Kapitola 10

Lineární transformace Lebesgueovy míry. Připomeňme, že jakékoli izometrické zobrazení $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, pro něž $T(0) = 0$, je *lineární*, jeho matice je ortonormální a tudíž $|\det T| = 1$; viz [107], str. 239, nebo [14], str. 41.

Pro lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ má $|\det T|$ tuto geometrickou interpretaci: $|\det T|$ je *objem rovnoběžnostěnu* $T([0,1]^d)$.

Větu 10.1 je užitečné zasadit do kontextu tvrzení o *obrazu míry*. Nechť $(X, \mathcal{A})$ a $(X', \mathcal{A}')$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to X'$ se nazývá $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-měřitelné, jestliže $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ pro každou množinu $A' \in \mathcal{A}'$. Je-li μ míra na $\mathcal{A}$, pak zobrazení $A' \mapsto \mu(f^{-1}(A'))$, $A' \in \mathcal{A}'$, definuje míru na $\mathcal{A}'$ (tzv. **obraz míry μ při zobrazení** f; označení: $f(\mu)$).

Jestliže $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je prosté lineární zobrazení, potom T je podle věty 10.1 $(\mathcal{L}^d - \mathcal{L}^d)$-měřitelné zobrazení a platí

$$T(\lambda_d)(A) = \lambda_d(T^{-1}(A)) = |\det T^{-1}|\lambda_d(A) = (1/|\det T|)\lambda_d(A), \quad A \in \mathcal{L}^d.$$

Protože každé difeomorfní zobrazení φ je (*v infinitezimálním smyslu*) lokálně lineární, nepřekvapí nás, že ve větě o substituci pro vícerozměrný Lebesgueův integrál se jako *dilatační* faktor vyskytuje absolutní hodnota jakobiánu, tedy $|\det \varphi'|$.

Věta o substituci. Důkaz věty o substituci vychází z [66], str. 72. Alternativní důkaz, jehož autorem je A. Cornea, je uveden v textu pro studenty na `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~netuka/`

Věta o substituci je historicky spjata se jmény L. Euler, J.–L. Lagrange, P.–S. Laplace, C. F. Gauss, M. V. Ostogradskij, C. G. J. Jacobi a dalších matematiků; viz [111].

Velmi obecnou verzi věty o substituci lze nalézt v [142], str. 148, a v [213]. Věta o substituci je speciálním případem tzv. *area theorem* [61], [74], Vol. 2, [82], [89].

Kapitola 12

Významné osobnosti

Níže uvedený seznam (samozřejmě výběr je subjektivní) zahrnuje matematiky, kteří sehráli v letech 1820–1920 v rozvoji teorie míry a integrálu významnou roli. U několika z těchto významných osobností (jména jsou vytištěna tučně) jsou dále připojeny stručné životopisné medailonky.

Cesare Arzelà (1847 – 1912)

Guido Ascoli (1843 – 1896)

Émile Borel (1871 – 1956)

Georg Cantor (1845 – 1918)

Constantin Carathéodory (1873 – 1950)

Augustin–Louis Cauchy (1789 – 1857)

Percy Daniell (1889 – 1946)

Jean–Gaston Darboux (1842 – 1917)

Arnaud Denjoy (1884 – 1974)

Ulisse Dini (1845 – 1918)

Paul du Bois–Reymond (1831 – 1889)

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859)

Pierre Fatou (1878 – 1929)

Jean–Baptiste–Joseph Fourier (1768 – 1830)

Guido Fubini (1879 – 1943)

Hans Hahn (1879 – 1934)

Hermann Hankel (1839 – 1873)

Carl Gustav Axel Harnack (1851 – 1888)

Felix Hausdorff (1868 – 1942)

Dmitrij Fjodorovič Jegorov (1869 – 1931)

Camille Jordan (1838 – 1922)

Henri Lebesgue (1875 – 1941)

Beppo Levi (1875 – 1961)

Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883 – 1950)

Guiseppe Peano (1858 – 1932)

Oskar Perron (1880 – 1975)

Johann Radon (1887 – 1956)

Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Frigyes Riesz (1880 – 1956)

Thomas Jan Stieltjes (1856 – 1894)

Charles–Jean de la Vallée Poussin (1866 – 1962)

Guiseppe Vitali (1875 – 1932)

Vito Volterra (1860 – 1940)

William Henry Young (1863 – 1942)

Pierre Fatou se narodil 28. února 1878 v Lorientu (Francie), zemřel 9. srpna 1929 v Pornichetu. Byl o tři roky mladším kolegou a přítelem H. Lebesguea. V letech 1898 – 1901 studoval na École normale supérieure. Byl ve správné době na správném místě, začátek 20. století je považován za zlatý věk francouzské matematické analýzy, jehož hlavními aktéry byli É. Borel (1871 – 1956), R. Baire (1874 – 1932) a H. Lebesgue (1875 – 1941).

Po ukončení studia Fatou usoudil, že možnosti akademické dráhy v Paříži jsou pro něj mizivé a rozhodl se přijmout místo na pařížské observatoři, kde do konce života působil v oblasti praktické astronomie. Jeho zájem o výzkum v matematice byl velmi silný a pod ideovým vedením H. Lebesguea sepsal a v roce 1907 obhájil doktorskou disertační práci s názvem *Trigonometrické řady a Taylorovy řady*. Výsledky, které vytvořil a publikoval v [62], přesvědčivě podávají svědectví o síle a aplikovatelnosti Lebesgueova integrálu. Mnohé z Fatouových výsledků otevřely široké pole výzkumu v harmonické analýze, v teorii reálných a komplexních funkcí a v teorii integrálu. V komentáři ke kap. 5 jsme již připomněli Fatouovo lemma a výsledek o hraničním chování analytických funkcí. Zásadními poznatky přispěl Fatou do teorie trigonometrických řad a Fourierových řad. Systematicky studoval Fourierovy–Lebesgueovy řady, tj. Fourierovy řady lebesgueovsky integrovatelných funkcí, nikoli tedy (jako v 19. století) pouze riemannovky integrovatelných funkcí. Fatouovy výsledky o konvergenci trigonometrických řad skoro všude a o absolutně konvergentních trigonometrických řadách patří mezi stěžejní, dnes klasické, výsledky v této partii matematiky. Fatou mj. ukázal, že pro funkce z $L^2_{2\pi}$ zobrazení $f \mapsto \{\widehat{f}(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$ zachovává skalární součin v $L^2_{2\pi}$ a ℓ^2. To znamená, že platí

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(j)\,\overline{\widehat{g}(j)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,\overline{g}\,, \qquad f, g \in L^2_{2\pi}\,.$$

Pro $f = g$ dostáváme Parsevalovu rovnost. Fatouův významný přínos pro klasickou harmonickou analýzu se týká vlastností Poissonova integrálu. Připomeňme (viz [189], kap. 11), že pro funkci $f \in C_{2\pi}$ je Poissonův integrál definován jako

$$P[\,f\,](r\,e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)f(t)\,dt}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,. \qquad (12.1)$$

Výsledek z 19. století říká, že funkce $P[\,f\,]$ je harmonická v otevřeném jednotkovém kruhu, tj. splňuje Laplaceovu rovnici, a její spojité rozšíření splývá na jednotkové kružnici s funkcí f. Jinak řečeno, $P[f]$ je řešením Dirichletovy úlohy s okrajovou podmínkou f. Předmětem Fatouova zkoumání bylo chování $P[f]$ z (12.1) pro funkce $f \in L^2_{2\pi}$. Fatou mj. dokázal, že $P[f]$ má radiální limity pro skoro všechny body jednotkové kružnice. Mezi klasické výsledky v teorii potenciálu patří příbuzný Fatouův výsledek: *nezáporná harmonická funkce na jednotkovém kruhu má radiální limity skoro všude na jednotkové kružnici*; viz [5], [18], nebo [189], kap. 11.

V nedávné době se Fatouovo jméno často vyskytuje v jiné partii matematiky, v tzv. komplexní dynamice, a to v souvislosti se studiem fraktálů a jejich geometrickým znázorněním. Průkopnické výsledky o asymptotickém chování iterací komplexních funkcí Fatou publikoval v roce 1917; viz [2], [7], [40].

Na závěr poznamenejme, že jako astronom Fatou také přispěl ke studiu drah planet a dvojhvězd, dále v matematice publikoval v oblasti diferenciálních rovnic a v teorii konformního zobrazení.

Guido Fubini se narodil 19. ledna 1879 v Benátkách, zemřel 6. června 1943 v New Yorku. Ve věku 17 let zahájil studia na Scuola Normale Superiore v Pise, kde ho z jeho učitelů nejvíce ovlivnili L. Bianchi (1856 – 1928), U. Dini (1845 – 1918) a E. Bertini (1846 – 1933). Fubiniho disertace z roku 1900 se týkala Cliffordova paralelismu v eliptických prostorech. Výsledky se staly v matematické komunitě rychle známé, neboť je Bianchi zařadil do monografie z diferenciální geometrie vydané v roce 1902. Fubini setrval v Pise ještě rok a dokončil habilitační práci o harmonických funkcích na prostorech konstantní křivosti. Ve věku 22 let zahájil svou pedagogickou činnost na univerzitě v Catanii (Sicílie), kde zvítězil v konkurzu na profesorské místo. Brzy se rozhodl přijmout místo na univerzitě v Janově. V roce 1908 se Fubini usadil v Turíně, kde na technice a zároveň na univerzitě působil až do roku 1938.

Fubini byl matematikem velmi širokého odborného záběru: reálná analýza, analytické funkce, funkce více komplexních proměnných, variační počet, obyčejné a parciální diferenciální rovnice, teorie potenciálu, diferenciální geometrie, Lieovy grupy, matematická fyzika, aplikace matematiky v technice.

Fubini je všeobecně znám díky úplné a obecné verzi věty o převedení dvojného Lebesgueova integrálu na dvojnásobné integrály z roku 1907. S jeho jménem je v reálné analýze spojena tato pozoruhodná věta z roku 1915

o derivování řady člen po členu; viz např. [60], str. 301: *Nechť f_j, $j \in \mathbb{N}$, jsou neklesající funkce na $[a,b]$ a nechť řada $F(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ konverguje pro každé $x \in [a,b]$. Potom pro skoro všechna $x \in [a,b]$ platí*

$$F'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x)\,.$$

(V medailonku věnovaném G. Vitalimu připomínáme, že monotónní funkce je diferencovatelná skoro všude.)

Závěr kariéry byl pro Fubiniho v důsledku zvratu politické situace v Itálii smutný. Antisemitismus se stal součástí oficiální fašistické politiky Mussoliniho režimu a Fubini byl penzionován. Ve věku 60 let se s rodinou rozhodl emigrovat. Byl přesvědčen, že pro jeho dva syny (oba byli inženýři) není v Itálii s ohledem na jejich židovský původ žádná perspektiva. Fubini přijal nabídku od Institute for Advanced Study v Princetonu, kam urychleně v roce 1939 s celou rodinou odjel. Přes chatrné zdraví G. Fubini ještě několik let působil na New York University až do své smrti v roce 1943.

Takřka 200 nejdůležitějších prací je k dispozici v sebraných spisech G. Fubiniho vydaných v roce 1957; viz [77].

Na závěr zmíníme spolupráci G. Fubiniho a E. Čecha (1893 – 1960). Čech se ve dvacátých letech minulého století zabýval projektivní diferenciální geometrií, v níž byl Fubini vedoucí osobností. Čech u Fubiniho v Turíně pobýval v letech 1921 – 1922. V závěru pobytu ho Fubini přizval ke spolupráci na monografii. Jejich společná dvoudílná monografie [78] byla dokončena v roce 1926. Pokračující spolupráce Fubiniho a Čecha vyústila v sepsání knihy [79], která vyšla v roce 1931.

Henri Lebesgue se narodil 28. června 1875 v Beauvais nedaleko Paříže, zemřel 26. června 1941 v Paříži. Lebesgueův osobní život byl od dětství složitý. Jeho otec, typografický dělník, zemřel, když Lebesgueovi byly sotva tři roky. Rodina se ocitla v tíživé situaci. Naštěstí v Beauvais byl inteligentní starosta, který projevoval zájem o talentované žáky místní školy. S podporou učitelů a starosty získal Lebesgue stipendium, které mu umožnilo kvalitní středoškolské vzdělání. V roce 1894 byl přijat na École normale supérieure, kterou ukončil v roce 1897. Po krátké období pracoval jako pomocná síla v knihovně, věnoval se matematice a napsal první vědecké práce. V roce 1899 nastoupil jako středoškolský učitel na lyceum v Nancy. Intenzivně pracoval na disertační práci. Později na tuto dobu vzpomínal: „Moje teorie integrálu pochází z období, kdy jsem měl jednadvacet hodin výuky (musím také říci, že mi bylo třiadvacet) a kolem mě byli jenom kolegové, jejichž jediný zájem byl po večerech v penzionu, kam chodili na jídlo, hrát karty a kostky. S žádným z nich jsem o matematice nehovořil.“ Doktorskou disertaci Lebesgue předložil a publikoval v roce 1902. O svých výsledcích přednášel na pařížské Collège de France, byl docentem na univerzitě v Rennes (1902 – 1906) a v Poitiers (1906 – 1910). Od roku 1910 působil na Sorbonně jako docent, v roce 1919 byl jmenován profesorem. V roce 1921 stanul v čele katedry matematiky v Collège de France. Při svém působení na École normale supérieure (rue d'Ulm) a École normale supérieure de jeunes filles v Sèvres u Paříže vychoval několik generací francouzských středoškolských profesorů a profesorek. V roce 1922 byl zvolen členem pařížské Akademie věd jako následník C. Jordana (1838 – 1922). Lebesgueova osobní a rodinná situace byla neutěšená. Napsal: „Prvních čtyřicet let mého života bylo obtížných, provázely mě především nemoci a velká chudoba.“ V korespondenci uveřejněné v [136] podává smutná svědectví o nemocech a úmrtích v blízké rodině i o tíživých materiálních podmínkách.

Lebesgue ve své vědecké práci započaté na přelomu století navázal zejména na É. Borela (1871 – 1956) a R. Bairea (1874 – 1932) a spolu s nimi vytvořil trojici, která proslavila francouzskou matematickou analýzu zcela výjimečným způsobem. Jejich osudy, životní dráhy, společenské postavení, charakterové vlastnosti i způsob matematické tvorby byly odlišné a vztahy mezi těmito velkými matematiky byly dosti složité. Mezi Borelem a Lebesguem dlouhodobě doutnaly a později se rozhořely komplikované a nehezké spory o prioritu v otázkách teorie míry a integrálu, které na konci roku 1917 vyústily v roztržku mezi oběma matematiky; viz předmluva G. Choqueta v [136]. Tam je také citován výrok de la Vallée Poussina: „To je jen stěží vědecká výměna názorů, je to především konflikt dvou charakterů.“ Při zmínce o slavné trojici francouzských matematiků nelze zapomínat na vliv, který na všechny z nich měla matematika G. Cantora prostřednictvím nových postupů a pohledů souvisejících s pojmem množiny a pojetím nekonečna. Lebesgue mohl stavět na čerstvých výsledcích R. Bairea, který do zdánlivě zcela chaotického světa nespojitých funkcí zavedl řád (Baireova klasifikace funkcí budovaná ze spojitých funkcí postupnou aplikací bodového limitního přechodu) a z ideového nástinu Borelovy teorie míry.

Význam Lebesgueova pojetí integrálu pro moderní matematiku lze jen stěží přecenit. Lebesgueův počin spočívá mj. v zavedení třídy lebesgueovsky měřitelných funkcí a měřitelných množin. V matematice byly samozřejmě již dříve studovány různé třídy funkcí, např. analytické (J.-L. Lagrange, 1736 – 1813), spojité (B. Bolzano, 1781 – 1848 a A.-L. Cauchy, 1789 – 1857), s konečnou variací (C. Jordan, 1838 – 1922), borelovsky měřitelné funkce (R. Baire). Všechny tyto třídy měly svůj teoretický význam a také byly v různém kontextu aplikovány. Postupně se však ukázalo, že operace, které jsou v matematické analýze obvyklé, takové třídy nezachovávají. Např. u borelovských funkcí nemusí bodová limita skoro všude být borelovská funkce. Podobně u borelovských množin: jejich spojitý obraz nemusí být borelovská množina. Lebesguem vymezená třída měřitelných funkcí takové nedostatky nevykazuje: prakticky všechny myslitelné analytické operace, jako jsou např. různé druhy konvergence, sčítatelnosti apod., nevedou mimo systém měřitelných funkcí.

Lebesgue zanechal za sebou velké dílo, které zásadním způsobem ovlivnilo další vývoj teorie reálných funkcí, teorie integrálu, diferencování funkcí a měr a poznatků o trigonometrických a Fourierových řadách. Význačné místo v matematice zaujímají však také Lebesgueovy výsledky v dalších partiích matematiky, např. v teorii povrchu ploch, v přímých metodách variačního počtu a v pojetí dimenze. Lebesgue je dále autorem průkopnických výsledků o Dirichletově úloze pro harmonické funkce. Jsou uváděny ve všech učebnicích a monografiích z klasické i moderní teorie potenciálu; viz [5]. V polovině dvacátých let je u Lebesguea patrný silný odklon od matematické analýzy k otázkám výuky matematiky. Lebesgue se zejména věnoval elementární geometrii, historii matematiky a didaktice, především didaktice geometrie.

Osobnosti a dílu H. Lebesguea je věnována zasloužená pozornost; viz pětidílné sebrané spisy [134] obsahující, kromě přetisku většiny Lebesgueových prací, na takřka 200 stránkách kompetentní a zasvěcené biografické i autobiografické materiály a svědectví a také bibliografické informace. Z dalších pramenů je užitečné například zmínit [105], [136], [147], [156].

V průběhu 20. století se objevily mnohé další definice integrálu, nicméně prominentní postavení Lebesgueova integrálu je nesporné. Již po mnoho desetiletí je výklad o Lebesgueově integrálu samozřejmou součástí každého seriózního univerzitního matematického vzdělání. Na jedné straně dostatečná obecnost integrálu, na druhé straně aplikovatelnost v mnoha partiích moderní matematiky (Fourierova analýza, funkcionální analýza, teorie pravděpodobnosti, geometrická teorie míry atd.) z Lebesgueova integrálu udělala mocný nástroj. Je pozoruhodné, že Lebesgueův integrál se velmi rychle prosadil ve vědě i výuce v řadě zemí, nikoliv však ve Francii, kde ještě po celou první polovinu 20. století dominoval Riemannův integrál. Zajímavou analýzu tohoto jevu lze nalézt v [109].

Na závěr poznamenejme, že první česky psaný knižní výklad teorie Lebesgueova integrálu je zařazen do prvního vydání Čechových *Bodových množin* z roku 1936; viz [46]. Integrálnímu počtu založenému na Lebesgueově integrálu je věnována učebnice V. Jarníka *Integrální počet II*, jejíž první vydání je z roku 1955; viz [108]. Na Univerzitě Karlově je Lebesgueův integrál do kurzovních přednášek zařazován po roce 1950. Pokud je nám známo, poprvé o Lebesgueově integrálu přednášel na Univerzitě Karlově V. Jarník (1897 – 1973) v roce 1925 po jmenování docentem. Text přednášky ani bližší informace o jejím obsahu se nezachovaly; viz [162], str. 12.

Beppo Levi se narodil 14. května 1875 v Turínu, zemřel 28. srpna 1961 v Rosario (Argentina). V Turínu navštěvoval univerzitu, kde ho matematicky ovlivnili jeho učitelé G. Peano (1858 – 1939), V. Volterra (1860 – 1940) a C. Segre (1863 – 1924). Leviho disertace dokončená v roce 1896 byla věnována algebraické geometrii. Do roku 1899 byl Levi asistentem na katedře projektivní a deskriptivní geometrie v Turínu, poté v letech 1899 – 1906 vystřídal celou řadu učitelských míst, převážně středoškolských. Jeho snahy dosáhnout na odpovídající místo na některé z italských univerzit nebyly úspěšné. V roce 1906 získal místo na univerzitě v Cagliari (Sardinie), kde působil do roku 1910, kdy přijal poněkud podřadnější místo v Parmě. Tam usiloval o povznesení úrovně matematiky, zejména o prosazení vyššího stupně vzdělávání studentů. Složitá politická situace ve dvacátých letech 20. století (níže se o ní ještě zmíníme) i osobní neshody s fašisticky orientovaným ministrem školstvím G. Gentilem (1875 – 1944) snahy B. Leviho pohřbily. Po složitém jednání Levi získal místo na univerzitě v Bologni v roce 1928.

Matematické zájmy B. Leviho byly široké: algebraická geometrie, logika, Lebesgueův integrál a jeho modifikace a parciální diferenciální rovnice. Studium Dirichletova principu přivedlo Leviho k větě o záměně integrálu a limity a k prostorům funkcí, které dnes nesou jeho jméno. Levi také publikoval práce z teorie čísel, elektroinženýrství, fyzikálních měření a z teoretické fyziky.

Ještě se vraťme k politické a společenské situaci v Itálii po 1. světové válce; viz [87]. V roce 1925 se Levi spolu s dalšími matematiky (např. s G. Fubinim, V. Volterrou, T. Levi-Civitou) postavil proti *manifesto Gentile*, výzvě podpory fašismu ze strany inteligence. V té době, až na výjimky, většina matematiků podepsala tzv. *anti-manifesto*, které požadovalo nevměšování politiky do akademického a intelektuálního života. Reformy fašistického ladění však pokračovaly dále, tlak se stupňoval. V roce 1931 již *přísahu fašismu* podepsalo na 1 200 matematiků (pouze 11 podpis odmítlo). Levi se i přes svou nenávist k fašismu k většině přidal, což mu patrně umožnilo za snesitelných podmínek pokračovat v práci na univerzitě v Bologni. Bohužel jen do roku 1938. Mussolini zavedl po vzoru Německa rasové zákony, v jejichž důsledku museli občané židovského původu opustit pozice v oblasti vzdělávání, bankovnictví a vládních úřadů. Levi byl z profesorského místa odstraněn. S podporou argentinských kolegů získal ve věku 64 let místo ředitele nově založeného matematického ústavu na Universidad de Litoral v Rosario. Tam se věnoval výuce, výzkumu a organizační činnosti po dalších 20 let. Po 2. světové válce mu byl nabídnut návrat na původní katedru v Bologni, Levi se ale rozhodl zůstat v Argentině.

Za zmínku stojí, že Leviho studium Dirichletova principu z roku 1906 zahrnovalo úvahy, které se v abstraktní formě později uplatnily v důležité větě o projekci pro Hilbertovy prostory: *Je-li P uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H , pak každý prvek $x \in H$ lze jednoznačně psát ve tvaru $x = y + z$, kde $y \in P$ a z je prvek kolmý na P.* Z tohoto výsledku velmi jednoduše plyne Rieszova věta o reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů na Hilbertově prostoru; viz [155], str. 67.

Johann Radon se narodil 16. prosince 1887 v Děčíně, zemřel ve Vídni 25. května 1956. V letech 1897 – 1905 navštěvoval gymnázium v Litoměřicích. Ke studiu matematiky a fyziky se zapsal roku 1905 na univerzitě ve Vídni. Mezi jeho učiteli byli mj. H. Hahn (1879 – 1934) a G. von Escherich (1849 – 1935).

Pod vedením von Eschericha dokončil v roce 1910 disertační práci z variačního počtu. V zimním semestru akademického roku 1910/1911 pobýval v Göttingen. Navštěvoval přednášky a semináře D. Hilberta (1862 – 1943), přednášky H. Weyla (1885 – 1955), setkal se také s F. Kleinem (1849 – 1925). Velmi krátká epizoda pojí J. Radona s Brnem; viz [80]. Radon byl jmenován asistentem na katedře matematiky brněnské německé techniky od 1. dubna 1911. Dne 25. dubna složil slib do rukou brněnských profesorů matematiky E. Fischera (1875 – 1959) a H. Tietzeho (1880 – 1964). V roce 1912 se mu však naskytla možnost získání trvalého místa na univerzitě ve Vídni a k 30. dubnu 1912 Radon z Brna odešel.

Na základě habilitační práce *Teorie a aplikace absolutně aditivních množinových funkcí* publikované v [176] mu byl v roce 1913 přiznán titul soukromého docenta. V této práci zásadního významu Radon položil základy pro další budování obecné teorie míry a integrálu. I když se stále pohyboval v rámci euklidovského prostoru, jeho výsledky předznamenaly abstraktní přístupy realizované s malým časovým odstupem M. Fréchetem (1878 – 1973) a dalšími matematiky.

Radon studoval reálné σ-aditivní množinové funkce. Dokázal větu o rozkladu na kladnou a zápornou část. Zobecnil Stieltjesův integrál, dokázal větu o rozkladu míry na absolutně spojitou a singulární část a při studiu lineárních funkcionálů upozornil na důležitý fakt: míra a integrál jsou v zásadě totožné pojmy. Radon učinil podstatný krok k pozdější Radonově-Nikodymově větě. Svými výsledky Radon významně přispěl také k rozvoji funkcionální analýzy (dualita, nekonečně rozměrná analýza, slabá a silná konvergence, lineární operátorové rovnice). Radon považoval míru za určitý fyzikální model rozložení hmoty nebo elektrického náboje v prostoru, byl první, kdo rozeznal význam pojmu míra pro teorii potenciálu.

V období 1912 – 1919 Radon aktivně pracoval ve variačním počtu, významné jsou jeho výsledky o okrajových úlohách z teorie potenciálu, stejně tak jako jeho výsledky z lineární funkcionální analýzy a z konvexity. Nelze opomenout Radonovu práci z roku 1917 věnovanou, v dnešní terminologii, Radonově transformaci zabývající se rekonstrukcí funkce dvou proměnných ze znalosti hodnot integrálů podél všech přímek v rovině. Jak je známo, tato práce je teoretickým základem počítačové tomografie.

Po roce 1919 vystřídal Radon mnoho univerzit: působil v Hamburku, v Greifswaldu, v Erlangenu a v Breslau. Během války krátce pobýval na soukromé univerzitě ve Wechselburgu, těsně po válce působil v Innsbrucku. V roce 1946 byl jmenován profesorem ve Vídni, kde zastával prestižní akademické funkce.

Dílo, které vytvořil, jej řadí mezi nejvýznamnější rakouské matematiky první poloviny 20. století. Podrobnější informace lze nalézt v [177] a také např. [80].

Guiseppe Vitali se narodil 26. srpna 1875 v Ravenně, zemřel 29. února 1932 v Bologni. V letech 1895 – 1896 studoval na univerzitě v Bologni, pak získal stipendium a pokračoval v letech 1897 – 1898 ve studiu na Scuola Normale Superiore v Pise. Tam ho ovlivnili především L. Bianchi (1856 – 1928) a U. Dini (1845 – 1918). První Vitaliho práce se týkaly analytických funkcí na Riemannových plochách a Abelových integrálů. V Pise se rozvinulo celoživotní osobní přátelství G. Vitaliho a G. Fubiniho. V letech 1899 – 1901 byl Vitali asistentem U. Diniho na Scuola Normale, kde se v roce 1902 habilitoval. Univerzitní dráha v tehdejší době nabízela pouze skrovné materiální zajištění, zatímco pozice gymnaziálního profesora poskytovala mnohem vyšší životní standard. Vitali působil v letech 1904 – 1922 jako středoškolský profesor v Janově. V roce 1923 získal místo na univerzitě v Modeně a následující rok přešel na univerzitu v Padově. V roce 1926 ho postihly vážné zdravotní problémy. V důsledku ochrnutí ruky nemohl sám psát, avšak jeho intelektuální schopnosti zůstaly zcela nedotčeny.

Nejvýznamnější přínos Vitaliho pro matematiku spadá do první dekády 20. století. Je třeba říci, že Vitali pracoval ve značné izolaci, takže se některé jeho výsledky překrývaly s výsledky francouzské školy matematické analýzy. Nicméně se Vitalimu dostalo zaslouženého uznání a jeho jméno je spojeno s celou řadou základních poznatků, které matematiku trvale obohatily. Připomeňme např. charakteristiku riemannovsky integrovatelných funkcí, vlastnosti spojitosti měřitelných funkcí, důkaz existence neměřitelné množiny, nutné a postačující podmínky pro záměnu integrálu a limity, charakteristiku neurčitého Lebesgueova integrálu a pojem absolutně spojité funkce; viz např. [189], [16].

Na závěr se ještě zmíníme o jednom výsledku, jehož autorem je Vitali, o tzv. *větě o pokrytí.* Tento výsledek otevřel rozsáhlou partii analýzy významnou pro diferencování funkcí a měr, viz např. [189]. Nejprve zavedeme tuto definici: Nechť A je podmnožina $\mathbb{R}$ a $\mathcal{I}$ je systém intervalů. Říkáme, že $\mathcal{I}$ je Vitaliho pokrytí množiny A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a pro každé $x \in A$ existuje interval $I \in \mathcal{I}$ takový, že $\lambda_1(I) \leq \varepsilon$ a $x \in I$. V zásadě Vitaliho věta o pokrytí říká, že z Vitaliho pokrytí lze vybrat *po dvou disjunktní* konečný systém intervalů, které *téměř* pokrývají množinu A. Podrobněji: *Nechť $A \subset \mathbb{R}$, $\lambda_1^*(A) < \infty$, a nechť $\mathcal{I}$ je Vitaliho pokrytí množiny A. Potom existují po dvou disjunktní intervaly $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I}$ takové, že*

$$\lambda_1^*(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j) < \varepsilon .$$

Pomocí této věty lze dokázat např. tento výsledek: *Monotónní funkce na* $[a, b]$ *je diferencovatelná ve skoro všech bodech intervalu* $[a, b]$; viz [108], kap. V, [16], str. 182.

Poznamenejme ještě, že Vitaliho jméno vystupuje u důležitých výsledků o kompaktních množinách holomorfních funkcí. Podrobnější informace o díle G. Vitaliho lze nalézt v [221].