Cvičení 14

Definice 1. Nechť je v Gaussově rovině dána množina komplexních čísel M (definiční obor). Jestliže je každému bodu $z \in M$ přiřazeno právě jedno (komplexní) číslo w, řekneme, že na množině M je definována funkce $w = f(z)$.

Na tuto funkci se můžeme dívat tak, že $\forall z \in M$ je přiřazeno komplexní číslo $w = u + iv$, takže

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Vyšetřování funkcí komplexní proměnné lze tedy převést na vyšetřování dvou funkcí u, v reálných proměnných x, y.

Příklad 2.

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Definice 3. Řekneme, že funkce $f(z)$ má v bodě z_0 limitu A, jestliže $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že nerovnost

$$|f(z) - A| < \epsilon$$

platí pro všechna z splňující $0 < |z - z_0| < \delta$. Potom píšeme $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Definice 4. Jestliže $z_0 \in M$ a $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ pak řekneme, že funkce f je spojitá v bodě z_0.

Definice 5. Funkce $f(z)$ má v bodě z_0 derivaci, jestliže existuje limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Má-li derivaci v každém bodě oblasti M říkáme, že je holomorfní.

Věta 6. *(Cauchyovy-Riemannovy podmínky) Funkce $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ má v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ derivaci právě tehdy, když funkce u, v mají v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál a platí*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Poznámka 7.

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f'(z_0) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Příklad 8. Spočtěte derivace funkcí z^2 a $\overline{z^2}$.

Integrál z funkce komplexní proměnné definujeme podobně jako křivkový integrál prvního druhu.

Věta 9. *Ke každé holomorfní funkci v jednoduše souvislé oblasti existuje primitivní funkce.*

Věta 10. *Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v množině M a je-li c jednoduchá konečná po částech hladká orintovaná křivka ležící v M, s počátečním bodem z_2 a koncovým bodem z_1, pak*

$$\int_c f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Věta 11. *(Cauchyova integrální věta) Je-li c uzavřená jednoduchá konečná po částech hladká orintovaná křivka, funkce $f(x)$ je holomorfní ve vnitřku c a spojitá na sjednocení vnitřku a hranice c, potom*

$$\int_c f(z)\,dz = 0.$$

Příklad 12. Pro libovolnou křivku spočtěte integrál $\displaystyle\int_c z^2\,dz$.

Příklad 13. Spočtěte integrál $\displaystyle\int_c \frac{1}{z}\,dz$ přes kružnici se středem v počátku a poloměrem a, kladně orientovanou vzhledem ke svému vnitřku ($z = ae^{i\varphi}$).

$(2\pi i)$.

Lineární diferenciální rovnice (LDR) $n-$tého řádu jsou rovnice ve tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f.$$

Jsou-li všechny funkce spojité v nějakém intervalu I, potom pro libovolné číslo $x_0 \in I$ a libovolné počáteční podmínky existuje jednoznačné řešení splňující

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \ldots,\ y'(x_0) = y_0',\ y(x_0) = y_0.$$

Příslušnou homogenní LDR dostaneme, jestliže funkci f na pravé straně nahradíme nulou.

Definice 14. Systém řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ homogenní LDR $n-$tého řádu, která jsou lineárně nezávislá v intervalu I, nazveme fundamentálním systémem.

Věta 15. *Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ fundamentální systém homogenní LDR $n-$tého řádu, potom lze každé řešení této rovnice vyjádřit ve tvaru:*

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

kde $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ jsou vhodné konstanty.

Věta 16. *Ke každé homogenní LDR $n-$tého řádu se spojitými koeficienty v intervalu I existuje v intervalu I fundamentální systém.*

Věta 17. *Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ fundamentální systém příslušné homogenní LDR $n-$tého řádu, potom lze obecné řešení nehomogenní LDR $n-$tého řádu vyjádřit ve tvaru:*

$$c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

kde $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ jsou vhodné konstanty a funkce $c_1(x),\ c_2(x),\ \ldots,\ c_n(x)$ vyhovují rovnicím:

$$c_1'(x)y_1^{(i)}(x) + c_2'(x)y_2^{(i)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(i)}(x) = 0 \quad \forall i = 0, \ldots, n-2,$$

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Příklad 18. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + y = x^2$.
$(y = x^2 - 2 + c_1 \sin x + c_2 \cos x)$.