13. přednáška 13. ledna 2010

Důkaz. $M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $N = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ tedy buďte dvě mocninné řady, které se jako funkce shodují svými hodnotami na nějaké prosté posloupnosti bodů $z_k \in \mathbf{C}$ konvergující k nule. Můžeme předpokládat, že vždy $z_k \neq 0$. Protože M a N definují na okolí 0 spojité funkce a $M(z_k) = N(z_k)$ pro každé k, máme

$$a_0 = M(0) = \lim_{k\to\infty} M(z_k) = \lim_{k\to\infty} N(z_k) = N(0) = b_0$$

a $a_0 = b_0$. Dále postupujeme indukcí podle indexu koeficientů. Nechť už jsme dokázali, že $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{m-1} = b_{m-1}$. Vezmeme funkce

$$A(z) = \frac{M(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n z^n}{z^m}$$

a

$$B(z) = \frac{N(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n z^n}{z^m} = \frac{N(z) - \sum_{n=0}^{m-1} b_n z^n}{z^m}.$$

Ty jsou obě definovány na nějakém prstencovém okolí 0 a $A(z_k) = B(z_k)$ pro každé k. Dále se $A(z)$ na tomto prstencovém okolí shoduje s funkcí danou mocninnou řadou $\sum_{n\geq 0} a_{m+n} z^n$, jež je spojitá v 0 a má tam hodnotu a_m. Podobně se $B(z)$ shoduje na tomto prstencovém okolí se spojitou funkcí danou mocninnou řadou $\sum_{n\geq 0} b_{m+n} z^n$, jež má v 0 hodnotu b_m. Proto opět

$$a_m = \lim_{z\to 0} A(z) = \lim_{k\to\infty} A(z_k) = \lim_{k\to\infty} B(z_k) = \lim_{z\to 0} B(z) = b_m$$

a $a_m = b_m$. Tedy $a_n = b_n$ pro každé n a koeficienty mocninných řad M a N jsou identické. □

Holomorfní rozšíření a singularity. Jsou-li $X \subset Y \subset \mathbf{C}$ dvě otevřené množiny a $f:\ X \to \mathbf{C}$, $g:\ Y \to \mathbf{C}$ holomorfní funkce splňující $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in X$, řekneme, že g *je holomorfní rozšíření funkce* f *(na množinu* Y*).*

Věta 7 (jednoznačnost holomorfního rozšíření). *Holomorfní rozšíření na souvislou množinu je jednoznačné. Podrobně řečeno, je-li $Y \subset \mathbf{C}$ otevřená a souvislá množina (tj. každé dva body Y lze spojit lomenou čarou ležící v Y) a $g_1, g_2:\ Y \to \mathbf{C}$ jsou dvě holomorfní funkce splňující $g_1(x) = g_2(x)$ pro každé $x \in X$ z nějaké otevřené a neprázdné podmnožiny $X \subset Y$, potom už $g_1(y) = g_2(y)$ pro každé $y \in Y$.*

Vlastně stačí, aby se g_1 a g_2 shodovaly na nějaké prosté posloupnosti bodů (z_k) konvergující k bodu z_0, se z_k i z_0 ležícími v Y, a g_1 a g_2 se pak už musejí shodovat na celé Y. To plyne jednoduše z Věty 5 a Tvrzení 6.

Nechť $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ má poloměr konvergence R, $0 < R < +\infty$, takže $f:\ D(0,R) \to \mathbf{C}$ je holomorfní funkce. Řekneme, že bod $u \in \mathbf{C}$ na konvergenční kružnici, tj. $|u| = R$, je *singularita funkce* f, když neexistuje holomorfní rozšíření

f na žádné jeho okolí. To jest, pro žádné $\delta > 0$ neexistuje holomorfní rozšíření f z $D(0,R)$ na $D(0,R) \cup D(u,\delta)$.

Věta 8 (o singularitách). *Nechť mocninná řada* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *má poloměr konvergence* R *splňující* $0 < R < +\infty$*.*

1. *Alespoň jeden bod* $u \in \mathbf{C}$ *s* $|u| = R$ *je singularitou funkce* f*.*
2. *(Pringsheimova věta) Pokud jsou koeficienty* a_n *reálné a nezáporné, je bod* $u = R$ *singularitou funkce* f*.*

Pro ilustraci věty si vzpomeňme na příklad ze závěru minulé přednášky. Funkce $f : D(0,1) \to \mathbf{C}$, daná mocninnou řadou $\sum_{n\geq 0} z^n$ s poloměrem konvergence $R = 1$, má holomorfní rozšíření na celé $\mathbf{C}$ s výjimkou bodu $z = 1$ díky funkci $g(z) = 1/(1-z)$. Podle Pringsheimovy věty víme, že bod 1 je singularitou f; je to jediná singularita f na konvergenční kružnici $|z| = 1$. Že 1 je singularita f je v tomto případě vidět jednoduše přímo, protože $\lim_{z\to 1^-} f(z) = \lim_{z\to 1^-} g(z) = +\infty$, takže f se nedá rozšířit už ani na $z = 1$ jako funkce (s konečnými komplexními hodnotami).

Jiný příklad. Uvažme funkci $g(z) = 1/(1+z^2)$, která je definovaná a holomorfní na celém $\mathbf{C}$ s výjimkou bodů i a $-i$. Podle Věty 5 je na $D(0,1)$ dána mocninnou řadou, což je geometrická řada

$$g(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \ldots,$$

takže $a_{2n} = (-1)^n$ a $a_{2n-1} = 0$. Tedy $R = 1$ a alespoň jeden bod na $|z| = 1$ je singularitou g (zúžené na $D(0,1)$). Opět je lehké vidět, že singularitami jsou právě body $z = i$ a $z = -i$. Všimněte si, že koeficienty a_n nejsou nezáporné a nelze použít Pringsheimovu větu; bod $z = R = 1$ také už není singularitou $g(z)$.

Analytická kombinatorika. Ukážeme použití předešlé teorie, zejména poloměrů konvergence a singularit, v analytické kombinatorice pro odhady rychlostí růstu enumerativních posloupností, což jsou posloupnosti nezáporných celých čísel (a_n) počítajících nějaké objekty, struktury či věci velikosti n.

Je-li $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ mocninná řada s poloměrem konvergence R, $0 < R < +\infty$, vzorec pro R z Tvrzení 1 můžeme ekvivalentně zformulovat tak, že pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$|a_n| < (1/R + \varepsilon)^n \ \text{ pro } n > n_0, \text{ ale } \ |a_n| > (1/R - \varepsilon)^n \ \text{ pro nekonečně mnoho } n.$$

Tento odhad růstu koeficientů a_n zapíšeme jako $|a_n| \doteq (1/R)^n$. Velikost R tedy udává rychlost exponenciálního růstu koeficientů a_n.

Metoda odhadování rychlosti růstu enumerativních posloupností je v obecnosti následující. Řekněme, že máme takovou posloupnost (a_n), takže a_n jsou nezáporná celá čísla, a chceme nalézt konstantu $c > 0$, pro niž $a_n \doteq c^n$. Vezmeme mocninnou řadu

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

tzv. *generující (či vytvořující) funkci* posloupnosti (a_n), a nalezneme její poloměr konvergence R. Pak $c = 1/R$. Jak ale nalézt R, když rychlost růstu čísel a_n neznáme a chceme ji určit právě pomocí R? To vypadá poněkud beznadějně, ale pomohou nám singularity. Víme, že $a_n \in \mathbf{N}_0$, a typicky je $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho n, takže $R \leq 1$. Dále z kombinatorické definice čísel a_n obvykle snadno plyne, že $R > 0$, tj. $f(z)$ je holomorfní v okolí počátku. Navíc, což je klíčový moment, z této definice obvykle vyplývá nějaký algebraický vztah či vzorec V pro $f(z)$. Nyní stačí nalézt nejmenší reálné $S > 0$ tak, že V určuje řádně (tj. holomorfně) $f(z)$ pro reálné hodnoty $0 \leq z < S$, ale V „selže" pro $z = S$. Podle Pringsheimovy věty víme, že R je singularita f, takže V musí pro nějaké kladné reálné číslo selhat a $S = R$. Okamžik prvního selhání V tedy určuje R a tím máme i $c = 1/R$.

Co to ale znamená, že V selže pro $z = S$? Jednu možnost selhání V jsme už v předešlých příkladech viděli—*nula ve jmenovateli*, přesněji výraz $\frac{1}{0}$ s nulovým jmenovatelem a nenulovým čitatelem (výraz $\frac{0}{0}$ neznamená nutně selhání V, kupříkladu $\frac{z}{z}$ je pro $z = 0$ vpořádku). Je jasné, že když $z = S$ dává ve V výraz $\frac{1}{0}$, neexistuje vůbec žádné rozšíření f na $z = S$ a máme singularitu, $R = S$.

Jiná možnost selhání V je *nula pod odmocninou* $\sqrt{0}$, přesněji 0^α, kde exponent $\alpha \in \mathbf{R}$ není nezáporné celé číslo. Pokud $z = S$ dává ve V nulu pod odmocninou, opět dostáváme singularitu a $R = S$. Proč je nula pod odmocninou pro holomorfní funkce špatná? To už souvisí s holomorfností hlouběji než $\frac{1}{0}$ a vysvětlíme to na příkladu. Ukážeme, že třeba výraz $0^{7/3}$ je špatný. Není těžké definovat funkci $f(z) = z^{7/3} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, to jest funkci splňující $f(z)^3 = z^7$ pro každé $z \in \mathbf{C}$: položíme $f(0) = 0$ a, pro $z = r\mathrm{cis}(\varphi) \neq 0$ (bereme $\varphi \in [0, 2\pi)$),

$$f(z) = z^{7/3} = r^{7/3}\mathrm{cis}(7\varphi/3).$$

Tato funkce však není ani spojitá pro kladné reálné argumenty z, například pro body $z = 1 + \delta i$, $\delta > 0$, ležící mírně nad 1 i $z^{7/3}$ leží mírně nad 1, ale pro body $z = 1 - \delta i$, $\delta > 0$, ležící mírně pod 1 už leží $z^{7/3}$ daleko od 1, poblíž $\mathrm{cis}(7 \cdot 2\pi/3) = \mathrm{cis}(2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tato obtíž je podstatná, funkci splňující $f(z)^3 = z^7$ lze definovat řadou způsobů, ale nikdy to nelze udělat tak, aby f byla holomorfní na nějakém okolí 0. Proč ne? Kdyby to šlo, měla by f na okolí 0 mocninný rozvoj $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Na tomto okolí by tedy mělo platit, že

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n\right)^3 = z^7.$$

Vezmeme-li nejmenší celé číslo $m \geq 0$, že $a_m \neq 0$, porovnání koeficientů mocninných řad na obou stranách rovnosti dává vztahy $a_m^3 = 1$ a $3m = 7$. Poslední rovnost je ale pro celočíselné m nemožná a máme spor.

Nyní se už konečně podíváme na dva konkrétní příklady z analytické kombinatoriky.

Počet dobrých uzávorkování aneb Catalanova čísla. Kolik je 0–1 posloupností délky $2n$, které obsahují n nul a n jedniček a v nichž je v každém počátečním úseku alespoň tolik nul jako jedniček? Říkejme jim *dobré posloupnosti* a označme jejich počet jako c_n. Takže $c_0 = 1$ (prázdná posloupnost), $c_1 = 1$ (posloupnost 01), $c_2 = 2$ (posloupnosti 0011 a 0101) a $a_3 = 5$ (posloupnosti 000111, 001101, 010011, 001011 a 010101). Je vidět, že dobré posloupnosti odpovídají dobrým uzávorkováním s n páry závorek, třeba pro $n = 3$ jsou odpovídající dobrá uzávorkování $((()))$, $(())()$, $()(())$, $(()())$ a $()()()$. Jak rychle posloupnost c_n roste? Ukážeme, že

$$c_n \doteq 4^n.$$

Nerovnosti

$$1 \le c_n \le 4^n$$

jsou jasné—první plyne z toho, že každá posloupnost $010101\ldots01$ délky $2n$ je dobrá a druhá je prostě odhad počtem $2^{2n} = 4^n$ všech slov délky $2n$ nad dvouprvkovou abecedou. Tudíž generující funkce

$$f(z) = \sum_{n\ge0} c_n z^n = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + \cdots$$

má poloměr konvergence R splňující $\frac{1}{4} \le R \le 1$. Algebraický vztah V pro $f(z)$ plynoucí z kombinatorické definice je

$$f(z) = 1 + z \cdot f(z)^2.$$

Je to přímý překlad tohoto kombinatorického rozkladu do řeči generujících funkcí: Dobrá posloupnost $u = u_1u_2\ldots u_{2n}$ (levá strana $f(z)$) je buď prázdná (člen $1 = 1z^0$) a nebo (operace $+$) se dá jednoznačně rozložit jako $u = 0v1w$, kde $01, v, w$ je uspořádaná trojice dobrých posloupností s celkovou délkou $2n$ (člen $z \cdot f(z) \cdot f(z) = z \cdot f(z)^2$). A naopak, pro každou trojici $01, v, w$ dobrých posloupností se součtem délek $2n$ je $u = 0v1w$ dobrá posloupnost s délkou $2n$.

Jaké je tedy nejmenší $S > 0$, že pro $z = S$ vztah V selže? Generující funkce $f(z)$ splňuje rovnici

$$V(z, f(z)) = 0, \quad \text{kde} \quad V(z, y) = zy^2 - y + 1.$$

Číslo $z = S$ určuje soustava $V(z, y) = V_y(z, y) = 0$, protože v $z = S$ musí být *nesplněn* předpoklad $V_y(z, y) \ne 0$ věty o implicitní funkci, aby z $V(z, y) = 0$ nešlo $y = f(z)$ v okolí $z = S$ lokálně vyjádřit jako holomorfní funkce z. Parciální derivace podle y je $V_y(z, y) = 2yz - 1$ a ze soustavy

$$zy^2 - y + 1 = 0, \; 2yz - 1 = 0$$

dosazením $z = 1/2y$ do první rovnice dostáváme $y/2 - y + 1 = 0$, čili $y = 2$ a $z = S = 1/2y = 1/4$. Takže $R = S = \frac{1}{4}$ a $a_n \doteq 4^n$. Kombinatorický požadavek dobrého uzávorkování tedy na úrovni exponenciálního růstu podstatně nesnižuje celkový počet 0–1 slov délky $2n$.

Že $R = S = \frac{1}{4}$ lze v tomto případu odvodit jednoduše i bez věty o implicitní funkci (jejíž verzi pro komplexní funkce jsme beztak neměli) přímo vyřešením kvadratické rovnice $V(z, f(z)) = zf(z)^2 - f(z) + 1 = 0$. Má dvě řešení

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Naši generující funkci $f(z)$ dává řešení se znaménkem $-$, protože

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{1/2} = \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (-4z)^n = 1 - 2z - 2z^2 - \ldots$$

a obě jedničky se musejí odečíst. Tedy

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Tento vzorec V pro $f(z)$ může selhat pro $z = 0$ (nula ve jmenovateli) a pak pro $z = \frac{1}{4}$ (nula pod odmocninou). Pro $z = 0$ ale dostáváme výraz $\frac{0}{0}$, přesněji $\frac{2z+2z^2+\ldots}{2z}$, který má holomorfní rozšíření do okolí 0 (totiž právě $f(z)$). První selhání je proto až v $z = \frac{1}{4}$, a tak $R = \frac{1}{4}$.

Tento postup je průhlednější než použití věty o implicitní funkci, ale má tu nevýhodu, že vyžaduje znalost explicitního řešení rovnice $V(z, f(z)) = 0$. Neumíme-li ji explicitně vyřešit (což se většinou v těchto úlohách stává), musí nastoupit implicitní funkce. Číslům c_n se říká *Catalanova čísla* a z předchozího explicitního vzorce pro $f(z)$ a uvedeného binomického rozvoje $(1-4z)^{1/2}$ se snadno odvodí vzorec

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Stirlingova formule $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ dává přesnější asymptotický odhad

$$c_n \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4^n}{n^{3/2}},$$

který lze odvodit rovněž pomocí singularit.

Počet umístění míčů do beden čili počet surjekcí. Kolika způsoby lze umístit n očíslovaných míčů $m_1, m_2, \ldots, m_n$ do nekonečně mnoha beden $b_1, b_2, \ldots$ tak, že bedny s alespoň jedním míčem uvnitř tvoří počáteční interval $b_1, b_2, \ldots, b_m$ (kde nutně $m \leq n$)? Jinými slovy, kolik je surjektivních zobrazení z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ na nějaký počáteční interval množiny přirozených čísel $\{1, 2, \ldots\}$? Označíme-li tyto počty jako s_n, máme $s_0 = 1$ (prázdná surjekce), $s_1 = 1$ (jedno umístění $b_1 = \{m_1\}$) a $s_2 = 3$ (tři umístění (i) $b_1 = \{m_1, m_2\}$, (ii) $b_1 = \{m_1\}$, $b_2 = \{m_2\}$ a (iii) $b_1 = \{m_2\}$, $b_2 = \{m_1\}$).

Jak rychle počty surjekcí s_n rostou? Není těžké vidět, že

$$n! \leq s_n,$$

protože umístění po jednom míči do bedny dává $n!$ permutací čísel $1, 2, \dots, n$. Odvodit dobrý horní odhad pro s_n je nyní obtížnější. Důkaz asymptotického odhadu

$$\frac{s_n}{n!} \doteq (1/\log 2)^n$$

jen naznačíme. Vezmeme mocninnou řadu

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{s_n z^n}{n!} = 1 + z + \frac{3z^2}{2!} + \cdots$$

(koeficient u z^n je tedy $s_n/n!$). Dá se ukázat, že z kombinatorické definice počtů s_n vyplývá tento vzorec V pro $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{s_n z^n}{n!} = \frac{1}{2 - \exp(z)}.$$

První selhání V je typu $\frac{1}{0}$ pro $z = S = \log 2$. Takže poloměr konvergence $f(z)$ je $R = \log 2$ a dostáváme uvedený exponenciální růst podílů $s_n/n!$.