



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Jan Paclt

**Vybrané úlohy z diferenciální geometrie**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Učitelství fyziky - Učitelství  
matematiky

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Rád bych na tomto místě poděkoval především vedoucímu této diplomové práce, doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., za poskytnutí literatury a za zasílání podnětných a podrobných připomínek k sepsaným textům i k formální stránce práce. Dále bych chtěl poděkovat své přítelkyni Tereze za její podporu a velikou dávku trpělivosti, kterou mi věnovala.

Název práce: Vybrané úlohy z diferenciální geometrie

Autor: Jan Paclt

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato diplomová práce obsahuje přehled a řešení vybraných úloh z diferenciální geometrie rovinných křivek. Největší pozornost je věnována výpočtům obsahů rovinných oblastí ohraničených rovinnými křivkami a dále evolutám, involutám a jim příbuzným trochoidám a jejich vlastnostem. Práce také obsahuje ucelený teoretický úvod do diferenciální geometrie rovinných křivek. Některé myšlenky a matematická odvození převzatá z původních publikací byly autorem dále rozšířeny a zobecněny. Veškerá odvození uvedená v práci jsou podána v jednotné konvenci, což usnadní čtenáři orientaci a hledání souvislostí mezi diskutovanými tématy. Práce může najít využití jako studijní podpora studentům bakalářských kurzů geometrie nebo speciálně posluchačům studia se zaměřením na deskriptivní geometrii.

Klíčová slova: rovnoběžné křivky, trochoidy, Mamikonova věta, planimetr

Title: Selected problems in differential geometry

Author: Jan Paclt

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis covers an overview and solution to selected problems in the differential geometry of plane curves. It focuses mainly on calculating areas of regions bounded by plane curves and also on evolutes, involutes and related trochoids and their properties. The work also provides a self-contained theoretical introduction to the differential geometry of plane curves. Some ideas and mathematical derivations obtained from the original publications were further expanded and generalized by the author. All derivations mentioned in the work are given in a uniform convention, which should make it easier for the reader to orientate and find relations between the topics discussed. The thesis can be used as a study support for students of bachelor's courses in geometry or specifically for students with a focus on descriptive geometry.

Keywords: parallel curves, trochoids, Mamikon's theorem, planimeter

# Obsah

Úvod	3
<b>1 Obecně o rovinných křivkách</b>	<b>5</b>
1.1 Základní pojmy	5
1.2 Křivost rovinné křivky	7
1.2.1 Frenetovy vzorce	8
1.2.2 Geometrický význam křivosti a úhlové zobrazení	10
1.3 Evolventy a evoluty	11
1.4 Uzavřené křivky	14
1.4.1 Rotační index rovinné křivky	15
1.4.2 Oblast ohraničená uzavřenou křivkou	16
1.4.3 Obsah parametrizované plochy	19
<b>2 Rovnoběžné křivky k zadané křivce</b>	<b>22</b>
2.1 Základní vlastnosti rovnoběžných křivek	23
2.1.1 Zobecnění odvozených vztahů	26
2.2 Singulární body rovnoběžných křivek	28
2.3 Délka uzavřených rovnoběžných křivek a rotační index	30
<b>3 Zobecněná úloha o koze</b>	<b>33</b>
3.1 Řešení úlohy	33
3.2 Příklady	38
3.2.1 Kruhová ohrada	38
3.2.2 Eulerova spirála	39
3.3 Koza uvězněná mezi cykloidami	40
3.3.1 Výpočet obsahu výběhu	41
3.3.2 Parametrizace hranice výběhu	43
<b>4 Trochoidy</b>	<b>46</b>
4.1 Délka trochoidy	49
4.2 Součet délek levé a pravé trochoidy	51
4.3 Obsah oblasti mezi oblouky trochoid	51
4.4 Příklady významných trochoid	53
4.4.1 Cykloida	53
4.4.2 Epitrochoida a hypotrochoida	55
4.4.3 Peritrochoida	59
<b>5 Mamikonova věta a její aplikace</b>	<b>66</b>
5.1 Mamikonova věta	66
5.2 Aplikace Mamikonovy věty	69
5.2.1 Uzavřené křivky	69
5.2.2 Obsah plochy pod vlečnou křivkou	70
5.2.3 Obsah plochy pod obloukem cykloidy	71

<b>6</b>	<b>Měření obsahu rovinných oblastí pomocí planimetru</b>	<b>75</b>
6.1	Obecně o funkci planimetru . . . . .	75
6.1.1	Funkce integračního kolečka . . . . .	76
6.2	Lineární planimetr . . . . .	77
6.2.1	Teoretické objasnění činnosti lineárního planimetru . . . . .	78
6.3	Věta o planimetru . . . . .	80
6.4	Polární planimetr . . . . .	84
6.4.1	Teoretické objasnění činnosti polárního planimetru . . . . .	84
	<b>Závěr</b>	<b>89</b>
	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>90</b>

# Úvod

Diferenciální geometrie jakožto disciplína zabývající se lokálními i globálními vlastnostmi křivek a ploch si v matematice za svou dlouhou historii vydobyla výsostné postavení. Nasazením metod diferenciálního a integrálního počtu při řešení geometrických úloh nejenže přinesla nový pohled při popisu matematických objektů zkoumaných již od antických dob, ale zejména umožnila další překotný rozvoj poznatků z rozličných oblastí lidské činnosti, jako je kartografie, fyzika nebo strojní inženýrství. Mezi současnými aplikacemi jmenujme přímé využití některých výsledků diferenciální geometrie v počítačové grafice.

Tato práce rozebírá pět vybraných úloh z diferenciální geometrie rovinných křivek, převážně se zaměřením na výpočty obsahů oblastí ohraničených rovinnými křivkami. Dále se zaměřuje na hledání parametrizací některých význačných křivek, na evoluty, evolventy a na geometrickou povahu jim příbuzné trochoidy. Cílem práce je poskytnout čtenáři ucelený přehled některých aplikací základních poznatků diferenciální geometrie a rovněž prezentovat některé účinné metody řešení úloh s diferenciální geometrií souvisejících. Rozebíraná témata by přitom měla být přístupna i čtenářům, které obeznámení s diferenciální geometrií ve větší míře teprve čeká, tedy zejména studentům matematických oborů. V práci se proto autor snaží klást důraz na názornost a srozumitelnost textu a prezentovaných postupů.

V první kapitole čtenář nalezne shrnutí základních poznatků z diferenciální geometrie rovinných křivek. U čtenáře se předpokládá předchozí zvládnutí základů matematické analýzy a lineární algebry. V této úvodní kapitole se pak může čtenář seznámit s klíčovými pojmy a výsledky geometrie křivek, které využíváme v dalších částech práce. Snažíme se přitom sice o stručný, ale přesto pokud možno názorný výklad podpořený grafickou i slovní geometrickou interpretací diskutovaných pojmů. Dále je do úvodu zařazen stručný výklad k uzavřeným křivkám a některým pro ně specifickým pojmům. Na tomto místě je třeba uvést, že při zpracování úvodní kapitoly vycházel autor ve velké míře ze svých poznámek z přednášek věnovaným diferenciální geometrii, vedených doc. RNDr. Antonínem Slavíkem, Ph.D. na půdě Matematicko-fyzikální fakulty UK pro studenty matematiky s učitelským zaměřením. Z nich byla také převzata konvence matematických zápisů. Obecně lze říci, že tato práce využívá běžných matematických konvencí a definic, potenciálnímu čtenáři jistě dobře známých.

Ve druhé kapitole prozkoumáme vlastnosti rovnoběžných křivek, včetně problematiky zavedení tohoto pojmu. Speciálně se pak budeme soustředit na uzavřené rovnoběžné křivky. Ve třetí kapitole je diskutována tzv. úloha o koze (angl. *goat problem*), kde se věnujeme nejen výpočtu obsahů oblastí ohraničených rovinnými křivkami, ale dotkneme se také pojmu evolventa rovinné křivky.

S pojmem evolventa alespoň co do geometrického významu souvisí rovněž téma diskutované ve čtvrté kapitole. Zabýváme se zde trochoidami, s jejichž speciálním případem – cykloidou – se již mnozí čtenáři jistě setkali.

V páté kapitole je již ústředním pojmem obsah, konkrétně obsah generovaný tečnými úsečkami k zadané křivce. Rozebíráme zde odvození tvrzení známého jako *Mamikonova věta* včetně jeho geometrických aplikací.

Poslední kapitola, věnovaná rovněž určování obsahů rovinných oblastí, má po-

někud praktičtější charakter. Cílem je seznámit zde čtenáře s principem činnosti planimetru a podat matematické zdůvodnění jeho funkce.



# 1. Obecně o rovinných křivkách

V této úvodní kapitole zavedeme základní pojmy diferenciální geometrie křivek a uvedeme některá tvrzení, která budeme v používat v kapitolách následujících. Soustředíme se zejména na křivky v  $\mathbb{R}^2$ , tedy na křivky rovinné. Pokusíme se přitom o co nejnázornější geometrickou interpretaci všech uváděných pojmů. Opírat se budeme pouze o tvrzení ze základních kurzů matematické analýzy a lineární algebry, ostatní tvrzení specifická pro teorii křivek budeme uvádět včetně důkazů nebo alespoň jejich náznaků.

Osnova této úvodní kapitoly vychází z autorových poznámek z předmětu *Diferenciální geometrie* vedeného doc. RNDr. Antonínem Slavíkem, Ph.D. v akademickém roce 2018/2019 na MFF UK. Z tohoto předmětu byly rovněž převzaty symbolické konvence užívané v této práci. Přehledný úvod do teorie křivek lze nalézt rovněž v učebnici (Tapp, 2016, str. 1 – 41).

## 1.1 Základní pojmy

**Definice 1.** *Parametrizovanou rovinnou křivkou rozumíme diferencovatelné zobrazení  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kde  $I \subset \mathbb{R}$  je interval. Obor hodnot takového zobrazení se nazývá obraz křivky  $c$ .*

Na formální rozlišení křivky jakožto zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}^2$  a jejího obrazu jakožto množiny bodů v  $\mathbb{R}^2$  se neklade vždy důraz, při běžném používání se tyto pojmy často zaměňují. Je však dobré si povšimnout, že dvě křivky s různou parametrizací mohou mít stejný obraz. Uvedme jako příklad křivky

$$\mathbf{c}(u) = \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right), \quad u \in [-1; 1],$$
$$\mathbf{d}(v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}, \quad v \in [0; \pi],$$

jejichž obrazem je v obou případech půlkružnice o poloměru 1 se středem v počátku soustavy souřadnic. Proto zavedeme ještě pojem *ekvivalence křivek*.

**Definice 2.** *Řekneme, že křivky  $c : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a  $d : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jsou ekvivalentní, pokud existuje spojitě diferencovatelná bijekce s nenulovou derivací  $f : I_1 \rightarrow I_2$  taková, že pro všechna  $t \in I_1$  je  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{d}(f(t))$ . Křivku  $d$  pak nazýváme reparametrizace křivky  $c$ .*

Na definici křivky, resp. ekvivalence křivek, lze nahlížet fyzikální optikou. Obraz křivky můžeme chápat jako trajektorii, kterou opíše hmotný bod při svém pohybu. Samotnou křivku, tedy zobrazení  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pak chápeme jako funkci udávající polohu bodu v rovině v čase  $t \in I$ , tedy konkrétní způsob, jakým je trajektorie opisována. Dva pohybující se hmotné body mohou mít při svém pohybu shodnou trajektorii, mohou však také mít ve stejném čase různou polohu na této trajektorii.

**Definice 3.** Derivací křivky  $c$ , která je určena svými složkami  $(x(t); y(t))$ , budeme rozumět vektor

$$\mathbf{c}'(t) \equiv \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

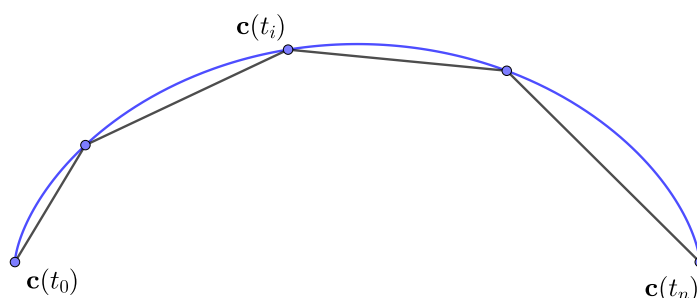
Derivace křivky  $c$  v bodě  $t$  má přitom směr vektoru v tomto bodě k ní tečného. Křivku  $c$  nazveme regulární v bodě  $t_0 \in I$ , jestliže  $\|\mathbf{c}'(t_0)\| \neq 0$ . Jinak řekneme, že bod  $t_0$  je singulárním bodem křivky  $c$ . Dále řekneme, že je křivka  $c$  regulární, pokud je regulární v každém bodě  $I$ .

Derivace křivky má opět názornou fyzikální interpretaci. Udává rychlost hmotného bodu v čase  $t \in I$ .

**Definice 4.** Délkou křivky  $c$  na intervalu  $[a; b] \subset I$  rozumíme číslo

$$l = \sup \sum_{i=1}^n \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|,$$

kde supremum bereme přes všechna dělení  $D = \{t_i; a = t_0 < t_1 \cdots < t_n = b\}$ .



Obrázek 1.1: Lomená čára aproximující křivku  $c$ .

Suma v předchozí definici reprezentuje délku lomené čáry, kterou vepíšeme křivce  $c$ . Čím více pak zjmníme dělení intervalu  $[a; b]$ , tím lépe lomená čára křivku  $c$  aproximuje. Fyzikální interpretace délky křivky je zřejmá – jde o dráhu, kterou urazí hmotný bod během svého pohybu. Definice 4 příliš dobře neposlouží pro obecné výpočty, lze z ní však odvodit vztah pro přesný výpočet délky křivky  $c$  na intervalu  $[a; b]$ :

$$l = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt. \quad (1.1)$$

**Definice 5.** Řekneme, že křivka  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  je parametrizována obloukem, jestliže pro všechna  $t \in I$  je  $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$ .

V následujících kapitolách budeme při obecných výpočtech u křivek předpokládat právě parametrizaci obloukem. Není divu, je-li křivka  $c$  parametrizována obloukem, jsou zajištěny následující vlastnosti:

- křivka  $c$  je regulární,
- délka křivky  $c$  na intervalu  $[a; b]$  je dle vztahu (1.1) rovna  $b - a$ .

Je ovšem na místě otázka, zda vůbec pro každou křivku parametrizace obloukem existuje.

Předpokládejme, že  $c : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je regulární parametrizovaná křivka. Zvolme bod  $t_0 \in I_1$  a definujme funkci  $s(t)$ :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{c}'(u)\| du.$$

Pro regulární křivku  $c$  splňuje tato funkce předpoklady uvedené v Definicí 2, platí totiž  $s'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\| > 0$ . Jde tedy o prostou funkci zobrazující interval  $I_1$  na jiný interval  $I_2$ . K reparametrizaci křivky  $c$  lze tak využít inverzní funkci  $t(s)$ . Novou parametrizaci  $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t(s))$ ,  $s \in I_2$ , můžeme derivovat jako složenou funkci:

$$\|\mathbf{d}'(s)\| = \|\mathbf{c}'(t(s))t'(s)\| = \frac{\|\mathbf{c}'(t)\|}{|s'(t)|} = \frac{\|\mathbf{c}'(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = 1.$$

Je vidět, že pro každou regulární křivku  $c$  existuje parametrizace obloukem, ačkoliv analytické vyjádření funkce  $t(s)$  může být v konkrétních případech nemožné. Z fyzikálního pohledu odpovídá parametrizace obloukem pohybu, kdy hmotný bod opisuje obraz křivky  $c$  jednotkovou rychlostí.

**Definice 6.** Uvažujme křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Dvojici vektorů

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \begin{pmatrix} T_x(t) \\ T_y(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}(t) = \begin{pmatrix} -T_y(t) \\ T_x(t) \end{pmatrix},$$

nazveme *Frenetův repér křivky  $c$  v bodě  $t$* . Vektor  $\mathbf{T}$ , resp.  $\mathbf{N}$  nazýváme *tečný*, resp. *normálový vektor křivky  $c$* .

Normálový vektor  $\mathbf{N}$  tedy získáme tak, že tečný vektor  $\mathbf{T}$  otočíme o úhel  $+\pi/2$ . Je-li křivka  $c$  parametrizována obloukem, platí navíc  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{c}'(t)$ . Je vhodné si povšimnout, že vektory  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{N}$  tvoří společně ortonormální bázi ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.2 Křivost rovinné křivky

Křivost jakožto důležitý parametr popisující lokální vlastnosti křivek i ploch patří mezi ústřední pojmy diferenciální geometrie. Začneme poněkud formální definicí křivosti, dále se pokusíme názorněji nastínit i její geometrický význam.

**Definice 7.** Necht' je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární křivka a  $\mathbf{T}(t)$ , resp.  $\mathbf{N}(t)$  její tečný, resp. normálový vektor. Pak číslo

$$\kappa(t) \equiv \frac{\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

nazveme křivost křivky  $c$  v bodě  $t$ .

**Věta 1.** Necht' je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární křivka. Pak pro všechna  $t \in I$  platí

$$\kappa(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t) | \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

*Důkaz.* Vzorec pro výpočet křivosti odvodíme pouhým rozepsáním definice křivosti:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &\equiv \frac{\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \frac{1}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \left( \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \right)' \cdot \mathbf{N}(t) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \left[ \left( \frac{1}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \right)' \mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{N}(t) + \frac{1}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \mathbf{c}''(t) \cdot \mathbf{N}(t) \right]. \end{aligned}$$

Skalární součin  $\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{N}(t)$  je ovšem roven nule, neboť jsou vektory navzájem kolmé. Po zjednodušení hranaté závorky tedy dostaneme:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{1}{\|\mathbf{c}'(t)\|^2} \mathbf{c}''(t) \cdot \mathbf{N}(t) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3} \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3} \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

### 1.2.1 Frenetovy vzorce

Frenetovy vzorce jsou nástrojem umožňujícím efektivní obecné výpočty derivací tečného a normálového vektoru s využitím křivosti. Začneme uvedením pomocného tvrzení.

**Lemma 2.** Necht' je  $\mathbf{F}(t)$  pro všechna  $t \in I$  jednotkový rovinný vektor. Potom pro všechna  $t \in I$  platí

$$\mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{F}(t) = 0.$$

*Důkaz.* Protože je vektor  $\mathbf{F}(t)$  jednotkový, platí  $\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t) = 1$ . Nyní tuto rovnost zderivujeme. Derivace pravé strany je rovna nule, levou stranu rozepíšeme:

$$(\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t))' = \mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}'(t) = 2\mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{F}(t) = 0,$$

z čehož dostáváme vztah, který jsme chtěli dokázat. □

**Věta 3** (Frenetovy vzorce). *Nechť  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  je regulární křivka. Pak pro všechna  $t \in I$  platí tzv. Frenetovy vzorce:*

- $\mathbf{T}'(t) = \kappa(t)\|\mathbf{c}'(t)\|\mathbf{N}(t)$ ,
- $\mathbf{N}'(t) = -\kappa(t)\|\mathbf{c}'(t)\|\mathbf{T}(t)$ .

*Důkaz.* Protože vektory  $\mathbf{T}(s)$  a  $\mathbf{N}(s)$  tvoří ortonormální bázi v prostoru  $\mathbb{R}^2$ , můžeme psát

$$\mathbf{T}'(t) = (\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t))\mathbf{T}(t) + (\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{N}(t))\mathbf{N}(t).$$

Skalární součin  $\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t)$  je dle Lemmatu 2 nulový. Pro druhý skalární součin pak z definice křivosti dostáváme

$$\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{N}(t) = \kappa(t)\|\mathbf{c}'(t)\|.$$

Proto platí

$$\mathbf{T}'(t) = \kappa(t)\|\mathbf{c}'(t)\|\mathbf{N}(t).$$

Obdobně lze zapsat také derivaci normálového vektoru:

$$\mathbf{N}'(t) = (\mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{T}(t))\mathbf{T}(t) + (\mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{N}(t))\mathbf{N}(t).$$

Skalární součin  $\mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{N}(t)$  je opět dle Lemmatu 2 nulový. Dále si všimněme, že

$$(\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{N}(t))' = \mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{N}(t) + \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{N}'(t) = 0.$$

Z poslední rovnosti a z definice křivosti vyplývá:

$$\mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = -\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{N}(t) = -\kappa(t)\|\mathbf{c}'(t)\|,$$

tedy

$$\mathbf{N}'(t) = -\kappa(t)\|\mathbf{c}'(t)\|\mathbf{T}(t).$$

□

## 1.2.2 Geometrický význam křivosti a úhlové zobrazení

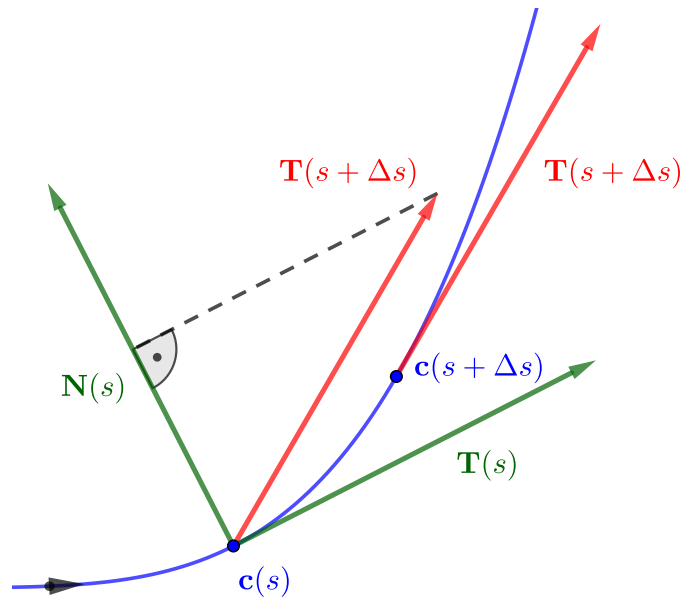
Věta 1 poskytuje návod, jak vypočítat křivost regulární křivky s obecnou parametrizací. Abychom mohli podat o něco názornější geometrickou interpretaci křivosti, podíváme se blíže na křivost křivek parametrizovaných obloukem. Pro ně dle Definice 7 platí

$$\kappa(s) = \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{N}(s).$$

Představme si, že se na křivce  $c$  posuneme z bodu  $\mathbf{c}(s)$  do bodu  $\mathbf{c}(s + \Delta s)$ , jak je vidět na Obrázku 1.2. Pak přibližně platí

$$\kappa(s) \approx \frac{\mathbf{T}(s + \Delta s) - \mathbf{T}(s)}{\Delta s} \cdot \mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}(s + \Delta s) \cdot \mathbf{N}(s)}{\Delta s}.$$

Výraz v čitateli udává průmět vektoru  $\mathbf{T}(s + \Delta s)$  do směru daného normálovým vektorem  $\mathbf{N}(s)$ . Stáčí-li se při rostoucím  $s$  vektor  $\mathbf{T}$  do směru daného vektorem  $\mathbf{N}(s)$ , pak je křivost křivky  $c$  v bodě  $s$  kladná. Navíc čím větší je otočení vektoru  $\mathbf{T}$ , tím je větší i křivost. Naopak, stáčí-li se vektor  $\mathbf{T}$  proti směru vektoru  $\mathbf{N}(s)$ , pak je křivost křivky  $c$  záporná.



Obrázek 1.2: U křivky s kladnou křivostí v bodě  $s$  se pro rostoucí hodnotu parametru stáčí tečný vektor do směru normálového vektoru v bodě  $s$ .

Další geometrickou interpretaci křivosti poskytne následující věta, ve které zároveň zavedeme pojem *úhlové zobrazení*.

**Věta 4.** *Nechť je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  křivka parametrizovaná obloukem a  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  diferencovatelná funkce taková, že pro všechna  $s \in I$  je*

$$\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(s) \\ \sin \alpha(s) \end{pmatrix}.$$

Potom  $\alpha'(s) = \kappa(s)$ . Funkci  $\alpha$  nazýváme úhlové zobrazení příslušné vektoru  $\mathbf{T}$ .

*Důkaz.* Derivací vektoru  $\mathbf{T}$  dostaneme

$$\mathbf{T}'(s) = \alpha'(s) \begin{pmatrix} -\sin \alpha(s) \\ \cos \alpha(s) \end{pmatrix} = \alpha'(s)\mathbf{N}(s).$$

Z Frenetových vzorců zároveň vyplývá  $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$ . Porovnáním obou vztahů získáme  $\alpha'(s) = \kappa(s)$ . □

Ze způsobu, jakým jsme zavedli funkci  $\alpha(t)$ , vyplývá, že jde o orientovaný úhel, který svírá vektor tečny  $\mathbf{T}$  s kladnou poloosou  $x$ . Dle Věty 4 tedy křivost  $\kappa$  pro křivku parametrizovanou obloukem udává úhlovou rychlost otáčení tečného vektoru  $\mathbf{T}$ . Podrobnější pojednání o křivosti a o jejím geometrickém významu společně s názornými ilustracemi nalezne čtenář v publikaci (Tapp, 2016, str. 32 – 36).

### 1.3 Evolventy a evoluty

V této sekci nejprve zavedeme pojem oskulační kružnice. Naším cílem bude nalézt pro regulární křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  v bodě  $t \in I$  takovou kružnici, která má křivost  $\kappa(t)$ , tedy stejnou, jakou má samotná křivka  $c$ . Motivací je fakt, že sestavení kružnice jakožto nejjednoduššího nelineárního útvaru je snadné, a proto můžeme kružnicí s vhodnou křivostí křivku v okolí bodu  $\mathbf{c}(t)$  efektivně aproximovat. Např. ve fyzice se tím na složitých trajektoriích usnadní výpočty veličin, jako je dostředivé zrychlení.

Nejprve si rozmyslíme, jaký má mít oskulační kružnice poloměr. Vyjdeme z parametrizace kružnice o poloměru  $R$ , z níž pomocí Věty 1 zjistíme křivost kružnice:

$$\mathbf{k}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi].$$

Determinant matice sestavené z vektorů první a druhé derivace křivky  $k$  je

$$\det(\mathbf{k}'(t) | \mathbf{k}''(t)) = \begin{vmatrix} -R \sin t & -R \cos t \\ R \cos t & -R \sin t \end{vmatrix} = R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t) = R^2.$$

Pro normu první derivace pak dostaneme  $\|\mathbf{k}'(t)\| = R$ . Ze vztahu daného Větou 1 plyne

$$\kappa_k(t) = \frac{1}{R}.$$

Oskulační kružnice regulární křivky  $c$  s křivostí  $\kappa$  má tedy v bodě  $t$ , kde  $\kappa(t) \neq 0$ , poloměr

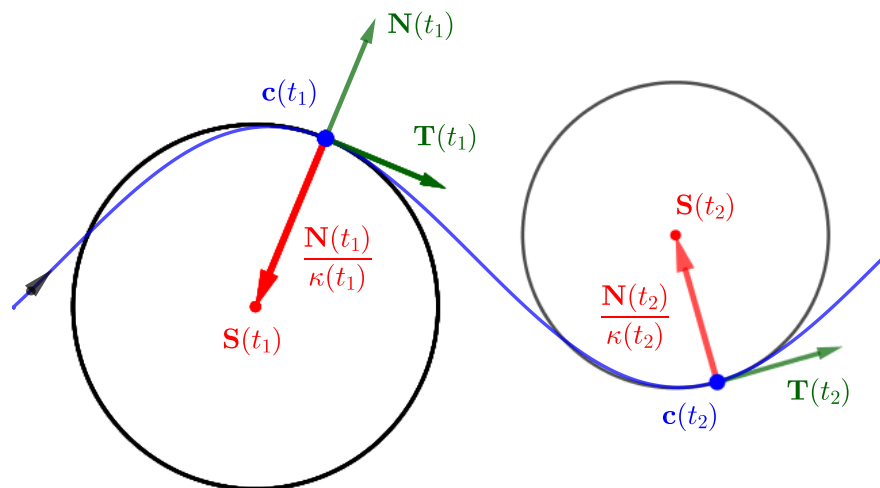
$$R(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|}.$$

Dále, má-li oskulační kružnice dobře aproximovat křivku  $c$  v bodě  $t$ , musí její poloměr směřující do bodu  $c(t)$  být kolmý na tečný vektor  $\mathbf{T}(t)$ . Oskulační kružnice má proto střed

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{c}(t) \pm R(t)\mathbf{N}(t),$$

kde volba znaménka závisí na tom, zda se vektor tečny stáčí do směru, resp. proti směru normálového vektoru, tedy na znaménku křivosti (viz Obrázek 1.3). Elegantněji zapíšeme parametrizaci středu oskulační kružnice následovně:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{\mathbf{N}(t)}{\kappa(t)}.$$



Obrázek 1.3: Oskulační kružnice křivky  $c$  (modře) v bodě  $t_1$ , kde je křivost  $\kappa$  záporná a v bodě  $t_2$ , kde je kladná.

**Definice 8.** Oskulační kružnice regulární křivky  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  v bodě  $t \in I$ , kde  $\kappa(t) \neq 0$ , je kružnice s poloměrem

$$R(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|}$$

a se středem v bodě

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{\mathbf{N}(t)}{\kappa(t)},$$

který se nazývá střed křivosti křivky  $c$  v bodě  $t$ .



Parametrizace středu křivosti rovinné křivky je vlastně nová křivka  $e$ , jejíž obraz představuje množinu středů křivosti křivky  $c$ . Křivku  $e$  nazýváme evoluta křivky  $c$ .

**Definice 9.** *Nechť je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární křivka, kde pro všechna  $t \in I$  je  $\kappa(t) \neq 0$ . Pak se křivka*

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{\mathbf{N}(t)}{\kappa(t)}$$

*nazývá evoluta křivky  $c$ .*

**Definice 10.** *Uvažujme regulární křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  a zvolme  $t_0 \in I$ . Má-li křivka  $d$  pro všechna  $t \in I$  a nějaké  $a \in \mathbb{R}$  parametrizaci*

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{c}(t) + \left( a - \int_{t_0}^t \|\mathbf{c}'(u)\| du \right) \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|},$$

*pak řekneme, že je evolventou křivky  $c$ . Je-li navíc křivka  $c$  parametrizována obloukem, pak má pro dané  $a \in \mathbb{R}$  její evolventa parametrizaci*

$$\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(s) + (a - s) \mathbf{c}'(s).$$

S evolventami se setkáme např. v Kapitole 3, kde názorně uvidíme, že evolventa  $d$  křivky  $c$  představuje trajektorii pevně zvoleného bodu na přímce, která se valí po křivce  $c$ .  $|a|$  je pak vzdálenost tohoto bodu od bodu  $\mathbf{c}(t_0)$ . Evolventa rovinné křivky  $c$  tedy není určena jednoznačně. Dokažme ještě jedno tvrzení prozrazující souvislost mezi evolventami a evolutami.

**Věta 5.** *Nechť je křivka  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizována obloukem,  $\mathbf{T}$ , resp.  $\mathbf{N}$  její tečný, resp. normálový vektor a křivka  $e : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  je její evoluta. Dále předpokládejme, že křivost  $\kappa$  křivky  $c$  má spojitou nenulovou derivaci. Pak je křivka  $c$  evolventou křivky  $e$ .*

*Důkaz.* Protože je  $e$  evolutou  $c$ , platí

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{\mathbf{N}(t)}{\kappa(t)}.$$

Napíšeme parametrizaci evolventy křivky  $e$ . K tomu je třeba najít její tečný vektor. Při úpravě využijeme Frenetovy vzorce:

$$\mathbf{e}'(t) = \mathbf{T}(t) - \frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)} \mathbf{N}(t) - \frac{1}{\kappa(t)} \kappa'(t) \mathbf{T}(t) = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)} \mathbf{N}(t).$$

Z poslední rovnosti vidíme potřebu předpokladu, že  $\kappa'(t) \neq 0$  pro všechna  $t \in I$ . V bodě, ve kterém by nastala rovnost, má křivka  $e$  singulární bod. Protože je vektor  $\mathbf{N}(t)$  jednotkový, dostaneme, že

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}'(t)\| &= \frac{|\kappa'(t)|}{\kappa^2(t)}, \\ \frac{\mathbf{e}'(t)}{\|\mathbf{e}'(t)\|} &= -\operatorname{sgn}(\kappa'(t))\mathbf{N}(t).\end{aligned}$$

Zvolme  $t_0 \in I$ . Evolventa křivky  $e$  má parametrizaci

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(t) + \left(a - \int_{t_0}^t \|\mathbf{e}'(u)\| du\right) \frac{\mathbf{e}'(t)}{\|\mathbf{e}'(t)\|} &= \\ \mathbf{c}(t) + \frac{\mathbf{N}(t)}{\kappa(t)} - \left(a - \int_{t_0}^t \frac{|\kappa'(u)|}{\kappa^2(u)} du\right) \operatorname{sgn}(\kappa'(t))\mathbf{N}(t) &= \\ \mathbf{c}(t) + \frac{\mathbf{N}(t)}{\kappa(t)} - \left(a - \int_{t_0}^t \operatorname{sgn}(\kappa'(u)) \frac{\kappa'(u)}{\kappa^2(u)} du\right) \operatorname{sgn}(\kappa'(t))\mathbf{N}(t).\end{aligned}$$

Z integrálu lze funkci  $\operatorname{sgn}(\kappa'(u))$  vytknout, neboť díky předpokladu o spojitosti a nenulovosti  $\kappa'$  má tato funkce konstantní znaménko. Místo  $\operatorname{sgn}(\kappa'(u))$  můžeme tedy psát kupříkladu  $\operatorname{sgn}(\kappa'(t_0))$ :

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \operatorname{sgn}(\kappa'(u)) \frac{\kappa'(u)}{\kappa^2(u)} du &= \operatorname{sgn}(\kappa'(t_0)) \int_{t_0}^t \frac{\kappa'(u)}{\kappa^2(u)} du \\ &= -\frac{\operatorname{sgn} \kappa'(t_0)}{\kappa(t)} + \frac{\operatorname{sgn} \kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)} = -\frac{\operatorname{sgn} \kappa'(t)}{\kappa(t)} + \frac{\operatorname{sgn} \kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)}.\end{aligned}$$

Dosazením tohoto výsledku do parametrizace evolventy křivky  $e$  dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(t) + \frac{\mathbf{N}(t)}{\kappa(t)} - \left(a + \frac{\operatorname{sgn} \kappa'(t)}{\kappa(t)} - \frac{\operatorname{sgn} \kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)}\right) \operatorname{sgn}(\kappa'(t))\mathbf{N}(t) &= \\ \mathbf{c}(t) + \frac{\mathbf{N}(t)}{\kappa(t)} - \operatorname{sgn}^2(\kappa'(t)) \frac{\mathbf{N}(t)}{\kappa(t)} - \left(a - \frac{\operatorname{sgn} \kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)}\right) \operatorname{sgn}(\kappa'(t))\mathbf{N}(t) &= \\ \mathbf{c}(t) - \left(a - \frac{\operatorname{sgn} \kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)}\right) \operatorname{sgn}(\kappa'(t))\mathbf{N}(t).\end{aligned}$$

Pro  $a = (\operatorname{sgn} \kappa'(t_0))/(\kappa'(t_0))$ , což je konstanta nezávisající na parametru  $t$ , dostáváme, že křivka  $c$  je evolventou své evoluty  $e$ , což jsme chtěli dokázat.  $\square$

Jak jsme zmínili již dříve, evolventa rovinné křivky  $c$  daná vztahem v Definiční 10 není určena jednoznačně. Právě dokázaná věta však říká, že pro všechna  $a \in \mathbb{R}$  mají tyto evolventy společnou evolutu – křivku  $c$ .

## 1.4 Uzavřené křivky

Poznátky sepsané v této části vychází převážně z autorových poznámek z předmětu *Vybrané kapitoly z diferenciální geometrie* vedeného doc. RNDr. Antonínem Slavíkem, Ph.D. v akademickém roce 2020/2021 na MFF UK.

**Definice 11.** Řekneme, že křivka  $c : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  je uzavřená, jestliže pro krajní body  $a, b$  platí  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ . Je-li navíc zobrazení  $c$  na intervalu  $[a; b)$  prosté, mluvíme o jednoduché křívce.

Méně formálně můžeme říci, že jednoduchá křivka je taková, která v žádném bodě sama sebe neprotíná. Výjimkou je počáteční bod, který u uzavřené křivky splývá s koncovým bodem.

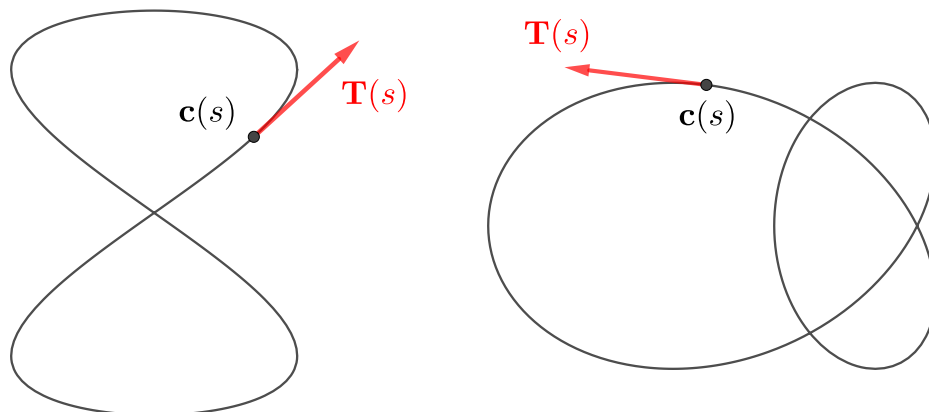
### 1.4.1 Rotační index rovinné křivky

**Definice 12.** Rotačním indexem regulární uzavřené křivky  $c : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pro kterou platí  $\mathbf{c}'(a) = \mathbf{c}'(b)$ , rozumíme číslo

$$n \equiv \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2\pi},$$

kde  $\alpha(t), t \in [a; b]$ , je úhlové zobrazení příslušné tečnému vektoru  $\mathbf{T}(t)$ .

Definice je zformulována tak, aby číslo  $n$  udávalo orientovaný počet otáček, které vykoná vektor  $\mathbf{T}$ , proběhne-li parametr  $t$  celý interval  $[a; b]$ . Díky předpokladu  $\mathbf{c}'(a) = \mathbf{c}'(b)$  platí, že vektor  $\mathbf{T}$  se otočí o úhel odpovídající celočíselnému násobku  $2\pi$ . Právě tento celočíselný násobek odpovídá číslu  $n$ . Pro úplnost dodáme, že znaménko rotačního indexu závisí pouze na směru, jakým křivku  $c$  probíháme. Viz rovněž (Tapp, 2016, str. 37).



Obrázek 1.4: Vlevo: Uzavřená křivka s rotačním indexem nula. Vpravo: Křivka s rotačním indexem dva.

Nabízí se vztah uvedený v definici rotačního indexu dále přepsat:

$$n = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \alpha'(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) dt. \quad (1.2)$$

Poslední rovnost platí pouze v případě, kdy je křivka  $c$  parametrizována obloukem.

Známe-li obraz křivky  $c$ , může být v některých případech určení otáček vektoru  $\mathbf{T}$  snadné, viz Obrázek 1.4. Je však vhodné uvést i vzorec pro výpočet rotačního indexu z parametrizace křivky  $c$ , a to alespoň pro křivky parametrizované obloukem.

**Věta 6.** *Uvažujme regulární uzavřenou křivku  $c : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  s parametrizací obloukem:*

$$\mathbf{c}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}.$$

*Pak je její rotační index*

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_a^b x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) ds.$$

*Důkaz.* Pro křivku s parametrizací

$$\mathbf{c}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}, \quad s \in [a; b],$$

dle vztahu (1.2) platí

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} ds = \frac{1}{2\pi} \int_a^b x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) ds. \end{aligned}$$

□

Uvedme ještě bez důkazu jedno zdánlivě triviální tvrzení o rotačním indexu, které později využijeme.

**Věta 7.** *Pro uzavřenou jednoduchou křivku je  $n = \pm 1$ .*

Tuto větu o rotačním indexu jednoduché křivky intuitivně užíval již Bernhard Riemann, korektní důkaz byl však podán až roku 1935 – viz (Chern, 1967, str. 23). Pro Větu 7 se mezinárodně ustálil název *Umlaufsatz*, v němčině tedy doslova *Věta o oběhu*.

## 1.4.2 Oblast ohraničená uzavřenou křivkou

Než uvedeme vztah pro výpočet oblasti ohraničené jednoduchou uzavřenou křivkou, podívejme se nejprve na způsob, jakým lze určit obsah mnohoúhelníku, u nějž známe souřadnice všech vrcholů.

**Věta 8.** Označme souřadnice vrcholů  $n$ -úhelníku v kladném směru postupně

$$(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_i; y_i), \dots, (x_n; y_n)$$

a polořme  $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$ . Pak je obsah  $n$ -úhelníku

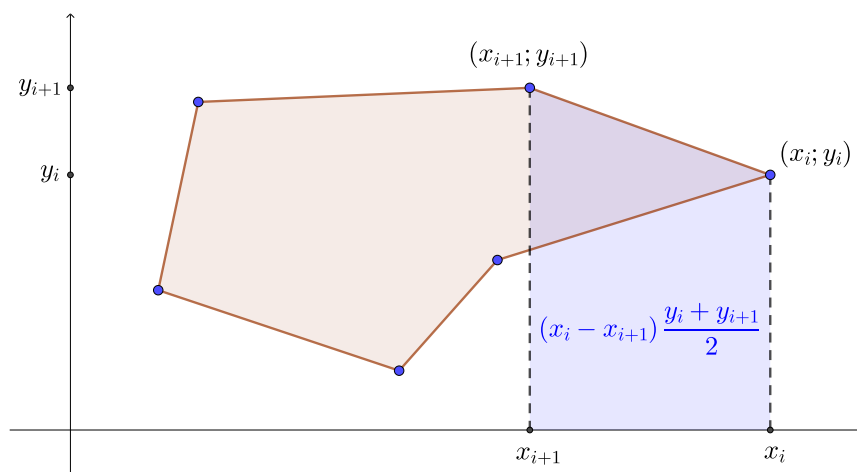
$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

*Důkaz.* Stačí dokázat první rovnost, protože obě sumy ve vzorcích si jsou rovny. Po rozepsání první sumy totiž dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1}) &= \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}) + \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i). \end{aligned}$$

Dále je třeba dokázat, že se platnost vzorce nezmění při posunutí mnohoúhelníku v soustavě souřadnic. Při změně první, resp. druhé souřadnice všech vrcholů o  $\Delta x$ , resp.  $\Delta y$  dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + \Delta x - x_{i+1} - \Delta x)(y_i + y_{i+1} + 2\Delta y) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1}) + \\ &+ 2\Delta y \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}). \end{aligned}$$



Obrázek 1.5: K výpočtu orientovaného obsahu lichoběžníku pod stranou  $n$ -úhelníku.

Poslední člen je roven nule, invariance vůči posunutí v soustavě souřadnic proto platí. Pro potřebu důkazu tedy můžeme umístit mnohoúhelník do prvního kvadrantu. Uvažujme nyní lichoběžníky s vrcholy v bodech  $(x_i; 0)$ ,  $(x_{i+1}; 0)$ ,  $(x_i; y_i)$  a  $(x_{i+1}; y_{i+1})$  tak, jak je vidět na Obrázku 1.5. Jejich orientované obsahy jsou

$$S_i = (x_i - x_{i+1}) \frac{y_i + y_{i+1}}{2}.$$

Součet obsahů  $S_i$  dá obsah  $S$  tak, jak je uvedeno ve Větě 8, což jsme chtěli dokázat. □

Upozorněme ještě na požadavek, že vrcholy  $n$ -úhelníku číslujeme v kladném směru. Pokud bychom od tohoto požadavku upustili, měl by obsah  $S$  daný Větou 8 význam *orientovaného* obsahu, kdy se obsahy vypočtené při různých směrech číslování vrcholů  $n$ -úhelníku liší až na znaménko. Nyní přejdeme k výpočtu obsahu oblasti ohraničené jednoduchou křivkou, přičemž budeme uvažovat právě orientovaný obsah, jehož znaménko závisí na směru probíhání křivky. Důkaz naznačíme s využitím předchozí věty.

**Věta 9.** *Orientovaný obsah oblasti ohraničené jednoduchou kladně orientovanou křivkou s parametrizací*

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a; b],$$

je

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt = \int_a^b x(t)y'(t) dt.$$

*Důkaz.* Zvolme dělení  $D$  intervalu  $[a; b]$  následovně

$$D = \{t_i; a = t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b\}.$$

Oblast ohraničenou křivkou  $c$  aproximujeme  $n$ -úhelníkem, jehož vrcholy mají souřadnice  $(x(t_i); y(t_i))$ . Dle Věty 8 je obsah takového  $n$ -úhelníku

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [x(t_i)y(t_{i+1}) - x(t_{i+1})y(t_i)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [x(t_i)y(t_{i+1}) - x(t_i)y(t_i) - x(t_{i+1})y(t_i) + x(t_i)y(t_i)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [x(t_i)(y(t_{i+1}) - y(t_i)) - y(t_i)(x(t_{i+1}) - x(t_i))] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ x(t_i) \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - y(t_i) \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right] (t_{i+1} - t_i) \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [x(t_i)y'(t_i) - y(t_i)x'(t_i)] (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

V limitním případě, kdy  $|D| \rightarrow 0$ , dostaneme obsah oblasti ohraničené křivkou  $c$ :

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$$

Výraz  $x'(t)y(t)$  lze navíc upravit pomocí pravidla pro derivování součinu funkcí následovně:

$$x'(t)y(t) = [x(t)y(t)]' - x(t)y'(t)$$

Dosazením do vztahu pro výpočet obsahu pak dostaneme

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - (x(t)y(t))' + x(t)y'(t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b 2x(t)y'(t) dt - \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y(t)]' dt \\ &= \int_a^b x(t)y'(t) dt - \frac{1}{2} (x(b)y(b) - x(a)y(a)). \end{aligned}$$

Poslední závorka je však pro uzavřenou křivku rovna nule. Dokázali jsme tedy obě rovnosti dané Větou 9. □

Věta 9 bývá častěji odvozována jako důsledek *Greenovy věty*, která udává souvislost mezi křivkovým integrálem druhého druhu přes uzavřenou křivku  $c$  a plošným integrálem přes oblast, kterou obraz křivky  $c$  ohraničuje, viz (Stewart, 2008, str. 1055–1058).

### 1.4.3 Obsah parametrizované plochy

Kromě oblastí ohraničených rovinnou křivkou budeme chtít určit také obsahy oblastí, jež lze popsat jako parametrizované plochy.

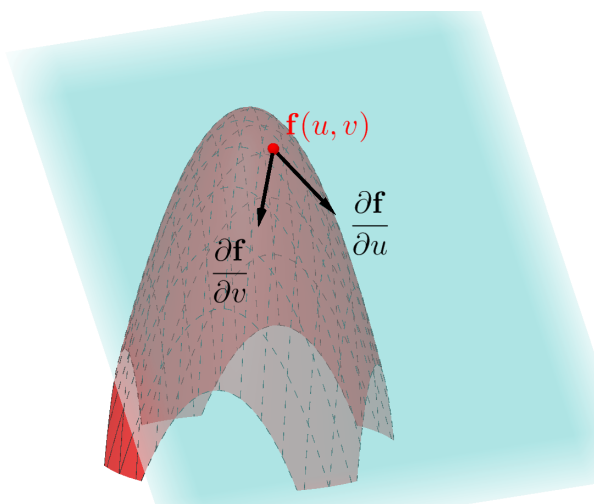
**Definice 13.** *Parametrizovanou plochou rozumíme diferencovatelné zobrazení  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kde  $I, J \subset \mathbb{R}$  jsou intervaly.*

Parametrizovanou plochu obvykle určujeme složkami  $(x(u,v); y(u,v); z(u,v))$ .

**Definice 14.** *Parciální derivací plochy  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$  podle parametru  $u \in I$ , resp.  $v \in J$  rozumíme vektor*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(u,v) &\equiv \left( \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}; \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}; \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} \right), & \text{resp.} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}(u,v) &\equiv \left( \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}; \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}; \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Nyní uvedeme vztah pro výpočet obsahu plochy v  $\mathbb{R}^3$ . Důkaz pouze naznačíme.



Obrázek 1.6: Parciální derivace plochy spolu s bodem  $\mathbf{f}(u, v)$  určují rovinu tečnou k ploše v bodě  $(u, v)$ .

**Věta 10.** Obsah plochy  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kde  $I = [a; b]$  a  $J = [c; d]$ , je roven

$$S = \iint_{I \times J} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}(u, v) \right\| dv du$$

*Důkaz.* Zvolíme dělení  $D_I = \{u_i; a = u_0 < \dots < u_n < v_{n+1} = b\}$  intervalu  $I$  a obdobně dělení  $D_J = \{v_j; c = v_1 < \dots < v_m < v_{m+1} = d\}$  intervalu  $J$ .

Obraz plochy  $f$  v  $\mathbb{R}^3$  označíme  $A$ . Vyberme z množiny  $I \times J$  obdélník s vrcholy  $(u_i, v_j)$ ,  $(u_{i+1}, v_j)$ ,  $(u_{i+1}, v_{j+1})$ ,  $(u_i, v_{j+1})$ . Délky stran obdélníku jsou  $(u_{i+1} - u_i)$  a  $(v_{j+1} - v_j)$ . Jeho obrazem je jistá množina  $A_{ij} \subset A$ , jak je vidět na Obrázku 1.7. Tuto množinu  $A_{ij}$  následně aproximujeme rovnoběžníkem vymezeným vektory

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}(u_i, v_j)(v_{j+1} - v_j).$$

Obsah tohoto rovnoběžníku lze vypočítat jako normu vektorového součinu výše uvedených vektorů:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i) \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}(u_i, v_j)(v_{j+1} - v_j) \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) \end{aligned}$$

a přibližně odpovídá obsahu oblasti  $A_{ij}$ . Součet těchto obsahů je

$$S = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j).$$

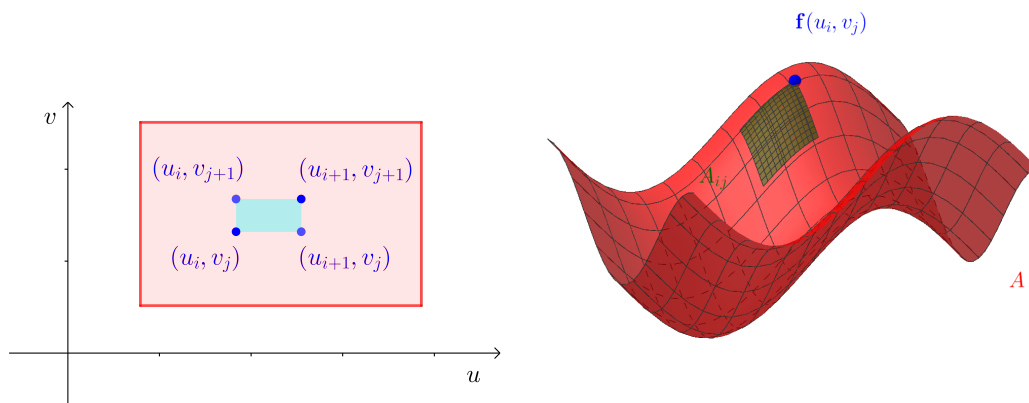
V limitním případě, kdy  $|D_I|, |D_J| \rightarrow 0$ , pak dostáváme přesně obsah  $S$  množiny  $A$  daný dvojným integrálem:



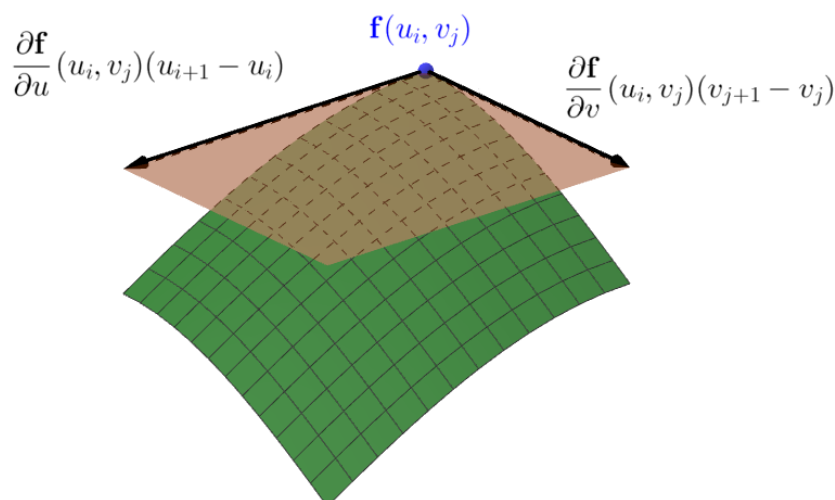
$$S = \iint_{I \times J} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}(u,v) \right\| du dv,$$

což je vztah uvedený ve Větě 10.

□



Obrázek 1.7: Množina  $A_{ij}$  (vpravo) je obrazem obdélníku v množině  $I \times J$ .



Obrázek 1.8: Oblast  $A_{ij}$  lze aproximovat rovnoběžníkem, který je vymezen parciálními derivacemi v bodě  $(u_i, v_j)$ .

Věta 10 udává obsah plochy v  $\mathbb{R}^3$ , v následujících kapitolách se však budeme zabývat výhradně rovinnými útvary. V prostoru  $\mathbb{R}^2$  není vektorový součin definován, můžeme si ale představit, že jde o podprostor  $\mathbb{R}^3$  daný obecnou rovnicí  $z = 0$ . Normou vektorového součinu rovinných vektorů  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  a  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  tedy budeme rozumět číslo:

$$\|(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0)\| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|. \quad (1.2)$$

## 2. Rovnoběžné křivky k zadané křivce

Mnozí čtenáři se pravděpodobně již setkali s některou variantou následující úlohy. Představme si, že máme obepnout zemský rovník provazem tak, aby byl provaz ve výšce jednoho metru nad zemským povrchem. O kolik musí být provaz delší než samotný rovník? Situace je znázorněna na Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: K úloze o provazu kolem zemského rovníku.

Uvažujme, že Země má poloměr  $r$  a vzdálenost provazu od zemského povrchu je 1, vzdálenost provazu od středu Země je tedy  $r + 1$ . Snadno pak zjistíme délku provazu  $l_p$  v závislosti na  $r$ :

$$\begin{aligned}l_p &= 2\pi(r + 1) \\ &= 2\pi r + 2\pi.\end{aligned}$$

První člen nepředstavuje nic jiného než délku zemského rovníku. Druhý člen je právě hledaný rozdíl. Přeneseme-li se tedy zpět k fyzikální povaze úlohy, odpovíme, že provaz, který by se „vznášel“ ve výšce 1 metr nad zemským rovníkem, by musel být o  $2\pi$ , tedy přibližně o 6,28 metrů delší než samotný rovník. Již tento závěr se může zdát mnohým žákům základních či středních škol značně neintuitivní, neboť nalezený rozdíl je oproti rozměrům Země zdánlivě zanedbatelný. Ještě více možná překvapí fakt, že rozdíl délky provazu a zemského rovníku vůbec nezávisí na  $r$ , tedy na poloměru kružnice, kterou provazem obepínáme!

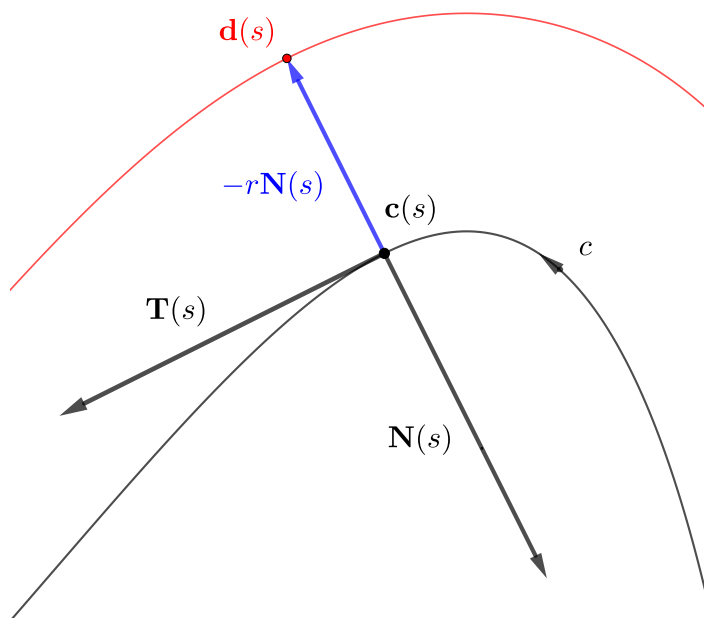
V této konkrétní úloze jsme popsali, jak spolu souvisí délky dvou kružnic, které mají konstantní vzdálenost 1. V této kapitole prozkoumáme příbuzné problémy mnohem obecněji a podíváme se, jak spolu souvisejí délky dvou libovolných uzavřených rovnoběžných křivek. Kromě toho porovnáme také jejich křivost a obsahy oblastí, které ohraničují, a vyvodíme další zajímavé důsledky.

## 2.1 Základní vlastnosti rovnoběžných křivek

Začneme řešením úlohy, která je formulována např. v (DoCarmo, 1976, str. 47, cvičení 6). Je dána jednoduchá, kladně orientovaná křivka  $c : [0; l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  s parametrem  $s$ . Necht' je dále  $\mathbf{T}(s)$ , resp.  $\mathbf{N}(s)$  její tečný, resp. normálový vektor a  $\kappa(s)$  její křivost v bodě  $s$ . Pro jednoduchost předpokládejme, že je křivka parametrizována obloukem. Uvažujme, že  $d$  je křivka s parametrizací

$$\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(s) - r\mathbf{N}(s), \quad s \in [0; l],$$

kde  $r$  je kladná konstanta. Bod  $\mathbf{d}(s)$  tedy získáme tak, že se z bodu  $\mathbf{c}(s)$  posuneme proti směru normálového vektoru  $\mathbf{N}$  o vzdálenost  $r$ . Tehdy říkáme, že křivka  $d$  je s křivkou  $c$  *rovnoběžná*. Situaci ilustruje Obrázek 2.1. Později budeme uvažovat i posunutí ve směru normálového vektoru.



Obrázek 2.2: Parametrizace křivky  $d$  rovnoběžné k zadané křivce  $c$ .

Najděme nejprve délku křivky  $d$  dle vztahu (4). Je tedy třeba vypočítat její derivaci, při úpravě využijeme Frenetovy vzorce.

$$\mathbf{d}'(s) = \mathbf{c}'(s) - r\mathbf{N}'(s) = \mathbf{T}(s) + r\kappa(s)\mathbf{T}(s) = (1 + r\kappa(s))\mathbf{T}(s)$$

Předpokládejme dále, že pro všechna  $s$  je  $1 + r\kappa(s) > 0$ . Křivka  $d$  je pak ve všech bodech regulární, protože výraz  $1 + r\kappa(s)$  je vlastně velikost tečného vektoru křivky  $d$  v bodě  $s$ . Nyní snadno vypočítáme délku křivky  $d$ :

$$l_d = \int_0^l \|\mathbf{d}'(s)\| ds = \int_0^l (1 + r\kappa(s)) ds = l + r \int_0^l \kappa(s) ds.$$

Na tomto místě připomeňme souvislost  $\kappa(s)$  a úhlového zobrazení  $\alpha(s)$ , které udává odchylku tečného vektoru křivky  $c$  od kladné poloosy  $x$  v bodě  $s$ . Platí  $\kappa(s) = \alpha'(s)$ . Náš vztah pro výpočet  $l_d$  tedy můžeme dále upravit:

$$l_d = l + r \int_0^l \alpha'(s) ds = l + r(\alpha(l) - \alpha(0))$$

Protože křivka  $c$  je jednoduchá a kladně orientovaná, platí dle Věty 7 a dle vztahu (1.2)  $\alpha(l) - \alpha(0) = 2\pi$ . Dostáváme tedy

$$l_d = l + 2\pi r, \quad (2.1)$$

Tento výsledek je v souladu s řešením úlohy o provazu obepnutém kolem rovníku – rozdíl délek dvou libovolných rovnoběžných jednoduchých křivek závisí pouze na jejich vzdálenosti  $r$ !

Podívejme se dále na křivost křivky  $d$ , využijeme přitom Větu 1 udávající vzorec pro výpočet křivosti. Začneme výpočtem druhé derivace  $d$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}''(s) &= (1 + r\kappa(s))' \mathbf{T}(s) + (1 + r\kappa(s)) \mathbf{T}'(s) \\ &= r\kappa'(s)\mathbf{T}(s) + (1 + r\kappa(s)) \kappa(s)\mathbf{N}(s). \end{aligned}$$

První vektor v součtu je násobkem vektoru  $\mathbf{d}'(s)$ . Determinant vystupující ve vzorci pro výpočet  $\kappa_d$  se tedy zjednoduší:

$$\begin{aligned} \kappa_d(s) &= \frac{\det(\mathbf{d}'(s) | \mathbf{d}''(s))}{\|\mathbf{d}'(s)\|^3} \\ &= \frac{\det((1 + r\kappa(s)) \mathbf{T}(s) | (1 + r\kappa(s)) \kappa(s)\mathbf{N}(s))}{(1 + r\kappa(s))^3} \\ &= \frac{\kappa(s) (1 + r\kappa(s))^2}{(1 + r\kappa(s))^3} \det(\mathbf{T}(s) | \mathbf{N}(s)). \end{aligned}$$

Protože jsou vektory  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{N}$  jednotkové a navzájem kolmé, můžeme v jejich směru zvolit osy soustavy souřadnic. Determinant vystupující ve vztahu pro výpočet  $\kappa_d$  je pak roven 1. Po zkrácení zlomku tak dostáváme vztah křivostí rovnoběžných jednoduchých křivek  $c$  a  $d$ .

$$\kappa_d(s) = \frac{\kappa(s)}{1 + r\kappa(s)} \quad (2.2)$$

Nyní se pokusíme nalézt souvislost mezi obsahy oblastí ohraničených rovnoběžnými křivkami  $c$  a  $d$ . Využijeme přitom vztah uvedený ve Větě 9. Zapišeme parametrizaci křivky  $c$  po souřadnicích:

$$\mathbf{c}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}, \quad s \in [0; l].$$

Vyjdeme z definice křivky  $d$  a zapíšeme i její parametrizaci po složkách, pro přehlednost tyto složky označíme  $u(s)$ ,  $v(s)$ :

$$\mathbf{d}(s) = \begin{pmatrix} x(s) + ry'(s) \\ y(s) - rx'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do vztahu pro výpočet obsahu  $S_d$  oblasti ohraničené křivkou  $d$  daného Větou 9:

$$\begin{aligned} S_d &= \frac{1}{2} \int_0^l u(s)v'(s) - u'(s)v(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l [x(s) + ry'(s)] \cdot [y'(s) - rx''(s)] - [x'(s) + ry''(s)] \cdot [y(s) - rx'(s)] ds \end{aligned}$$

Po roznásobení závorek a seřazení jednotlivých členů zapíšeme integrál součtu jako součet integrálů:

$$S_d = \frac{1}{2} \int_0^l x(s)y'(s) - x'(s)y(s) ds + \tag{a}$$

$$+ \frac{1}{2}r \int_0^l x'(s)^2 + y'(s)^2 ds + \tag{b}$$

$$+ \frac{1}{2}r^2 \int_0^l x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) ds - \tag{c}$$

$$- \frac{1}{2}r \int_0^l x''(s)x(s) + y''(s)y(s) ds \tag{d}$$

Člen (a) není nic jiného než obsah vymezený samotnou křivkou  $c$ . Integrand (b) je díky předpokladu parametrizace obloukem roven jedné.

$$\frac{1}{2}r \int_0^l x'(s)^2 + y'(s)^2 ds = \frac{1}{2}r \int_0^l 1 ds = \frac{1}{2}rl$$

Vnitřek integrálu (c) lze identifikovat jako skalární součin, který navíc z definice odpovídá  $\kappa(s)$ .

$$x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = \kappa(s)$$

Při úpravě členu (c) si navíc můžeme pomoci vztahem mezi křivostí  $\kappa$  a úhlovým zobrazením  $\alpha$ .

$$\frac{1}{2}r^2 \int_0^l \kappa(s) ds = \frac{1}{2}r^2 \int_0^l \alpha'(s) ds = \frac{1}{2}r^2 (\alpha(l) - \alpha(0)) = \frac{1}{2}r^2 2\pi = \pi r^2$$

Pro úpravu výrazu v integrálu (d) využijeme pravidel pro derivování součinu funkcí. Lze se snadno přesvědčit, že platí

$$\begin{aligned}x''(s)x(s) &= [x'(s)x(s)]' - x'(s)^2, \\y''(s)y(s) &= [y'(s)y(s)]' - y'(s)^2.\end{aligned}$$

Při integraci dostaneme

$$\int_0^l x''(s)x(s) + y''(s)y(s) ds = \int_0^l [x'(s)x(s)]' ds + \quad (\text{d.1})$$

$$+ \int_0^l [y'(s)y(s)]' ds - \quad (\text{d.2})$$

$$- \int_0^l x'(s)^2 + y'(s)^2 ds. \quad (\text{d.3})$$

První dva integrály vypočítáme jednoduše s využitím poznatku, že křivka  $c$  je uzavřená, tedy

$$\begin{aligned}\int_0^l [x'(s)x(s)]' ds &= x'(l)x(l) - x'(0)x(0) = 0, \\ \int_0^l [y'(s)y(s)]' ds &= y'(l)y(l) - y'(0)y(0) = 0.\end{aligned}$$

S integrálem (d.3) jsme se již setkali ve výpočtu (b). Víme, že je roven  $l$ . Celkem tedy pro integrál (d) dostáváme:

$$-\frac{1}{2}r \int_0^l x''(s)x(s) + y''(s)y(s) ds = \frac{1}{2}rl.$$

Dosadme výsledky výpočtů (a)–(d) zpět do vztahu pro  $S_d$ :

$$S_d = S_c + \frac{1}{2}rl + \pi r^2 + \frac{1}{2}rl, \quad \text{po sečtení}$$

$$S_d = S_c + rl + \pi r^2. \quad (2.3)$$

### 2.1.1 Zobecnění odvozených vztahů

Výše uvedené vztahy lze zobecnit a vztáhnout i na situaci, kdy bod  $\mathbf{d}(s)$  neleží vzhledem k bodu  $\mathbf{c}(s)$  proti směru normálového vektoru, nýbrž v jeho směru, jak znázorňuje Obrázek 2.3 vlevo.

Můžeme tedy zformulovat obecnější definici rovnoběžnosti křivek. Uvažujme regulární křivku  $c : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a křivku  $d : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Existuje-li nějaké reálné  $r$  takové, že pro všechna  $t \in [a; b]$  platí

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{c}(t) - r\mathbf{N}_c(t), \quad (2.4)$$

pak řekneme, že křivka  $d$  je rovnoběžná s křivkou  $c$  ve vzdálenosti  $|r|$ . Pro kladná  $r$  pak dostáváme rovnoběžnou křivku vedenou proti směru normálového vektoru  $\mathbf{N}_c$ , pro záporná  $r$  pak v jeho směru.

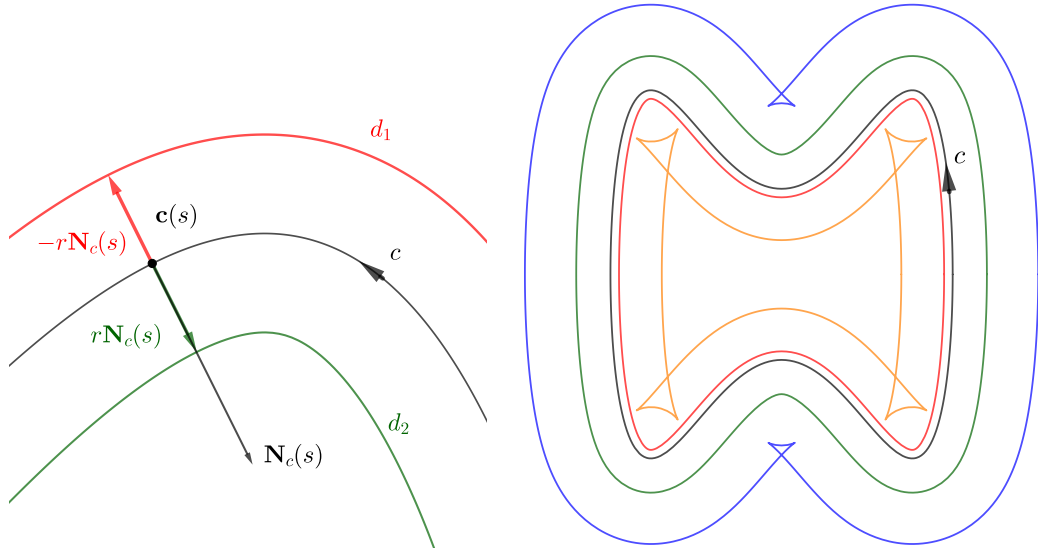
Problematický je ovšem fakt, že křivka  $d$  může mít singulární body, platí totiž

$$\mathbf{d}'(t) = \mathbf{c}'(t) + r\kappa_c(t)\mathbf{c}'(t) = (1 + r\kappa_c(t))\mathbf{c}'(t).$$

Relace rovnoběžnosti daná vztahem (2.4) tudíž není *symetrická*, neboť není zajištěno, že pro všechna  $t$  je definován normálový vektor křivky  $d$ . Tato relace je symetrická, jak bychom očekávali, pouze v případě, že pro všechna  $t \in [a; b]$  je  $1 + r\kappa_c(t) > 0$ , tedy jsou-li obě křivky  $c$  a  $d$  regulární. To nastává obecně pouze pro některé hodnoty  $r$ , jak je znázorněno na Obrázku 2.3 vpravo. V případě regularity obou křivek je normálový vektor  $\mathbf{N}_d$  vždy roven normálovému vektoru  $\mathbf{N}_c$  a můžeme dle vztahu (2.4) psát

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{d}(t) + r\mathbf{N}_d(t) = \mathbf{d}(t) - (-r)\mathbf{N}_d(t),$$

a platí tedy, že je-li křivka  $d$  rovnoběžná s křivkou  $c$ , je i křivka  $c$  rovnoběžná s křivkou  $d$  ve vzdálenosti  $|r|$ . Pro regulární křivky je zde definovaná relace rovnoběžnosti dokonce ekvivalence.



Obrázek 2.3: Vlevo: Dvě křivky rovnoběžné s křivkou  $c$  ve vzdálenosti  $|r|$  s parametrizací  $\mathbf{d}_1(s) = \mathbf{c}(s) - r\mathbf{N}_c(s)$  a  $\mathbf{d}_2(s) = \mathbf{c}(s) - (-r)\mathbf{N}_c(s)$ . Vpravo: Křivky rovnoběžné s křivkou  $c$  vedené v „příliš velké vzdálenosti“ od ní mají singulární body (oranžově a modře).

Budeme-li opět uvažovat, že  $c$  je jednoduchá uzavřená regulární křivka parametrizovaná obloukem, a přidržíme-li se nadále podmínky  $1 + r\kappa_c(s) > 0$ , pak můžeme vztahy (2.1)–(2.3) odvozené v předchozí části psát v obdobném tvaru, nyní pro  $r \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
l_d &= l_c + 2\pi r, \\
\kappa_d(s) &= \frac{\kappa_c(s)}{1 + r\kappa_c(s)}, \\
S_d &= S_c + rl_c + \pi r^2.
\end{aligned}$$

## 2.2 Singulární body rovnoběžných křivek

Při odvozování vztahů pro rovnoběžné křivky jsme doposud předpokládali, že křivka  $d$  probíhá v takové vzdálenosti  $|r|$  od zadané křivky  $c$ , aby byla splněna podmínka  $1 + r\kappa_c > 0$ , tj. aby křivka  $d$  neměla singulární body. Nyní od této podmínky upustíme a prozkoumáme chování rovnoběžných křivek právě v těchto singulárních bodech.

Opět budeme uvažovat, že  $c : [0; l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  je křivka parametrizovaná obloukem. Předpokládejme že v nějakém bodě  $s_0 \in [0; l]$  platí  $r = -1/\kappa_c(s_0)$ . Můžeme pak dosadit do parametrizace rovnoběžné křivky  $d$ :

$$\mathbf{d}(s_0) = \mathbf{c}(s_0) + \frac{1}{\kappa_c(s_0)} \mathbf{N}_c(s_0).$$

Bod  $s_0$  pak vyhovuje parametrickému vyjádření jiné významné křivky – evoluty. Připomínáme, že evoluta  $e$  křivky  $c$  má parametrizaci

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{c}(s) + \frac{1}{\kappa_c(s)} \mathbf{N}_c(s).$$

Všechny singulární body křivek rovnoběžných s křivkou  $c$  tedy leží na evulutě křivky  $c$ . Tento fakt bývá nejčastěji demonstrován na příkladu elipsy, viz (Izumiya, 2016, str. 6). Níže uvedeme další příklady.

**Příklad 1.** Uvažujme křivku  $c_1$  s parametrizací

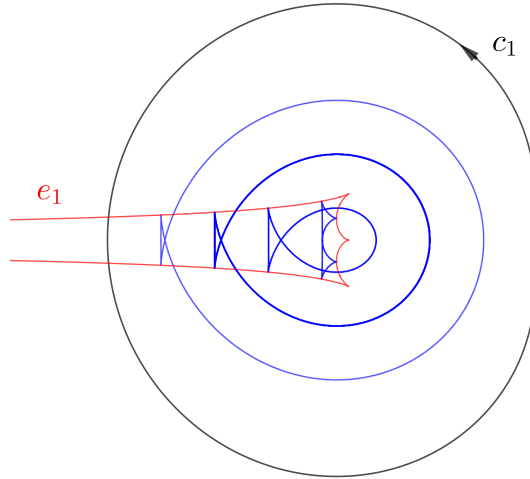
$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} (2 - \cos t) \cos t \\ (2 - \cos t) \sin t \end{pmatrix}; \quad t \in [0; 2\pi].$$

V Obrázku 2.4 je červeně zvýrazněna její evoluta  $e_1$ . Dále jsou zde modře vyznačeny čtyři křivky s křivkou  $c_1$  rovnoběžné. Jejich singulární body leží na křivce  $e_1$ .

Protože má křivka  $c_1$  pro všechny hodnoty parametru  $t$  nezápornou křivost, mohou mít singulární body pouze rovnoběžné křivky vedené „vnitř“ křivky  $c_1$ , tj. ve směru jejího normálového vektoru. Pro rovnoběžné křivky vedené „vně“ je v definici dle vztahu (2.4)  $r > 0$ , je tedy vždy splněna podmínka  $1 + r\kappa_{c_1} > 0$ .

**Příklad 2.** Uvedme příklad parametrizované křivky, jejíž křivost mění pro různé hodnoty parametru  $t$  své znaménko. Křivku označíme  $c_2$ , její parametrizace je

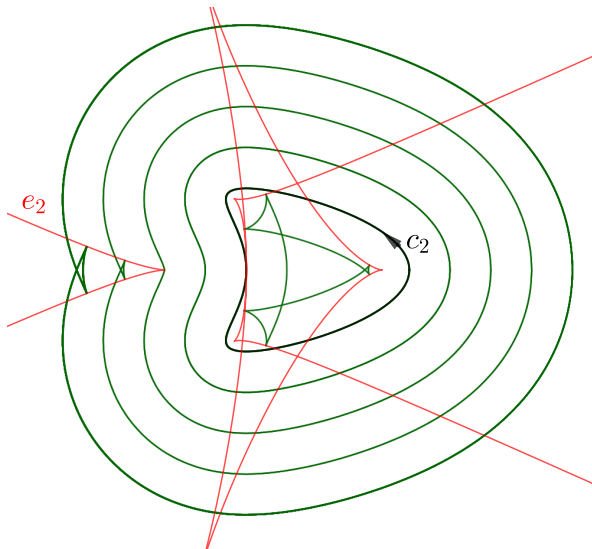




Obrázek 2.4: Singulární body křivek rovnoběžných s křivkou  $c_1$  leží na její evolutě.

$$c_2(t) = \begin{pmatrix} (1 + \cos t) \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}; \quad t \in [0; 2\pi].$$

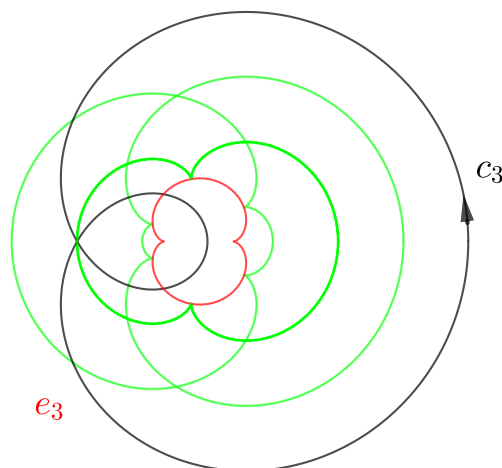
Červeně jsme opět vyznačili v Obrázku 2.5 její evolutu  $e_2$  a zeleně několik křivek s ní rovnoběžných. Všimněme si, že nyní mohou mít singulární body i rovnoběžné křivky vedené vně křivky  $c_2$ . Je to proto, že v bodech, ve kterých je křivost křivky  $c_2$  záporná, není pro dostatečně velké kladné  $r$  splněna podmínka  $1 + r\kappa_{c_2} > 0$ , tj.  $r < -1/\kappa_{c_2}$ .



Obrázek 2.5: Křivky rovnoběžné s křivkou  $c_2$ .

**Příklad 3.** Pro zajímavost uvedme ještě příklad uzavřené křivky, která není jednoduchá. Nechť má křivka  $c_3$  parametrizaci

$$c_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \cos 2t \\ \sin t + \sin 2t \end{pmatrix}; \quad t \in [0; 2\pi].$$



Obrázek 2.6: Křivky rovnoběžné s křivkou  $c_3$ .

*Jde o křivku s kladnou křivostí, rovnoběžné křivky vedené proti směru jejího normálového vektoru tedy nemají singulární body. Singulární body tří rovnoběžných křivek vedených po směru normálového umístěné na evolutě  $e_3$  můžeme vidět na Obrázku 2.6.*

## 2.3 Délka uzavřených rovnoběžných křivek a rotační index

Při odvozování vztahu (2.1) mezi délkami rovnoběžných křivek jsme předpokládali, že výchozí uzavřená křivka  $c$  je jednoduchá. Konkrétně jsme tohoto předpokladu využili při integraci křivosti  $\kappa$  křivky  $c$  k získání vztahu

$$\int_0^l \kappa(s) ds = 2\pi.$$

Jak se tento výsledek změní, jestliže křivka  $c$  není jednoduchá? Pro zodpovězení této otázky využijeme vlastnosti rotačního indexu  $n$  křivky  $c$ . Dle vztahu (1.2) platí pro křivku  $c$  parametrizovanou obloukem:

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \kappa(s) ds, \quad \text{tedy}$$

$$\int_0^l \kappa(s) ds = 2\pi n.$$

S využitím výše uvedené rovnosti můžeme zobecnit vztah (2.1) pro výpočet délky křivky  $d$  rovnoběžné s křivkou  $c$ . Vyjdeme z rovnosti

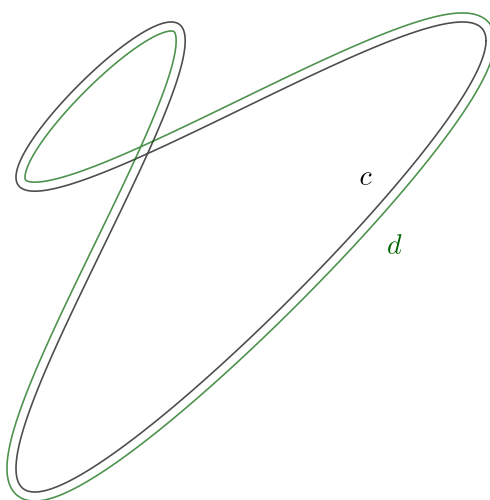
$$l_d = \int_0^l 1 + r\kappa(s) ds = l + r \int_0^l \kappa(s) ds.$$

Integrál ve druhém členu je roven  $2\pi n$ . Pro délku křivky  $d$ , která probíhá ve vzdálenosti  $r$  od křivky  $c$ , tedy platí

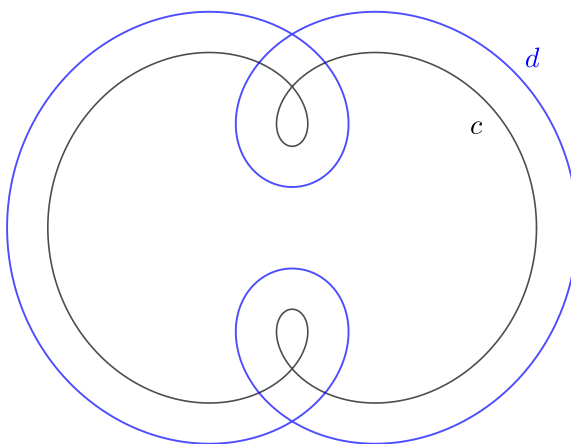
$$l_d = l + 2\pi r n, \quad (2.5)$$

stále však za předpokladu, že je  $1 + r\kappa(s) > 0$  pro všechny přípustné hodnoty parametru  $s$ .

Tento výsledek přináší navíc zajímavý důsledek pro křivky, jejichž rotační index je nulový. Očividně platí, že má-li křivka  $c$  společně s předchozími předpoklady také nulový rotační index a  $d$  je s ní rovnoběžná křivka, pak mají při splnění podmínky  $1 + r\kappa > 0$  křivky  $c$  a  $d$  stejnou délku. Taková dvojice křivek je znázorněna na Obrázku 2.7.



Obrázek 2.7: Křivka  $c$  s nulovým rotačním indexem má stejnou délku jako s ní rovnoběžná regulární křivka  $d$ .



Obrázek 2.8: Křivka  $c$  na obrázku má rotační index  $n = 3$ . Rovnoběžná křivka  $d$  vedená ve vzdálenosti  $r > 0$  od křivky  $c$  má tedy dle vztahu (2.5) délku  $l_c + 6\pi r$ .

Pro úplnost dodejme, že pro křivku  $c$ , která není jednoduchá, platí v nezměněné podobě vztah (2.2) pro křivost regulární křivky  $d$  s ní rovnoběžné. Při jeho odvozování jsme totiž předpokladu, že je křivka  $c$  jednoduchá, nevyužili.

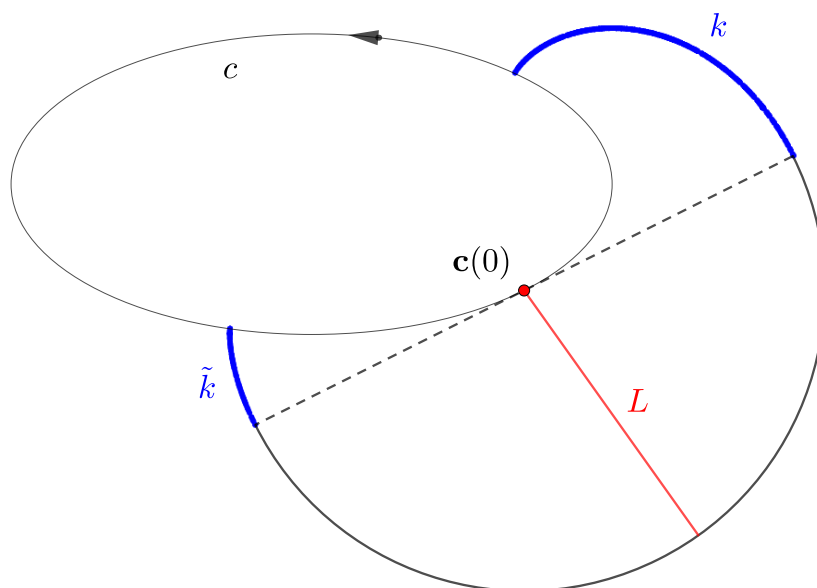
Další podnětné poznámky a úlohy o rovnoběžných křivkách lze nalézt např. v článku (Vakil, 2011).

## 3. Zobecněná úloha o koze

V této kapitole uvedeme řešení zobecněné *úlohy o koze*. Tradičně bývá úloha formulována tak, že hledáme obsah oblasti, která je přístupna koze uvázané k vnější straně kruhové ohrady lanem o délce  $L$  (tzv. *goat exterior problem*). Zde prozkoumáme řešení pro případ, kdy ohradu, ke které je koza uvázaná, tvoří libovolná uzavřená konvexní křivka. Řešení úlohy bylo publikováno v článku (Hoffman, 1998), my se jej pokusíme podrobně rozebrat a ilustrovat na konkrétních příkladech. Dále je možno řešit variantu úlohy, kdy je koza uvázaná k vnitřní straně ohrady – tzv. *goat interior problem*, viz (Weisstein, a), a to i ve vyšších dimenzích.

### 3.1 Řešení úlohy

Na Obrázku 3.1 je znázorněna situace, kdy ohradu tvoří elipsa  $c$  a koza je uvázaná v bodě  $\mathbf{c}(0)$  (parametrizaci elipsy můžeme pochopitelně zvolit tak, aby nulové hodnotě parametru odpovídal libovolný bod na elipse). Lano, kterým je koza uvázaná, má délku  $L$ .

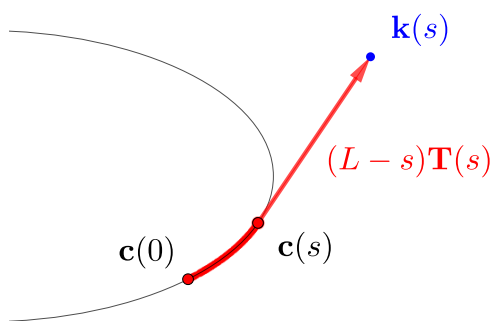


Obrázek 3.1: Koza je uvázaná lanem o délce  $L$  k ohradě tvořené uzavřenou konvexní křivkou  $c$ .

Nepřekvapí, že část oblasti, která je takto uvázané koze přístupná, je půlkruh o poloměru  $L$  se středem v bodě  $\mathbf{c}(0)$ . Po jeho obvodu se koza může pohybovat, dokud se nenachází ve stejné polorovině jako křivka  $c$ , přičemž tato polorovina je určena tečnou ke křivce  $c$  v bodě  $\mathbf{c}(0)$ . V Obrázku 3.1 je část tečny, která tvoří průměr zmíněného kruhu, znázorněna čárkovaně. Jestliže ovšem koza tečnu

překročí a bude udržovat lano napnuté, začne se lano navíjet na ohradu, tedy na křivku  $c$ . Koza se pak bude pohybovat po trajektorii, která v Obrázku 3.1 odpovídá křivkám  $k$  a  $\tilde{k}$ . Níže uvedeme parametrizaci křivek  $k$  a  $\tilde{k}$  a určíme rovněž obsah oblastí, které jsou ohraničeny těmito křivkami, křivkou  $c$  a tečnou v bodě  $\mathbf{c}(0)$ .

Předpokládejme, že  $c : [0; l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  je kladně orientovaná konvexní křivka parametrizovaná obloukem,  $\mathbf{T}(s)$ , resp.  $\mathbf{N}(s)$  je její tečný, resp. normálový vektor a  $\kappa(s)$  její křivost v bodě  $s \in [0; l]$ . V souladu s předchozím uvažujeme, že koza je uvázána zvnějšku k ohradě tvořené křivkou  $c$  v bodě  $\mathbf{c}(0)$  lanem délky  $L \leq l/2$ . Tuto podmínku uvádíme, aby koza nemohla do žádného místa vstoupit obejitím ohrady z obou směrů (případně s výjimkou jednoho bodu  $\mathbf{c}(l/2)$ ). Parametrizované plochy reprezentující oblast výběhu, se kterými budeme níže pracovat, by se v takovém případě částečně překrývaly. Jestliže se koza pohybuje tak, že se napjaté lano navíjí na křivku  $c$  ve směru její orientace, splývá s křivkou  $c$  část lana o délce  $s \in [0; L]$ <sup>1</sup> a zbývající část lana o délce  $L - s$  míří ve směru tečny ke křivce  $c$  v bodě  $s$ , jak ilustruje Obrázek 3.2.



Obrázek 3.2: K odvození parametrizace křivky  $k$ .

Část trajektorie, po které se koza pohybuje, je tedy křivka  $k$  s parametrizací

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{c}(s) + (L - s)\mathbf{T}(s), \quad s \in [0; L]. \quad (3.1)$$

Jestliže bude koza navíjet lano na ohradu v opačném směru, získáme parametrizaci křivky  $\tilde{k}$  obdobně, pouze za hodnotu parametru  $s$  budeme dosazovat čísla z intervalu  $[-L; 0]$  a uvědomíme si, že nenavinutá část lana bude mířit proti směru vektoru tečny v bodě  $s$ , před druhým členem tedy změnímme znaménko:

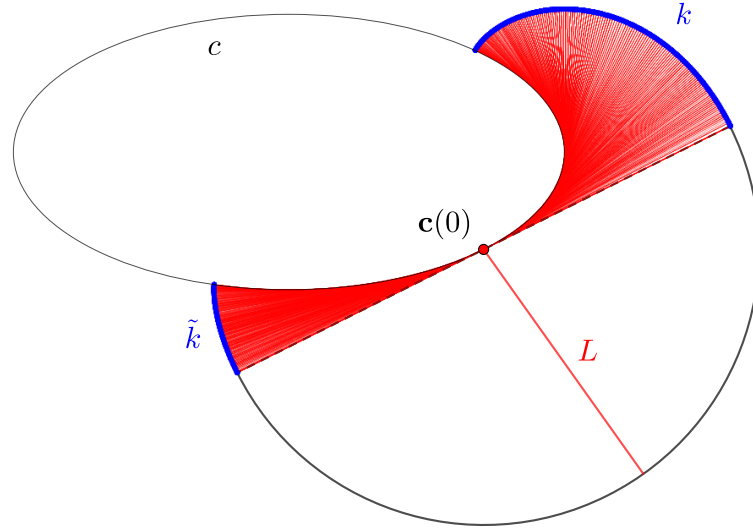
$$\tilde{\mathbf{k}}(s) = \mathbf{c}(s) - (L + s)\mathbf{T}(s), \quad s \in [-L; 0]. \quad (3.2)$$

Vztahy (3.1) a (3.2) nám mohou být povědomé. Porovnáme-li je se vztahy v Definicí 10, vidíme, že křivky  $k$  a  $\tilde{k}$  jsou části evolvent křivky  $c$ .

Nyní zbývá nalézt obsahy oblastí, které jsou červeně vyšrafovány na Obrázku 3.3. Tyto oblasti popíšeme jako parametrizované plochy  $f_k$  a  $f_{\tilde{k}}$  a jejich

<sup>1</sup>Vycházíme z poznatku, že délka křivky parametrizované obloukem v intervalu  $[a; b]$  je  $b - a$ .

obsahy poté vypočítáme pomocí vzorce daného Větou 10. Tyto plochy parametrizujeme tak, že kromě parametru  $s \in [0; L]$  zajišťujícího probíhání křivky  $c$  budeme uvažovat ještě parametr  $u \in [0; 1]$  zajišťující probíhání úsečky s krajními body  $\mathbf{c}(s)$  a  $\mathbf{k}(s)$ , resp.  $\tilde{\mathbf{k}}(s)$ .



Obrázek 3.3: Červeně vyšrafovanou oblast mezi křivkami  $c$  a  $k$  popíšeme jako parametrizovanou plochu.

Můžeme se jednoduše přesvědčit, že vhodné parametrizace ploch  $f_k$  a  $f_{\tilde{k}}$  vypadají následovně:

$$\mathbf{f}_k(s, u) = \mathbf{c}(s) + u(L - s)\mathbf{T}(s),$$

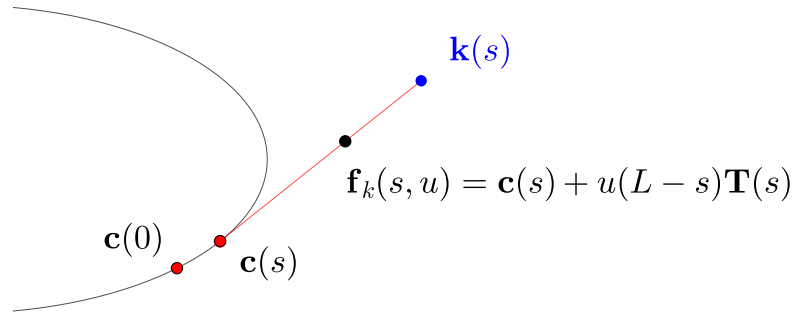
kde  $s \in [0; L]$  a  $u \in [0; 1]$ . Obdobně pro plochu  $f_{\tilde{k}}$ :

$$\mathbf{f}_{\tilde{k}}(s, u) = \mathbf{c}(s) - u(L + s)\mathbf{T}(s),$$

kde  $s \in [-L; 0]$  a  $u \in [0; 1]$ .

Snadno najdeme parciální derivace plochy  $f_k$  podle parametrů. Pro výpočet derivace tečného vektoru využijeme Frenetovy vzorce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial s}(s, u) &= \mathbf{c}'(s) + [u(L - s)\mathbf{T}(s)]' \\ &= \mathbf{T}(s) - u\mathbf{T}(s) + u(L - s)\mathbf{T}'(s) \\ &= (1 - u)\mathbf{T}(s) + u(L - s)\kappa(s)\mathbf{N}(s), \\ \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial u}(s, u) &= (L - s)\mathbf{T}(s). \end{aligned}$$



Obrázek 3.4: K odvození parametrizace plochy  $f_k$ . Bod  $\mathbf{f}_k(s, u)$  probíhá pro různé hodnoty parametru  $u$  úsečkou mezi body  $\mathbf{c}(s)$  a  $\mathbf{k}(s)$ .

Vypočítáme normu vektorového součinu obou parciálních derivací v bodě  $(s, u)$ .

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial u} \right\| &= \left\| [(1 - u)\mathbf{T}(s) + u(L - s)\kappa(s)\mathbf{N}(s)] \times (L - s)\mathbf{T}(s) \right\| \\
&= \left\| u(L - s)\kappa(s)\mathbf{N}(s) \times (L - s)\mathbf{T}(s) \right\| \\
&= u(L - s)^2\kappa(s) \|\mathbf{N}(s) \times \mathbf{T}(s)\| \\
&= u(L - s)^2\kappa(s).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Všechny činitele ve výrazu  $u(L - s)^2\kappa(s)$  jsou přitom nezáporné, neboť křivka  $c$  je konvexní (má při probíhání v kladném směru nezápornou křivost), jejich součin tedy můžeme psát bez absolutní hodnoty. Obdobně vypočítáme normu vektorového součinu parciálních derivací pro plochu  $f_{\tilde{k}}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}_{\tilde{k}}}{\partial s}(s, u) &= \mathbf{c}'(s) - [u(L + s)\mathbf{T}(s)]' \\
&= \mathbf{T}(s) - u\mathbf{T}(s) - u(L + s)\mathbf{T}'(s) \\
&= (1 - u)\mathbf{T}(s) - u(L + s)\kappa(s)\mathbf{N}(s), \\
\frac{\partial \mathbf{f}_{\tilde{k}}}{\partial u}(s, u) &= -(L + s)\mathbf{T}(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial \mathbf{f}_{\tilde{k}}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{f}_{\tilde{k}}}{\partial u} \right\| &= \left\| [(1 - u)\mathbf{T}(s) - u(L + s)\kappa(s)\mathbf{N}(s)] \times -(L + s)\mathbf{T}(s) \right\| \\
&= \left\| -u(L + s)\kappa(s)\mathbf{N}(s) \times -(L + s)\mathbf{T}(s) \right\| \\
&= u(L + s)^2\kappa(s) \|\mathbf{N}(s) \times \mathbf{T}(s)\| \\
&= u(L + s)^2\kappa(s).
\end{aligned} \tag{3.4}$$



Obsah červeně vyšrafované oblasti na obrázku 3.3 je roven součtu integrálů obou norem daných vztahy (3.3) a (3.4):

$$\begin{aligned} S &= \int_0^L \int_0^1 u(L-s)^2 \kappa(s) \, du \, ds + \int_{-L}^0 \int_0^1 u(L+s)^2 \kappa(s) \, du \, ds \\ &= \int_0^L (L-s)^2 \kappa(s) \left( \int_0^1 u \, du \right) ds + \int_{-L}^0 (L+s)^2 \kappa(s) \left( \int_0^1 u \, du \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (L-s)^2 \kappa(s) \, ds + \frac{1}{2} \int_{-L}^0 (L+s)^2 \kappa(s) \, ds. \end{aligned}$$

V prvním integrálu můžeme výraz  $L-s$  psát jako  $L-|s|$ , protože integrujeme přes kladné hodnoty  $s$ . Obdobně ve druhém integrálu platí  $L+s = L-|s|$ , protože integrujeme přes záporná  $s$ :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^L (L-|s|)^2 \kappa(s) \, ds + \frac{1}{2} \int_{-L}^0 (L-|s|)^2 \kappa(s) \, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L (L-|s|)^2 \kappa(s) \, ds. \end{aligned}$$

K obsahu  $S$  je třeba přičíst ještě obsah půlkruhu, který má koza k dispozici nezávisle na konkrétním tvaru ohrady. Obsah výběhu je tedy

$$\frac{\pi L^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{-L}^L (L-|s|)^2 \kappa(s) \, ds. \quad (3.5)$$

Protože se ve vztahu (3.5) explicitně objevuje parametr  $s$ , nelze se při řešení pro křivky, které nejsou parametrizovány obloukem, parametrizaci obloukem zcela vyhnout. Vztah pro výpočet oblasti mezi křivkou  $k$  a křivkou  $c$  s parametrem  $t \in [0; b]$ , dostaneme substitucí za parametr  $s$ :

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| \, du,$$

přičemž budeme uvažovat, že  $s(0) = 0$  a  $s(b) \geq L$ , a že koza je uvázána v bodě  $\mathbf{c}(0)$ . Parametrizace křivky  $k$  je

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{c}(t) + \left( L - \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| \, du \right) \frac{\mathbf{c}'(u)}{\|\mathbf{c}'(u)\|} \quad (3.6)$$

a parametrizace plochy  $f_k$  je

$$\mathbf{f}_k(t, u) = \mathbf{c}(t) + u \left( L - \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| \, du \right) \mathbf{T}(t).$$

Při výpočtu parciální derivace dle parametru  $t$  využijeme větu o derivaci integrálu dle horní meze a také Frenetovy vzorce:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial t}(t,u) &= \mathbf{c}'(t) + \left[ u \left( L - \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| du \right) \mathbf{T}(t) \right]' \\
&= \|\mathbf{c}'(t)\| \mathbf{T}(t) + u L \mathbf{T}'(t) - u \|\mathbf{c}'(t)\| \mathbf{T}(t) - u \left( \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| du \right) \mathbf{T}'(t) \\
&= (1-u) \|\mathbf{c}'(t)\| \mathbf{T}(t) + u \left( L - \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| du \right) \|\mathbf{c}'(t)\| \kappa(t) \mathbf{N}(t), \\
\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial u}(t,u) &= \left( L - \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| du \right) \mathbf{T}(t).
\end{aligned}$$

Zápis normy vektorového součinu obou parciálních derivací napíšeme v již zjednodušené podobě:

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial u} \right\| = u \left( L - \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| du \right)^2 \|\mathbf{c}'(t)\| \kappa(t).$$

Integrací přes množinu  $[0; s^{-1}(L)] \times [0; 1]$  dostaneme požadovaný obsah:

$$S_k = \frac{1}{2} \int_0^{s^{-1}(L)} \left( L - \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| du \right)^2 \|\mathbf{c}'(t)\| \kappa(t) dt. \quad (3.7)$$

## 3.2 Příklady

### 3.2.1 Kruhová ohrada

Známe-li obecný vztah pro výpočet obsahu výběhu, snadno úlohu o koze vyřešíme v tradiční formulaci, kdy ohradu tvoří kružnice o poloměru  $R$ , viz Obrázek 3.5.

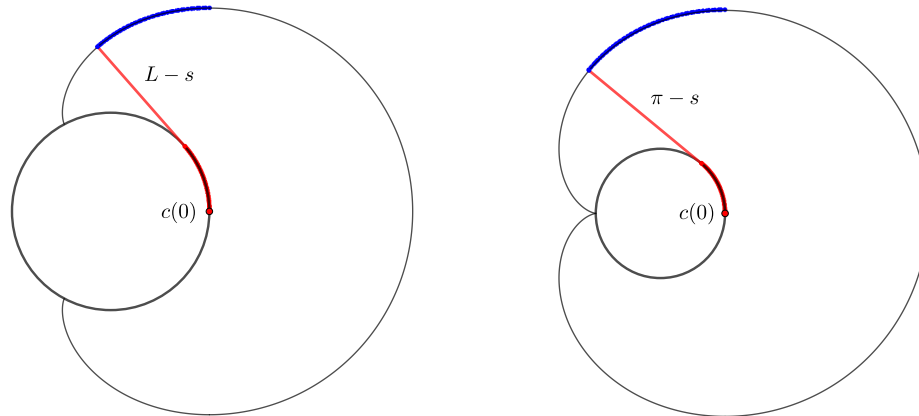
Křivost kružnice je v každém bodě  $1/R$ , po dosazení do vztahu (3.5) dostaneme

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\pi L^2}{2} + \frac{1}{2R} \int_{-L}^L (L - |s|)^2 ds \\
&= \frac{\pi L^2}{2} + \frac{1}{2R} \left( 2L^3 - 2L^3 + \frac{2L^3}{3} \right) \\
&= \frac{\pi L^2}{2} + \frac{L^3}{3R}.
\end{aligned}$$

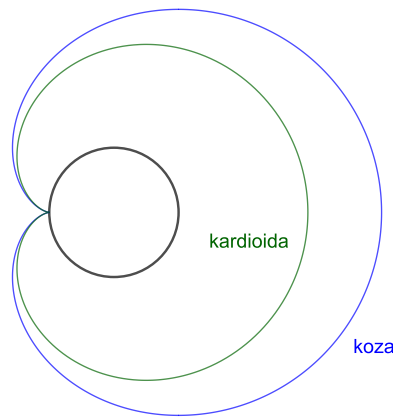
Speciálně pro situaci na Obrázku 3.5 vpravo, kdy ohradu tvoří jednotková kružnice a lano má délku  $\pi$ , dostaneme

$$S = \frac{5}{6} \pi^3.$$

Křivka, po které se koza při napjatém laně pohybuje, připomíná *kardioidu*, tedy křivku vzniklou valením kružnice po kružnici o stejném poloměru, o kardioidu se však nejedná.



Obrázek 3.5: Trajektorie kozy, která je uvázána napjatým lanem délky  $L$  k ohradě tvořené jednotkovou kružnicí. Vpravo speciální případ, kdy  $L = \pi$ .



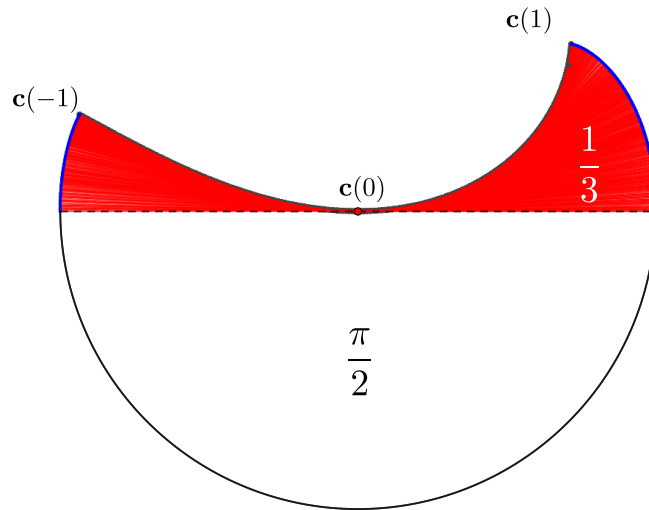
### 3.2.2 Eulerova spirála

Úloha o koze má smysl nejen pro uzavřené křivky. Stačí, aby část ohrady, na kterou se lano navíjí, tvořila křivka s nezápornou křivostí, a aby lano nebylo příliš dlouhé. Jako příklad můžeme uvažovat část Eulerovy spirály. Její parametrické rovnice nelze vyjádřit v uzavřeném tvaru, protože jde však o křivku definovanou svou křivostí, není ani nutné její parametrizaci hledat. Pro využití vztahu (3.5) nám stačí zadat její křivost

$$\kappa(s) = s + 1, \quad s \in [-1; 1],$$

přičemž koza je uvázána v bodě  $s = 0$  lanem jednotkové délky. Dosazením do vztahu (3.5) a následnou integrací dostaneme

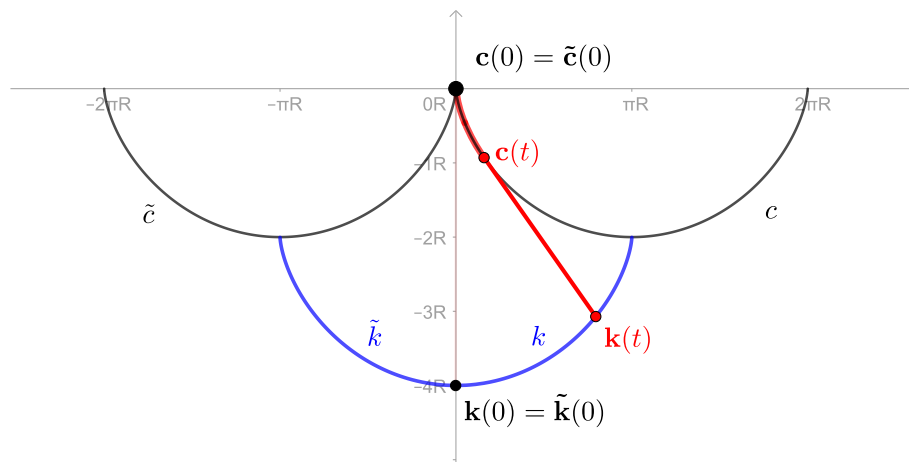
$$S = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - |s|)^2 (s + 1) ds = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.$$



Obrázek 3.6: Koza je uvázána k ohradě, jejíž část tvoří Eulerova spirála, lanem jednotkové délky.

### 3.3 Koza uvězněná mezi cykloidami

Uvažujme situaci znázorněnou na Obrázku 3.7, kdy je koza uvázána v bodě, ve kterém se dotýkají dva oblouky cykloidy vzniklé valením kružnice o poloměru  $R$  po ose  $x$ . Jak je podrobněji rozebráno v kapitole (4.4.1), délka takového oblouku je  $8R$ . Zvolíme-li k uvázání lano o délce  $4R$ , tedy sahající nejdále do vrcholu oblouku cykloidy, má úloha poměrně zajímavé vyústění.

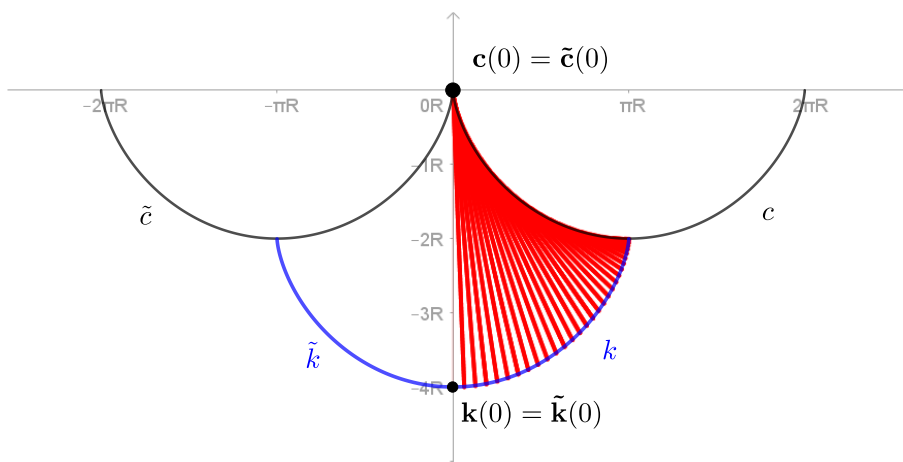


Obrázek 3.7: Koza je uvázána lanem délky  $4R$  mezi dvěma oblouky cykloidy  $c$ , resp.  $\tilde{c}$  generované kružnicí o poloměru  $R$  valící se pod osou  $x$ . Hranici oblastí, ve které se může pohybovat, tvoří kromě oblouků cykloidy křivky  $k$  a  $\tilde{k}$ .

Nášim cílem je nalézt obsah výběhu, který křivky  $k$  a  $\tilde{k}$  ohraničují, a následně najít jejich samotnou parametrizaci, ze které uvidíme, že  $k$  a  $\tilde{k}$  dohromady rovněž

tvoří jeden oblouk cykloidy. Obojí detailně provedeme pouze pro křivku  $k$ , pro křivku  $\tilde{k}$  dostaneme analogické vlastnosti ze symetrie obou křivek podle osy  $y$ .

### 3.3.1 Výpočet obsahu výběhu



Obrázek 3.8: Obsah výběhu je dvojnásobek obsahu  $S_k$  oblasti mezi křivkami  $c$  a  $k$ . Koza nyní nemá k dispozici půlkruh, který by měla k dispozici, kdyby křivka  $c$  měla spojitou nezápornou křivost.

Parametrizace cykloidy, která vzniká odvalováním kružnice o poloměru  $R$  pod osou  $x$  v jejím kladném směru, je

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t - R \sin\left(\frac{t}{R}\right) \\ -R + R \cos\left(\frac{t}{R}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

kde  $t \in [0; 2\pi R]$ . Objasnění parametrizace cykloidy může čtenář nalézt v podkapitole 4.4.1. Pro derivaci cykloidy pak platí

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) &= \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{t}{R}\right) \\ -\sin\left(\frac{t}{R}\right) \end{pmatrix}, \\ \|\mathbf{c}'(t)\| &= 2 \sin\left(\frac{t}{2R}\right), \\ \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| du &= 4R - 4R \cos\left(\frac{t}{2R}\right). \end{aligned}$$

Dále určíme křivost cykloidy. Vypočítáme tedy ještě její druhou derivaci:

$$\mathbf{c}''(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} \sin\left(\frac{t}{R}\right) \\ -\frac{1}{R} \cos\left(\frac{t}{R}\right) \end{pmatrix}.$$

K výpočtu křivosti cykloidy v bodě  $t \in (0; 2\pi R)$  využijeme vztah daný Větou 1. Krajní body intervalu odpovídají singulárním bodům křivky  $c$ , proto pro  $t = 0$  a  $t = 2\pi R$  není křivost definována. Při úpravě využijeme vztah pro kosinus dvojnásobného úhlu:

$$\begin{aligned}
 \kappa(t) &= \frac{\det(\mathbf{c}'(t) | \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3} \\
 &= \frac{1 - \cos\left(\frac{t}{R}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{R}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{R}\right)}{R \cdot 8 \sin^3\left(\frac{t}{2R}\right)} \\
 &= \frac{1 - \cos\left(\frac{t}{R}\right)}{8R \sin^3\left(\frac{t}{2R}\right)} \\
 &= \frac{1 - \cos^2\left(\frac{t}{2R}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2R}\right)}{8R \sin^3\left(\frac{t}{2R}\right)} \\
 &= \frac{2 \sin^2\left(\frac{t}{2R}\right)}{8R \sin^3\left(\frac{t}{2R}\right)} \\
 &= \frac{1}{4R \sin\left(\frac{t}{2R}\right)}.
 \end{aligned}$$

Nyní máme vše potřebné k dosazení do vztahu (3.7). Protože lano, kterým je koza uvázána, má mít délku  $4R$ , tj. má sahát do vrcholu oblouku cykloidy, budeme integrovat přes interval  $(0; \pi R)$ :

$$\begin{aligned}
 S_k &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi R} \left(4R - \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| du\right)^2 \|\mathbf{c}'(t)\| \kappa(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi R} \left(4R - 4R + 4R \cos\left(\frac{t}{2R}\right)\right)^2 \frac{2 \sin\left(\frac{t}{2R}\right)}{4R \sin\left(\frac{t}{2R}\right)} dt \\
 &= 4R \int_0^{\pi R} \cos^2\left(\frac{t}{2R}\right) dt \\
 &= 4R \int_0^{\pi R} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{R}\right) dt.
 \end{aligned}$$

Protože je integrál funkce kosinus na intervalu  $(0; \pi)$  nulový, nemusíme se již zabývat hledáním příslušné primitivní funkce. Část obsahu výběhu ohraničená křivkami  $c$  a  $k$  je tedy

$$S_k = 2\pi R^2,$$

pro celou oblast výběhu na Obrázku 3.7 pak ze symetrie vyplývá

$$S = 4\pi R^2.$$

### 3.3.2 Parametrizace hranice výběhu

Pro nalezení parametrizace křivky  $k$  pomocí vztahu (3.6) máme již vše potřebné:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(t) &= \mathbf{c}(t) + \left(4R - \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\| du\right) \frac{\mathbf{c}'(u)}{\|\mathbf{c}'(u)\|} \\ &= \begin{pmatrix} t - R \sin\left(\frac{t}{R}\right) \\ -R + R \cos\left(\frac{t}{R}\right) \end{pmatrix} + \frac{4R \cos\left(\frac{t}{2R}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2R}\right)} \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{t}{R}\right) \\ -\sin\left(\frac{t}{R}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro přehlednost raději rozepíšeme a upravíme tuto parametrizaci po jednotlivých souřadnicích  $x(t)$  a  $y(t)$ . Kromě toho ještě zavedeme substituci  $t/R = \beta$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= t - R \sin\left(\frac{t}{R}\right) + \frac{2R \cos\left(\frac{t}{2R}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2R}\right)} \left(1 - \cos\left(\frac{t}{R}\right)\right) \\ &= t - R \sin \beta + R \frac{2 \cos \frac{\beta}{2} (1 - \cos \beta)}{\sin \frac{\beta}{2}} \\ &= t - R \frac{\sin \beta \sin \frac{\beta}{2} - 2 \cos \frac{\beta}{2} + 2 \cos \beta \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \\ &= t - R \frac{2 \sin \beta \sin \frac{\beta}{2} + 2 \cos \beta \cos \frac{\beta}{2} - 2 \cos \frac{\beta}{2} - \sin \beta \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Nyní využijeme součtové vzorce pro funkci kosinus. Platí

$$2 \sin \beta \sin \frac{\beta}{2} + 2 \cos \beta \cos \frac{\beta}{2} = 2 \cos \frac{\beta}{2}.$$

Po úpravě tedy dostaneme zjednodušený vztah pro souřadnici  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= t - R \frac{2 \cos \frac{\beta}{2} - 2 \cos \frac{\beta}{2} - \sin \beta \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \\ &= t + R \frac{\sin \beta \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \\ &= t + R \sin \beta \\ &= t + R \sin\left(\frac{t}{R}\right). \end{aligned}$$

Pro druhou souřadnici vektoru  $\mathbf{k}(t)$  pak dostáváme

$$\begin{aligned}
y(t) &= -R + R \cos\left(\frac{t}{R}\right) - \frac{2R \cos\left(\frac{t}{2R}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2R}\right)} \sin\left(\frac{t}{R}\right) \\
&= -R + R \cos \beta - \frac{2R \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \beta \\
&= -R + R \frac{\sin \frac{\beta}{2} \cos \beta - 2 \sin \beta \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \\
&= -R + R \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \beta - 2 \sin \beta \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \beta}{\sin \frac{\beta}{2}}.
\end{aligned}$$

Ze součtových vzorců vyplývá

$$2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \beta - 2 \sin \beta \cos \frac{\beta}{2} = -2 \sin \frac{\beta}{2}.$$

Vztah pro  $y(t)$  tedy můžeme zjednodušit:

$$\begin{aligned}
y(t) &= -R - R \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \beta}{\sin \frac{\beta}{2}} \\
&= -R - 2R - R \cos \beta \\
&= -3R - R \cos\left(\frac{t}{R}\right).
\end{aligned}$$

Parametrizace křivky  $k$  je tedy:

$$\mathbf{k}(t) = \begin{pmatrix} t + R \sin\left(\frac{t}{R}\right) \\ -3R - R \cos\left(\frac{t}{R}\right) \end{pmatrix},$$

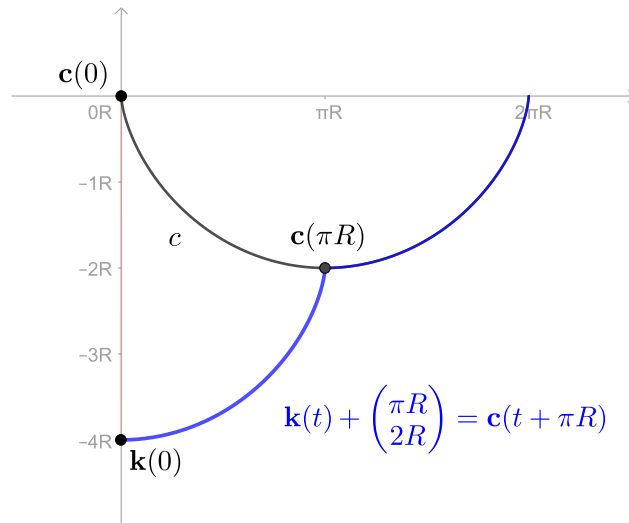
kde  $t \in [0; \pi R]$ . Tato parametrizace nápadně připomíná parametrizaci cykloidy dle vztahu (3.8). Skutečně můžeme snadno ukázat, že obraz křivky  $k$  posunutý o vektor  $(\pi R, 2R)$  je část oblouku cykloidy  $c$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}(t) + \begin{pmatrix} \pi R \\ 2R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t + \pi R + R \sin\left(\frac{t}{R}\right) \\ -R - R \cos\left(\frac{t}{R}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t + \pi R - R \sin\left(\frac{t+\pi R}{R}\right) \\ -R + R \cos\left(\frac{t+\pi R}{R}\right) \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{c}(t + \pi R),
\end{aligned}$$

kde  $t \in [0; \pi R]$ . Díky symetrii podle osy  $y$  můžeme říci, že obrazy křivek  $k$  a  $\tilde{k}$  dohromady tvoří oblouk cykloidy, která se od cykloidy  $c$  liší pouze posunutím o vektor  $(\pi R, 2R)$ .

Jak jsme poznamenali již dříve, trajektorie, po níž se pohybuje koza, je částí evolventy křivky reprezentující ohradu. Zjistili jsme tedy, že jednou z evolvent





Obrázek 3.9: Obraz křivky  $k$  odpovídá polovině oblouku cykloidy  $c$ .

cykloidy  $c$  je cykloida s ní shodná. Užitím poznatku z Věty 5 pak můžeme toto pozorování přeformulovat tak, že evolutou cykloidy je s ní shodná cykloida.

Tento poznatek má zajímavý fyzikální přesah. Roku 1673 jej holandský fyzik Christiaan Huygens využil ke konstrukci *cykloidálního kyvadla*. To je upevněno mezi dvěma oblouky tvaru cykloidy, které vzniknou odvalováním kružnice o poloměru  $R$ , závěsem o délce  $4R$  (viz Obrázek 3.7). Trajektorií samotného kyvadla je pak opět cykloida. Lze ukázat, že perioda takového kyvadla nezávisí na jeho počáteční výchylce, neboť hmotný bod, jehož trajektorii je v homogenním tíhovém poli cykloida, dosáhne nejnižšího bodu trajektorie vždy za stejný čas nezávisle na počáteční poloze. Říkáme, že cykloida je tzv. *tautochróna*, tedy křivka konstantního času. Tato její vlastnost je přehledně odvozena např. v knize (Tapp, 2016, str. 104 – 105) nebo na stránce (Weisstein, b).

## 4. Trochoidy

V následující kapitole prozkoumáme vlastnosti trochoid – křivek tvořících trajektorii vzniklou odvalováním kružnice o poloměru  $R$  po regulární rovinné křivce  $c$ . Sledovaný bod pak leží na kružnici, která se otáčí společně s odvalující se kružnicí, má s ní společný střed a poloměr  $r \leq R$ <sup>1</sup>. Uvažovat přitom budeme trochoidy vznikající odvalováním kružnice po obou stranách křivky  $c$ . Jedním z dobře známých speciálních případů trochoidy je *cykloida*. Tehdy sledovaný bod leží na valíci se kružnici, platí tedy  $r = R$  a křivka  $c$  je přímka.

V této kapitole se opřeme o článek (Choi, 2020), kde jsou uvedeny zajímavé výsledky o obsahu oblasti ohraničené trochoidami a o jejich délce pro případ, kdy kružnice valící se po křivce  $c$  je jednotková. Tyto výsledky zobecníme pro valící se kružnici o libovolném poloměru  $R$  a použijeme přitom značení konzistentní s ostatními kapitolami této práce.

Uvažujme křivku  $c : [0; 2\pi R] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizovanou obloukem. Její tečný, resp. normálový vektor v bodě  $s \in [0; 2\pi R]$  označíme  $\mathbf{T}(s)$ , resp.  $\mathbf{N}(s)$  a její křivost označíme  $\kappa(s)$ . Na křivku  $c$  budeme klást podmínku  $|\kappa(s)| < 1/R$ , aby se valící se kružnice o poloměru  $R$  mohla dotýkat křivky  $c$  v bodě  $\mathbf{c}(s)$  pro všechna  $s$ .

Z Obrázku 4.1 je zřejmé, že střed kružnice, která se odvaluje po levé, resp. pravé straně křivky  $c$ , má souřadnice

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}(s) + R\mathbf{N}(s), \quad \text{resp.} \\ &\mathbf{c}(s) - R\mathbf{N}(s). \end{aligned}$$

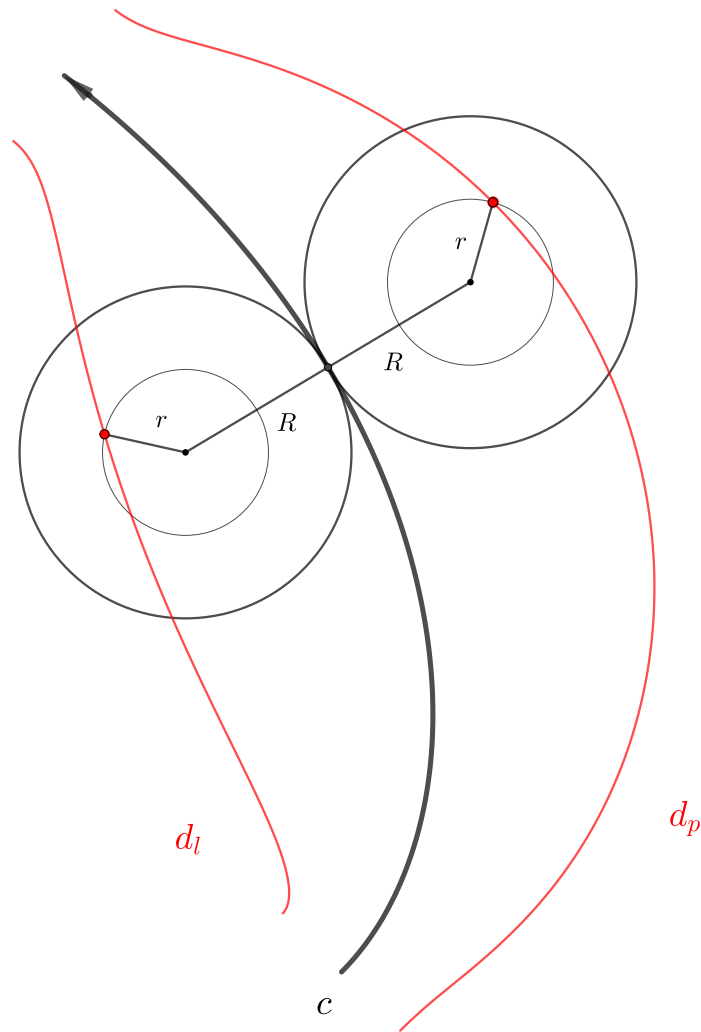
Parametrizaci křivek  $d_l$  a  $d_p$  (viz Obrázek 4.1) zvolíme tak, aby se pro hodnotu parametru  $s = 0$  sledovaný bod nacházel na normále ke křivce  $c$  vedené bodem  $\mathbf{c}(0)$ , a aby se při proběhnutí všech hodnot  $s \in [0; 2\pi R]$  odvalující se kružnice otočila kolem svého středu právě jednou. Pro  $s = 2\pi R$  se tedy bude sledovaný bod opět nacházet na normále ke křivce  $c$  vedené tentokrát bodem  $\mathbf{c}(2\pi R)$  a pro  $s \in [0; 2\pi R]$  bude kružnice o poloměru  $R$  pootočena o úhel  $s/R$  kolem svého středu.

Z výše uvedeného a z Obrázku 4.2 speciálně pro levou trochoidu  $d_l$  vyplývá, že v soustavě souřadnic dané Frenetovým repérem křivky  $c$  v bodě  $s$  má sledovaný bod souřadnice

$$\begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{s}{R} - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{s}{R} - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix},$$

přičemž před členem  $s/R$  píšeme znaménko minus, protože valící se kružnice se kolem svého středu otáčí po směru hodinových ručiček, tedy v záporném směru. Pro pravou trochoidu  $d_p$ , kdy se valící se kružnice otáčí kolem svého středu v kladném směru, dostaneme obdobně vzhledem k Frenetovu repéru souřadnice sledovaného bodu

<sup>1</sup>V nejobecnějším případě můžeme uvažovat i  $r > R$ . Výsledky o obsahu oblasti mezi trochoidou a křivkou  $c$ , resp. o obsahu oblasti mezi trochoidami, však již nebudou platné.

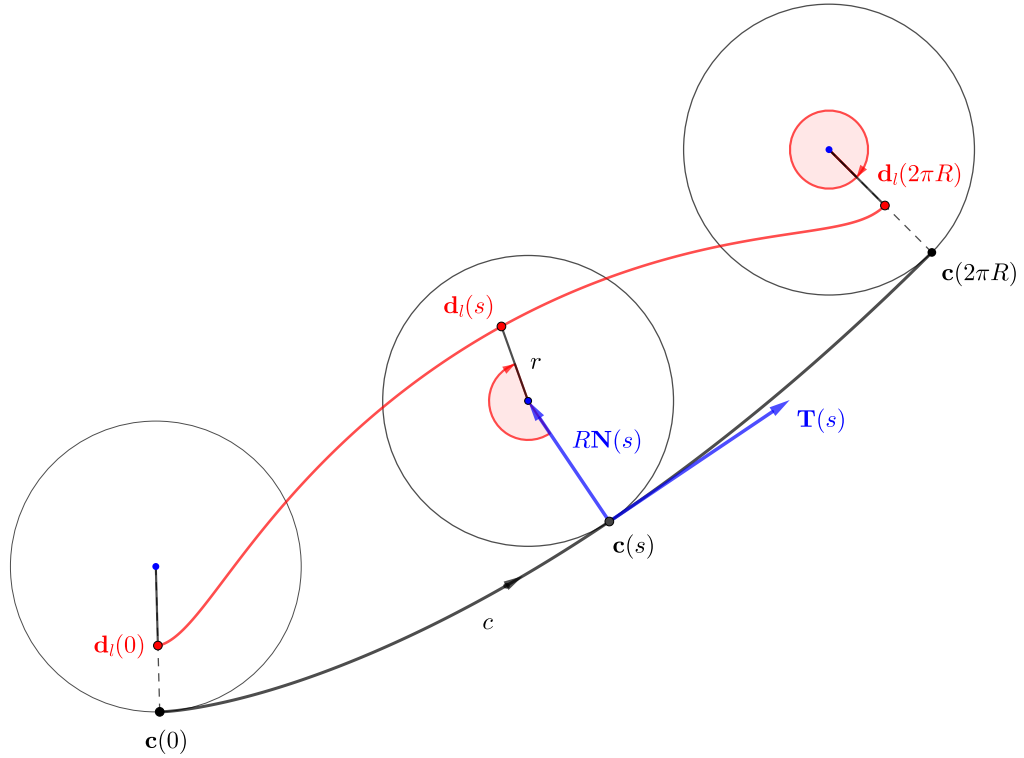


Obrázek 4.1: Tzv. levá trochoida  $d_l$ , resp. pravá trochoida  $d_p$  je generována valením kružnice o poloměru  $R$  po levé, resp. pravé straně křivky  $c$ . Sledovaný bod je od středu kružnice vzdálen o  $r$ . Směr orientace křivky  $c$  je naznačen šipkou.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -R \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{R} + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{R} + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Pro přechod ke kartézským souřadnicím ovšem musíme zohlednit nejen otáčení valící se kružnice kolem svého středu, ale také otáčení samotného Frenetova repéru. To je charakterizováno úhlovým zobrazením  $\alpha(s)$  udávajícím odchylku vektoru  $\mathbf{T}(s)$  a kladné poloosy  $x$ , pro něž platí  $\alpha'(s) = \kappa(s)$ .

Shrnutím výše uvedených poznatků dostaneme, že parametrizace levé trochoidy  $d_l$  je



Obrázek 4.2: K odvození parametrizace levé trochoidy  $d_l$  (červeně).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_l(s) &= \mathbf{c}(s) + R\mathbf{N}(s) + r \begin{pmatrix} \cos(\alpha(s) - s/R - \pi/2) \\ \sin(\alpha(s) - s/R - \pi/2) \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{c}(s) + R\mathbf{N}(s) + r \begin{pmatrix} \sin(\alpha(s) - s/R) \\ -\cos(\alpha(s) - s/R) \end{pmatrix}, \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

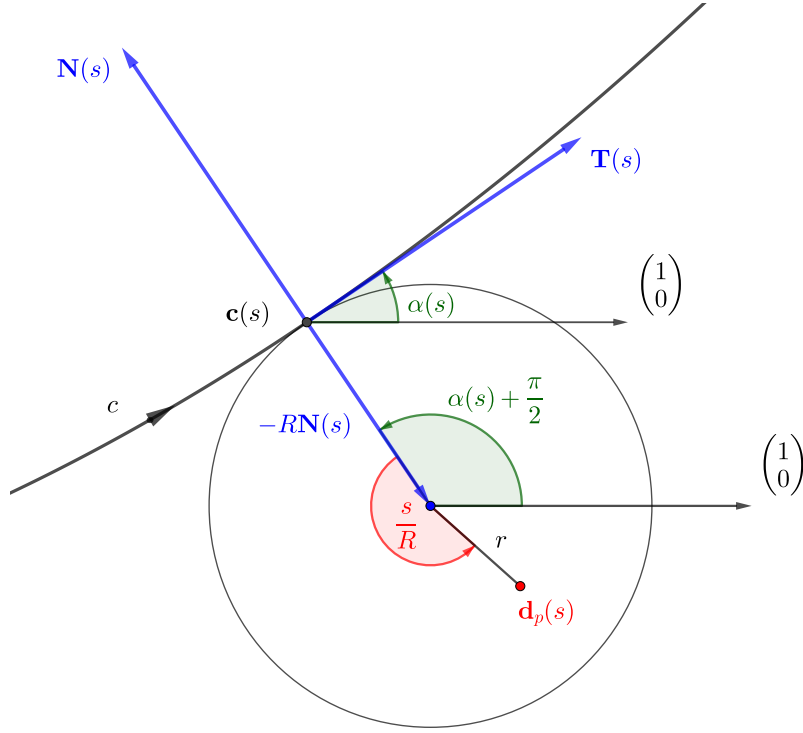
kde  $s \in [0; 2\pi R]$ . Pro další vysvětlení parametrizace viz Obrázek 4.3.

Parametrizace pravé trochoidy  $d_p$  vypadá obdobně. Do středu valící se kružnice se musíme vydat proti směru normálového vektoru  $\mathbf{N}$  a kružnice o poloměru  $R$  se otáčí proti směru hodinových ručiček, tedy ve směru kladném. Tomu odpovídá parametrizace

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_p(s) &= \mathbf{c}(s) - R\mathbf{N}(s) + r \begin{pmatrix} \cos(\alpha(s) + s/R + \pi/2) \\ \sin(\alpha(s) + s/R + \pi/2) \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{c}(s) - R\mathbf{N}(s) + r \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(s) + s/R) \\ \cos(\alpha(s) + s/R) \end{pmatrix}, \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

kde  $s \in [0; 2\pi R]$ . Opět se pokusíme na Obrázku 4.4 ukázat, že jde skutečně o parametrizaci pravé trochoidy.





Obrázek 4.4: Bod  $\mathbf{d}_p(s)$  leží na kružnici o poloměru  $r$  se středem v bodě  $\mathbf{c}(s) - R\mathbf{N}(s)$ , která se otáčí společně s odvalující se kružnicí. Vektor  $(1, 0)$  reprezentuje směr kladné poloosy  $x$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_l(s) &= (1 - R\kappa) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} - \frac{r}{R} (1 - R\kappa) \begin{pmatrix} \cos \left( \alpha - \frac{s}{R} \right) \\ \sin \left( \alpha - \frac{s}{R} \right) \end{pmatrix} \\ &= (1 - R\kappa) \begin{pmatrix} \cos \alpha - \frac{r}{R} \cos \left( \alpha - \frac{s}{R} \right) \\ \sin \alpha - \frac{r}{R} \sin \left( \alpha - \frac{s}{R} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nakonec určíme normu vektoru  $\mathbf{d}'_l(s)$ . Koeficient  $1 - R\kappa$  můžeme psát bez absolutní hodnoty, protože pro všechna  $s$  platí  $\kappa \leq 1/R$ . Dále využijeme vztah platný pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$  vyplývající ze součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus:

$$\cos(x) \cos(x \pm y) + \sin(x) \sin(x \pm y) = \cos(y),$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{d}'_l(s)\| &= (1 - R\kappa) \sqrt{\left[ \cos \alpha - \frac{r}{R} \cos \left( \alpha - \frac{s}{R} \right) \right]^2 + \left[ \sin \alpha - \frac{r}{R} \sin \left( \alpha - \frac{s}{R} \right) \right]^2} \\ &= (1 - R\kappa) \sqrt{1 + \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 2 \frac{r}{R} \left[ \cos \alpha \cos \left( \alpha - \frac{s}{R} \right) + \sin \alpha \sin \left( \alpha - \frac{s}{R} \right) \right]} \\ &= (1 - R\kappa) \sqrt{1 + \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 2 \frac{r}{R} \cos \left( \frac{s}{R} \right)}. \end{aligned}$$

Obdobným způsobem dostaneme rovněž normu  $\|\mathbf{d}'_p(s)\|$ :

$$\|\mathbf{d}'_p(s)\| = (1 + R\kappa) \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right)}.$$

Z výše uvedeného vyplývají vztahy pro výpočet délky levé, resp. pravé trochoidy:

$$L_l = \int_0^{2\pi R} (1 - R\kappa) \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right)} ds, \quad (4.4)$$

resp.

$$L_p = \int_0^{2\pi R} (1 + R\kappa) \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right)} ds. \quad (4.5)$$

## 4.2 Součet délek levé a pravé trochoidy

Jakkoliv je analytický výpočet délky oblouku trochoidy často složitý, můžeme učinit alespoň jedno obecné a možná překvapivé pozorování týkající se součtu délek levé a pravé trochoidy. Integrály dané vztahy (4.4) a (4.5) se liší pouze znaménkem v činiteli  $1 \mp R\kappa$ . Jejich sečtením tedy dostaneme

$$L_l + L_p = \int_0^{2\pi R} 2\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right)} ds,$$

což je výraz nezávislý na křivosti křivky  $c$ ! Pro stejné parametry  $r$  a  $R$  a různé křivky  $c$  tedy dostáváme vždy stejný součet délky levé a pravé trochoidy. Speciálně pro situaci, kdy sledovaný bod leží na valíci se kružnici o poloměru  $R$ , dostaneme nezávisle na zvolené křivce  $c$ :

$$\begin{aligned} L_l + L_p &= 2 \int_0^{2\pi R} \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{s}{R}\right)} ds \\ &= 16R. \end{aligned}$$

## 4.3 Obsah oblasti mezi oblouky trochoid

V této části prozkoumáme, jaký je obsah oblasti mezi obloukem levé a pravé trochoidy a dostaneme výsledek podobný tomu o součtu délek levé a pravé trochoidy – totiž že se jedná o invariant nezávislý na tvaru křivky  $c$ . Začneme uvedením parametrizace plochy  $f_l : [0; 2\pi R] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , která tvoří oblast mezi křivkou  $c$  a levou trochoidou  $d_l$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_l(s, u) &= u\mathbf{d}_l(s) + (1 - u)\mathbf{c}(s) \\ &= \mathbf{c}(s) + uR\mathbf{N}(s) + ur \begin{pmatrix} \sin(\alpha - s/R) \\ -\cos(\alpha - s/R) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde  $u \in [0; 1]$  a  $s \in [0; 2\pi R]$ . Nový parametr  $u$  zde zajišťuje probíhání úsečky s krajními body  $\mathbf{c}(s)$  a  $\mathbf{d}_l(s)$ . Pro výpočet obsahu této plochy je třeba najít její parciální derivace podle parametrů:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial s}(s, u) &= \mathbf{T}(s) - uR\kappa\mathbf{T}(s) + ur \left( \kappa - \frac{1}{R} \right) \begin{pmatrix} \cos\left(\alpha - \frac{s}{R}\right) \\ \sin\left(\alpha - \frac{s}{R}\right) \end{pmatrix} \\ &= (1 - uR\kappa) \mathbf{T}(s) - \frac{ur}{R} (1 - R\kappa) \begin{pmatrix} \cos\left(\alpha - \frac{s}{R}\right) \\ \sin\left(\alpha - \frac{s}{R}\right) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

což můžeme po souřadnicích rozepsat následovně:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial s}(s, u) = \begin{pmatrix} (1 - uR\kappa) \cos(\alpha) - \frac{ur}{R} (1 - R\kappa) \cos\left(\alpha - \frac{s}{R}\right) \\ (1 - uR\kappa) \sin(\alpha) - \frac{ur}{R} (1 - R\kappa) \sin\left(\alpha - \frac{s}{R}\right) \end{pmatrix}.$$

Derivace podle parametru  $u$  je

$$\frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial u}(s, u) = R\mathbf{N}(s) + r \begin{pmatrix} \sin\left(\alpha - \frac{s}{R}\right) \\ -\cos\left(\alpha - \frac{s}{R}\right) \end{pmatrix},$$

po složkách pak

$$\frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial u}(s, u) = \begin{pmatrix} -R \sin(\alpha) + r \sin\left(\alpha - \frac{s}{R}\right) \\ R \cos(\alpha) - r \cos\left(\alpha - \frac{s}{R}\right) \end{pmatrix}.$$

Výpočet normy vektorového součinu parciálních derivací je poměrně zdlouhavý, ale přímočarý, proto zde pouze uvedeme výsledek.

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial u} \right\| = (1 - uR\kappa) \left( R - r \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) + ur (1 - R\kappa) \left( \frac{r}{R} - \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right).$$

Všechny činitele v závorkách jsou přitom nezáporné, proto můžeme výraz psát bez absolutní hodnoty. Obsah oblasti mezi trochoidou  $d_l$  a křivkou  $c$  lze vypočítat integrací tohoto výrazu přes množinu  $[0; 2\pi R] \times [0; 1]$ :

$$\begin{aligned}S_l &= \int_0^{2\pi R} \int_0^1 (1 - uR\kappa) \left( R - r \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) + ur (1 - R\kappa) \left( \frac{r}{R} - \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) du ds \\ &= \int_0^{2\pi R} \left( 1 - \frac{1}{2}R\kappa \right) \left( R - r \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) + \frac{1}{2}r (1 - R\kappa) \left( \frac{r}{R} - \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) ds \\ &= \int_0^{2\pi R} R + \frac{r^2}{2R} - \frac{1}{2}R^2\kappa - \frac{1}{2}r^2\kappa + Rr\kappa \cos\left(\frac{s}{R}\right) - \frac{3}{2}r \cos\left(\frac{s}{R}\right) ds \\ &= 2\pi R^2 + \pi r^2 - \int_0^{2\pi R} \kappa \left( \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}r^2 - Rr \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) ds\end{aligned}\tag{4.6}$$

Obdobným způsobem najdeme parametrizaci oblasti mezi křivkou  $c$  a pravou trochoidou  $d_p$ :



$$\begin{aligned}\mathbf{f}_p(s,u) &= u\mathbf{d}_p(s) + (1-u)\mathbf{c}(s) \\ &= \mathbf{c}(s) - uR\mathbf{N}(s) + ur \begin{pmatrix} -\sin(\alpha + s/R) \\ \cos(\alpha + s/R) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

kde  $u \in [0; 1]$  a  $s \in [0; 2\pi R]$ . Parciální derivace plochy  $f_p$  rozepsané po složkách vypadají následovně:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial s}(s,u) = \begin{pmatrix} (1 + uR\kappa) \cos(\alpha) - \frac{ur}{R} (1 + R\kappa) \cos\left(\alpha + \frac{s}{R}\right) \\ (1 + uR\kappa) \sin(\alpha) - \frac{ur}{R} (1 + R\kappa) \sin\left(\alpha + \frac{s}{R}\right) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial u}(s,u) = \begin{pmatrix} R \sin(\alpha) - r \sin\left(\alpha + \frac{s}{R}\right) \\ -R \cos(\alpha) + r \cos\left(\alpha + \frac{s}{R}\right) \end{pmatrix}.$$

Norma jejich vektorového součinu je

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial u} \right\| = (1 + uR\kappa) \left( R - r \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) + ur (1 + R\kappa) \left( \frac{r}{R} - \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right),$$

čemuž podobně jako ve vztahu (4.6) odpovídá obsah mezi pravou trochoidou  $d_p$  a křivkou  $c$ :

$$S_p = 2\pi R^2 + \pi r^2 + \int_0^{2\pi R} \kappa \left( \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}r^2 - Rr \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) ds \quad (4.7)$$

Obsah oblasti mezi oběma trochoidami pak dostaneme jednoduše jako součet obsahů daných vztahy (4.6) a (4.7):

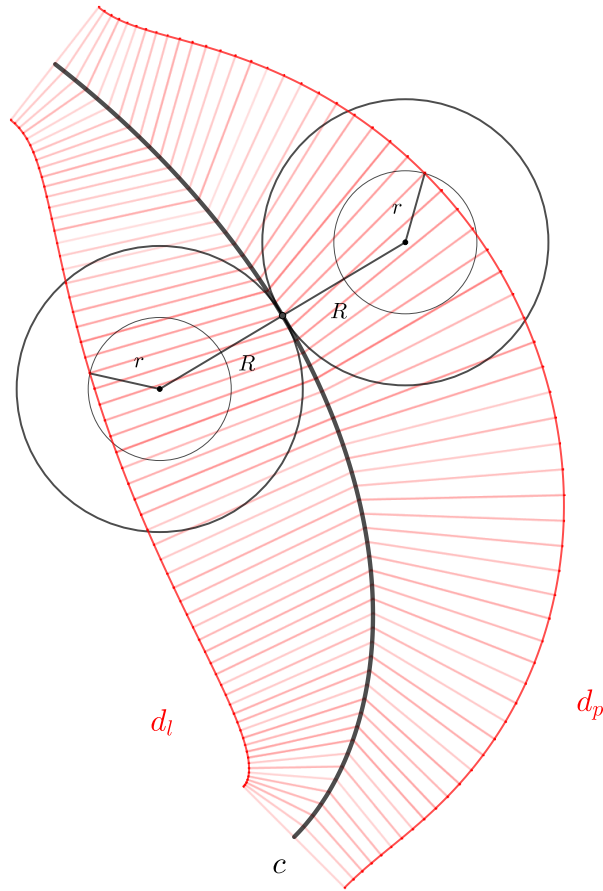
$$\begin{aligned}S &= S_l + S_p \\ &= 2(2\pi R^2 + \pi r^2) \\ &= 4\pi R^2 + 2\pi r^2.\end{aligned}$$

Nejen, že obsah oblasti mezi obloukem levé a pravé trochoidy nezávisí na parametrizaci křivky  $c$ , ale dokonce jej lze vypočítat velice snadno.

## 4.4 Příklady významných trochoid

### 4.4.1 Cykloida

Zjistíme délku cykloidy s využitím vztahu (4.4). Dosadíme  $\kappa = 0$  a  $R = r$ . S využitím vzorce pro sinus polovičního úhlu dostaneme



Obrázek 4.5: Obsah oblasti mezi oblouky trochoid  $d_l$  a  $d_p$  nezávisí na konkrétním tvaru křivky  $c$ , je vždy roven  $4\pi R^2 + 2\pi r^2$ .

$$\begin{aligned}
 L_{\text{cykloida}} &= \int_0^{2\pi R} \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{s}{R}\right)} ds \\
 &= 2 \int_0^{2\pi R} \sin\left(\frac{s}{2R}\right) ds \\
 &= 8R.
 \end{aligned}$$

Integrál funkce  $\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right)}$  lze snadno vypočítat právě v případě, kdy  $r = R$ , tedy kdy sledovaný bod leží na valíci se kružnici. V situacích, kdy  $r < R$ , vede úloha k výpočtu tzv. *eliptického integrálu druhého druhu*, který nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Kromě délky cykloidy můžeme vypočítat také obsah pod jejím obloukem. Dosazením  $\kappa = 0$  a  $r = R$  do vztahu (4.6) dostaneme

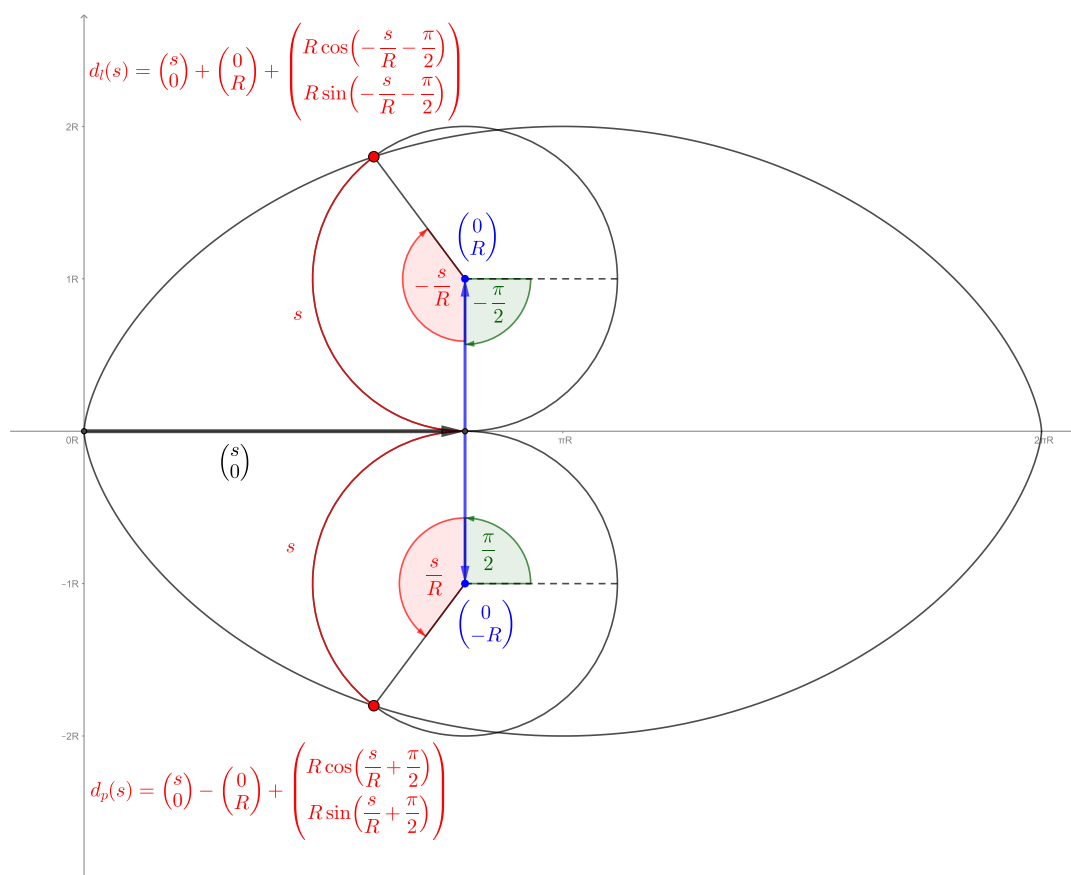
$$S_{\text{cykloida}} = 3\pi R^2.$$

Navíc můžeme uvést podle vztahu (4.1) parametrizaci cykloidy  $d_l$  vedené nad osou  $x$ . Křivka  $c$  je zde úsečka orientovaná ve směru kladné poloosy  $x$  délky  $2\pi R$ .

Za  $\alpha$  dosadíme 0, protože křivka  $c$  s osou  $x$  splývá. Parametrizaci cykloidy vedené pod osou  $x$  získáme změnou znaménka u druhé souřadnice v parametrizaci  $d_l$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_l(s) &= \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \cos\left(-\frac{s}{R} - \frac{\pi}{2}\right) \\ R \sin\left(-\frac{s}{R} - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s - R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ R - R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{d}_p(s) &= \begin{pmatrix} s - R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ -R + R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde  $s \in [0; 2\pi R]$ .



Obrázek 4.6: K objasnění parametrizace cykloidy.

## 4.4.2 Epitrochoida a hypotrochoida

*Epitrochoida* vzniká odvalováním kružnice o poloměru  $R$  vně tzv. vnitřní kružnice o poloměru  $kR$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ . V naší konvenci jde o pravou trochoidu  $d_p$ , kde křivka  $c$  je kladně orientovaná kružnice s křivostí  $1/(kR)$ . Parametrizaci epitrochoidy zapíšeme pomocí vztahu (4.2). Parametrizaci křivky  $c$  zvolíme takto:

$$\mathbf{c}(s) = kR \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{kR} \\ \sin \frac{s}{kR} \end{pmatrix},$$

její normálový vektor má tedy souřadnice

$$\mathbf{N}(s) = - \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{kR} \\ \sin \frac{s}{kR} \end{pmatrix}.$$

Hodnotu úhlového zobrazení  $\alpha$  v bodě  $s$  určíme nalezením primitivní funkce ke křivosti křivky  $c$ :

$$\alpha(s) = \int \frac{1}{kR} ds = \frac{s}{kR} + C.$$

Integrační konstantu  $C$  určíme z počáteční podmínky  $\alpha(0) = \pi/2$  (pro  $s = 0$  je tečný vektor kolmý na osu  $x$ ). Dostáváme tedy

$$\alpha(s) = \frac{s}{kR} + \frac{\pi}{2}$$

a také parametrizaci epitrochoidy  $d_p$  dle vztahu (4.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_p(s) &= kR \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{kR} \\ \sin \frac{s}{kR} \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{kR} \\ \sin \frac{s}{kR} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\sin \left( \frac{s}{kR} + \frac{\pi}{2} + \frac{s}{R} \right) \\ \cos \left( \frac{s}{kR} + \frac{\pi}{2} + \frac{s}{R} \right) \end{pmatrix} \\ &= (k+1)R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{kR} \\ \sin \frac{s}{kR} \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{s}{kR} + \frac{s}{R} \right) \\ \sin \left( \frac{s}{kR} + \frac{s}{R} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde  $s \in [0; 2\pi kR]$ . Horní mez násobíme koeficientem  $k$ , protože je zvykem uvažovat uzavřenou epitrochoidu vzniklou oběhnutím celé vnitřní kružnice o poloměru  $kR$ .

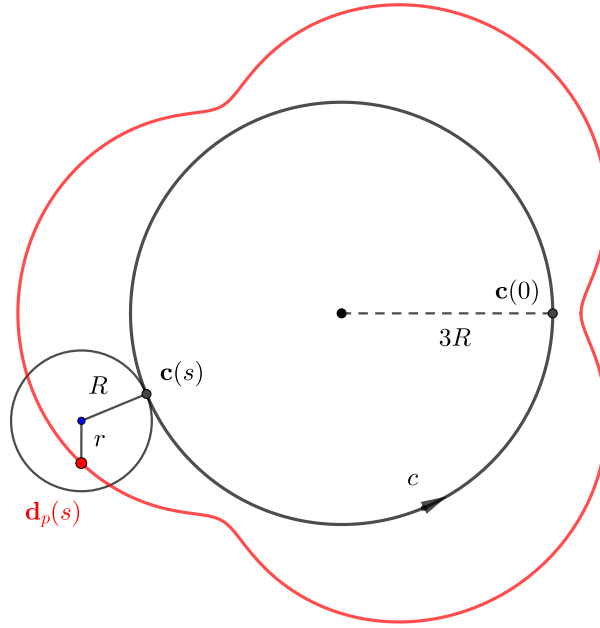
Známým speciálním případem epitrochoidy je *epicykloida*. Tehdy sledovaný bod leží na odvalující se kružnici, platí  $r = R$ . Můžeme tedy dle vztahu (4.5) vypočítat její délku. Odvalující se kružnice vykoná při oběhu  $k$  otáček, než se vrátí do výchozí pozice, epicykloida tedy bude mít  $k$  oblouků. Pro nalezení celé její délky integrál daný vztahem (4.5) touto konstantou vynásobíme:

$$\begin{aligned} L_{epicykloida} &= k \int_0^{2\pi R} \left( 1 + \frac{R}{kR} \right) \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{s}{R} \right)} ds \\ &= (k+1) \int_0^{2\pi R} \sqrt{2 - 2 \cos \left( \frac{s}{R} \right)} ds. \end{aligned}$$

Z předchozího příkladu již víme, že hodnota výše uvedeného integrálu je  $8R$ . Délka epicykloidy tedy je

$$L_{epicykloida} = (k+1)8R$$

Obsah oblasti mezi epicykloidou a vnitřní kružnicí dle vztahu (4.7) je



Obrázek 4.7: Epitrochoida  $d_p$ , pro kterou je poloměr vnitřní kružnice, křivky  $c$ , trojnásobný oproti poloměru odvalující se kružnice.

$$\begin{aligned} S_p &= k3\pi R^2 + k \int_0^{2\pi R} \frac{1}{kR} \left( R^2 - R^2 \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) \\ &= 3k\pi R^2 + 2\pi R^2, \end{aligned}$$

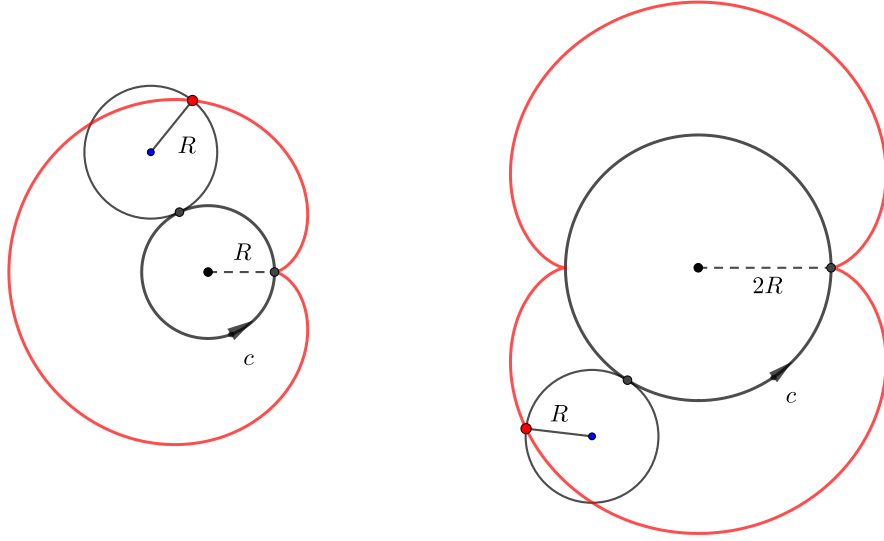
pro výpočet obsahu celé oblasti ohraničené epicykloidou stačí přičíst obsah vnitřní kružnice o poloměru  $kR$ :

$$S_{epicykloida} = \pi(kR)^2 + 3k\pi R^2 + 2\pi R^2.$$

Speciálními případy epicykloidy jsou *kardioida* nebo *nefroida*. V prvním případě má odvalující se kružnice stejný poloměr jako kružnice vnitřní, tedy  $k = 1$ . Ve druhém případě má odvalující se kružnice poloměr poloviční oproti kružnici vnitřní, tedy  $k = 2$ . Jejich délky jsou  $16R$ , resp.  $24R$ , a ohraničují oblasti o obsahu  $6\pi R^2$ , resp.  $12\pi R^2$ .

Obdobně můžeme zapsat parametrizaci *hypotrochoidy* – křivky, která vzniká odvalováním kružnice o poloměru  $R$  uvnitř kružnice o poloměru  $kR$ . V naší konvenci se jedná o levou trochoidu  $d_l$  a její parametrizaci lze zapsat s využitím vztahu (4.1) obdobně jako pro epitrochoidu:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_l(s) &= kR \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{kR} \\ \sin \frac{s}{kR} \end{pmatrix} - R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{kR} \\ \sin \frac{s}{kR} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \sin \left( \frac{s}{kR} + \frac{\pi}{2} - \frac{s}{R} \right) \\ -\cos \left( \frac{s}{kR} + \frac{\pi}{2} - \frac{s}{R} \right) \end{pmatrix} \\ &= (k-1)R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{kR} \\ \sin \frac{s}{kR} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{s}{kR} - \frac{s}{R} \right) \\ \sin \left( \frac{s}{kR} - \frac{s}{R} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



Obrázek 4.8: Kardioda (vlevo) a nefroida (vpravo) jakožto speciální případy epicykloidy.

kde  $s \in [0; 2\pi kR]$ .

Speciálně lze uvažovat *hypocykloidu*, tedy hypotrochoidu, kde sledovaný bod leží na odvalující se kružnici, platí  $r = R$ . Její délku určíme pomocí vztahu (4.4):

$$\begin{aligned} L_{hypocykloida} &= k \int_0^{2\pi R} \left(1 - \frac{R}{kR}\right) \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{s}{R}\right)} ds \\ &= (k - 1) \int_0^{2\pi R} \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{s}{R}\right)} ds \\ &= (k - 1)8R. \end{aligned}$$

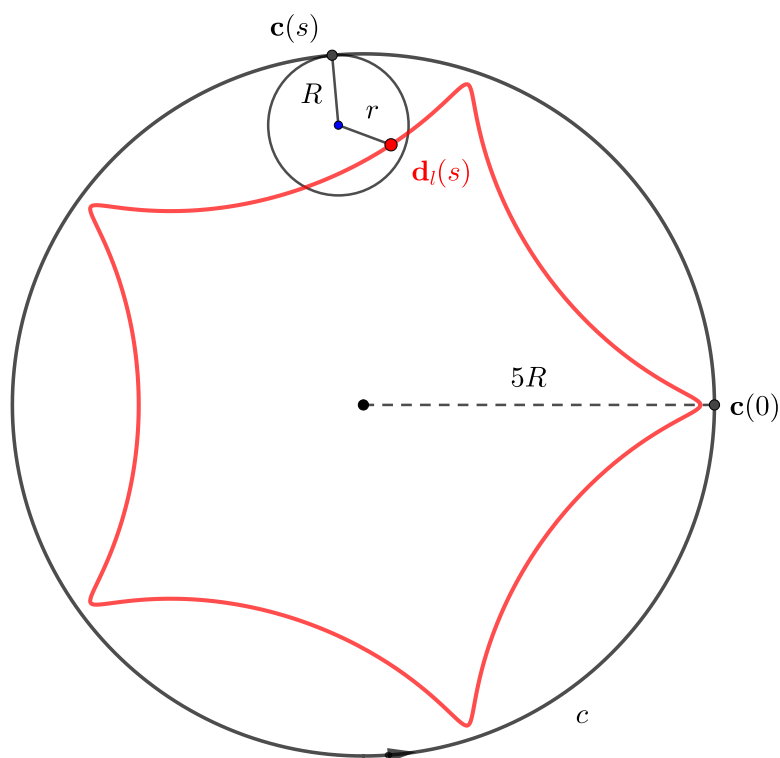
Obsah mezi hypocykloidou a vnější kružnicí dle vztahu (4.6) je

$$\begin{aligned} S_l &= k3\pi R^2 - k \int_0^{2\pi R} \frac{1}{kR} \left(R^2 - R^2 \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right) \\ &= 3k\pi R^2 - 2\pi R^2. \end{aligned}$$

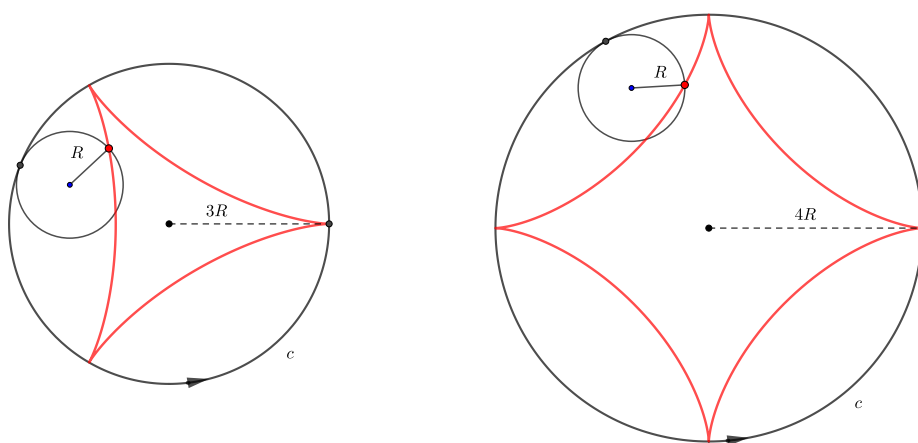
Odečteme-li tento obsah od obsahu vnější kružnice, dostaneme obsah oblasti ohraničené hypocykloidou:

$$\begin{aligned} S_{hypocykloida} &= \pi(kR)^2 - (3k\pi R^2 - 2\pi R^2) \\ &= \pi(kR)^2 - 3k\pi R^2 + 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Známým příkladem hypocykloidy je *deltoida*, pro kterou je  $k = 3$ , nebo *asteroida*, pro kterou je  $k = 4$ . Jejich délky jsou  $16R$ , resp.  $24R$ , a ohraničují oblasti o obsahu  $2\pi R^2$ , resp.  $6\pi R^2$ .



Obrázek 4.9: Epitrochoida  $d_l$ , pro kterou je poloměr vnější kružnice, křivky  $c$ , trojnásobný oproti poloměru odvalující se kružnice.

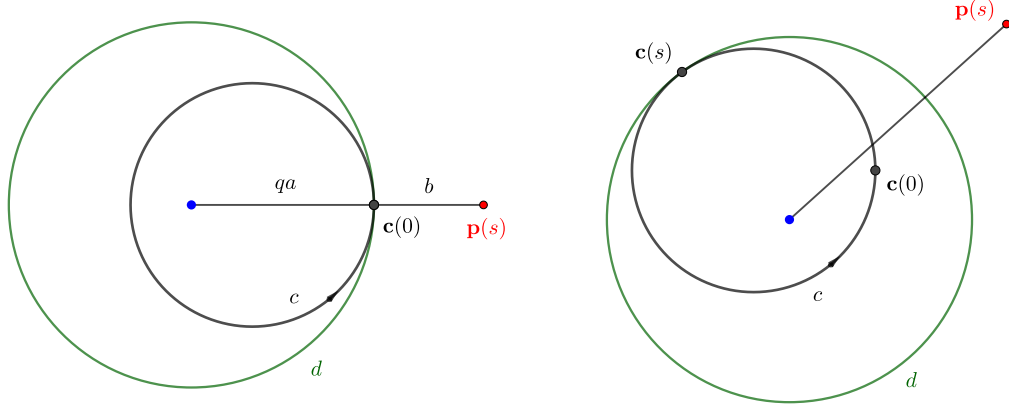


Obrázek 4.10: Deltoida (vlevo) a asteroida (vpravo) jakožto speciální případy hypocykloidy.

### 4.4.3 Peritrochoida

V rámci studia trochoid prozkoumáme ještě další rodinu křivek, kterou jsou *peritrochoidy*. Tyto křivky jsou generovány tak, že po základní kružnici o polo-

měru  $a$  je odvalována kružnice o poloměru  $qa$ , kde  $q \in (1; \infty)$ , přičemž základní kružnice leží uvnitř odvalující se kružnice. Sledovaný bod pak leží ve vzdálenosti  $b \geq qa$  od středu odvalující se kružnice<sup>2</sup>. Peritrochoidám bývá v teorii křivek věnována poměrně malá pozornost, protože jde o křivky ekvivalentní s epitrochoidami, jak ukážeme níže. Na druhou stranu mělo studium peritrochoid velký význam v technické praxi – speciálně při konstrukci nekonvenčního *Wankelova motoru*, jehož rotor (resp. jeho jednotlivé body) se pohybuje právě po peritrochoidě. Na stránce (Koutsovoulos, 2017) lze nalézt názorné animace.



Obrázek 4.11: Při odvalování kružnice  $d$  po základní kružnici  $c$  sledujeme bod  $\mathbf{p}(s)$  pevně spojený s odvalující se kružnicí.

Zkusme nejprve nalézt parametrizaci peritrochoidy v souladu s Obrázkem 4.11. Základní kružnice  $c$  o poloměru  $a$  je křivka s parametrizací

$$\mathbf{c}(s) = a \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{a} \\ \sin \frac{s}{a} \end{pmatrix}, \quad s \in \left[ 0; \frac{2\pi qa}{q-1} \right],$$

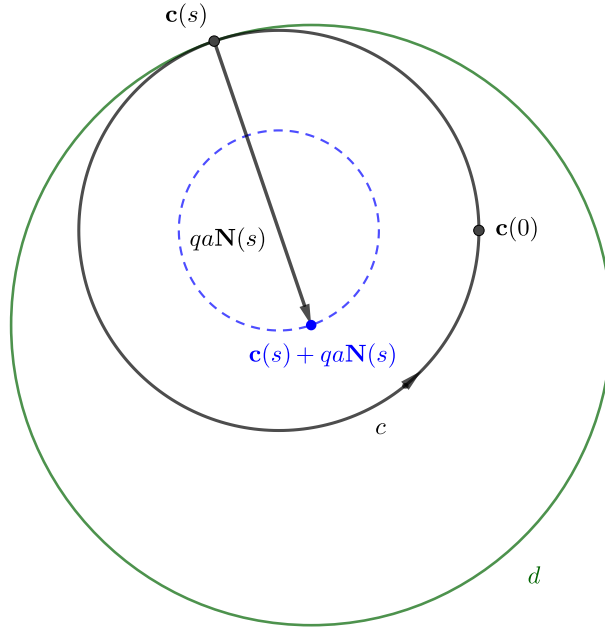
přičemž později ukážeme, proč volíme hodnoty parametru  $s$  právě takto. Pro hodnotu parametru  $s = 0$  se kružnice  $d$  o poloměru  $qa$  dotýká základní kružnice  $c$  v bodě  $\mathbf{c}(0)$  a s rostoucím  $s$  se odvaluje v kladném směru tak, že se pro všechna  $s$  obě kružnice dotýkají v bodě  $\mathbf{c}(s)$ . Připomeňme ještě jednou, že kružnice  $c$  leží uvnitř kružnice  $d$ . V tuto chvíli můžeme s pomocí obrázku níže nahlédnout, že střed kružnice  $d$  se pro všechna  $s$  nachází v bodě  $\mathbf{c}(s) + qa\mathbf{N}(s)$ , kde  $\mathbf{N}$  označuje normálový vektor ke křivce  $c$ . Pro přehlednost označíme tento střed  $\mathbf{z}_d(s)$ . Při odvalování kružnice  $d$  je navíc trajektorií bodu  $\mathbf{z}_d(s)$  rovněž kružnice s parametrizací

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_d(s) &= \mathbf{c}(s) + qa\mathbf{N}(s) \\ &= a \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{a} \\ \sin \frac{s}{a} \end{pmatrix} - qa \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{a} \\ \sin \frac{s}{a} \end{pmatrix} \\ &= (1-q)a \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{a} \\ \sin \frac{s}{a} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Podobně jako je pro obecné trochoidy možno uvažovat  $r > R$ , je i zde možno uvažovat libovolné  $b \geq 0$ . Parametrizace, ani ekvivalence s epitrochoidami se nezmění.



jde tedy o kružnici s kružnicí  $c$  soustřednou.



Obrázek 4.12: K parametrizaci středu kružnice  $d$  o poloměru  $qa$ , která se v kladném směru odvaluje po kružnici  $c$  o poloměru  $a$ . Střed pro různé hodnoty parametru  $s$  rovněž opisuje kružnici (čárkovaně), která je soustředná s kružnicí  $c$ .

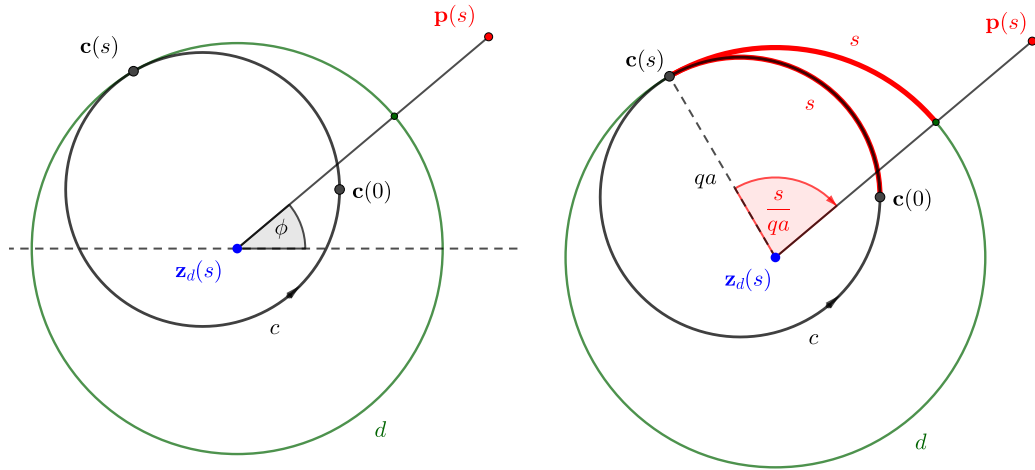
Nyní zbývá pouze drobný krok k nalezení parametrizace samotné peritrochoidy  $p$ , kdy je třeba charakterizovat otáčivý pohyb sledovaného bodu  $\mathbf{p}(s)$ , který je bodem kružnice o poloměru  $b$  se středem v bodě  $\mathbf{z}_d(s)$ . Podaří-li se nám vyjádřit pomocí parametru  $s$  odchylku  $\phi$  vektoru  $\mathbf{p}(s) - \mathbf{z}_d(s)$  a kladné poloosy  $x$ , můžeme zapsat parametrizaci peritrochoidy  $p$  ve tvaru

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{z}_d(s) + b \begin{pmatrix} \cos \phi(s) \\ \sin \phi(s) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Protože je kružnice  $c$  parametrizovaná obloukem, má trajektorie bodu dotyku obou kružnic (bod  $\mathbf{c}(s)$ ) od počáteční polohy délku  $s$ . Tato délka je rovna délce oblouku, který byl odvalen na kružnici  $d$ . Středový úhel příslušný tomuto oblouku má v kružnici  $d$  velikost  $s/(qa)$  a jak ilustruje obrázek níže, jde o úhel  $\sphericalangle(\mathbf{p}(s), \mathbf{z}_d(s), \mathbf{c}(s))$ .

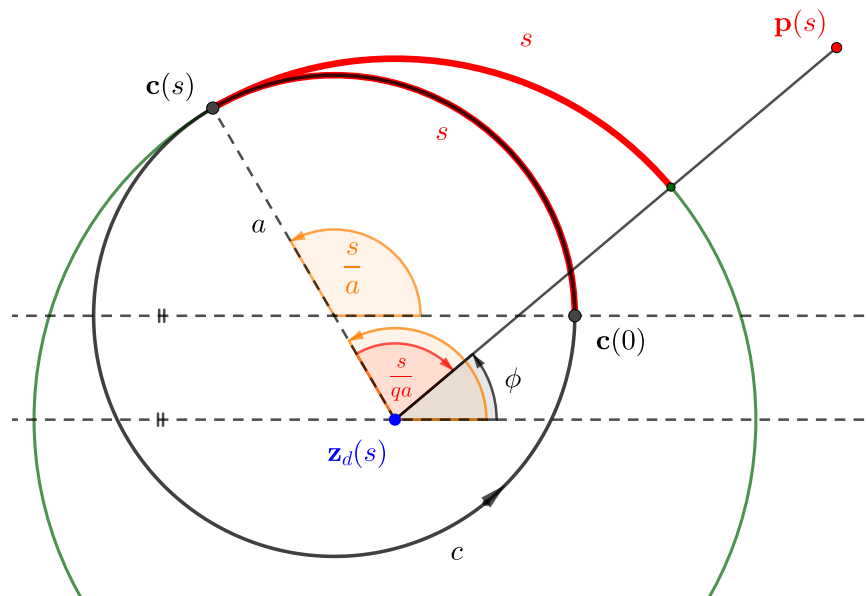
Názorně si můžeme tento fakt představit tak, že s odvalováním kružnice  $d$  se na ni „odlupuje“ oblouk kružnice  $c$ . Bod  $\mathbf{p}(s)$  (resp. jeho kolmý průměr na kružnici  $d$ ) je pak pomyslnou značkou ukazující, ve kterém bodě na kružnici  $d$  „odlupování“ kružnice  $c$  začalo, protože z fyzikálního pohledu si bod  $\mathbf{p}(s)$  zachovává stálou polohu vůči kružnici  $d$ .

Nakonec určíme odchylku vektoru  $\mathbf{c}(s) - \mathbf{z}_d(s)$  od kladné poloosy  $x$ . Jak ilustruje Obrázek 4.14, tato odchylka má velikost  $s/a$ . Můžeme tedy vyjádřit velikost úhlu  $\phi$  ve vztahu (4.8) pomocí parametru  $s$ :



Obrázek 4.13: Vlevo: Význam úhlu  $\phi$  v parametrizaci dané vztahem (4.8). Čárkovně vyznačená přímka je rovnoběžná s osou  $x$ . Vpravo: Velikost úhlu  $\sphericalangle(\mathbf{p}(s), \mathbf{z}_d(s), \mathbf{c}(s))$ .

$$\phi(s) = \frac{s}{a} - \frac{s}{qa}.$$



Obrázek 4.14: K vyjádření odchylky  $\phi$  pomocí parametru  $s$ .

Po dosazení do vztahu (4.8) tedy dostaneme parametrizaci peritrochoidy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(s) &= \mathbf{z}_d(s) + b \begin{pmatrix} \cos \phi(s) \\ \sin \phi(s) \end{pmatrix} \\
&= (1-q)a \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{a} \\ \sin \frac{s}{a} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{s}{a} - \frac{s}{qa} \right) \\ \sin \left( \frac{s}{a} - \frac{s}{qa} \right) \end{pmatrix}, \\
s &\in \left[ 0; \frac{2\pi qa}{q-1} \right].
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Interval pro přípustné hodnoty parametru  $s$  je vybrán tak, aby pro hodnoty  $s \in [0; s_{max}]$  vykonal sledovaný bod právě jednu otáčku kolem středu kružnice  $d$ , tedy

$$\begin{aligned}
\phi(s_{max}) &= 2\pi, \\
\frac{s_{max}}{a} - \frac{s_{max}}{qa} &= 2\pi, \\
s_{max} &= \frac{2\pi qa}{q-1}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Na Obrázku 4.15 si můžeme všimnout, že pro některé hodnoty parametru  $q$  jsou příslušné peritrochoidy jednoduché uzavřené křivky. Tento speciální případ nastane, jestliže se sledovaný bod pro  $s = s_{max}$  vrátí do své počáteční polohy, tedy jestliže střed kružnice  $d$  vykoná při proběhnutí všech  $s \in [0; s_{max}]$  celočíselný počet otáček kolem středu kružnice  $c$  (rovněž se pak vrátí do své počáteční polohy). Musí tedy platit

$$\frac{s_{max}}{a} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N},$$

po dosazení za  $s_{max}$  dle (4.10):

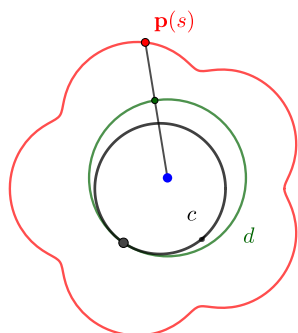
$$\begin{aligned}
\frac{2\pi qa}{q-1} \cdot \frac{1}{a} &= 2\pi n, \\
\frac{q}{q-1} &= n.
\end{aligned}$$

Peritrochoida, která je generována valením kružnice o poloměru  $qa$  po základní kružnici o poloměru  $a$ , je jednoduchá uzavřená křivka za splnění podmínky

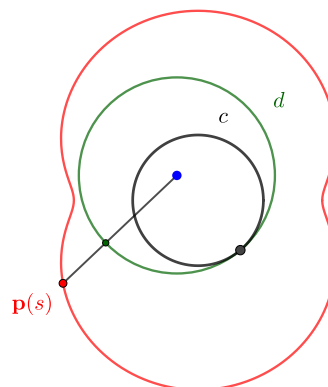
$$\frac{q}{q-1} \in \mathbb{N}.$$

Na začátku této podkapitoly jsme zmínili, že peritrochoidy jsou křivky ekvivalentní s epitrochoidami, liší se pouze ve způsobu, jakým jsou generovány. Porovnáme parametrizaci peritrochoidy  $p$  dle vztahu (4.9) s parametrizací epitrochoidy  $d_p$  dle vztahu (4.5) a ukážeme, že peritrochoida s koeficienty  $(a, q, b)$  má stejný obraz jako epitrochoida s koeficienty

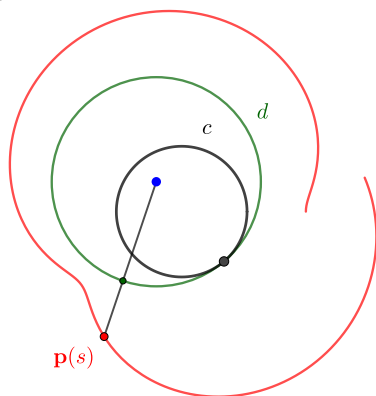
$q = 1.2$



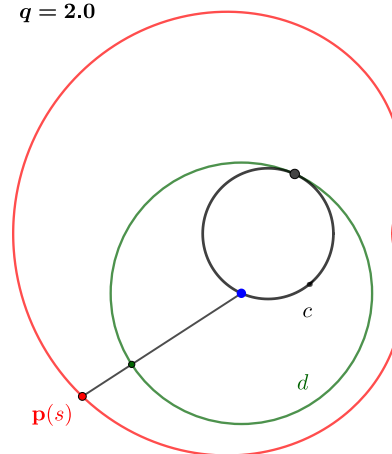
$q = 1.5$



$q = 1.6$



$q = 2.0$



Obrázek 4.15: Peritrochoidy pro různé hodnoty parametru  $q$ .

$$R = \frac{q-1}{q}b, \quad r = (q-1)a, \quad k = \frac{1}{q-1},$$

resp.

$$kR = \frac{b}{q}, \quad r = (q-1)a, \quad k+1 = \frac{q}{q-1}.$$

Tyto koeficienty dosadíme do vztahu (4.5) a získáme parametrizaci příslušné epitrochoidy s parametrem  $\tilde{s} \in [0; 2\pi kR]$ , resp.  $\tilde{s} \in [0; (2\pi b)/q]$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_p(\tilde{s}) &= (k+1)R \begin{pmatrix} \cos \frac{\tilde{s}}{kR} \\ \sin \frac{\tilde{s}}{kR} \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} \sin \left( \frac{\tilde{s}}{kR} + \frac{\tilde{s}}{R} \right) \\ \cos \left( \frac{\tilde{s}}{kR} + \frac{\tilde{s}}{R} \right) \end{pmatrix} \\
&= b \begin{pmatrix} \cos \frac{q\tilde{s}}{b} \\ \sin \frac{q\tilde{s}}{b} \end{pmatrix} - (q-1)a \begin{pmatrix} \sin \left( \frac{q\tilde{s}}{b} + \frac{q\tilde{s}}{(q-1)b} \right) \\ \cos \left( \frac{q\tilde{s}}{b} + \frac{q\tilde{s}}{(q-1)b} \right) \end{pmatrix}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Abychom ukázali, že peritrochoida i epitrochoida mají stejný obraz, převedeme parametrizaci epitrochoidy pomocí parametru  $\tilde{s}$  na parametrizaci pomocí parametru  $s$ . Ze vztahu (4.9), resp. z definice epitrochoidy víme, že

$$s \in \left[ 0; \frac{2\pi qa}{q-1} \right], \quad \text{resp.} \quad \tilde{s} \in \left[ 0; \frac{2\pi b}{q} \right].$$

Zvolíme tedy funkci  $\tilde{s}(s)$  tak, aby se horní meze těchto intervalů rovnaly. Tím docílíme pouze změny rychlosti probíhání epitrochoidy:

$$\tilde{s}(s) = \frac{(q-1)b}{q^2a} s.$$

Dosazením do vztahu (4.11) udávajícího parametrizaci epitrochoidy dostaneme

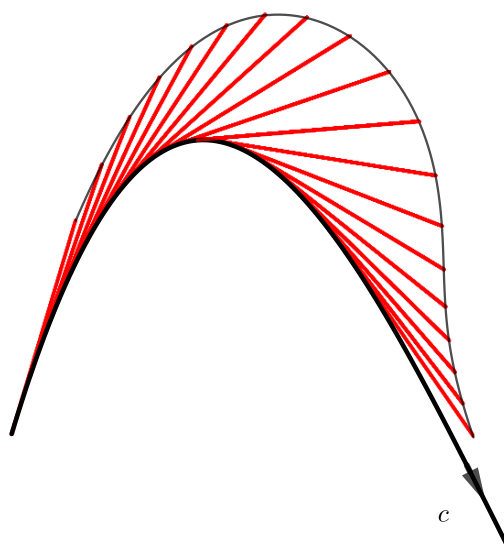
$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_p(s) &= b \begin{pmatrix} \cos \frac{q(q-1)bs}{q^2ab} \\ \sin \frac{q(q-1)bs}{q^2ab} \end{pmatrix} - (q-1)a \begin{pmatrix} \sin \left( \frac{q(q-1)bs}{q^2ab} + \frac{q(q-1)bs}{(q-1)q^2ab} \right) \\ \cos \left( \frac{q(q-1)bs}{q^2ab} + \frac{q(q-1)bs}{(q-1)q^2ab} \right) \end{pmatrix} \\
&= b \begin{pmatrix} \cos \frac{(q-1)s}{qa} \\ \sin \frac{(q-1)s}{qa} \end{pmatrix} + (1-q)a \begin{pmatrix} \sin \frac{s}{a} \\ \cos \frac{s}{a} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

což je parametrizace peritrochoidy pomocí vztahu (4.10). Ukázali jsme tedy, že peritrochoida a epitrochoida jsou ekvivalentní křivky.

# 5. Mamikonova věta a její aplikace

V této kapitole uvedeme odvození tzv. *Mamikonovy věty* pro výpočet obsahu oblasti generované tečnými vektory k zadané křivce a ukážeme některé její aplikace. Ačkoliv při odvození Mamikonovy věty využijeme stejné nástroje integrálního počtu, jako v předchozích kapitolách, v konkrétních aplikacích se již bez integrálního počtu obejdeme. V tomto ohledu nabízí Mamikonova věta skutečně netradiční přístup k výpočtu obsahů.

Tzv. *vizuální přístup k řešení problémů integrálního počtu* (v originále *A visual approach to calculus problems*), postavený na využití Mamikonovy věty v geometrických aplikacích, byl dlouhá léta rozvíjen Tomem M. Apostolem a Mamikonem A. Mnatsakanianem. Obsáhlý úvod do této metody je spolu s některými aplikacemi uveden v článku (Apostol, 2000).



Obrázek 5.1: Mamikonova věta umožňuje výpočet obsahu oblasti, kterou opíše úsečka vedená ve směru tečného vektoru ke křivce  $c$  s počátečním bodem na křivce  $c$  (vyšrafováno červeně).

## 5.1 Mamikonova věta

Naším cílem je nyní vypočítat obsah oblasti generované způsobem znázorněným kupříkladu na Obrázku 5.1. Uvažujme kladně orientovanou regulární křivku  $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , jejíž křivost  $\kappa$  nemění znaménko a je parametrizována obloukem. Jak uvidíme, předpoklad parametrizace obloukem není při konkrétních aplikacích nijak omezující. Tečný, resp. normálový vektor křivky  $c$  v bodě  $s$  označíme  $\mathbf{T}(s)$ , resp.  $\mathbf{N}(s)$ . Dále budeme uvažovat, že délka úsečky ve směru tečného vektoru

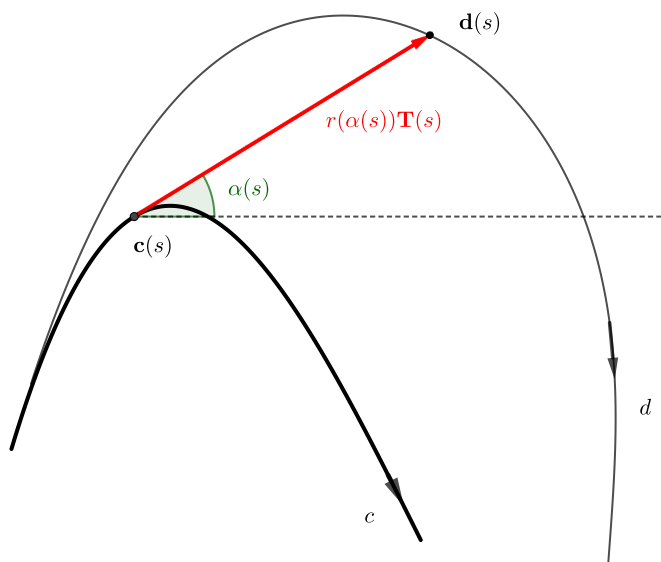
(viz Obrázek 5.1) se může měnit explicitně v závislosti na úhlu, pod kterým je otočena. Koncový bod úsečky tedy opisuje křivku  $d$  s parametrizací

$$\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(s) + r(\alpha(s))\mathbf{T}(s),$$

kde  $r(\alpha(s))$  udává vzdálenost bodu  $\mathbf{d}(s)$  od bodu  $\mathbf{c}(s)$ , přičemž  $r$  je nezáporná funkce a  $\alpha$  je úhlové zobrazení příslušné vektoru  $\mathbf{T}$ . Oblast, jejíž obsah chceme vypočítat, má parametrizaci

$$\mathbf{y}(s,u) = \mathbf{c}(s) + ur(\alpha(s))\mathbf{T}(s),$$

kde  $u \in [0; 1]$ .



Obrázek 5.2: K parametrizaci křivky  $d$  a plochy  $y$ .

Obsah  $S$  této oblasti vypočítáme jako intergrál normy vektorového součinu

$$S = \int_a^b \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u} \right\| du ds.$$

Při výpočtu parciálních derivací využijeme Frenetovy vzorce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} &= \mathbf{T}(s) + ur'(\alpha(s))\alpha'(s)\mathbf{T}(s) + ur(\alpha(s))\kappa(s)\mathbf{N}(s), \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u} &= r(\alpha(s))\mathbf{T}(s). \end{aligned}$$

Odtud dostaneme normu vektorového součinu

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u} \right\| = |u\kappa(s)r^2(\alpha(s))|$$

a vztah pro výpočet obsahu  $S$ :

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b \int_0^1 |u\kappa(s)r^2(\alpha(s))| \, du \, ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_a^b |\kappa(s)r^2(\alpha(s))| \, ds \\
 &= \frac{1}{2} \left| \int_a^b \kappa(s)r^2(\alpha(s)) \, ds \right|. \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

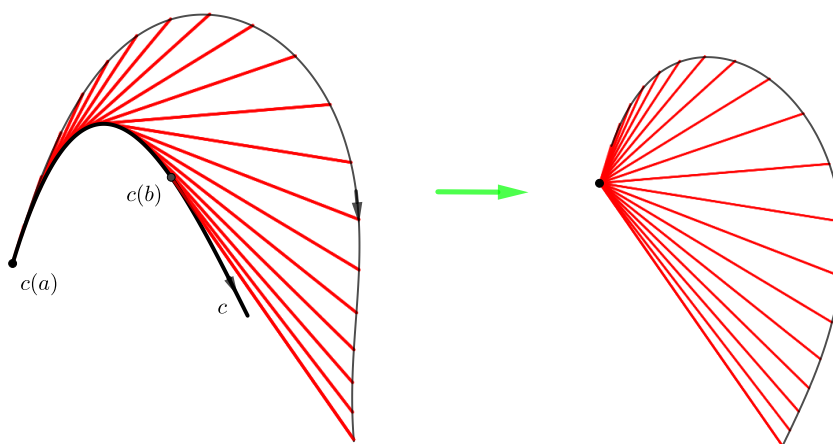
Poslední rovnost platí, protože předpokládáme, že křivost  $\kappa$  na intervalu  $(a,b)$  nemění znaménko. Pro zjednodušení integrálu daného vztahem (5.1) využijeme vztahu křivosti  $\kappa$  a úhlového zobrazení  $\alpha$  daného Větou 4:

$$\kappa(s) = \alpha'(s).$$

Integrál upravíme zavedením substituce  $\phi = \alpha(s)$ :

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \left| \int_a^b r^2(\alpha(s))\alpha'(s) \, ds \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \int_{\alpha(a+)}^{\alpha(b-)} r^2(\phi) \, d\phi \right|. \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

Předpokládáme přitom existenci příslušných jednostranných limit funkce  $\alpha$  v krajních bodech. Význam poslední rovnosti lze názorně geometricky interpretovat. Vztah (5.2), vyjadřující obsah oblasti na Obrázku 5.3 vlevo, zároveň udává obsah oblasti na Obrázku 5.3 vpravo, vyjádříme-li jej jako integrál v polárních souřadnicích  $(r; \phi)$ . Tento poznatek lze již považovat za formulaci samotné Mamikonovy věty.



Obrázek 5.3: Obsah oblasti generované úsečkami vedenými ve směru tečného vektoru ke křivce  $c$  se nemění, přesuneme-li tyto úsečky do společného počátečního bodu a necháme je kolem tohoto bodu otáčet.

Hledaný obsah tedy nezávisí na konkrétní parametrizaci křivky  $c$ , nýbrž pouze na tvaru funkce  $s \mapsto r(\alpha(s))$ . Jestliže navíc budeme uvažovat, že délka úsečky



ve směru tečného vektoru je při probíhání intervalu  $(a,b)$  rovna konstantě  $L$ , získáme pro výpočet obsahu jednoduchý vztah:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| \int_{\alpha(a+)}^{\alpha(b-)} L^2 d\phi \right| \\ &= \frac{1}{2} L^2 |\alpha(b-) - \alpha(a+)|. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Méně formálně můžeme Mamikonovu větu formulovat tak, že obsah oblasti generované tečnými úsečkami při probíhání křivky  $c$  v intervalu  $(a;b)$  je roven obsahu oblasti, kterou tyto úsečky opíší po přesunutí do společného počátečního bodu svým pouhým otočením o úhel  $|\alpha(b-) - \alpha(a+)|$ .

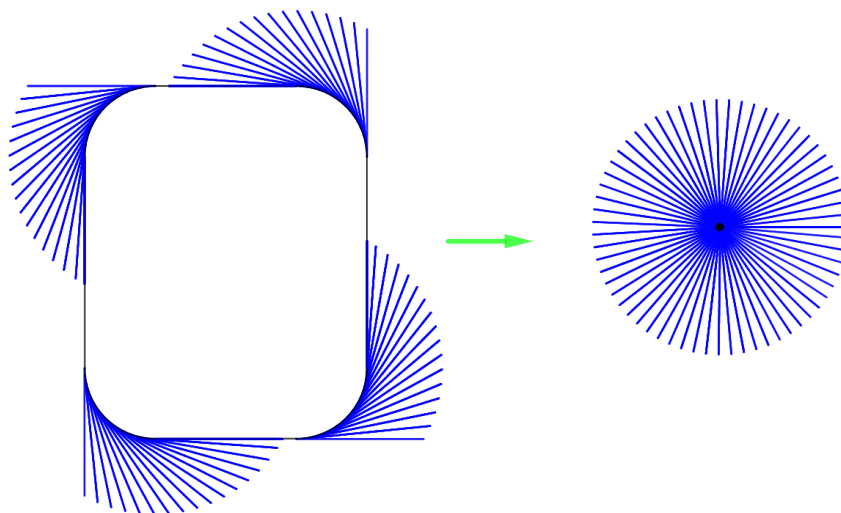
## 5.2 Aplikace Mamikonovy věty

### 5.2.1 Uzavřené křivky

Ze vztahu (5.3) ihned plyne zajímavý důsledek pro jednoduché uzavřené křivky s nezápornou křivostí. Pro ty platí  $\alpha(b-) - \alpha(a+) = 2\pi$ . Obsah oblasti, kterou opíší úsečky délky  $L$  vedené ve směru tečného vektoru po oběhnutí celé křivky  $c$ , je tedy roven

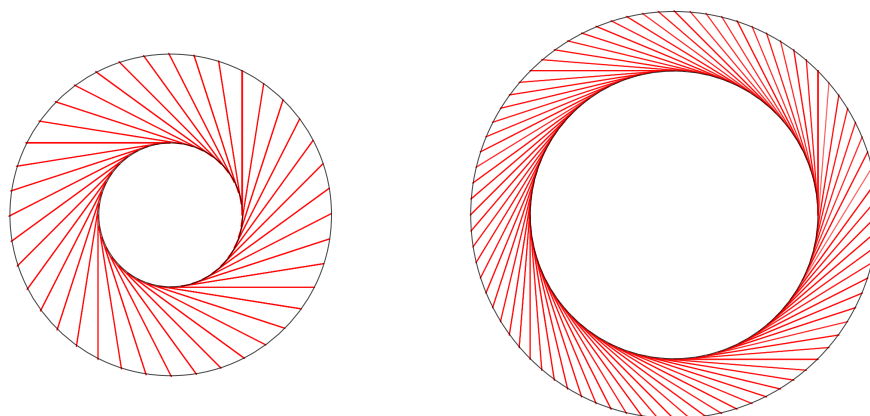
$$S = \pi L^2, \quad (5.4)$$

což odpovídá obsahu kruhu o poloměru  $L$ , a to nezávisle na konkrétním průběhu křivosti křivky  $c$ , viz Obrázek 5.4. Sám Mamikon Mnatsakanian tyto případy důkladněji rozebírá v článku (Mnatsakanian, 1997).



Obrázek 5.4: Příklad uzavřené křivky s nezápornou křivostí. Modře vyšrafovaná oblast nalevo generovaná úsečkami délky  $L$  má dle vztahu (5.4) stejný obsah jako modrý kruh o poloměru  $L$  napravo.

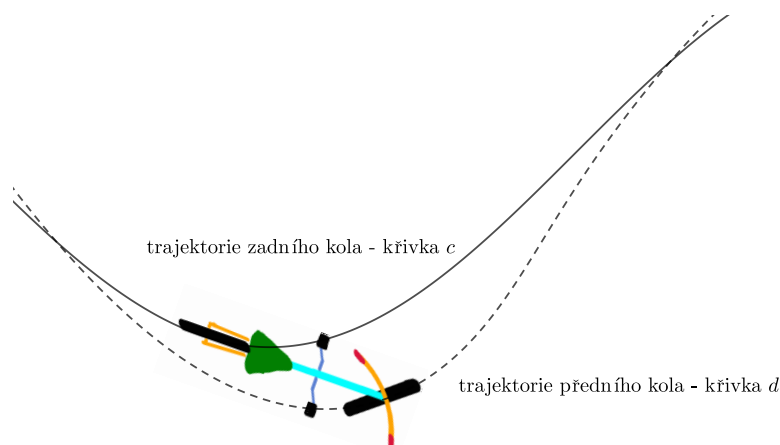
Speciálně z Mamikonovy věty plyne poznatek, že obsah mezikruží, které vznikne odvalováním úsečky délky  $L$  po základní vnitřní kružnici, závisí pouze na  $L$ . Není tedy nutné znát konkrétní hodnoty poloměrů vnitřní a vnější kružnice. Ke stejnému výsledku se konec konců dostaneme i pouhým využitím Pýthagorovy věty.



Obrázek 5.5: Obsahy obou vyšrafovaných mezikruží se rovnají, protože úsečky odvalující se po obou vnitřních kružnicích a generující tato mezikruží mají stejné délky.

## 5.2.2 Obsah plochy pod vlečnou křivkou

Mamikonovu větu můžeme dále využít k výpočtu obsahu oblastí generovaných tzv. *vlečnými křivkami*. Představme si hmotný bod pohybující se po křivce  $d$ , který je spojen s jiným bodem úsečkou pevné délky  $L$  a „vleče“ jej za sebou. Vlečený bod pak opisuje právě příslušnou vlečnou křivku  $c$ . Reálným modelem takové dvojice křivek může být trajektorie předního kola bicyklu, které za sebou vleče kolo zadní, viz (Apostol a Mnatsakanian, 2008).

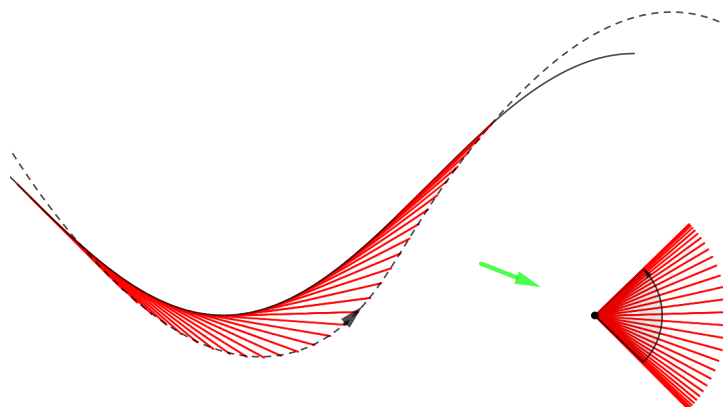


Obrázek 5.6: Přední kolo se vždy dotýká silnice v bodě, který leží na tečně k trajektorii kola zadního. Navíc styčné body pneumatik se silnicí mají konstantní vzájemnou vzdálenost.

Příklad na Obrázku 5.6 napovídá, že oblast mezi křivkou  $d$  a vlečnou křivkou  $c$  je opět oblast generovaná tečným vektorem ke křivce  $c$ , resp. úsečkou délky  $L$  mířící ve směru tohoto vektoru. Pro výpočet obsahu oblasti mezi křivkami  $c$  a  $d$ , resp. obsahu oblasti mezi trajektoriemi přední a zadní pneumatiky jízdního kola, stačí zjistit, o jaký úhel se otočila tečna vedená ke křivce  $c$  a využít vztah (5.3). Např. v situaci znázorněné na obrázcích cyklista provedl zatáčku o  $\pi/2$ . Obsah oblasti mezi trajektoriemi předního a zadního kola je tedy:

$$S = \frac{1}{2}L^2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}L^2,$$

a to nezávisle na způsobu, jakým cyklista zatáčkou projel! Obsah oblasti závisí pouze na úhlu, o který se změnil směr jízdy a na vzdálenosti  $L$  mezi styčnými body pneumatik s vozovkou.



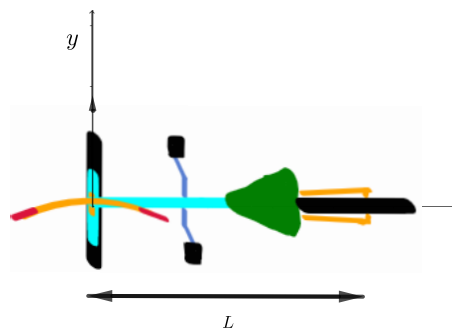
Obrázek 5.7: Aplikace Mamikonovy věty při výpočtu obsahu oblasti ohraničené trajektorií přední a zadní pneumatiky jízdního kola.

Speciálním a notoricky známým příkladem vlečné křivky je *traktrix*. Křivkou  $d$  je v tomto případě kladná poloosa  $y$  a vlečený bod má počáteční polohu  $(L,0)$ . V naší „cyklistické“ konvenci si můžeme představit přední kolo, které se dotýká silnice v počátku soustavy souřadnic a zadní kolo, které se dotýká osy  $x$  a směřuje s ní rovnoběžně. Přední kolo se pak rozjede ve směru kladné poloosy  $y$ .

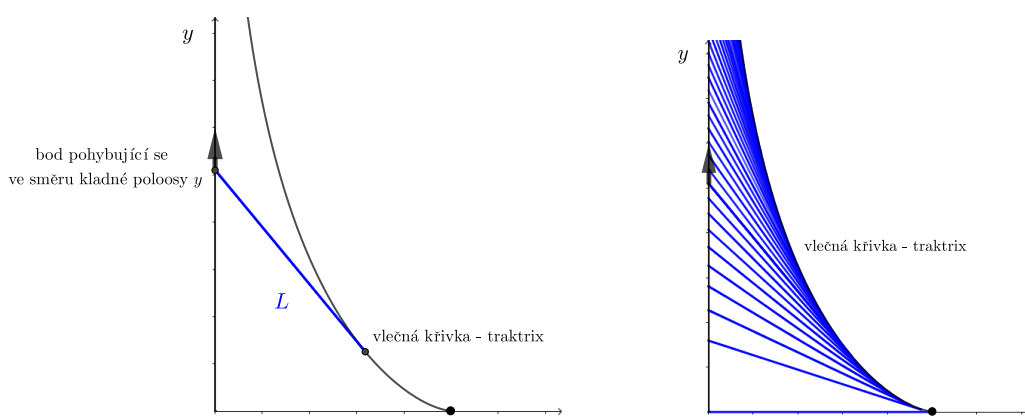
Chceme-li najít obsah oblasti mezi traktrix a osou  $y$ , obejdeme se naštěstí i bez integrálního počtu (naštěstí, protože parametrizace traktrix je poměrně složitá). Stačí si všimnout, že vlečený bod se bude asymptoticky přibližovat k ose  $y$ , což odpovídá otočení tečeného vektoru traktrix limitně o  $\pi/2$ . Z toho a ze vztahu (5.3) plyne, že plocha ohraničená osou  $y$  a traktrix je  $(1/2)\pi L^2$ .

### 5.2.3 Obsah plochy pod obloukem cykloidy

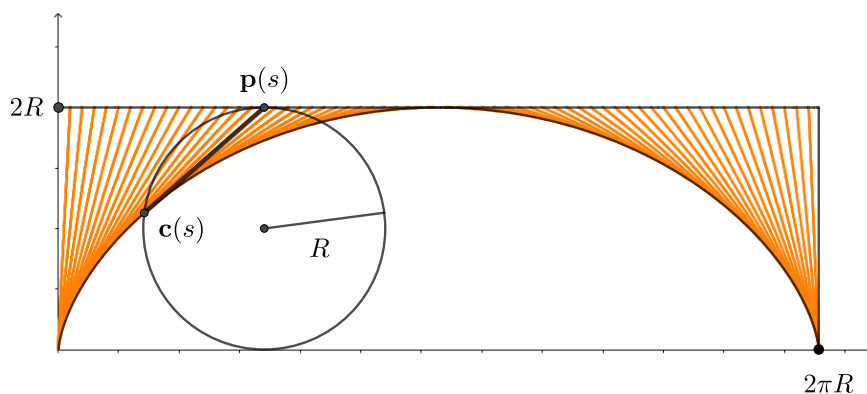
Obsah plochy pod obloukem cykloidy jsme vypočítali již v předchozí kapitole, metodu výpočtu však nabízí i Mamikonova věta. Za oblast, kterou opíše její tečný vektor, lze v tomto případě považovat oblast ohraničenou obloukem cykloidy a obdélníkem, který je jí opsán, viz Obrázek 5.10. Jestliže je tedy cykloida generována kružnicí o poloměru  $R$ , má jí opsaný obdélník obsah  $4\pi R^2$  a obsah



Obrázek 5.8: Trajektorií zadního kola bicyklu, jehož přední kolo se rozjede z počátku soustavy souřadnic ve směru osy  $y$ , je traktrix.



Obrázek 5.9: Trajektorií bodu vlečeného na úsečce délky  $L$  bodem pohybujícím se po ose  $y$  je traktrix. Úhel, o který se otočí její tečný vektor, se limitně blíží  $\pi/2$ . Plocha mezi traktrix a osou  $y$  tak má obsah rovný polovině kruhu o poloměru  $L$ .



Obrázek 5.10: Pokusíme se vypočítat obsah  $S$  oranžově vyšrafované oblasti, kterou opisuje tečný vektor cykloidy. Tečna vedená k cykloidě v bodě  $\mathbf{c}(s)$  protne přímkou  $y = 2R$  v bodě  $\mathbf{p}(s)$ .

pod obloukem cykloidy dostaneme jako rozdíl obsahu tohoto obdélníku a obsahu oblasti, kterou opíše tečný vektor.

Vyjdeme z parametrizace cykloidy dle vztahu na str. 55 a určíme její tečný vektor  $\mathbf{T}$ . Nejde o parametrizaci obloukem, což nás však nijak neomezuje, neboť vztah (5.2) a z něj plynoucí Mamikonova věta nezávisí na volbě parametrizace. Bez újmy na obecnosti budeme pro přehlednost dosazovat  $R = 1$ .

$$\mathbf{c}(s) = \begin{pmatrix} s - \sin s \\ 1 - \cos s \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} 1 - \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}$$

Tečna vedená k cykloidě  $c$  bodem  $\mathbf{c}(s)$  protne přímkou  $y = 2$  (viz Obrázek 5.10) v bodě  $\mathbf{p}(s)$  s parametrizací

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c}(s) + f(s)\mathbf{T}(s),$$

kde  $f$  je zatím neznámá skalární funkce. Její vyjádření najdeme snadno. Víme totiž, že druhá souřadnice bodu  $\mathbf{p}(s)$  musí být pro všechna  $s$  rovna 2 (obecně  $2R$ ). Platí tedy:

$$(1 - \cos s) + f(s) \sin s = 2$$

$$f(s) = \frac{1 + \cos s}{\sin s}.$$

Parametrické vyjádření bodu  $\mathbf{p}(s)$  je tedy

$$\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} s - \sin s + \frac{1 + \cos s}{\sin s} (1 - \cos s) \\ 1 - \cos s + \frac{1 + \cos s}{\sin s} \sin s \end{pmatrix}$$

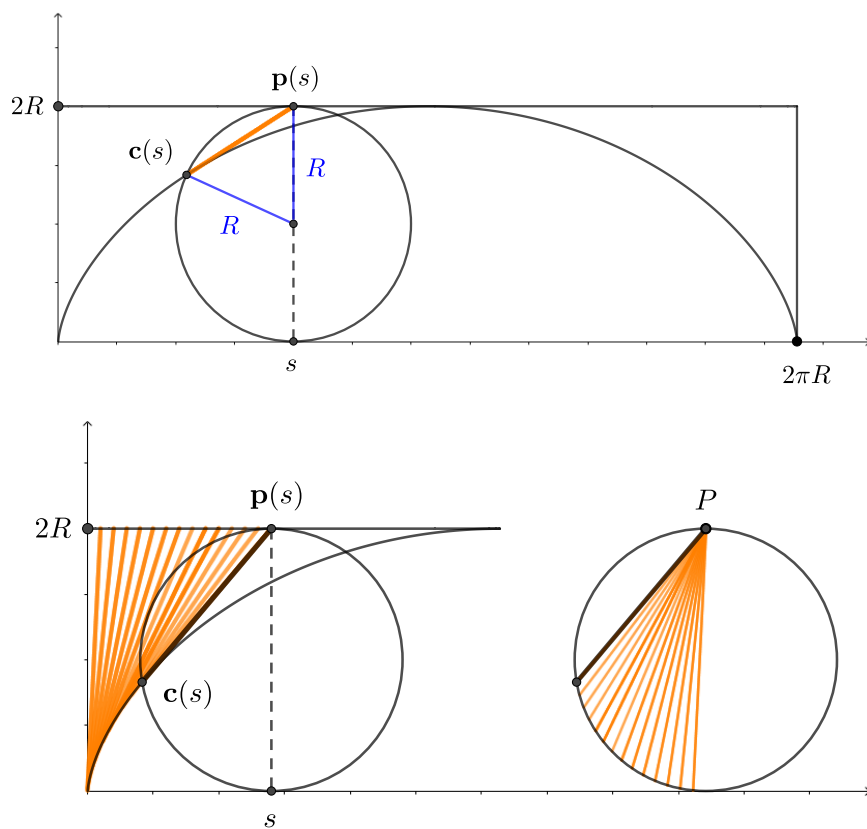
$$= \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá, že bod  $\mathbf{p}(s)$  je totožný s bodem dotyku základní kružnice s přímkou  $y = 2R$ . První souřadnice středu valící se kružnice je totiž také rovna  $s$ . Množina úseček mezi body  $\mathbf{c}(s)$  a  $\mathbf{p}(s)$ , které opisují hledanou oblast (viz Obrázek 5.10), je tedy po přenesení do společného koncového bodu množina všech tětiv kružnice, která generuje cykloidu  $c$ , procházejících pevně zvoleným bodem  $P$ . Tato množina tětiv vyplňuje kružnici o poloměru  $R$ . Z Mamikonovy věty tedy plyne, že obsah hledané oblasti je roven obsahu kruhu o poloměru  $R$ .

Protože je obsah opsaného obdélníku roven  $4\pi R^2$  a obsah oranžově vyšrafované oblasti generované tečným vektorem je  $\pi R^2$ , platí pro plochu pod obloukem cykloidy

$$S_{\text{cykloida}} = 4\pi R^2 - \pi R^2 = 3\pi R^2.$$

Postup, podobný tomu, jež jsme aplikovali při hledání obsahu pod obloukem cykloidy, lze dále rozšířit a zobecnit při zkoumání tzv. *subtangent*. Koncept subtangent je rozebrán v článku (Apostol a Mnatsakanian, 2002), kde jejich zavedení umožňuje názornou aplikaci Mamikonovy věty při výpočtech obsahů ploch pod grafy funkcí jedné reálné proměnné.



Obrázek 5.11: Úsečka mezi body  $\mathbf{c}(s)$  a  $\mathbf{p}(s)$  je pro všechna  $s$  tětivou odvalující se kružnice o poloměru  $R$ . Po přenesení do společného počátečního bodu tedy tyto úsečky opisují kruh o poloměru  $R$ .

# 6. Měření obsahu rovinných oblastí pomocí planimetru

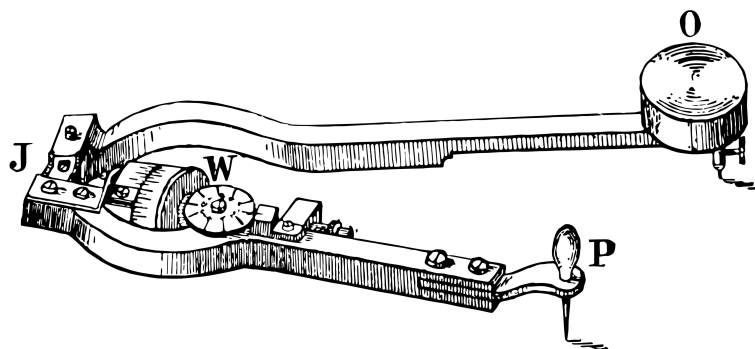
## 6.1 Obecně o funkci planimetru

I v této kapitole zůstaneme u určování obsahů rovinných oblastí. Představíme zde princip činnosti *planimetru* – přístroje užívaného ke zjišťování obsahů oblastí ohraničených jednoduchou uzavřenou křivkou  $c$ , přičemž známe obraz křivky  $c$ . První konstrukce a použití podobných přístrojů sahá do počátku 19. století. O sestavení planimetru polárního a lineárního, jejichž činnost blíže prozkoumáme i v této práci, se ve druhé polovině 19. století zasloužil švýcarský vynálezce Jacob Amsler (1823 – 1912) – viz (Foote a Sandifer, 2007, str. 74). Planimetry nacházely své uplatnění v kartografii, při vyměřování pozemků i v technice.

Přestože byly vyvinuty rozličné konstrukce planimetrů, včetně současných využívajících elektronického zpracování měřených dat, princip jejich činnosti je zpravidla stejný. Začneme tedy obecnou charakteristikou základních komponent planimetrů a teoretickým objasněním jejich funkce. Následně popíšeme funkci nejčastěji používaných typů.

Na Obrázku 6.1 vidíme schematický náčrt tzv. Amslerova polárního planimetru. Jeho klíčovou komponentou je stejně jako u jiných konstrukcí rameno délky  $L$ , na jehož jednom konci je hrot. Ten slouží uživateli planimetru k opisování obrazu uzavřené křivky  $c$  ohraničujícího oblast, jejíž obsah chceme měřit. Obraz křivky  $c$  je typicky reprodukován na vodorovně položený papír. Dále je na rameno připevněna součástka zvaná integrační kolečko, a to tak, že osa otáčení kolečka je s ramenem rovnoběžná. Integrační kolečko je opatřeno otočnou stupnicí, z níž lze po opsání obrazu křivky  $c$  hrotem planimetru nepřímo vyčíst měřený obsah.

U moderních planimetrů je stupnice nahrazena elektronickým snímačem otáček, což však oproti dříve vyrobeným modelům planimetru samo o sobě nepřináší o mnoho vyšší přesnosti měření, nýbrž spíše vyšší komfort uživatele. Pro co nejpresnější změření obsahu oblasti ohraničené křivkou  $c$  je rozhodující pečlivost uživatele při opisování obrazu křivky  $c$  hrotem planimetru a přesnost zpracování přístroje jako celku.



Obrázek 6.1: Hrot planimetru je označen **P** a integrační kolečko jako **W**. **PJ** je rameno planimetru. *Autor této práce vlastní licenci k volnému užívání obrázku. Zdroj: <https://www.alamy.com/>.*

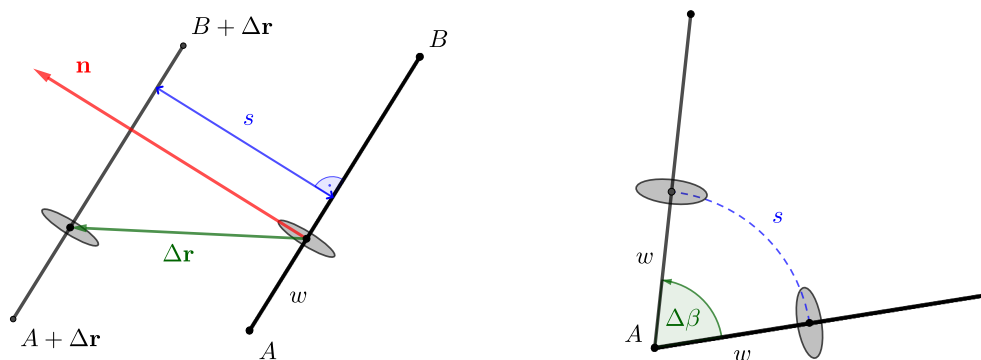
Způsob upevnění integračního kolečka zajišťuje, že k jeho pootočení dojde pouze, pohybuje-li se po podložce ve směru kolmém na rameno planimetru. Posuneme-li integrační kolečko ve směru rovnoběžném s ramenem, k pootočení nedojde a kolečko po podložce sklouzne. Libovolné jiné posunutí integračního kolečka po rovinné podložce lze rozložit do těchto dvou význačných směrů.

### 6.1.1 Funkce integračního kolečka

Začněme propojovat fyzikální podstatu problému s matematickou abstrakcí. Rameno planimetru s integračním kolečkem umístěné ve zvolené soustavě souřadnic reprezentujeme orientovanou úsečkou s počátečním bodem  $\mathbf{A} = (a_1; a_2)$  a koncovým bodem  $\mathbf{B} = (b_1; b_2)$  osazeným hrotem, přičemž délce ramene planimetru odpovídá  $\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| = L$ . Na úsečce  $\mathbf{AB}$  je umístěno integrační kolečko ve vzdálenosti  $w$  od bodu  $\mathbf{A}$ .

Nejprve uvažujme posunutí celé úsečky  $\mathbf{AB}$  ve směru vektoru  $\Delta\mathbf{r} = (\Delta x; \Delta y)$ . Ve směru tohoto vektoru se posune i integrační kolečko, a to nezávisle na jeho umístění (všechny body úsečky  $\mathbf{AB}$  se posunou stejně). Jak jsme zmínili výše, integrační kolečko zaznamená pouze pohyb ve směru kolmém na rameno, tedy ve směru vektoru  $\mathbf{n} = (a_2 - b_2; b_1 - a_1)$ . Drahou pohybu je v této situaci průmět vektoru  $\Delta\mathbf{r}$  do směru daného vektorem  $\mathbf{n}$ . Situace je znázorněna na Obrázku 6.2 vlevo. Orientovaná vzdálenost zaznamenaná integračním kolečkem je tedy

$$s = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \cdot \Delta\mathbf{r} = \frac{1}{L} \mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{r}. \quad (6.1a)$$



Obrázek 6.2: Jako  $s$  je na obrázku označena vzdálenost, kterou zaznamená integrační kolečko při posunutí ramene planimetru o vektor  $\Delta\mathbf{r}$  (vlevo), resp. při otočení ramene o úhel  $\Delta\beta$  kolem bodu  $\mathbf{A}$  (vpravo).

Pro úplnost dodejme, že při posunutí o vektor  $-\Delta\mathbf{r}$  dojde k odvalení integračního kolečka v opačném směru, a tedy i tento pohyb je na stupnici zaznamenán.

Dalším speciálním případem pohybu ramene planimetru je jeho otočení kolem počátečního bodu  $\mathbf{A}$  o úhel  $\Delta\beta$ , jak je znázorněno na Obrázku 6.2 vpravo. Tehdy integrační kolečko umístěné ve vzdálenosti  $w$  od bodu  $A$  zaznamená vzdálenost  $s$  danou vztahem:



$$s = w\Delta\beta.$$

Při zcela obecném pohybu v rovině budeme předpokládat, že se integrační kolečko v čase  $t$  nachází v bodě  $\mathbf{k}(t) = (x(t); y(t))$ . Infinitesimální posunutí integračního kolečka pak představuje vektor

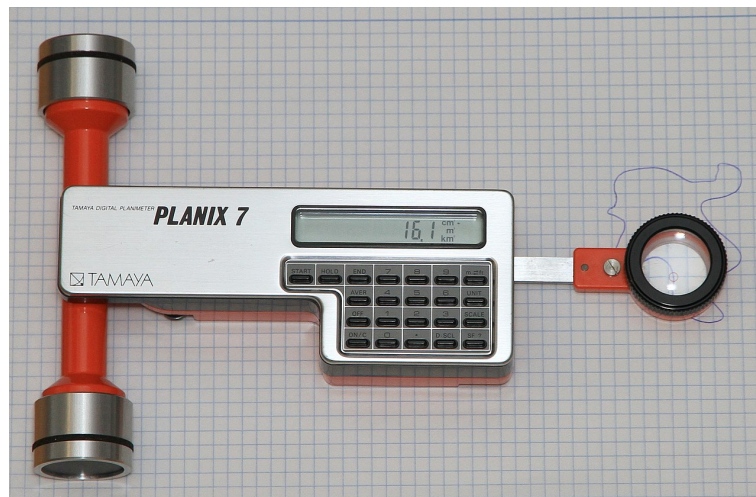
$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{k}'(t)dt.$$

Dále předpokládejme, že se v závislosti na čase  $t$  mohou měnit i souřadnice normálového vektoru  $\mathbf{n}$  při zachování jeho konstantní normy  $L$ . Tím reprezentujeme možnost otáčení ramene planimetru. Vztah (6.1a) udávající vzdálenost zaznamenanou integračním kolečkem mezi časy  $t_1$  a  $t_2$  pak pro obecný pohyb přepíšeme následovně

$$s = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{k}'(t) dt. \quad (6.1b)$$

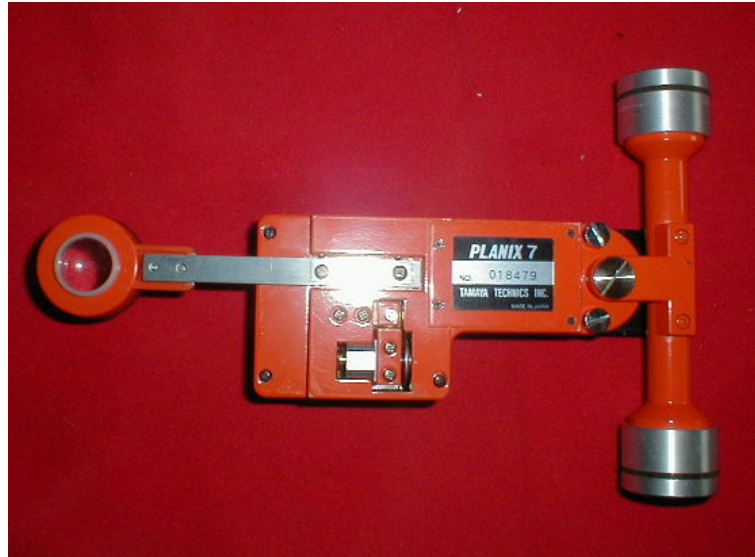
## 6.2 Lineární planimetr

V této části podáme popis činnosti lineárního planimetru a podrobnější teoretické objasnění jeho funkce. Na Obrázku 6.3 vidíme fotografii moderního lineárního planimetru Tamaya Planix 7 opatřeného elektronickým snímačem otáček integračního kolečka. Na Obrázku 6.4 je pak zachycen tentýž planimetr po odstrojení elektronického modulu, díky čemuž můžeme snáze odhalit princip fungování přístroje.



Obrázek 6.3: Lineární planimetr Planix 7 od společnosti Tamaya Technics Inc. Fotografie byla jejím autorem umístěna k volnému užívání na [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Planimeter\\_Tamaya\\_Planix\\_7.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Planimeter_Tamaya_Planix_7.jpg).

Hřídel s koly opatřenými gumovými „pneumatikami“ znemožňujícími sklouznutí kol po podložce, s níž je pevně spojen počáteční bod ramene planimetru, se může po podložce pohybovat pouze ve směru kolmém na hřídel. Samotné rameno



Obrázek 6.4: Planimetr Planix 7 po odejmutí elektronického modulu. Vidíme, že pod modulem je ukryto stříbrné integrační kolečko. Převzato z (Foote, 2005), kde lze najít fotografie dalších typů planimetrů.

je pak ve svém počátečním bodě s hřídelí spojeno otočným kloubem. Opisuje-li koncový bod ramene křivku  $c$ , počáteční bod spojený s hřídelí se přitom pohybuje po úsečce. Při pohledu na Obrázek 6.3 si můžeme všimnout, že konstrukcí přístroje je vyloučeno, aby rameno při opisování křivky  $c$  svým koncovým bodem vykonalo celou otáčku.

### 6.2.1 Teoretické objasnění činnosti lineárního planimetru

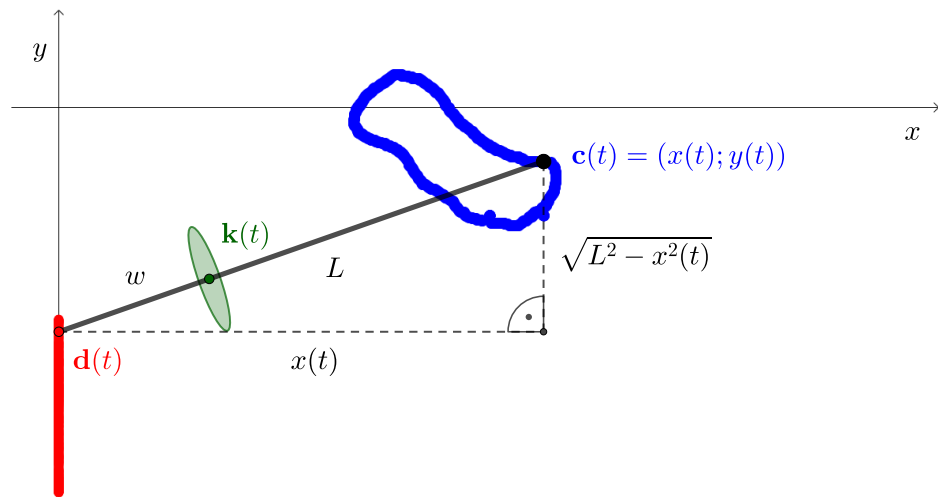
Na Obrázku 6.5 vidíme schematický nákres lineárního planimetru. Předpokládáme, že ve zvolené soustavě souřadnic opisuje koncový bod ramene délky  $L$  obraz jednoduché křivky  $c$ , jeho poloha je tedy  $\mathbf{c}(t) = (x(t); y(t))$ , kde  $t \in [a; b]$ ,  $x(b) = x(a)$  a  $y(b) = y(a)$ . Počáteční bod  $\mathbf{d}(t)$  ramene je fixován na souřadnicovou osu  $y$ , po níž se může volně pohybovat. Dále předpokládáme, že pro všechna  $t \in [a; b]$  je  $x^2(t) < L^2$ . Tato podmínka nám říká, že rameno planimetru nemůže na ose  $x$  dosáhnout do vzdálenosti stejné nebo větší, než jaká je jeho délka. Ostrá nerovnost v tomto případě znamená, že rameno planimetru nemůže směřovat rovnoběžně s osou  $x$ . Vektor  $\mathbf{c}(t) - \mathbf{d}(t)$  má souřadnice

$$\mathbf{c}(t) - \mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sqrt{L^2 - x^2(t)} \end{pmatrix},$$

přičemž  $\|\mathbf{c}(t) - \mathbf{d}(t)\| = L$ . Tomu odpovídá normálový vektor

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{L^2 - x^2(t)} \\ x(t) \end{pmatrix}.$$

Poloha počátečního bodu ramene je



Obrázek 6.5: Schematický náčrt lineárního planimetru. Koncový bod ramene planimetru délky  $L$  opisuje obraz křivky  $c$  s parametrizací  $\mathbf{c}(t) = (x(t); y(t))$ . Počáteční bod ramene leží na ose  $y$  v bodě  $\mathbf{d}(t)$  a při pohybu ramene se pohybuje po úsečce. Integrovaní kolečko se nachází ve vzdálenosti  $w$  od počátečního bodu.

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) - \sqrt{L^2 - x^2(t)} \end{pmatrix},$$

přičemž znaménko před odmocninou je dáno hodnotou  $\mathbf{d}(a)$ . Během spojitého opisování křivky  $c$  se již nemůže změnit, protože pro všechna  $t \in [a; b]$  jsme stanovili podmínku  $L^2 - x^2(t) \neq 0$ .

Integrovaní kolečko se nachází v konstantní vzdálenosti  $w$  od počátečního bodu  $\mathbf{d}(t)$ , má tedy polohu

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(t) &= \mathbf{d}(t) + \frac{w}{L} (\mathbf{c}(t) - \mathbf{d}(t)) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{w}{L} x(t) \\ y(t) - \sqrt{L^2 - x^2(t)} + \frac{w}{L} \sqrt{L^2 - x^2(t)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{w}{L} x(t) \\ y(t) - \left(1 - \frac{w}{L}\right) \sqrt{L^2 - x^2(t)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

čemuž odpovídá

$$\mathbf{k}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{w}{L} x'(t) \\ y'(t) + \left(1 - \frac{w}{L}\right) \frac{x(t)}{\sqrt{L^2 - x^2(t)}} x'(t) \end{pmatrix}.$$

Integrační kolečko tedy zaznamená dle vztahu (6.1b) po opsání křivky  $c$  koncovým ramenem orientovanou vzdálenost

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{L} \int_a^b \mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{k}'(t) dt \\ &= \frac{1}{L} \int_a^b \left[ -\frac{w}{L} \sqrt{L^2 - x^2(t)} x'(t) + x(t) y'(t) + \left(1 - \frac{w}{L}\right) \frac{x^2(t)}{\sqrt{L^2 - x^2(t)}} x'(t) \right] dt. \end{aligned}$$

Integrál funkce  $x(t) y'(t)$  je dle Věty 9 roven obsahu oblasti ohraničené křivkou  $c$ . Vztah pro výpočet  $s$  tedy dále upravíme:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{L} \int_a^b \mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{k}'(t) dt \\ &= \frac{S_c}{L} + \frac{1}{L} \int_a^b \left[ \left(1 - \frac{w}{L}\right) \frac{x^2(t)}{\sqrt{L^2 - x^2(t)}} x'(t) - \frac{w}{L} \sqrt{L^2 - x^2(t)} x'(t) \right] dt. \end{aligned}$$

Zavedením substituce  $X = x(t)$  dostaneme

$$s = \frac{S_c}{L} + \frac{1}{L} \int_{x(a)}^{x(b)} \left[ \left(1 - \frac{w}{L}\right) \frac{X^2}{\sqrt{L^2 - X^2}} - \frac{w}{L} \sqrt{L^2 - X^2} \right] dX.$$

Z podmínky  $x(b) = x(a)$  pak plyne

$$\frac{1}{L} \int_{x(a)}^{x(b)} \left[ \left(1 - \frac{w}{L}\right) \frac{X^2}{\sqrt{L^2 - X^2}} - \frac{w}{L} \sqrt{L^2 - X^2} \right] dX = 0.$$

Zjistili jsme, že orientovaná vzdálenost zaznamenaná integračním kolečkem je rovna podílu  $S_c/L$ , tedy

$$S_c = sL.$$

Vidíme, že obsah oblasti opsané koncovým bodem ramene planimetru lze určit jako pouhý součin hodnoty zaznamenané na stupnici integračního kolečka a délky ramene planimetru. V případě planimetru na Obrázku 6.3 je pochopitelně výsledek tohoto výpočtu zobrazen na displeji elektronického modulu. Všimněme si, že vypočítaný obsah  $S_c$  nezávisí na poloze integračního kolečka dané konstantou  $w$ .

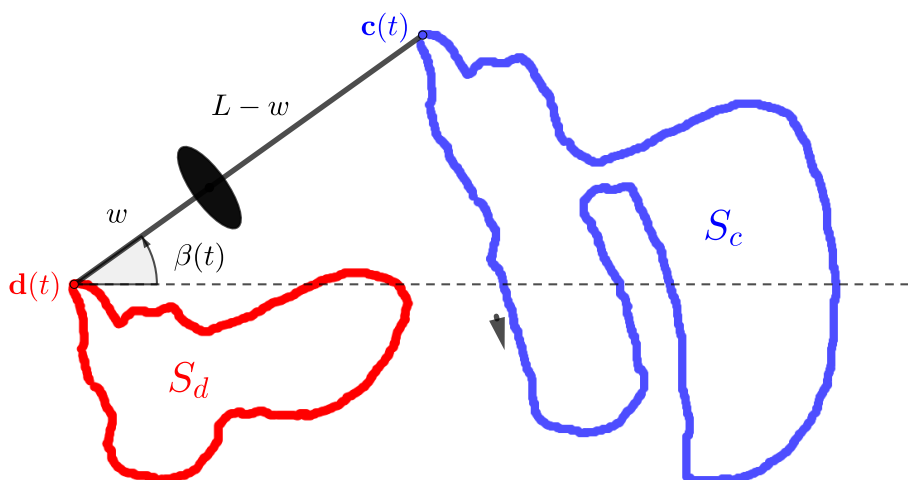
## 6.3 Věta o planimetru

Tvrzení, které nazveme větou o planimetru, není matematickou větou v pravém slova smyslu, neboť se opírá o funkci integračního kolečka – čistě fyzikálního objektu. Patrně bychom se mohli použití tohoto pojmu vyhnout, zde nám však jde zejména o názorný výklad činnosti planimetru. Cílem formulace a důkazu tohoto tvrzení je poskytnutí poněkud obecnějšího náhledu na funkci různých konstrukcí planimetru.

**Věta o planimetru.** Uvažujme rameno planimetru délky  $L$  opatřené integračním kolečkem, jehož krajní bod, který nazveme koncový, opisuje jednoduchou křivku  $c$ . Opisuje-li druhý krajní bod, který nazveme počáteční, rovněž jednoduchou křivku  $d$  a je-li integrační kolečko umístěno ve vzdálenosti  $w$  od tohoto počátečního bodu, platí

$$S_c = sL + S_d + \pi mL(L - 2w), \quad (6.2a)$$

kde  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $s$  je orientovaná vzdálenost zaznamenaná integračním kolečkem a  $S_c$ , resp.  $S_d$  je orientovaný obsah oblasti ohraničené křivkou  $c$ , resp.  $d$ .



Obrázek 6.6: Koncový bod ramene planimetru délky  $L$  má polohu  $\mathbf{c}(t)$  a opisuje jednoduchou křivku  $c$  ohraničující obsah  $S_c$ . Počáteční bod opisuje rovněž jednoduchou křivku  $d$  ohraničující obsah  $S_d$  a má polohu  $\mathbf{d}(t)$ , ve vzdálenosti  $w$  od něj se nachází integrační kolečko. Úhel  $\beta(t)$  odpovídá orientovanému úhlu svíranému kladnou poloosou  $x$  a vektorem  $\mathbf{c}(t) - \mathbf{d}(t)$ .

*Důkaz.* Situace je znázorněna na Obrázku 6.6. Rameno planimetru budeme reprezentovat orientovanou úsečkou s koncovým bodem  $\mathbf{c}(t)$ , kde je umístěn hrot, a počátečním bodem  $\mathbf{d}(t)$ , kde  $t \in [a; b]$ , přičemž  $\|\mathbf{c}(t) - \mathbf{d}(t)\| = L$  pro všechna  $t \in [a; b]$ . Polohu ramene planimetru v soustavě souřadnic lze popsat funkcí  $\beta(t)$ , která udává orientovaný úhel svíraný vektorem  $\mathbf{c}(t) - \mathbf{d}(t)$  a kladnou poloosou  $x$ . Protože mají být křivky  $c$  a  $d$  uzavřené, platí  $\mathbf{c}(b) = \mathbf{c}(a)$ ,  $\mathbf{d}(b) = \mathbf{d}(a)$  a odtud i  $\beta(b) = \beta(a) + 2\pi m$ . Snadno nahlédneme, že celé číslo  $m$  odpovídá orientovanému počtu otáček úsečky během jejího pohybu. Je-li parametrizace křivky  $c$

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

pak je

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} x(t) - L \cos \beta(t) \\ y(t) - L \sin \beta(t) \end{pmatrix},$$

a integrační kolečko se nachází v bodě

$$\mathbf{k}(t) = \begin{pmatrix} x(t) - (L - w) \cos \beta(t) \\ y(t) - (L - w) \sin \beta(t) \end{pmatrix}$$

Navíc normálový vektor směřujícímu kolmo k rameni planimetru má souřadnice

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -L \sin \beta(t) \\ L \cos \beta(t) \end{pmatrix}.$$

Vyjdeme ze vztahu (6.1b) udávajícího orientovanou vzdálenost zaznamenanou integračním kolečkem:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{L} \int_a^b \mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{k}'(t) dt \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} -\sin \beta(t) \\ \cos \beta(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) + (L - w) \sin \beta(t) \beta'(t) \\ y'(t) - (L - w) \cos \beta(t) \beta'(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_a^b [-x'(t) \sin \beta(t) + y'(t) \cos \beta(t) - (L - w) \beta'(t)] dt \\ &= \int_a^b [y'(t) \cos \beta(t) - x'(t) \sin \beta(t)] dt - \int_a^b (L - w) \beta'(t) dt. \end{aligned}$$

Pro poslední integrál platí:

$$\int_a^b (L - w) \beta'(t) dt = (L - w) [\beta(b) - \beta(a)] = 2\pi m(L - w).$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} s + 2\pi m(L - w) &= \int_a^b [y'(t) \cos \beta(t) - x'(t) \sin \beta(t)] dt, \quad \text{resp.} \\ sL + 2\pi mL(L - w) &= \int_a^b [y'(t)L \cos \beta(t) - x'(t)L \sin \beta(t)] dt. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ve druhé části důkazu vypočítáme s využitím vztahu daného Větou 9 orientovaný obsah oblastí ohraničených uzavřenými křivkami  $c$  a  $d$ . Dostaneme

$$S_c = \int_a^b x(t) y'(t) dt,$$

$$\begin{aligned} S_d &= \int_a^b [x(t) - L \cos \beta(t)] [y(t) - L \sin \beta(t)]' dt \\ &= \int_a^b [x(t) - L \cos \beta(t)] [y'(t) - L \cos \beta(t) \beta'(t)] dt \\ &= \int_a^b x(t) y'(t) - y'(t) L \cos \beta(t) - x(t) L \cos \beta(t) \beta'(t) + L^2 \cos^2 \beta(t) \beta'(t) dt. \end{aligned}$$

Integrál funkce  $x(t)y'(t)$  odpovídá orientovanému obsahu  $S_c$ . Dále zavedeme substituci  $B = \beta(t)$  a vypočítáme integrál:

$$\int_a^b L^2 \cos^2 \beta(t) \beta'(t) dt = \int_{\beta(a)}^{\beta(a)+2\pi m} L^2 \cos^2 B dB = \pi mL^2. \quad (\text{i})$$

Výpočet lze provést s využitím vzorce pro kosinus polovičního úhlu. Dále přepíšeme výraz  $-x(t)L \cos \beta(t) \beta'(t)$  pomocí pravidla pro derivaci součinu funkcí a vypočítáme příslušný integrál. Z uzavřenosti křivek dostaneme  $x(b) = x(a)$  a  $\sin \beta(b) = \sin \beta(a)$ , tedy:

$$\begin{aligned} - \int_a^b x(t) L \cos \beta(t) \beta'(t) dt &= - \int_a^b [x(t) L \sin \beta(t)]' dt + \int_a^b x'(t) L \sin \beta(t) dt \\ &= 0 + \int_a^b x'(t) L \sin \beta(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{ii})$$

Dosazením (i) a (ii) do vztahu pro výpočet  $S_d$  dostaneme:

$$S_d = S_c + \pi mL^2 + \int_a^b [x'(t) L \sin \beta(t) - y'(t) L \cos \beta(t)] dt.$$

rozdíl obsahů  $S_c$  a  $S_d$  je tedy

$$S_c - S_d = S_c - S_c - \pi mL^2 - \int_a^b [x'(t) L \sin \beta(t) - y'(t) L \cos \beta(t)] dt,$$

po úpravě:

$$S_c - S_d + \pi mL^2 = \int_a^b [y'(t) L \cos \beta(t) - x'(t) L \sin \beta(t)] dt \quad (6.4)$$

Porováním vztahů (6.3) a (6.4) dostaneme:

$$sL + 2\pi mL(L - w) = S_c - S_d + \pi mL^2,$$

což po úpravě dá vztah (6.2a) daný větou o planimetru:

$$S_c = sL + S_d + \pi mL(L - 2w)$$

□

Právě dokázaná věta (6.2a) nám dává obecný návod, jak sestavit funkční planimetr. Pro co nejefektivnější měření obsahu  $S_c$  je vhodné učinit dvě opatření:

- zajistit, aby počáteční bod ramene planimetru opisoval křivku  $d$  ohraničující známý obsah  $S_d$ ,

- opisovat hrotem křivku  $c$  tak, aby rameno planimetru po ukončení pohybu nevykonalo ani jednu celou otáčku.

Jak je vidět na dvou příkladech uvedených v této kapitole, u nejobvyklejších konstrukcí planimetru je splnění první podmínky zajištěno tak, že počáteční bod ramene planimetru opíše křivku  $d$  ohraničující nulový obsah. U lineárního planimetru je kupříkladu obrazem křivky  $d$  úsečka. Dále stačí integrační kolečko opatřit stupnicí, na které bude možno odečíst orientovanou vzdálenost  $s$ . Obsah ohraničený křivkou  $c$ , kterou opisuje hrot planimetru, lze pak vyčíst pouze z údaje na stupnici integračního kolečka a z konstant  $L$  a  $w$  daných konstrukcí planimetru.

Druhou podmínku lze přeformulovat tak, že ve vztahu (6.2a) budeme předpokládat  $m = 0$ . Při splnění obou uvedených podmínek dostaneme speciálně:

$$S_c = sL + S_d, \quad (6.2b)$$

při zajištění  $S_d = 0$  pak

$$S_c = sL. \quad (6.2c)$$

V případě, který popisuje vztah (6.2c), je měření obsahu oblasti planimetrem mimořádně jednoduché. Obsah totiž závisí pouze na hodnotě  $s$  odečtené na stupnici integračního kolečka a délce ramene planimetru  $L$ . Při vhodné kalibraci lze obsah odečítat přímo na stupnici integračního kolečka.

Vztah (6.2b) je prezentován a názorně ilustrován animacemi na stránce (Mařík, 2015), která byla společně s článkem (Leise, 2007) autorovi této práce největší inspirací při formulaci věty o planimetru a jejím důkazu.

Vztah (6.2c) bývá nejčastěji dokazován pro jednotlivé konkrétní konstrukce planimetru pomocí *Greenovy věty*, viz např. (Mařík, 2018). Dobře srozumitelná zdůvodnění lze dále nalézt v (Sarmiento, 2017). Osvětlení geometrického významu věty o planimetru lze nalézt na stránce (Foote, 2009).

## 6.4 Polární planimetr

Fotografii polárního planimetru vidíme na Obrázku 6.7. Jeho rameno délky  $L$  s integračním kolečkem je otočným kloubem připevněno k pomocnému ramenu délky  $r$ . To je na jednom svém konci, který budeme nazývat pól, opřeno o podložku. Poloha pólu se v průběhu měření nemění, což je zajištěno připevněním závažíčka. Stejně jako u lineárního planimetru uživatel opisuje uzavřenou křivku  $c$  koncovým bodem ramene opatřeného integračním kolečkem a hledaný obsah  $S_c$  určí s využitím hodnoty zaznamenané integračním kolečkem.

### 6.4.1 Teoretické objasnění činnosti polárního planimetru

Matematické zdůvodnění principu činnosti konkrétně pro polární planimetr je názorně prezentováno v (Leise, 2007) za využití Greenovy věty. Čtenář se také

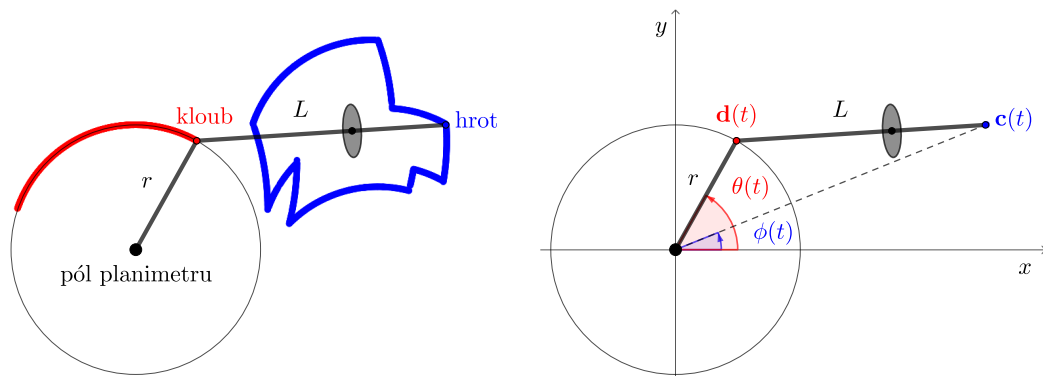




Obrázek 6.7: Polární planimetr. Opisování uzavřené křivky  $c$  probíhá pomocí čočky se zaměřovačem umístěné na rameni planimetru. *Compensating polar planimeter. National Wildlife Research Center (2021)*. Obrázek je volně dostupný z <https://commons.wikimedia.org>.

může nechat autorkou článku navést k odvození v analogii s odvozením věty o planimetru v této práci, tedy pouze s využitím Věty 9.

Zde místo toho ukážeme, že při měření polárním planimetrem jsou splněny předpoklady věty o planimetru a že obsah  $S_c$  oblasti opsané hrotem planimetru souvisí se vzdáleností  $s$  zaznamenanou integračním kolečkem dle vztahu (6.2a). Je tedy třeba dokázat, že pohybuje-li se po uzavřené křivce  $c$  koncový bod ramene planimetru, pak se při dané konstrukci přístroje musí pohybovat po uzavřené křivce  $d$  i jeho počáteční bod.



Obrázek 6.8: Vlevo: Schematický náčrtek planimetru, jehož hrot opisuje jednoduchou uzavřenou křivku. Jeho rameno opatřené integračním kolečkem má délku  $L$ , pomocné rameno, jehož konec (kloub) opisuje kružnici, má délku  $r$ . Vpravo: Poloha hrotu opisujícího křivku  $c$  je  $\mathbf{c}(t)$ , poloha kloubu pak  $\mathbf{d}(t)$ . Tato poloha je popsána pomocí orientovaných úhlů  $\phi(t)$ , resp.  $\theta(t)$ .

Na Obrázku 6.8 vidíme schematický náčrtek polárního planimetru. Koncový bod ramene planimetru délky  $L$  opisuje obraz jednoduché křivky  $c$ , má tedy

souřadnice  $\mathbf{c}(t) = (x(t); y(t))$ , kde  $t \in [a; b]$ ,  $x(b) = x(a)$  a  $y(b) = y(a)$ . Počáteční bod ramene opisující křivku  $d$  se nachází v bodě  $\mathbf{d}(t)$ , odpovídajícímu místu spojení ramene délky  $L$  s pomocným ramenem délky  $r$ .

Pól planimetru umístíme do počátku soustavy souřadnic. Uvažujme, že spojnice počátku soustavy souřadnic s bodem  $\mathbf{c}(t)$ , resp. s bodem  $\mathbf{d}(t)$  svírá s kladnou poloosou  $x$  orientovaný úhel  $\phi(t)$ , resp.  $\theta(t)$ . Dále budeme požadovat, aby ramena planimetru při posouvání nikdy nemířila rovnoběžně, tedy aby pro všechna  $t \in [a; b]$  platilo  $(r - l)^2 < \|\mathbf{c}(t)\|^2 < (r + L)^2$ . Podmínka daná první nerovností je u některých typů planimetrů zajištěna již samotnou konstrukcí a vyjadřuje, že ramena planimetru nelze při měření přesunout jedno přes druhé.

Dále z uzavřenosti křivky  $c$  vyplývá, že  $\phi(b) = \phi(a) + 2\pi m$ . Celé číslo  $m$  odpovídá orientovanému počtu otáček ramene planimetru kolem svého počátečního bodu. Abychom dokázali uzavřenost křivky  $d$ , po níž se pohybuje počáteční bod ramene planimetru, stačí dokázat, že rovněž  $\theta(b) = \theta(a) + 2\pi m$ .

Na Obrázku 6.8 vpravo je vidět trojúhelník, jehož vrcholy tvoří počátek soustavy souřadnic, bod  $\mathbf{c}(t)$  a bod  $\mathbf{d}(t)$ . Z kosinové věty dostaneme:

$$\cos(\theta(t) - \phi(t)) = \frac{r^2 + \|\mathbf{c}(t)\|^2 - L^2}{2r \|\mathbf{c}(t)\|}.$$

Protože z uzavřenosti křivky  $c$  vyplývá  $\|\mathbf{c}(b)\| = \|\mathbf{c}(a)\|$ , platí

$$\cos(\theta(b) - \phi(b)) = \cos(\theta(a) - \phi(a)). \quad (6.3)$$

Dále ukážeme, že při spojitém posouvání ramen planimetru musí pro všechna  $t \in [a; b]$  platit  $|\theta(t) - \phi(t)| \in (0; \pi)$ . Pokud by tomu tak nebylo, muselo by pro nějaké  $t_0 \in [a; b]$  být  $|\cos(\theta(t_0) - \phi(t_0))| = 1$ , tedy

$$\frac{|r^2 + \|\mathbf{c}(t_0)\|^2 - L^2|}{2r \|\mathbf{c}(t_0)\|} = 1$$

$$\left| r^2 + \|\mathbf{c}(t_0)\|^2 - L^2 \right| = 2r \|\mathbf{c}(t_0)\|.$$

Nastalo by tedy buď

$$r^2 + \|\mathbf{c}(t_0)\|^2 - L^2 = 2r \|\mathbf{c}(t_0)\|$$

$$r^2 - 2r \|\mathbf{c}(t_0)\| + \|\mathbf{c}(t_0)\|^2 = L^2$$

$$(r - \|\mathbf{c}(t_0)\|)^2 = L^2$$

$$r - \|\mathbf{c}(t_0)\| = \pm L$$

$$\|\mathbf{c}(t_0)\| = r \mp L, \quad \text{nebo}$$

$$r^2 + \|\mathbf{c}(t_0)\|^2 - L^2 = -2r \|\mathbf{c}(t_0)\|$$

$$r^2 + 2r \|\mathbf{c}(t_0)\| + \|\mathbf{c}(t_0)\|^2 = L^2$$

$$(r + \|\mathbf{c}(t_0)\|)^2 = L^2$$

$$r + \|\mathbf{c}(t_0)\| = \pm L$$

$$\|\mathbf{c}(t_0)\| = \mp L - r.$$

Obě tyto možnosti jsme přitom v průběhu celého měření vyloučili. Ze skutečnosti, že  $|\theta(t) - \phi(t)| \in (0; \pi)$  pro všechna  $t \in [a; b]$  a ze vztahu (6.3) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \theta(b) - \phi(b) &= \theta(a) - \phi(a) \\ \theta(b) - \phi(a) - 2\pi m &= \theta(a) - \phi(a) \\ \theta(b) &= \theta(a) + 2\pi m. \end{aligned}$$

Protože se zároveň počáteční bod ramene planimetru pohybuje po kružnici, tedy  $\|\mathbf{d}\| = r$ , dostáváme, že je-li křivka  $c$  opisovaná koncovým bodem ramene polárního planimetru uzavřená, je uzavřená i křivka  $d$  opisovaná počátečním bodem ramene. Jsou tedy splněny požadavky věty o planimetru.

Při používání polárního planimetru máme dvě možnosti, jak měřit obsah ohraničený křivkou  $c$ . Buď umístíme pól planimetru vně křivky  $c$ , nebo do oblasti ohraničené křivkou  $c$ . Při umístění pólu vně opiše počáteční bod ramene planimetru uzavřený kruhový oblouk, tedy křivku  $d$  ohraničující oblast s nulovým obsahem a pomocné rameno délky  $r$  nevykoná ani jednu celou orientovanou otáčku. Protože ramena planimetru nemohou během měření mířit vzájemně rovnoběžně, nemůže žádnou celou orientovanou otáčku vykonat ani rameno délky  $L$  opatřené integračním kolečkem. Proto lze vypočítat obsah oblasti ohraničené křivkou  $c$  pomocí vztahu (6.2c).

Při umístění pólu planimetru do oblasti ohraničené křivkou  $c$  vykoná pomocné rameno délky  $r$  jednu celou otáčku, stejně jako rameno délky  $L$  opatřené integračním kolečkem. Křivka  $d$  je pak kružnice o poloměru  $r$  a dosazením do vztahu (6.2a) pro obsah oblasti opsané hrotem planimetru dostaneme:

$$S_c = sL + \pi r^2 + \pi L(L - 2w),$$

kde  $s$  je vzdálenost zaznamenaná integračním kolečkem a  $L, r, w$  jsou konstanty dané konstrukcí polárního planimetru. Typicky jsou jejich hodnoty uživateli k dispozici v příloženém manuálu.

Je na místě otázka, proč vlastně měřit obsah  $S_c$  druhým způsobem, když je získání požadovaného výsledku výpočtově náročnější. Při umístění pólu vně křivky  $c$  musí mít pro proveditelnost měření měřená oblast průměr menší než  $L+r$ , tedy největší vzdálenost, do níž mohou ramena planimetru dosáhnout. Oproti

tomu při umístění pólu dovnitř křivky  $c$  může být průměr oblasti až  $2(L + r)$ . Průměr zde přitom chápeme jako největší velikost úsečky, která leží celá v oblasti ohraničené křivkou  $c$ .

Čtenáři můžeme po úspěšném pochopení principu planimetru k další četbě doporučit publikaci (Bryant a Sangwin, 2008, str. 149 – 165) a článek (Foote a Sandifer, 2007), kde jsou rozebírány praktické aspekty práce s planimetrem a činitele ovlivňující přesnost měření. Rovněž je zde podán zevrubný přehled historie těchto přístrojů.

# Závěr

Cílem práce bylo představit v českém jazyce přehled a řešení v relativně nedávné době diskutovaných konkrétních problémů, k jejichž řešení lze využít nástrojů diferenciální geometrie. Presentace řešení přitom měla být přístupna i čtenářům z řad těch, kteří si pojmy a metody diferenciální geometrie teprve osvojují, případně i posloužit jako opora při samotném studiu diferenciální geometrie. Na úlohách byly demonstrovány některé metody, které lze aplikovat i na mnohé jiné, zde nezmíněné problémy, zejména pokud jde o výpočty obsahů rovinných oblastí. Zároveň s tím jsme se snažili o zavádění pouze nejnútnejších definic a pojmů, aby mohlo být řešení prezentováno co nejsrozumitelněji a práce tak byla přístupna čtenářům s různou úrovní vstupních znalostí.

Protože tato práce pokrývá relativně velkou šíři různých problémů, nelze zdaleka tvrdit, že byl čtenáři poskytnut nejhlubší možný rozbor každého z nich. Naopak, pod příloženými odkazy na literaturu se často skrývají další náměty k přemýšlení o prezentovaných úlohách a jejich zobecňování.

# Seznam použité literatury

- APOSTOL, T. M. (2000). A Visual Approach to Calculus Problems. *Engineering and Science*, **63**, 22–31.
- APOSTOL, T. M. a MNATSAKANIAN, M. (2008). The method of sweeping tangents. *The Mathematical Gazette*, **92**, 396–417.
- APOSTOL, T. M. a MNATSAKANIAN, M. A. (2002). Subtangents – An Aid to Visual Calculus. *The American Mathematical Monthly*, **109**, 525–533.
- BRYANT, J. a SANGWIN, C. (2008). *How Round Is Your Circle?: where engineering and mathematics meet*. První vydání. Princeton University Press. ISBN 978-0-691-13118-4.
- CHERN, S. (1967). Curves and Surfaces in Euclidean Space. *MAA Studies in Mathematics*, **4**, 16–56.
- CHOI, H. (2020). Invariance of the Length and the Area of Cycloids. *The American Mathematical Monthly*, **127**, 537–544.
- DOCARMO, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. První vydání. Prentice Hall, New Jersey. ISBN 0-13-212589-7.
- FOOTE, R. (2005). Sampler of Polar and Radial Planimeters. URL <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/planimeter/PlethoraTalk/Polar&LinearPhotos.htm>.
- FOOTE, R. (2009). How Planimeters Work. URL <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/Planimeter/HowPlanimetersWork.htm>.
- FOOTE, R. a SANDIFER, E. (2007). Area Without Itegration: Make Your Own Planimeter. *Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics*, **72**, 71–88.
- HOFFMAN, M. E. (1998). The Bull and the Silo: An Application of Curvature. *The American Mathematical Monthly*, **105**, 55–58.
- IZUMIYA, S. A. K. (2016). *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*. První vydání. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore. ISBN 978-9814590440.
- KOUTSOVOULOS, V. I. (2017). Peritrochoid Curve and the Wankel Engine. URL [mechdrafting.net/en/portfolio-item/peritrochoid-curve](http://mechdrafting.net/en/portfolio-item/peritrochoid-curve).
- LEISE, T. (2007). As The Planimeter’s Wheel Turns: Planimeter Proofs for Calculus Class. *The College Mathematics Journal*, **38**, 24–31.
- MAŘÍK, R. (2015). Za tajemstvím planimetru. URL [https://user.mendelu.cz/marik/mechmat/za\\_tajemstvím\\_planimetru/](https://user.mendelu.cz/marik/mechmat/za_tajemstvím_planimetru/).
- MAŘÍK, R. (2018). Greenova věta a její aplikace. *Kvaternion*, **1/2**, 15–24.

- MNATSAKANIAN, M. (1997). Annular Rings of Equal Area. *Math Horizons*, **5**, 5–8.
- SARMIENTO, E. A. K. (2017). Analytical foundation of the planimeter. *Visión electrónica*, **11**, 311–317.
- STEWART, J. (2008). *Calculus: Early Transcendentals*, 6e. Šesté vydání. Thomson Brooks/Cole. ISBN 978-0-495-01166-8.
- TAPP, K. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. První vydání. Springer. ISBN 978-3-319-39798-6.
- VAKIL, R. (2011). The Mathematics of Doodling. *The American Mathematical Monthly*, **118**, 116–129.
- WEISSTEIN, E. W. Goat Problem. URL <https://mathworld.wolfram.com/GoatProblem.html>.
- WEISSTEIN, E. W. Tautochrone Problem. URL <https://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html>.