v}_h\in\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h \ \wedge\ \mathrm{Ker}\mathbb{B}\subset\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2\subset\ldots\subset\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h, ^{27})$$

zjišťujeme, že
$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\ldots+\mathbf{v}_h\in\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h. \tag{25-3}$$

Nechť je mezi koeficienty c_{ij} v lineární kombinaci (25-1) aspoň jeden nenulový. Je-li nenulových koeficientů více, označme k nejvyšší z prvních indexů těchto koeficientů. To ovšem znamená, že vektory $\mathbf{v}_{k+1},\ldots,\mathbf{v}_m$ jsou nulové (viz (25-2), a tedy ze (25-1) vyplývá:
$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\ldots+\mathbf{v}_k=\mathbf{o},$$
neboli
$$\mathbf{v}_k=-(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\ldots+\mathbf{v}_{k-1}).$$
S využitím (25-3) dostáváme z poslední relace, že $\mathbf{v}_k\in\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{k-1}$. Protože však současně je $\mathbf{v}_k$ lineární kombinací mod $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{k-1}$ prvků báze $\mathcal{E}_k$ (srv. (25-2), musí být nulové všechny její koeficienty:
$$c_{k1}=c_{k2}=\ldots=c_{k(nk)}=0,$$
což je ovšem spor s tím, jak byl index k zaveden.

Soustava $\mathcal{E}$ je tudíž lineárně nezávislá.

2. Ukážeme, že $\mathcal{E}$ generuje prostor $\mathbf{V}$.

Zaveďme ve $\mathbf{V}$ systém podprostorů $\mathbf{U}_{(1)},\mathbf{U}_{(2)},\ldots,\mathbf{U}_{(m)}$ takto:

$$\mathbf{U}_{(h)}=[\mathbf{e}_{h1},\mathbf{e}_{h2},\ldots,\mathbf{e}_{hn(h)}],\ 1\le h\le m^{28}) \tag{25-4}$$

Protože $\mathcal{E}_h$ je bází $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$ modulo $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$, je zřejmé, že
$$\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h=\mathbf{U}_{(h)}+\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1};\ 1\le h\le m.$$

---

[27]) viz (8-6).

[28]) jde tedy o podprostor ve $\mathbf{V}$, jehož bází je $\mathcal{E}_h$

Odtud snadno vyvodíme, že

$$\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h=\mathbf{U}_{(h)}+\mathbf{U}_{(h-1)}+\ldots+\mathbf{U}_{(1)},$$

a konečně, položíme-li h=m, a uvážíme-li, že $\mathbf{V}=\mathrm{Ker}\mathbb{B}^m$ (proč?), obdržíme:[29]

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}_{(m)}+\mathbf{U}_{(m-1)}+\ldots+\mathbf{U}_{(1)},$$

což s ohledem na (25-4) znamená, že $\mathcal{E}$ generuje prostor **V**. ∎

Nyní již můžeme přistoupit k tomu, abychom precizovali úvahu naznačenou před lemmatem 24 a zkonstruovali Jordanovu bázi **V** příslušnou danému lineárnímu operátoru.

Uvažujme tedy lineární operátor $\mathbb{A}$ mající jedinou vlastní hodnotu λ a označme m řád **V** jakožto kořenového podprostoru $\mathbf{R}_\lambda$. Nadále opět položme $\mathbb{B}=\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}$.

Zvolme h, $1\le h\le m$ a buď $\mathcal{E}_h$ libovolná báze prostoru $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^h$ modulo $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$:

$$\mathcal{E}_h=\langle\mathbf{e}_{h1},\mathbf{e}_{h2},\ldots,\mathbf{e}_{hn(h)}\rangle.$$

V souladu s lemmatem 24 jsou vektory $\mathbb{B}(\mathbf{e}_{h1}),\mathbb{B}(\mathbf{e}_{h2}),\ldots,\mathbb{B}(\mathbf{e}_{hn(h)})$ elementy $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$ lineárně nezávislé modulo $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-2}$. Tyto vektory budeme nadále po řadě označovat jako $\mathbf{e}_{h-1,1},\mathbf{e}_{h-1,2},\ldots,\mathbf{e}_{h-1,n(h)}$, obecně tedy

$$\mathbf{e}_{h-1j}=\mathbb{B}(\mathbf{e}_{hj}),\ 1\le j\le n(h). \tag{26-1}$$

Je-li $n(h-1)>n(h)$,[30] můžeme je doplnit na bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-1}$ modulo $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{h-2}$ označenou $\mathcal{E}_{h-1}$ (obrazy elementů báze $\mathcal{E}_h$ v operátoru $\mathbb{B}$ jsou podtrženy):

$$\mathcal{E}_{h-1}=\langle\underline{\mathbf{e}_{h-1,1},\ldots,\mathbf{e}_{h-1,n(h)}},\mathbf{e}_{h-1,n(h)+1},\ldots,\mathbf{e}_{h-1,n(h-1)}\rangle$$

Je-li $\mathcal{E}_m$ některá báze $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^m$ mod $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^{m-1}$, pak provedeme-li právě popsaný krok pro h=m, obdržíme z báze $\mathcal{E}_m$ bázi $\mathcal{E}_{m-1}$, jeho další aplikací pak z $\mathcal{E}_{m-1}$ bázi $\mathcal{E}_{m-2}$ a tak dále, až nakonec zkonstruujeme bázi $\mathcal{E}_1$:

---

[29]) z části 1. důkazu dále plyne, že $\mathbf{V}=\mathbf{U}_{(m)}\oplus\mathbf{U}_{(m-1)}\oplus\ldots\oplus\mathbf{U}_{(1)}$.

[30]) obecně je $n(h)\le n(h-1)$ (viz věta 21 a lemma 24).

$$\mathcal{E}_m=\langle \mathbf{e}_{m1},\mathbf{e}_{m2},\dots,\mathbf{e}_{mn(m)}\rangle,$$

$$\mathcal{E}_{m-1}=\langle \mathbf{e}_{m-1,1},\dots,\mathbf{e}_{m-1,n(m)},\mathbf{e}_{m-1,n(m)+1},\dots,\mathbf{e}_{m-1,n(m-1)}\rangle,$$

$$\mathcal{E}_{m-2}=\langle \mathbf{e}_{m-2,1},\dots,\mathbf{e}_{m-2,n(m-1)},\mathbf{e}_{m-2,n(m-1)+1},\dots,\mathbf{e}_{m-2,n(m-2)}\rangle,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (26\text{-}2)$$

$$\mathcal{E}_2=\langle \mathbf{e}_{2,1},\dots,\mathbf{e}_{2,n(3)},\mathbf{e}_{2,n(3)+1},\dots,\mathbf{e}_{2,n(2)}\rangle,$$

$$\mathcal{E}_1=\langle \mathbf{e}_{1,1},\dots,\mathbf{e}_{1,n(2)},\mathbf{e}_{1,n(2)+1},\dots,\mathbf{e}_{1,n(1)}\rangle.$$

V souladu s lemmatem 25 je sjednocení těchto bází lineárně nezávislou množinou generátorů prostoru **V**.

Definujme nyní pro každé $h=1,\dots,m$ systém množin

$$\mathcal{B}_{n(h+1)+1},\dots,\mathcal{B}_{n(h)}$$

takto:

Jestliže $n(h+1)+1\le j\le n(h)$, kde $n(m+1)=0$, pak

$$\mathcal{B}_j=\langle \mathbf{e}_{hj},\mathbf{e}_{h-1j},\dots,\mathbf{e}_{1j}\rangle.\text{[31]} \qquad (26\text{-}3)$$

Dostáváme tím následující systém množin:[32]

$\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\dots,\mathcal{B}_{n(m)},$ ... $y(m)$

$\mathcal{B}_{n(m)+1},\dots,,\mathcal{B}_{n(m-1)},$ ... $y(m-1)$

....

$\mathcal{B}_{n(3)+1},\dots,,\mathcal{B}_{n(2)},$ ... $y(2)$

$\mathcal{B}_{n(2)+1},\dots,,\mathcal{B}_{n(1)},$ ... $y(1)$

(nastane-li pro některá h, $1\le h\le m$, $n(h+1)=n(h)$ (tj. $y(h)=0$) nejsou $\mathcal{B}_{n(h)+1},\dots,\mathcal{B}_{n(h-1)}$ definovány).

---

[31]) Povšimněme si, že pro dané h mají všechny soustavy $\mathcal{B}_j$, $n(h+1)+1\le j\le n(h)$, délku právě h.

[32]) Všimněte si, že počet množin v jednotlivých řádcích schematu je roven počtu cyklických složek jednotlivých délek Jordanovy báze příslušné operátoru $\mathbb{A}$ (srv. věta 22).

Například pro h=m dostáváme:

$\mathcal{B}_1=\langle \mathbf{e}_{m,1}, \mathbf{e}_{m-1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{11}\rangle,$

$\mathcal{B}_2=\langle \mathbf{e}_{m,2}, \mathbf{e}_{m-1,2}, \ldots, \mathbf{e}_{12}\rangle,$

....

$\mathcal{B}_{n(m)}=\langle \mathbf{e}_{m,n(m)}, \mathbf{e}_{m-1,n(m)}, \ldots, \mathbf{e}_{1n(m)}\rangle,$

pro h=m-1 obdržíme:

$\mathcal{B}_{n(m)+1}=\langle \mathbf{e}_{m-1,n(m)+1}, \mathbf{e}_{m-2,n(m)+1}, \ldots, \mathbf{e}_{1,n(m)+1}\rangle,$

$\mathcal{B}_{n(m)+2}=\langle \mathbf{e}_{m-1,n(m)+2}, \mathbf{e}_{m-2,n(m)+2}, \ldots, \mathbf{e}_{1,n(m)+2}\rangle,$

....

$\mathcal{B}_{n(m-1)}=\langle \mathbf{e}_{m-1,n(m-1)}, \mathbf{e}_{m-2,n(m-1)}, \ldots, \mathbf{e}_{1,n(m-1)}\rangle,$

až konečně systém množin pro h=1 zní:

$\mathcal{B}_{n(2)+1}=\langle \mathbf{e}_{1,n(2)+1}\rangle,$

....

$\mathcal{B}_{n(1)}=\langle \mathbf{e}_{1,n(1)}\rangle.$[33])

Soustavy $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{n(1)}$ jsou zřejmě navzájem disjunktními množinami lineárně nezávislých vektorů. Označme

$$\mathbf{U}^{(1)},\ \mathbf{U}^{(2)}, \ldots, \mathbf{U}^{(n(1))}$$

podprostory o bázích po řadě $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_{n(1)}$.
Vezmeme-li v úvahu zavedení báze $\mathcal{B}_j$ relací (26-3) a vztah (26-1) mezi jejími vektory (spolu s faktem, že $\mathbf{e}_{1j}$ vždy náleží do $\mathcal{C}_1$, a tedy do Ker$\mathbb{B}$), je patrno, že $\mathcal{B}_j$ je pro všechna přípustná j bází podprostoru $\mathbf{U}^{(j)}$ *λ-cyklickou vzhledem k operátoru* $\mathbb{A}$.[34])
Vzhledem k tomu, že evidentně (proč?)

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}^{(1)}\oplus \ldots \oplus \mathbf{U}^{(n(1))},$$

---

[33]) volně řečeno, soustavu $\mathcal{B}_1$ získáme postupným zapsáním vektorů na prvních místech bází v systému (26-2) shora dolů, soustavu $\mathcal{B}_2$ pak zapsáním vektorů na druhých místech a tak dále, až soustavu $\mathcal{B}_{n(1)}$ zapsáním (jediného vektoru) na místě n(1).

[34]) srv. poznámka 5.

je (v souladu s definicí 16) patrno, že sestavíme-li z bází $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_{n(1)}$ bázi prostoru **V**, půjde o *Jordanovu bázi příslušnou lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$, přičemž uvedené báze budou jejími *cyklickými složkami*.
Tím je vyřešena otázka *existence Jordanovy báze* příslušné danému lineárnímu operátoru majícímu jednoprvkové spektrum:

26. Věta *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V** *mající jedinou vlastní hodnotu. Pak existuje alespoň jedna Jordanova báze prostoru* **V** *příslušná lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$.

Odtud a z věty 14 bezprostředně plyne:

27. Důsledek *Buď* $\mathbb{A}$ *lineární operátor na* **V** *mající jedinou vlastní hodnotu* λ. *Pak je prostor* **V** *direktním součtem podprostorů* λ*-cyklických vzhledem k lineárnímu operátoru* $\mathbb{A}$.

Příklad B

Nechť v jisté bázi $\mathcal{D}$ prostoru **V** nad R je lineární operátor $\mathbb{A}$ dán maticí **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte některou Jordanovu bázi prostoru **V** příslušnou operátoru $\mathbb{A}$.

Řešení

Vyšetřením $\mathcal{S}pec\mathbb{A}$ zjistíme, že $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{1\}$.

Operátor $\mathbb{A}$ má jedinou vlastní hodnotu, tedy $\mathbf{V}=\mathbf{R}_1$. Pro řešení příkladu proto můžeme uplatnit postup obecně popsaný v odvození věty 26:

Zaveďme operátor $\mathbb{B}$: $\mathbb{B}=\mathbb{A}-\mathbb{I}$, jeho matice **B** zní

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Známým postupem nalezneme řád m prostoru $\mathbf{V}=\mathbf{R}_1$ – m=2 (viz příklad 5.A), tudíž $\mathbf{V}=\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2$.

Naším úkolem je sestrojit bázi $\mathcal{C}_2$ (tj. bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2 \bmod \mathrm{Ker}\mathbb{B}$) a pomocí ní pak bázi $\mathcal{C}_1$ (tj. bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$).

Nejdříve vyšetříme bázi $\mathcal{E}_2$.
Jak je čtenáři známo[35]), nalezneme-li bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$, pak libovolná soustava vektorů doplňující ji na bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2$ tvoří bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2$ modulo $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$. Souřadnice vektorů $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$ řeší homogenní soustavu lineárních rovnic o matici $\mathbf{B}^T$ - tedy např. bází $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$ je soustava

$$<(2,0,0),(0,1,0)>,$$

kterou na bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2$ doplňuje například vektor o souřadnicích

$$(0,0,1).$$

Je patrno, že $\dim\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2=3$, $\dim\mathrm{Ker}\mathbb{B}=2$, což značí, že

$$n(2)=1 \text{ a } n(1)=2, \ y(2)=1 \text{ a } y(1)=1,$$

což znamená, že Jordanova báze $\mathcal{B}$ bude tvořena jednou složkou délky 1 a jednou složkou délky 2, a proto příslušná matice bude v Jordanově tvaru, její diagonála bude tvořena jednou buňkou řádu 1 (tedy $\mathbf{J}_1^{(1)}$) a jednou buňkou řádu 2 (tedy $\mathbf{J}_1^{(2)}$)

Vraťme se k bázi $\mathcal{E}_2$. V souladu s označením zavedeným výše:

$$\mathcal{E}_2=<\mathbf{e}_{21}>, \ \{\mathbf{e}_{21}\}_{\mathcal{D}}=(0,0,1).$$

Dále pomocí báze $\mathcal{E}_2$ zkonstruujme bázi $\mathcal{E}_1$ - bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$:

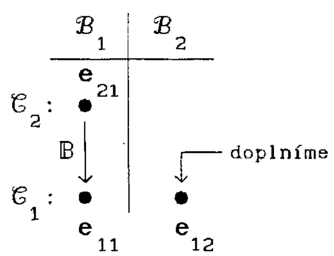
$$\mathcal{E}_1=<\mathbf{e}_{11},\mathbf{e}_{12}>,$$

kde $\mathbf{e}_{11}=\mathbb{B}(\mathbf{e}_{21})$ a $\mathbf{e}_{12}$ je libovolný vektor doplňující $\mathbf{e}_{11}$ na bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$ (připomeňme, že $\mathrm{Ker}\mathbb{B}=[(2,0,0),(0,1,0)]$).
Konkrétně tedy $\{\mathbf{e}_{11}\}_{\mathcal{D}}=(1,0,0)$ a volíme např. $\{\mathbf{e}_{12}\}_{\mathcal{D}}=(0,1,0)$.

Nyní sestrojíme systém bází $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ dle (26-3):

$$\mathcal{B}_1=<\mathbf{e}_{21},\mathbf{e}_{11}>, \ \mathcal{B}_2=<\mathbf{e}_{12}>.$$

Právě provedený proces znázorníme schematem:



35) z teorie faktorových vektorových prostorů.

Konečně, Jordanovu bázi $\mathcal{B}$ získáme sestavením z $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$:[36])

$$\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{12} \rangle,$$

neboli

$$\mathcal{B}=\langle (0,0,1), (1,0,0), (0,1,0) \rangle,$$

jejíž elementy budeme číslovat obvyklým způsobem po řadě

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3.$$

Proveďme nyní zkoušku - nalezněme matici $(\mathbb{A},\mathcal{B})$:[37])
Výpočtem zjistíme, že

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_1)\}_{\mathcal{D}}=(1,0,1),\ \{\mathbb{A}(\mathbf{e}_2)\}_{\mathcal{D}}=(1,0,0),\ \{\mathbb{A}(\mathbf{e}_3)\}_{\mathcal{D}}=(0,1,0),$$

neboli $\mathbb{A}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\ \mathbb{A}(\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_2,\ \mathbb{A}(\mathbf{e}_3)=\mathbf{e}_3,$

a proto

$$(\mathbb{A},\mathcal{B}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

což je opravdu matice v Jordanově tvaru.

Z uvedeného postupu vysvítá, že konstrukce Jordanovy báze $\mathcal{B}$ opravdu není jednoznačná - pokud bychom zvolili např.
$\{\mathbf{e}'_{21}\}_{\mathcal{D}}=(1,0,2)$, pak by $\{\mathbf{e}'_{11}\}_{\mathcal{D}}=(2,0,0)$ a mohli bychom zvolit třeba $\{\mathbf{e}'_{12}\}_{\mathcal{D}}=(1,1,0)$.
Snadno se přesvědčíme, že matice operátoru $\mathbb{A}$ v bázi

$$\langle (1,0,2), (2,0,0), (1,1,0) \rangle$$

je rovna výše uvedené Jordanově matici.

---

[36]) opravdu je tvořena jednou složkou délky 2 a jednou složkou délky 1.

[37]) toto je samozřejmě možné provést i postupem vyplývajícím z věty 1.7.

6.3.2 Lineární operátory s obecným spektrem

V tomto subparagrafu vyřešíme otázku existence Jordanovy báze příslušné lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$ v obecném případě - tj. i tehdy, má-li více než jednu vlastní hodnotu.

K tomu využijeme poznatků shrnutých v poznámce 5.17, dle níž je vektorový prostor **V** direktně rozložitelný na součet kořenových podprostorů daného operátoru, jehož restrikce na těchto jednotlivých podprostorech mají *jedinou vlastní hodnotu*, a tudíž dle věty 26 existují *Jordanovy báze zmíněných podprostorů.* To znamená, že každý kořenový podprostor $\mathbf{R}_\lambda$, $\lambda\in\mathcal{S}pec\mathbb{A}$, je (dle důsledku 27) direktním součtem λ-cyklických podprostorů a tudíž také prostor **V** je direktním součtem cyklických podprostorů. Sestavíme-li z bází těchto podprostorů bázi prostoru **V**, půjde - v souladu s větou 17 - o Jordanovu bázi příslušnou danému operátoru, jeho matice pak (dle věty 19) bude mít Jordanův tvar popsaný definicí 18.

Odvodili jsme tedy platnost následujícího tvrzení zásadního významu.

28. Věta *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na* **V**. *Pak existuje alespoň jedna Jordanova báze prostoru* **V** *příslušná lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$.*

Odtud a z věty 17 bezprostředně plyne:

29. Důsledek *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na* **V**. *Pak je prostor* **V** *direktním součtem podprostorů cyklických vzhledem k lineárnímu operátoru $\mathbb{A}$.*

Z konstrukce Jordanovy báze a důsledku 23 vyplývá:

30. Důsledek *Buď $\mathbb{A}$ lineární operátor na* **V**. *Pak platí:*

(1) každé dvě Jordanovy báze příslušné $\mathbb{A}$ mají týž počet cyklických složek dané délky příslušných dané vlastní hodnotě,

(2) každé dvě Jordanovy matice příslušné $\mathbb{A}$ se liší nejvýše pořadím diagonálních polí.[38])

Z definice podobnosti čtvercových matic a věty 28 vyplývá, že každá čtvercová matice nad C je podobná aspoň jedné matici v Jordanově tvaru. Kolik takovýchto tvarů existuje k dané matici **A** z $\mathcal{M}_n(C)$? Předpokládejme, že **X** je současně podobná maticím v Jordanově **J** a $\bar{\mathbf{J}}$. Pak jsou přirozeně podobné i matice **J** a $\bar{\mathbf{J}}$, což značí, že jde o matice téhož lineárního operátoru $\mathbb{A}$ byť i nad různými bázemi. Pak ovšem dle (2) důsledku 30, se matice **J** a $\bar{\mathbf{J}}$ mohou lišit nejvýše v pořadí diagonálních polí. Platí tedy tvrzení:

31. Věta *Každá čtvercová matice nad C je podobná (až na pořadí diagonálních polí) právě jedné matici v Jordanově tvaru.*

Množina matic libovolného lineárního operátoru (tj. třída podobných matic) na vektorovém prostoru nad C má tudíž (do jisté míry) jednoznačně přiřazeného reprezentanta v definovaném kanonickém (Jordanově) tvaru (viz též větu 33), čímž je zodpovězena otázka položená úvodem tohoto textu (subparagraf 1.4).
Řadu vlastností lineárního operátoru lze právě z tohoto tvaru snadno zjistit, což je důležité zejména při aplikacích předložené teorie zmíněných v úvodu tohoto učebního textu.[39])

---

[38]) tzn, že počet diagonálních polí (Jordanových buněk příslušných jednotlivým vlastním hodnotám) jakož i jejich řády jsou pro jednotlivé vlastní hodnoty shodné u obou matic.

[39]) aniž bychom zde chtěli zacházet do podrobností uveďme, že vlastnost dvou lineárních operátorů *míti touž Jordanovu matici* indukuje na množině $\mathcal{E}nd(\mathbf{V})$ jistou relaci ekvivalence. Specielně rozkladu množiny $\mathcal{A}ut(\mathbf{V})$ bylo v geometrii užito ke klasifikaci určitých transformací projektivních prostorů *(kolineací)*, která mj. představuje přirozenou motivaci k zavedení pojmu Jordanova báze - viz např. [7].

Na základě věty 31 je přirozené definovat pro matice následující pojem:[40])

32. Definice Buď $\mathbf{A}$ čtvercová matice nad C. Pak se Jordanova matice, o níž hovoří věta 31, nazývá *Jordanův tvar matice* $\mathbf{A}$.

Triviálním důsledkem věty 31 je následující kriterium podobnosti čtvercových matic:

33. Věta *Dvě čtvercové matice téhož řádu nad C jsou podobné, právě když oběma přísluší (až na pořadí diagonálních polí) týž Jordanův tvar.*

Příklad C

Nechť v jisté bázi $\mathcal{D}$ prostoru $\mathbf{V}$ nad R je lineární operátor $\mathbb{A}$ dán maticí $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte některou Jordanovu bázi prostoru $\mathbf{V}$ příslušnou operátoru $\mathbb{A}$.

Řešení

Při hledání Jordanovy báze budeme postupovat tak, jak jsme uvedli v odvození věty 28.

Vyšetřením $\mathcal{S}pec\mathbb{A}$ zjistíme, že $\mathcal{S}pec\mathbb{A}=\{1,2\}$, přičemž $\lambda_1=1$ je jednoduchý a $\lambda_2=2$ trojnásobný kořen polynomu $ch_{\mathbb{A}}$. Podle důsledku 5.22 to značí, že $\dim\mathbf{R}_1=1$, $\dim\mathbf{R}_2=3$.
Prostor $\mathbf{V}$ je direktním součtem uvedených podprostorů a jak víme, má restrikce $\mathbb{A}$ na těchto podprostorech vždy jediné vlastní číslo. Postupem popsaným v předešlém subparagrafu (a ilustrovaném pří-

---

[40]) pojem *Jordanův tvar dané matice* $\mathbf{A}$ by bylo možné ekvivalentně též zavést jako Jordanovu matici operátoru určeného maticí $\mathbf{A}$ ve standardní bázi C^n (srv. poznámka 3.12).

kladem B) nalezneme Jordanovu bázi $\mathcal{B}^{(1)}$ prostoru $\mathbf{R}_1$ příslušnou operátoru $\mathbb{A}|\mathbf{R}_1$ a rovněž Jordanovu bázi $\mathcal{B}^{(2)}$ prostoru $\mathbf{R}_2$ příslušnou operátoru $\mathbb{A}|\mathbf{R}_2$. Hledaná Jordanova báze prostoru $\mathbf{V}$ příslušná operátoru $\mathbb{A}$ bude pak sestavena z $\mathcal{B}^{(1)}$ a $\mathcal{B}^{(2)}$.[41])

Jordanova matice operátoru $\mathbb{A}$ bude tvořena blokem, kterým bude Jordanova buňka příslušná hodnotě 1 řádu $\dim\mathbf{R}_1=1$ a blokem řádu $\dim\mathbf{R}_2=3$ sestaveným s Jordanových buněk příslušných hodnotě 2 (jejich řády zjistíme později).

1. Jordanova báze podprostoru $\mathbf{R}_1$.
Vzhledem k tomu, že $\dim\mathbf{R}_1=1$, je zde situace velmi jednoduchá, neboť pak $\mathbf{R}_1=\mathbf{N}_1$ (proč?), a proto souřadnice vektorů náležících $\mathbf{R}_1$ jsou řešením homogenní soustavy rovnic o matici $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^T$. Jejím vyřešením nalezneme bázi $\mathcal{B}^{(1)}$ prostoru $\mathbf{R}_1$:

$$\mathcal{B}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_{11}^{(1)}\rangle,\ \{\mathbf{e}_{11}^{(1)}\}_{\mathcal{D}}=(1,0,1,0).$$

2. Jordanova báze podprostoru $\mathbf{R}_2$. Postupovat budeme stejně jako v příkladu B.

Zavedeme operátor $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}=\mathbb{A}-2\mathbb{I}$, jehož matice v bázi $\mathcal{D}$ zní

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Známým postupem nalezneme řád m_2 prostoru $\mathbf{R}_2$ - $m_2=2$, a tudíž

$$\mathbf{R}_2=\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2.$$

Nyní sestrojíme bázi $\mathcal{C}_2$ (tj. bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2 \bmod \mathrm{Ker}\mathbb{B}$) a pomocí ní pak bázi $\mathcal{C}_1$ (tj. bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$).

- báze $\mathcal{C}_2$

Postupem, který je čtenáři znám, nalezneme báze $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$ a $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2$, pomocí nichž pak sestrojíme bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2$ modulo $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$:

Báze $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$: $\langle(0,1,0,1),(0,1,1,0)\rangle$,

Báze $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2$: $\langle(0,1,0,0,),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$.

---

[41]) prvky těchto bází i jejich cyklické složky budeme indexovat stejným systémem, který jsme zavedli v subparagrafu předešlém, ale navíc připojíme vpravo nahoru označení příslušné báze - tj. (1), resp. (2).

Jak vidíme, $\dim\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2=3$ a $\dim\mathrm{Ker}\mathbb{B}=2$, tudíž:

$n(2)=1$ a $n(1)=2$, z čehož $y(1)=1$ a $y(2)=1$,

což znamená, že Jordanova báze $\mathcal{B}^{(2)}$ prostoru $\mathbf{R}_2$ bude tvořena jednou složkou délky 1 a jednou složkou délky 2 (a příslušná matice bude v Jordanově tvaru, její diagonála bude tvořena jednou buňkou řádu 1 a jednou buňkou řádu 2; obě budou přirozeně příslušny hodnotě 2).[42]

Z předešlého plyne, že báze $\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2$ modulo $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$, tj. $\mathcal{E}_2$, zní

$$\mathcal{E}_2=\langle \mathbf{e}_{21}^{(2)}\rangle,\ \{\mathbf{e}_{21}^{(2)}\}_{\mathcal{D}}=(0,0,0,1).$$

- báze $\mathcal{E}_1$ (báze $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$):

$$\mathcal{E}_1=\langle \mathbf{e}_{11}^{(2)},\mathbf{e}_{12}^{(2)}\rangle,$$

kde $\mathbf{e}_{11}^{(2)}=\mathbb{B}(\mathbf{e}_{21}^{(2)})$ a $\mathbf{e}_{12}^{(2)}$ je libovolný vektor doplňující $\mathbf{e}_{11}^{(2)}$ na bázi $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$.

Konkrétně pak $\{\mathbf{e}_{11}^{(2)}\}_{\mathcal{D}}=(0,0,-1,1)$ a volíme např. $\{\mathbf{e}_{12}^{(2)}\}_{\mathcal{D}}=(0,1,0,1)$.

Nyní sestrojíme systém bází $\mathcal{B}_1^{(2)}$, $\mathcal{B}_2^{(2)}$ dle (26-3):

$$\mathcal{B}_1^{(2)}=\langle \mathbf{e}_{21}^{(2)},\mathbf{e}_{11}^{(2)}\rangle,\ \mathcal{B}_2^{(2)}=\langle \mathbf{e}_{12}^{(2)}\rangle.$$

Jordanovu bázi $\mathcal{B}^{(2)}$ získáme sestavením z $\mathcal{B}_1^{(2)}$, $\mathcal{B}_2^{(2)}$:

$$\mathcal{B}^{(2)}=\langle \mathbf{e}_{21}^{(2)},\mathbf{e}_{11}^{(2)},\mathbf{e}_{12}^{(2)}\rangle,$$

neboli

$$\mathcal{B}^{(2)}=\langle (0,0,1,0),(0,0,-1,1),(0,1,0,1)\rangle.$$

3. Jordanova báze $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}=\mathbf{R}_1\oplus\mathbf{R}_2$

Tuto bázi obdržíme sestavením z bází $\mathcal{B}^{(1)}$ a $\mathcal{B}^{(2)}$, tj.

$$\mathcal{B}=\langle \mathbf{e}_{11}^{(1)},\mathbf{e}_{21}^{(2)},\mathbf{e}_{11}^{(2)},\mathbf{e}_{12}^{(2)}\rangle,$$

neboli

$$\mathcal{B}=\langle (1,0,1,0),(0,0,1,0),(0,0,-1,1),(0,1,0,1)\rangle,$$

její prvky budeme po řadě značit $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$.

---

[42]) diagonála Jordanovy matice příslušné operátoru $\mathbb{A}$ bude proto tvořena buňkami $\mathbf{J}_1^{(1)}$, $\mathbf{J}_2^{(1)}$ a $\mathbf{J}_2^{(2)}$.

Proveďme nyní zkoušku - nalezněme matici $(\mathbb{A},\mathcal{B})$:

Výpočtem zjistíme, že

$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_1)\}_{\mathcal{D}}=(1,0,1,0),\ \{\mathbb{A}(\mathbf{e}_2)\}_{\mathcal{D}}=(0,0,1,1),$$
$$\{\mathbb{A}(\mathbf{e}_3)\}_{\mathcal{D}}=(0,0,-2,2),\ \{\mathbb{A}(\mathbf{e}_4)\}_{\mathcal{D}}=(0,2,0,2),$$

neboli

$$\mathbb{A}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_1,\ \mathbb{A}(\mathbf{e}_2)=2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\ \mathbb{A}(\mathbf{e}_3)=2\mathbf{e}_3,\ \mathbb{A}(\mathbf{e}_4)=2\mathbf{e}_4,$$

a proto

$$(\mathbb{A},\mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

což je opravdu matice v Jordanově tvaru - její diagonálu tvoří tři Jordanovy buňky - jedna příslušná hodnotě 1 a dvě příslušné hodnotě 2, přičemž jedna z nich je řádu 1 a druhá řádu 2.

34. Poznámka Očíslování bazí, z nichž je sestavena Jordanova báze, bylo zvoleno tak, že cyklické složky příslušné dané vlastní hodnotě jsou řazeny dle svých délek sestupně. Je ovšem možné je řadit rovněž obráceně, s čímž se také čtenář může setkat. V příslušné Jordanově matici se to projeví tím, že blok příslušný dané vlastní hodnotě je tvořen Jordanovými buňkami řazenými od nejmenšího k největšímu řádu.

Příklad D

Nechť jsou dány matice **A**, **D** téhož řádu nad C:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda jsou podobné.

Řešení

Nalezneme Jordanovy tvary matic **A** a **D**, které pak s ohledem na větu 33 porovnáme.

K nalezení Jordanova tvaru matice není třeba hledat Jordanovu bázi - postačuje znát spektrum matice a počty cyklických složek jednotlivých délek, což jsou počty Jordanových buněk jednotlivých řádů.

1. matice **A**:

V příkladu B jsme již zjistili, že Jordanův tvar této matice zní

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. matice **D**:

Uvažujme některý lineární operátor, jehož je **D** maticí - nechť je to např. operátor $\mathbb{D}$ definovaný na C^3 ve standardní bázi právě maticí **D** (srv.poznámka 3.12).[43])

Známým postupem zjistíme, že $\mathscr{S}pec\mathbb{D}=\{1\}$ - tudíž $\mathbf{R}_1=C^3$, a že řád m podprostoru $\mathbf{R}_1$ je roven 2. Jelikož obě matice mají táž spektra i řády jednotlivých kořenových podprostorů, má smysl jejich podobnost dále vyšetřovat (v opačném případě by přirozeně byla vyloučena).

Nyní je třeba zjistit n(1), n(2) a následně y(1), y(2), čímž bude Jordanův tvar matice **D** určen (viz věty 21, 22).

Zaveďme operátor $\mathbb{B}=(\mathbb{D}-\mathbb{I})$. Jeho matice zní

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí: $n(1)=\dim\mathrm{Ker}\mathbb{B}$, $n(2)=\dim\mathrm{Ker}\mathbb{B}^2-\dim\mathrm{Ker}\mathbb{B}$.

Vektory náležící $\mathrm{Ker}\mathbb{B}$ nalezneme řešením homogenní soustavy o matici $\mathbf{B}^T$. Dostáváme $\mathrm{Ker}\mathbb{B}=[(1,0,0),(0,0,1)]$, tj. $\dim\mathrm{Ker}\mathbb{B}=2$, odkud

$$n(1)=2,\ n(2)=3-2=1,$$

a tedy

$$y(2)=1,\ y(1)=1.$$

To znamená, že Jordanův tvar matice je tvořen jednou buňkou řádu 2 a jednou buňkou řádu 1, přičemž obě samozřejmě přísluší hodnotě t=1. Jordanův tvar matice **D** je - jak vidíme - týž jako matice **A**, a obě matice jsou proto podobné (srv. s postupem řešení příkladu 1.F).

---

[43]) tento operátor zavádíme z důvodů toliko formálních.

Další doporučená literatura

1. F. Ayres: *Theory and Problems of Matrices*, Schaum Publishing Co., New York 1962
2. J. Bečvář: *Sbírka úloh z lineární algebry*, SPN Praha, 1975
3. L. Bican: *Lineární algebra*, SNTL Praha (edice Matematický seminář), 1979
4. L. Bican: *Lineární algebra v úlohách*, SPN Praha, 1979
5. G. Birkhoff, S. Mac Lane: *Algebra*, Alfa Bratislava, 1974
6. G. Birkhoff, S. Mac Lane: *Prehľad modernej Algebry*, Alfa Bratislava, 1974
7. J. Čižmár: *Grupy geometrických transformácií*, Alfa Bratislava, 1984
8. И. М. Гелфанд: *Лекции по линейной алгебре*, Наука, Москва, 1971
9. V. Havel, J. Holenda: *Lineární algebra*, SNTL Praha, 1984
10. Х. Д. Икрамов: *Задачник по линейной алгебре*, Наука, Москва, 1975
11. D. Klucký: *Kapitoly z lineární algebry I.*, UP Olomouc 1989
12. J. Kropáček: *Příklady z matematiky pro fyziky IV.*, SPN Praha, 1979
13. S. Lipschutz: *Lineare Algebra*, McGraw-Hill Book Company, 1977
14. W. Naylor, G. Sell: *Teória lineárných operátorov v technických a prírodných vedách*, Alfa Bratislava, 1981

RNDr. Marek Jukl, Ph.D.

LINEÁRNÍ OPERÁTORY

Určeno pro studenty matematiky, případně optiky PřF Univerzity Palackého
Výkonný redaktor doc. RNDr. Vladimír Dostál, CSc.
Odpovědný redaktor Jarmila Kopečková

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci,
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc

Olomouc 2001

Vytisklo Polygrafické středisko VUP,
Biskupské nám. 1, 771 11 Olomouc

První vydání

ISBN 80-244-0342-0