Důkaz.

(a) Stačí položit $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ a užít σ-aditivitu.

(b) Protože B je sjednocením disjunktních množin A a $B \setminus A$, je podle (a)

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geqslant \mu(A)\,.$$

(c) Definujme $B_1 := A_1$, $B_j := A_j \setminus A_{j-1}$, $j \in \{2, 3, \ldots\}$. Potom je $B_j \in \mathcal{A}$, množiny B_j jsou po dvou disjunktní, $A_j := B_1 \cup \ldots \cup B_j$, $j \in \mathbb{N}$, a $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Protože

$$\mu(A_j) = \mu(B_1) + \ldots + \mu(B_j)$$

a

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)\,,$$

tvrzení plyne z definice součtu řady.

(d) Definujme $B_j := A_1 \setminus A_j$, $j \in \mathbb{N}$. Potom platí $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$, $\mu(B_j) = \mu(A_1) - \mu(A_j)$, $j \in \mathbb{N}$, a $A_1 \setminus A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Podle (c) je $\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) = \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

(e) Položme $B_1 := A_1$, $B_k := A_k \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1})$, $k > 1$. Potom jsou množiny $B_1, \ldots, B_k$ po dvou disjunktní a $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$. Tím je dokázáno, že

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\Big) = \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j)$$

a (3.1) plyne z věty 3.2(c). □

Věta 3.3 (Cantelliho lemma). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $\{A_j\}$ je posloupnost množin z $\mathcal{A}$ a*

$$A := \{x \in X :\ x \in A_j \text{ pro nekonečně } j \in \mathbb{N}\}\,.$$

Potom $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$. Jestliže $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$, potom $\mu(A) = 0$.

Důkaz. Vyjádření množiny A je zřejmé. Volme $\varepsilon > 0$ a najděme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) < \varepsilon$. Potom $\mu(A) \leq \mu\big(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\big) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $\mu(A) = 0$. □

Kapitola 4

Měřitelné funkce

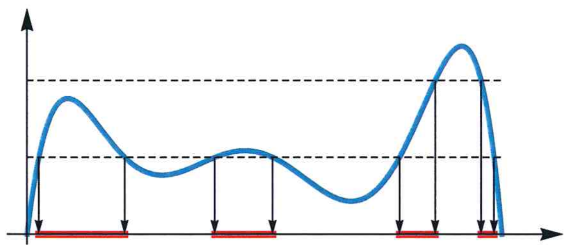
Nejprve naznačíme motivaci pojmu měřitelná funkce. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Víme, že Riemannův integrál je jistou limitou integrálních součtů typu

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})\,,$$

kde $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ a $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Zde samozřejmě $x_j - x_{j-1} = \lambda_1([x_{j-1}, x_j])$, vystačíme

ERRATA

strana 21



Obr. 4.1 Vzor při dělení oboru hodnot.

Důkaz.

(a) Stačí položit $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ a užít σ-aditivitu.

(b) Protože B je sjednocením disjunktních množin A a $B \setminus A$, je podle (a)

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geqslant \mu(A) .$$

(c) Definujme $B_1 := A_1$, $B_j := A_j \setminus A_{j-1}$, $j \in \{2, 3, \ldots\}$. Potom je $B_j \in \mathcal{A}$, množiny B_j jsou po dvou disjunktní, $A_j := B_1 \cup \ldots \cup B_j$, $j \in \mathbb{N}$, a $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Protože

$$\mu(A_j) = \mu(B_1) + \ldots + \mu(B_j)$$

a

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) ,$$

tvrzení plyne z definice součtu řady.

(d) Definujme $B_j := A_1 \setminus A_j$, $j \in \mathbb{N}$. Potom platí $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$, $\mu(B_j) = \mu(A_1) - \mu(A_j)$, $j \in \mathbb{N}$, a $A_1 \setminus A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Podle (c) je $\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) = \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

Kapitola 4

Měřitelné funkce

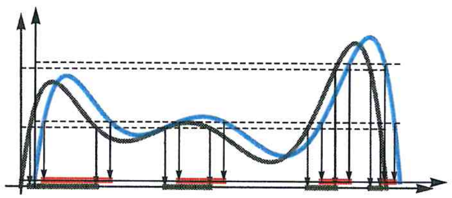
Nejprve naznačíme motivaci pojmu měřitelná funkce. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Víme, že Riemannův integrál je jistou limitou integrálních součtů typu

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) ,$$

kde $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ a $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Zde samozřejmě $x_j - x_{j-1} = \lambda_1([x_{j-1}, x_j])$, vystačíme tedy s mírou = délkou intervalů. Systém riemannovsky integrovatelných funkcí je dosti chudý. Je známo, že omezená funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná, právě když množina bodů nespojitosti funkce f má nulovou Lebesgueovu míru.

Původní Lebesgueovu myšlenku zavedení obecnějšího integrálu lze popsat takto: nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce, nechť $f([a, b]) \subset [c, d]$ a $\{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d\}$ je dělení intervalu $[c, d]$. Jeho norma je definována jako $\max\{y_j - y_{j-1} : j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Uvažujme součty typu

$$\sum_{j=1}^{n} y_{j-1} \lambda_1(f^{-1}([y_{j-1}, y_j])) .$$



Obr. 4.1 Vzor při dělení oboru hodnot.

Pokud norma dělení konverguje k nule, tyto součty se blíží k číslu, které se nazývá Lebesgueův integrál funkce f přes $[a,b]$. Aby takové součty měly smysl, musí ovšem být všechny množiny

$$f^{-1}([y_{j-1},y_j)) := \{x \in [a,b] : y_{j-1} \leqslant f(x) < y_j\}$$

měřitelné. Jak uvidíme, podstatná vlastnost, nazývaná měřitelnost funkce f, spočívá v požadavku, aby byla množina $\{x \in [a,b] : f(x) < y\}$ pro každé $y \in \mathbb{R}$ měřitelná.

Struktura měřitelných funkcí

Po tomto motivačním úvodu se budeme věnovat abstraktnímu přístupu. Kromě reálných funkcí budeme pracovat také s **numerickými funkcemi**, tj. s funkcemi s hodnotami v $\mathbb{R}^* := [-\infty, \infty]$.

Nechť $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $A \in \mathcal{A}$ a f je numerická funkce na A. Říkáme, že funkce f je **měřitelná**, jestliže pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina

$$f^{-1}([-\infty,a)) := \{x \in A : f(x) < a\}$$

měřitelná. V případě měřitelného prostoru $(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^d)$ (resp. $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d)$) mluvíme o **lebesgueovsky** (resp. **borelovsky**) **měřitelných funkcích**. Zdůrazněme, že definice měřitelnosti se netýká míry, vystupuje v ní pouze σ-algebra.

Pro stručnost píšeme místo $\{x \in A : f(x) < a\}$ pouze $\{f < a\}$. Význam zápisu $\{f \leqslant a\}$ apod. je zřejmý. Protože platí

$$\{f \leqslant a\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{f < a + (1/j)\}, \quad \{f < a\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{f \leqslant a - (1/j)\},$$

je funkce f měřitelná, právě když množina $\{f \leqslant a\}$ je měřitelná pro každé $a \in \mathbb{R}$. Zřejmě platí

$$\{f > a\} = \{f \leqslant a\}^c \quad \text{a} \quad \{f \geqslant a\} = \{f < a\}^c.$$

Tedy funkce f je měřitelná, právě když množina $\{f > a\}$ je měřitelná pro každé $a \in \mathbb{R}$. Podobně pro $\{f \geqslant a\}$. Odtud plyne, že měřitelnost je ekvivalentní podmínce, že $f^{-1}(J) \in \mathcal{A}$ pro každý interval J libovolného typu. Reálná funkce f je měřitelná, právě když $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ (neboť taková G je spočetným sjednocením otevřených intervalů a vzor sjednocení množin je roven sjednocení vzorů).

Pro měřitelný prostor $(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^d)$ speciálně platí: *Každá spojitá funkce na* $\mathbb{R}^d$ *je lebesgueovsky měřitelná.* Dále platí toto tvrzení (zde $g \circ f$ znamená **složení funkcí g a f**):

Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce a g je reálná spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Potom je funkce $g \circ f$ měřitelná.

Je-li totiž $a \in \mathbb{R}$, pak $G := g^{-1}((-\infty,a))$ je otevřená množina a

$$(g \circ f)^{-1}((-\infty,a)) = f^{-1}(G) \in \mathcal{A}.$$

Volba $g(x) := x^2$, $x \in \mathbb{R}$, dává, že f^2 je měřitelná funkce, pokud je funkce f měřitelná.

Pro $A \subset X$ definujeme

$$\chi_A := \begin{cases} 1 \text{ na } A, \\ 0 \text{ na } A^c, \end{cases}$$

(**charakteristická funkce množiny** A). Funkce χ_A je zřejmě měřitelná, právě když množina A je měřitelná.

Nechť f, g jsou reálné měřitelné funkce a $a \in \mathbb{R}$. Potom ($\mathbb{Q}$ je označení **množiny racionálních čísel**)

$$\{f+g > a\} = \{g > a - f\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > a - r\} \cap \{g > r\}),$$

tedy funkce $f+g$ je měřitelná. Dále

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

a tedy fg je měřitelná funkce.

Nechť f_j, $j \in \mathbb{N}$, jsou numerické funkce na množině $A \subset X$. Pro $x \in A$ se definuje

$$(\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j)(x) := \inf\{f_j(x) : j \in \mathbb{N}\},$$

$$(\liminf_{j\to\infty} f)(x) := \liminf_{j\to\infty} f_j(x).$$

Podobně pro $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ a $\limsup_{j\to\infty} f_j$.

Jestliže $A \in \mathcal{A}$ a funkce $f_j : A \to [-\infty,\infty]$ jsou měřitelné, pak

$$\{\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j < a\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{f_j < a\},$$

tudíž $\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j$ je měřitelná funkce. Podobně $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ je měřitelná funkce. Protože

$$\liminf_{j\to\infty} f_j = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{j\geqslant k} f_j\,,$$

je funkce $\liminf_{j\to\infty} f_j$ (a podobně funkce $\limsup_{j\to\infty} f_j$) měřitelná. Speciálně: $\lim_{j\to\infty} f_j$ je měřitelná, pokud existuje.

Jestliže f, g jsou měřitelné funkce, pak jsou funkce $\min(f,g)$, $\max(f,g)$ měřitelné. Speciálně funkce

$$f^+ := \max(f,0)\,, \qquad f^- := -\min(f,0)\,,$$

jsou měřitelné. Protože platí $|f| = f^+ + f^-$, je $|f|$ měřitelná funkce. Jelikož

$$\{f<g\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (\{f<r\}\cap\{g>r\})\,,$$

je $\{f<g\}$ měřitelná a podobně $\{f>g\}$ je měřitelná. Odtud plyne, že $\{f\neq g\} = \{f<g\}\cup\{f>g\}$ je měřitelná množina.

Pro vybudování integrálu hrají důležitou roli jednoduché funkce. Říkáme, že $f : X \to \mathbb{R}$ je **jednoduchá funkce**, jestliže obor hodnot $f(X)$ funkce f je konečná množina. Nechť $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ jsou všechny různé hodnoty funkce f a $A_j := f^{-1}(\{\alpha_j\})$, $j\in\{1,\dots,n\}$. Potom zřejmě

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,\chi_{A_j}\,.$$

Takovému vyjádření budeme říkat **reprezentace funkce** f.

Je-li $(X,\mathcal{A})$ měřitelný prostor, pak je zřejmě jednoduchá funkce f měřitelná, právě když $A_j\in\mathcal{A}$, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Věta 4.1 (struktura měřitelných funkcí). *Nechť $f : X\to[0,\infty]$ je měřitelná funkce. Potom existují měřitelné jednoduché funkce $s_1, s_2,\dots$ takové, že $0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\dots$ a*

$$\lim_{j\to\infty} s_j(x) = f(x)\,, \quad x\in X\,.$$

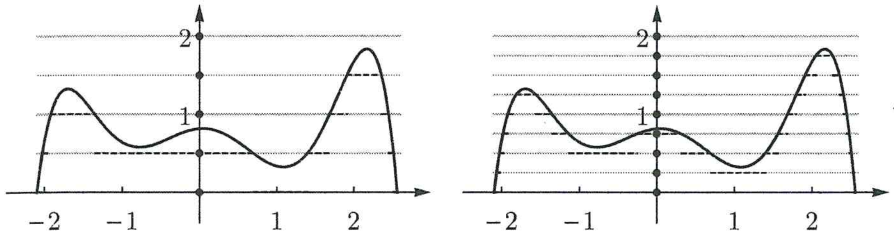
Důkaz. Pro $j\in\mathbb{N}$ definujme $A_j := \{f\geqslant j\}$ a pro $j\in\mathbb{N}$ a $k\in\{1,\dots,j2^j\}$ definujme

$$A_{j,k} := f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^j},\frac{k}{2^j}\right)\right)\,.$$

Potom jsou množiny $A_{j,k}$ měřitelné,

$$s_j := \sum_{k=1}^{j2^j} \frac{k-1}{2^j}\chi_{A_{j,k}} + j\chi_{A_j}\,, \quad j\in\mathbb{N}\,, \tag{4.1}$$

je nezáporná měřitelná jednoduchá funkce a $s_{j+1}\geqslant s_j$, $j\in\mathbb{N}$.



Obr. 4.2. Aproximace jednoduchými funkcemi.

Je-li $x\in X$ a $f(x)=\infty$, pak $x\in A_j$ pro všechna $j\in\mathbb{N}$, tedy $s_j(x)=j$. Proto $\lim_{j\to\infty} s_j(x) = f(x)$. Nechť $x\in X$ a $f(x)<\infty$. Zvolme $j\in\mathbb{N}$ takové, aby $f(x)<j$. Potom $x\notin A_j$ a existuje právě jedno $k\in\{1,\dots,j2^j\}$, pro něž $x\in A_{j,k}$. Platí

$$\frac{k-1}{2^j}\leqslant f(x) < \frac{k}{2^j}\,, \quad s_j(x) = \frac{k-1}{2^j}\,,$$

tudíž

$$0\leqslant f(x)-s_j(x) < 1/2^j\,.$$

Vidíme, že $\lim_{j\to\infty} s_j(x) = f(x)$. □

Všimněme si, že pokud je navíc funkce f omezená, konvergují funkce s_j k funkci f *stejnoměrně* na X.

Jegorovova věta a Luzinova věta

Na závěr této kapitoly dokážeme dva pozoruhodné výsledky. První z nich (v abstraktním kontextu) se týká vztahu bodové a stejnoměrné konvergence posloupnosti měřitelných funkcí, druhý (pro případ $\mathbb{R}^d$) ukazuje souvislost mezi měřitelnými a spojitými funkcemi.

Věta 4.2 (Jegorovova věta). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $\mu(X) < \infty$. Nechť $f_n : X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce a nechť pro každé $x \in X$ existuje konečná limita $f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x)$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) < \varepsilon$ a posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k f na množině A^c.*

Důkaz. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pro $j \in \mathbb{N}$ definujme

$$A_j(k) := \bigcup_{m=j}^{\infty} \{x : |f_m(x) - f(x)| > 1/k\}.$$

Potom je $\{A_j(k)\}_{j=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost měřitelných množin. Protože $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ pro každé $x \in X$, je

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j(k) = \emptyset.$$

Jelikož $\mu(X) < \infty$, platí (věta 3.2(d))

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j(k)) = 0.$$

Tudíž existuje $j(k) \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(A_{j(k)}(k)) < \varepsilon 2^{-k}$. Definujme

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{j(k)}(k).$$

Potom $\mu(A) < \varepsilon$ a pro každé $x \notin A$ a každé $j \geqslant j(k)$ je $|f_j(x) - f(x)| \leqslant 1/k$. Odtud vidíme, že posloupnost funkcí $\{f_j\}$ konverguje stejnoměrně k f na množině A^c. □

Věta 4.3 (Luzinova věta). *Nechť $A \in \mathcal{L}^d$, $\lambda_d(A) < \infty$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, přičemž $f = 0$ na A^c, a nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje spojitá funkce $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ taková, že*

$$\lambda_d(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že množina A je omezená, neboť A je sjednocením neklesající posloupnosti $\{A_j\}$ omezených měřitelných množin (tudíž $\lim_{j\to\infty} \lambda_d(A \setminus A_j) = 0$ podle věty 3.2 (d)).

Nechť nejprve pro f platí $0 \leqslant f < 1$ a nechť s_j, $j \in \mathbb{N}$, jsou funkce definované ve (4.1) pro případ $X = \mathbb{R}^d$ a $\mathcal{A} = \mathcal{L}^d$. Položme $t_1 := s_1$ a

dále $t_j := s_j - s_{j-1}$, $j > 1$. Z definice funkcí s_j je patrné, že existuje taková množina $T_j \in \mathcal{L}^d$, že $2^j t_j = \chi_{T_j}$. Podle poznámky 2.1 existují uzavřená množina F_j a otevřená množina G_j takové, že $F_j \subset T_j \subset G_j$ a $\lambda_d(G_j \setminus F_j) < 2^{-j}\varepsilon$, $j \in \mathbb{N}$. Dále víme (kap. 1), že existuje spojitá funkce h_j s těmito vlastnostmi: $0 \leqslant h_j \leqslant 1$, $h_j = 1$ na F_j a $h_j = 0$ na G_j^c. Definujme

$$g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} h_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Potom g je spojitá funkce (stejnoměrná konvergence). Protože na množině $(G_j \setminus F_j)^c$ je $2^{-j} h_j = t_j$ a $\lim_{j\to\infty} s_j = f$, platí

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} h_j(x) = g(x), \quad x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} (G_j \setminus F_j),$$

a je zřejmě

$$\lambda_d\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (G_j \setminus F_j)\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(G_j \setminus F_j) < \varepsilon;$$

za dodatečného předpokladu, že $0 \leqslant f < 1$, je tedy věta dokázána. Odtud (po přičtení konstanty a násobení reálným číslem) plyne tvrzení věty pro omezenou měřitelnou funkci f.

Jestliže je f měřitelná reálná funkce a $A_j := \{x : |f(x)| > j\}$, $j \in \mathbb{N}$, potom $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$, takže $\lim_{j\to\infty} \lambda_d(A_j) = 0$ (věta 3.2 (d)). Odtud plyne (4.2), neboť funkce $(1 - \chi_{A_j})f$ je omezená a $f = (1 - \chi_{A_j})f$ na A_j^c. □

Věta 4.4. *Nechť $A \in \mathcal{L}^d$, $\lambda_d(A) < \infty$ a nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce, pro niž $f = 0$ na A^c a $|f| \leqslant 1$. Potom existují posloupnost $\{g_j\}$ spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ a nulová množina N takové, že $|g_j| \leqslant 1$ a*

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} g_j(x), \quad x \in N^c. \tag{4.3}$$

Důkaz. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ existuje podle věty 4.3 spojitá funkce g_j taková, že pro $A_j := \{x : f(x) \neq g_j(x)\}$ platí $\lambda_d(A_j) \leqslant 1/2^j$ a $|g_j| \leqslant 1$ (jinak bychom funkci g_j nahradili funkcí $\min(\max(g_j, -1), 1)$). Protože $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(A_j) < \infty$, podle Cantelliho lemmatu (věta 3.3) existuje nulová množina N taková, že každý bod $x \in N^c$ je obsažen jen v konečně mnoha množinách A_j. Pro takové body x je rovnost $f(x) = g_j(x)$ splněna pro všechna dostatečně velká $j \in \mathbb{N}$, takže platí rovnost (4.3). □

Kapitola 5

Abstraktní integrál

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, s je nezáporná měřitelná jednoduchá funkce na X a nechť

$$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$$

je její reprezentace.

Pro $A \in \mathcal{A}$ definujeme **integrál funkce s vzhledem k míře μ přes množinu A** rovností

$$\int_A s \, d\mu := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \mu(A \cap A_j) .$$

Zde i v dalším textu užíváme konvenci $0 \cdot \infty = 0$.

Lemma 5.1. *Nechť s, t jsou nezáporné měřitelné jednoduché funkce. Potom*

(a) *zobrazení*

$$\nu : A \mapsto \int_A s \, d\mu , \; A \in \mathcal{A} ,$$

je míra,

(b) $\int_X (s + t) \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu$,

(c) *je-li $s \leqslant t$, je*

$$\int_X s \, d\mu \leqslant \int_X t \, d\mu .$$

Důkaz. Nechť

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \quad (\text{resp. } \sum_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{B_k})$$

je reprezentace funkce s (resp. t).

(a) Zřejmě platí $\nu(\emptyset) = 0$. Nechť $C_1, C_2, \ldots$ jsou po dvou disjunktní množiny z $\mathcal{A}$, $C := \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Ze σ-aditivity míry μ plyne

$$\nu(C) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap C) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap C_i) = $$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(C_i) .$$

(b) Označíme-li $C_{j,k} := A_j \cap B_k$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, platí

$$\int_{C_{j,k}} (s+t)\, d\mu = (\alpha_j + \beta_k)\, \mu(C_{j,k}) ,$$

$$\int_{C_{j,k}} s\, d\mu + \int_{C_{j,k}} t\, d\mu = \alpha_j\, \mu(C_{j,k}) + \beta_k\, \mu(C_{j,k}) ,$$

tedy

$$\int_{C_{j,k}} (s+t)\, d\mu = \int_{C_{j,k}} s\, d\mu + \int_{C_{j,k}} t\, d\mu .$$

Prostor X je sjednocením disjunktního systému všech množin $C_{j,k}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, tudíž tvrzení plyne z (a).

(c) Nechť $C_{j,k}$ mají stejný význam jako v (b). Je-li $s \leqslant t$, je $\alpha_j \leqslant \beta_k$ na $C_{j,k}$, tudíž

$$\int_{C_{j,k}} s\, d\mu \leqslant \int_{C_{j,k}} t\, d\mu , \quad j \in \{1, \ldots, n\},\ k \in \{1, \ldots, m\} .$$

Odtud výsledek plyne sečtením. □

Pro nezápornou měřitelnou numerickou funkci f na X definujeme **integrál funkce f vzhledem k μ přes množinu** $A \in \mathcal{A}$ rovností

$$\int_A f\, d\mu := \sup \Big\{ \int_A s\, d\mu \Big\} ,$$

kde supremum se bere přes všechny měřitelné jednoduché funkce s splňující nerovnosti $0 \leqslant s \leqslant f$. Zřejmě platí

$$\int_A f\, d\mu = \int_X \chi_A f\, d\mu .$$

Tvrzení 5.2. *Nechť $A, B \in \mathcal{A}$ a f, g jsou nezáporné měřitelné numerické funkce na X. Potom platí:*

(a) *je-li $A \subset B$, potom $\int_A f\, d\mu \leqslant \int_B f\, d\mu$,*

(b) *je-li $f \leqslant g$, potom*
$$\int_A f\, d\mu \leqslant \int_A g\, d\mu ,$$

(c) *pro $c \geqslant 0$ platí*
$$\int_A cf\, d\mu = c \int_A f\, d\mu ,$$

(d) *je-li $\mu(A) = 0$, potom*
$$\int_A f\, d\mu = 0 ,$$

(e) *(Čebyševova nerovnost) pro každé $a > 0$ je*
$$\mu(\{f \geqslant a\}) \leqslant \frac{1}{a} \int_X f\, d\mu .$$

Důkaz. Tvrzení (a) – (d) vyplývají bezprostředně z definice.
Nechť $a > 0$, $A := \{f \geqslant a\}$. Potom $a\chi_A \leqslant f$. Podle (b) a (c) je

$$a\, \mu(\{f \geqslant a\}) = \int_X a\chi_A\, d\mu \leqslant \int_X f\, d\mu . \qquad \square$$

Základní výsledky

Význam integrálu podle míry spočívá v eleganci, s jakou se vyrovnává s limitními přechody. V pozadí je σ-aditivita míry.

Věta 5.3 (Leviho věta o záměně integrálu a limity pro monotónní posloupnosti). *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných numerických funkcí na X a nechť*

(a) $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ *na* X,

(b) $\lim_{j \to \infty} f_j(x) =: f(x), \quad x \in X$.

Potom je funkce f měřitelná a

$$\lim_{j \to \infty} \int_X f_j\, d\mu = \int_X f\, d\mu .$$

Jinak řečeno,

$$\int_X \lim_{j\to\infty} f_j\,d\mu = \lim_{j\to\infty}\int_X f_j\,d\mu\,.$$

Důkaz. Zřejmě

$$\int_X f_j\,d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu\,,\quad j\in\mathbb{N}\,,$$

a posloupnost $\{\int_X f_j\,d\mu\}$ je neklesající, tudíž existuje její limita (vlastní nebo nevlastní), tedy

$$\lim_{j\to\infty}\int_X f_j\,d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu\,.$$

Dokážeme obrácenou nerovnost. Nechť $c\in(0,1)$, s je měřitelná jednoduchá funkce, $0\leqslant s\leqslant f$ a $A_j := \{f_j \geqslant cs\}$, $j\in\mathbb{N}$. Potom $A_1\subset A_2\subset\dots$, $X=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ a

$$\int_X f_j\,d\mu \geqslant \int_{A_j} f_j\,d\mu \geqslant c\int_{A_j} s\,d\mu\,,\quad j\in\mathbb{N}\,.$$

Podle lemmatu 5.1(a) a věty 3.2(c) je

$$\lim_{j\to\infty}\int_{A_j} s\,d\mu = \int_X s\,d\mu\,,$$

tudíž

$$\lim_{j\to\infty}\int_X f_j\,d\mu \geqslant c\int_X s\,d\mu\,.$$

Nerovnost platí pro každé $c\in(0,1)$, tudíž platí pro $c=1$. Z definice integrálu vyplývá

$$\lim_{j\to\infty}\int_X f_j\,d\mu \geqslant \int_X f\,d\mu\,.$$

□

Věta 5.4 (Fatouovo lemma). *Nechť $f_j : X\to[0,\infty]$, $j\in\mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce. Potom platí*

$$\int_X(\liminf_{j\to\infty} f_j)\,d\mu \leqslant \liminf_{j\to\infty}\int_X f_j\,d\mu\,.$$

Důkaz. Pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí $\inf_{j\geqslant k} f_j \leqslant f_k$, tudíž

$$\int_X(\inf_{j\geqslant k} f_j)\,d\mu \leqslant \int_X f_k\,d\mu\,.$$

Z Leviho věty 5.3 dostáváme

$$\int_X(\liminf_{j\to\infty} f_j)\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X(\inf_{j\geqslant k} f_j)\,d\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_X f_k\,d\mu\,.$$

□

Věta 5.5 (aditivita integrálu). *Nechť $f_j : X\to[0,\infty]$, $j\in\mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce,*

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x),\quad x\in X\,.$$

Potom

$$\int_X\sum_{j=1}^{\infty} f_j\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty}\int_X f_j\,d\mu\,.$$

Důkaz. Nejprve uvažujeme dvě funkce f_1, f_2. Podle věty 4.1 existují posloupnosti nezáporných měřitelných jednoduchých funkcí $\{s_j\}$, $\{t_j\}$ takové, že pro ně platí $s_{j+1}\geqslant s_j\geqslant 0$, $t_{j+1}\geqslant t_j\geqslant 0$, $j\in\mathbb{N}$, a $f_1=\lim_{j\to\infty} s_j$, $f_2=\lim_{j\to\infty} t_j$. Potom je $\{s_j+t_j\}$ neklesající posloupnost s limitou f_1+f_2, tedy podle Leviho věty 5.3 a lemmatu 5.1(b) je

$$\begin{aligned}\int_X(f_1+f_2)\,d\mu &= \lim_{j\to\infty}\int_X(s_j+t_j)\,d\mu = \lim_{j\to\infty}\int_X s_j\,d\mu + \lim_{j\to\infty}\int_X t_j\,d\mu = \\ &= \int_X f_1\,d\mu + \int_X f_2\,d\mu\,.\end{aligned}$$

Indukcí se dokáže, že

$$\int_X\Big(\sum_{j=1}^{n} f_j\Big)\,d\mu = \sum_{j=1}^{n}\int_X f_j\,d\mu\,,\quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Nyní aplikujeme Leviho větu 5.3. □

Věta 5.6. *Nechť f je nezáporná měřitelná numerická funkce na X. Definujme*

$$\nu : A\mapsto\int_A f\,d\mu\,,\quad A\in\mathcal{A}\,.$$

Potom ν je míra na $\mathcal{A}$ a pro každou nezápornou měřitelnou numerickou funkci g na X platí

$$\int_X g\,d\nu = \int_X gf\,d\mu\,. \tag{5.1}$$

Důkaz. Zřejmě $\nu(\emptyset)=0$. Dokážeme, že ν je σ-aditivní.

Nechť $A_1, A_2,\dots$ jsou po dvou disjunktní množiny z $\mathcal{A}$, $A:=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Potom

$$\chi_A f = \sum_{j=1}^{\infty}\chi_{A_j} f\,,$$

$$\nu(A) = \int_X \chi_A f\,d\mu\,,\quad \nu(A_j) = \int_X \chi_{A_j} f\,d\mu\,,\quad j\in\mathbb{N}\,.$$

Z věty 5.5 dostáváme

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) .$$

Dokázali jsme, že ν je míra.

Rovnost (5.1) platí, pokud $g = \chi_A$ pro $A \in \mathcal{A}$, proto platí pro každou nezápornou měřitelnou jednoduchou funkci. Z věty 4.1 a z Leviho věty 5.3 vyplývá, že (5.1) platí pro každou nezápornou měřitelnou funkci g. □

Zatím jsme integrál definovali pouze pro nezáporné měřitelné funkce. Nyní definici integrálu rozšíříme na obecnější funkce.

Nechť $L^1(\mu)$ značí systém všech reálných měřitelných funkcí f na X, pro něž $\int_X |f|\,d\mu < \infty$.

Prvky systému $L^1(\mu)$ se nazývají **lebesgueovsky integrovatelné funkce** (vzhledem k míře μ).

Pro $f \in L^1(\mu)$ a $A \in \mathcal{A}$ definujeme **integrál funkce** f **vzhledem k** μ **přes množinu** A rovností

$$\int_A f\,d\mu := \int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu .$$

Poznamenejme, že $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$, $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$, tedy integrály na pravé straně jsou konečné. Zřejmě pro měřitelnou funkci f platí $f \in L^1(\mu)$, právě když $|f| \in L^1(\mu)$. Dále platí

$$\left|\int_A f\,d\mu\right| \leqslant \int_A |\,f\,|\,d\mu .$$

Označme ještě $L^*(\mu)$ systém všech měřitelných funkcí, pro něž rozdíl

$$\int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu$$

má smysl. Potom definujeme

$$\int_X f\,d\mu := \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu \quad (\in [-\infty, \infty]) .$$

Jestliže $f \in L^1(\mu)$, říká se, že **integrál konverguje**. Pokud $f \in L^*(\mu)$, říká se, že **integrál existuje**.

Věta 5.7 (linearita integrálu). *Nechť f, $g \in L^1(\mu)$, a, $b \in \mathbb{R}$. Potom je také $af + bg \in L^1(\mu)$ a*

$$\int_X (af + bg)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu + b\int_X g\,d\mu .$$

Důkaz. První tvrzení plyne z nerovnosti

$$|\,a\,f + b\,g\,| \leqslant |\,a\,|\,|\,f\,| + |\,b\,|\,|\,g\,| .$$

Z definice integrálu vyplývá, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_X (af)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu .$$

Položme $h := f + g$. Potom $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ a

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+ ,$$

tedy podle věty 5.5

$$\int_X h^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu + \int_X g^-\,d\mu = \int_X h^-\,d\mu + \int_X f^+\,d\mu + \int_X g^+\,d\mu .$$

Odtud dostáváme

$$\int_X (f^+ - f^- + g^+ - g^-)\,d\mu = \int_X (f^+ - f^-)\,d\mu + \int_X (g^+ - g^-)\,d\mu ,$$

$$\int_X (f + g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu .$$ □

Věta 5.8 (Lebesgueova věta o záměně integrálu a limity pro majorizovanou posloupnost). *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných reálných funkcí taková, že pro každé $x \in X$ existuje limita*

$$f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x) .$$

Existuje-li funkce $g \in L^1(\mu)$ taková, že pro všechna $x \in X$ a všechna $j \in \mathbb{N}$ platí

$$|\,f_j(x)\,| \leqslant g(x) , \tag{5.2}$$

potom $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{j\to\infty} \int_X |\,f_j - f\,|\,d\mu = 0 \tag{5.3}$$

a

$$\lim_{j\to\infty} \int_X f_j\,d\mu = \int_X f\,d\mu . \tag{5.4}$$

Jinak řečeno,

$$\int_X \lim_{j\to\infty} f_j\,d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X f_j\,d\mu .$$

Důkaz. Funkce f je měřitelná a $|f| \leqslant g$. Proto $f \in L^1(\mu)$. Zřejmě platí $|f_j - f| \leqslant |f_j| + |f| \leqslant 2g$, $j \in \mathbb{N}$. Budeme aplikovat Fatouovo lemma (věta 5.4) na nezáporné měřitelné funkce $2g - |f_j - f|$:

$$\begin{aligned}\int_X (2g)\,d\mu &\leqslant \liminf_{j\to\infty} \int_X (2g - |f_j - f|)\,d\mu = \\ &= \int_X (2g)\,d\mu + \liminf_{j\to\infty} \int_X (-|f_j - f|)\,d\mu = \\ &= \int_X (2g)\,d\mu - \limsup_{j\to\infty} \int_X |f_j - f|\,d\mu\,.\end{aligned}$$

Protože $\int_X (2g)\,d\mu < \infty$, odečtením dostaneme

$$\limsup_{j\to\infty} \int_X |f_j - f|\,d\mu \leqslant 0\,.$$

Odtud plyne (5.3). Protože

$$\left|\int_X f_j\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| \leqslant \int_X |f_j - f|\,d\mu\,,$$

platí (5.4). □

V obvyklé terminologii se funkce g z (5.2) nazývá **integrovatelná majoranta.**

Integrály závislé na parametru

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.

Věta 5.9 (o spojité závislosti na parametru). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$, $\alpha_0 \in J$ a nechť $f : J \times X \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že*

(a) *pro každé $\alpha \in J$ je funkce $f_\alpha : x \mapsto f(\alpha, x)$ měřitelná,*

(b) *pro každé $x \in X$ je funkce $\alpha \mapsto f(\alpha, x)$ spojitá v bodě α_0 (vzhledem k množině J),*

(c) *existuje funkce $g \in L^1(\mu)$ taková, že pro všechna $x \in X$ a všechna $\alpha \in J$ platí*

$$|f(\alpha, x)| \leqslant g(x)\,.$$

Potom je funkce

$$F : \alpha \mapsto \int_X f_\alpha\,d\mu$$

spojitá v bodě α_0.

Zpravidla se píše

$$F(\alpha) = \int_X f(\alpha, x)\,d\mu(x), \qquad \alpha \in J\,.$$

Důkaz. Nechť $\alpha_j \in J$, $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = \alpha_0$. Máme dokázat, že platí $\lim_{j\to\infty} F(\alpha_j) = F(\alpha_0)$. Protože je $|f(\alpha, x)| \leqslant g(x)$ pro všechna $x \in X$, je funkce $f_\alpha \in L^1(\mu)$, tudíž $F(\alpha)$ je reálné číslo.

Pro $j \in \mathbb{N}$ definujme

$$g_j : x \mapsto f(\alpha_j, x), \qquad x \in X\,.$$

Potom g_j je měřitelná funkce, $|g_j| \leqslant g$ a pro každé $x \in X$ platí

$$\lim_{j\to\infty} g_j(x) = f(\alpha_0, x)\,.$$

Podle Lebesgueovy věty 5.8 je

$$\lim_{j\to\infty} \int_X g_j\,d\mu = \int_X f(\alpha_0, x)\,d\mu(x)\,,$$

tedy

$$\lim_{j\to\infty} F(\alpha_j) = F(\alpha_0)\,.$$

□

Věta 5.10 (o derivaci podle parametru). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f : J \times X \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že*

(a) *pro každé $\alpha \in J$ je funkce $f_\alpha : x \mapsto f(\alpha, x)$ měřitelná,*

(b) *pro každé $x \in X$ má funkce $\alpha \mapsto f(\alpha, x)$ vlastní derivaci v každém bodě z J; označíme ji*

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\,,$$

(c) *existuje funkce $g \in L^1(\mu)$ taková, že pro každé $x \in X$ a každé $\alpha \in J$ platí*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\right| \leqslant g(x)\,,$$

(d) *existuje $\alpha_0 \in J$ takové, že $f_{\alpha_0} \in L^1(\mu)$.*

Potom je $f_\alpha \in L^1(\mu)$ pro každé $\alpha \in J$ a pro

$$F(\alpha) := \int_X f_\alpha \, d\mu\,, \qquad \alpha \in J\,,$$

platí

$$F'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, d\mu\,(x), \qquad \alpha \in J\,.$$

Důkaz. Nechť $x \in X$. Pro každé $\alpha \in J$ existuje podle věty o střední hodnotě bod ξ_x ležící mezi body α a α_0 takový, že

$$\begin{aligned} |\, f(\alpha, x) - f(\alpha_0, x)\,| &= \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\xi_x, x)(\alpha - \alpha_0) \right| \leqslant \\ &\leqslant g(x)\,|\,\alpha - \alpha_0\,|\,. \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned} |\, f_\alpha(x)\,| = |\, f(\alpha, x)\,| &\leqslant |\, f(\alpha_0, x)\,| + |\, f(\alpha, x) - f(\alpha_0, x)\,| \leqslant \\ &\leqslant |\, f_{\alpha_0}(x)\,| + g(x)\,|\,\alpha - \alpha_0\,|\,, \end{aligned}$$

platí $f_\alpha \in L^1(\mu)$, $\alpha \in J$.

Nechť $\alpha \in J$, $\alpha_j \in J$, $\alpha_j \neq \alpha$, $j \in \mathbb{N}$, a nechť $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = \alpha$. Potom

$$\left| \frac{f(\alpha_j, x) - f(\alpha, x)}{\alpha_j - \alpha} \right| \leqslant g(x), \qquad x \in X\,,$$

a podle Lebesgueovy věty 5.8 platí

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \frac{F(\alpha_j) - F(\alpha)}{\alpha_j - \alpha} &= \int_X \lim_{j\to\infty} \frac{f(\alpha_j, x) - f(\alpha, x)}{\alpha_j - \alpha}\, d\mu\,(x) = \\ &= \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, d\mu\,(x)\,. \end{aligned}$$

Tedy $F'(\alpha)$ se rovná poslednímu integrálu. □

Pojem skoro všude

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. V teorii integrálu hrají množiny míry nula roli zanedbatelných množin. Nechť P je vlastnost, kterou bod x může, ale nemusí mít. Např. „$f(x) > 0$“ nebo „$\{f_n(x)\}$ je konvergentní“. Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak výrok „*P platí skoro všude na A*“ (zkráceně s.v.) znamená, že

existuje množina $N \in \mathcal{A}$, $N \subset A$ a $\mu(N) = 0$, přičemž P platí pro každé $x \in A \setminus N$.

Jsou-li f, g měřitelné funkce a

$$\mu(\{f \neq g\}) = 0\,,$$

říkáme, že $f = g$ **skoro všude**, podrobněji μ-skoro všude; píšeme $f \sim g$. Vztah „$\sim$“ je ekvivalence. Reflexivita a symetrie jsou zřejmé. Jestliže $f \sim g$ a $g \sim h$, potom $\{f \neq h\} \subset \{f \neq g\} \cup \{g \neq h\}$. Protože jsou tyto množiny měřitelné (viz kap. 4) a sjednocení nulových množin je nulová množina, platí $f \sim h$. Pokud $A \in \mathcal{A}$, $f \in L^1(\mu)$ a $f \sim g$, potom $g \in L^1(\mu)$ a

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu\,.$$

Z hlediska teorie integrálu se tedy jeví jako účelné netrvat například na tom, aby funkce byly definovány všude. Budeme modifikovat definici měřitelnosti. Funkci f definovanou na množině $A \in \mathcal{A}$ nazveme **měřitelnou na** X, jestliže $\mu(A^c) = 0$ a množina $\{f > a\} \cap A$ je měřitelná pro všechna $a \in \mathbb{R}$. Jestliže je f měřitelná podle „nové“ definice a položíme-li $f(x) = 0$ pro $x \in A^c$, dostaneme funkci měřitelnou podle „staré“ definice. Zdůrazněme, že z informace založené na integrálu můžeme očekávat pouze výrok „skoro všude“, nikoli „všude“.

Je užitečné si uvědomit, že v Leviho větě, Lebesgueově větě a Fatouově lemmatu lze měřitelnost chápat ve smyslu „nové definice“ a konvergenci požadovat pouze s.v.

Pojem skoro všude figuruje v následujících tvrzeních.

Věta 5.11.

(a) *Nechť $f : X \to [0, \infty]$ je měřitelná funkce, $A \in \mathcal{A}$ a $\int_A f \, d\mu = 0$. Potom $f = 0$ s.v. na A.*

(b) *Nechť $f \in L^1(\mu)$ a $\int_A f \, d\mu = 0$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. Potom $f = 0$ s.v. na X.*

(c) *Nechť $f : X \to [0, \infty]$ je měřitelná funkce na X a nechť $\int_X f \, d\mu < \infty$. Potom $f < \infty$ s.v.*

Důkaz.

(a) Nechť $A_j := A \cap \{f \geqslant 1/j\}$. Podle Čebyševovy nerovnosti (tvrzení 5.2(e) aplikujeme na A místo na X) je

$$\mu(A_j) \leqslant j \int_A f \, d\mu = 0 \,,$$

tedy $\mu(A_j) = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Zřejmě platí, že $A \cap \{f > 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, což je nulová množina.

(b) Nechť $A := \{f \geqslant 0\}$. Potom $f = f^+$ na A, $f^+ = 0$ na $X \setminus A$ a $\int_A f^+ \, d\mu = \int_A f \, d\mu = 0$, tedy podle (a) je $f^+ = 0$ s.v. na A a tudíž na X. Je-li nyní $A := \{f \leqslant 0\}$, platí $f^- = -f$ na A, $f^- = 0$ na $X \setminus A$ a $\int_A f^- \, d\mu = -\int_A f \, d\mu = 0$, takže opět podle (a) je $f^- = 0$ s.v. na X. Vidíme, že $f = f^+ - f^- = 0$ s.v. na X, neboť sjednocení dvou nulových množin je nulová množina.

(c) Nechť $A_j := \{f \geqslant j\}$, $j \in \mathbb{N}$. Zřejmě $\{f < \infty\}^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$. Podle Čebyševovy nerovnosti (tvrzení 5.2(e)) platí

$$\mu(A_j) \leqslant \frac{1}{j} \int_X f \, d\mu \,, \quad j \in \mathbb{N} \,.$$

Podle věty 3.2(d) je

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j) = 0 \,.$$

□

Následující věta je ilustrací pojmu skoro všude.

Věta 5.12 (o záměně sumy a integrálu). *Nechť f_j, $j \in \mathbb{N}$, je měřitelná numerická funkce definovaná skoro všude na X, a nechť*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_X |\, f_j \,| < \infty \,.$$

Potom řada

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) =: f(x) \tag{5.5}$$

absolutně konverguje pro skoro všechna $x \in X$, $f \in L^1(\mu)$ a platí

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j \, d\mu \,.$$

Jinak řečeno,

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j \, d\mu \,.$$

Znovu zdůrazněme, že dostáváme informaci o konvergenci řady funkcí $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ pouze pro všechna $x \in X$ s výjimkou jisté množiny míry nula, žádné dodatečné informace o tom, kde se výjimečná množina nachází, nemáme (a nemůžeme mít).

Důkaz. Nechť funkce f_j je definována na množině A_j, takže $\mu(A_j^c) = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Položme $A := \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$. Potom $\mu(A^c) = 0$ a pro funkci

$$g := \sum_{j=1}^{\infty} |\, f_j \,|$$

definovanou na A platí podle věty 5.5 a podle předpokladu $\int_A g \, d\mu < \infty$. Z věty 5.11(c) plyne, že pro

$$B := \{x \in A : g < \infty\}$$

je $\mu(B^c) = 0$. Tudíž řada v (5.5) absolutně konverguje na B. Definujme

$$g_k(x) := \sum_{j=1}^{k} f_j(x) \,, \quad f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x), \quad x \in B \,.$$

Potom $|\, g_k(x) \,| \leqslant g(x)$, $x \in B$, $k \in \mathbb{N}$. Podle Lebesgueovy věty (věta 5.8) je

$$\int_B f \, d\mu = \int_B \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, d\mu = \int_B \Big(\lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} f_j \Big) \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_B \sum_{j=1}^{k} f_j \, d\mu =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \int_B f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_B f_j \, d\mu \,.$$

Protože $\mu(B^c) = 0$, integrály přes B se rovnají integrálům přes X. □

Prostory L^p

Pro aplikaci teorie Lebesgueova integrálu na Fourierovy řady je vhodné rozšířit definici integrálu na komplexní funkce.

Nechť X je měřitelný prostor, $f : X \to \mathbb{C}$ a $f = u + iv$, u, v jsou reálné funkce.

Říkáme, že funkce f je **měřitelná**, jestliže funkce u a v jsou **měřitelné**. Zřejmě součet a součin měřitelných komplexních funkcí jsou měřitelné funkce.

Je-li f měřitelná funkce, je $|f|$ měřitelná funkce, neboť

$$|f| = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nechť μ je míra na X. Říkáme, že $f \in L^1(\mu)$, jestliže f je měřitelná komplexní funkce a

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty.$$

Pro $f \in L^1(\mu)$, $f = u + iv$, u, v reálné funkce, definujeme

$$\int_X f\, d\mu := \int_X u\, d\mu + i \int_X v\, d\mu.$$

Protože $|u| \leqslant |f|$, $|v| \leqslant f$ a $|f| \leqslant |u|+|v|$, zřejmě platí $f \in L^1(\mu)$, právě když $u \in L^1(\mu)$ a $v \in L^1(\mu)$. Vlastnosti integrálu pro komplexní funkce se snadno odvodí z vlastností pro reálné funkce. Za důkaz stojí pouze nerovnost

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leqslant \int_X |f|\, d\mu, \quad f \in L^1(\mu).$$

Nechť $f \in L^1(\mu)$. Existuje $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $|\alpha| = 1$ a

$$\alpha \int_X f\, d\mu \geqslant 0.$$

Definujme $g := \alpha f = u + iv$, u, v reálné funkce. Potom

$$\begin{aligned} \left| \int_X f\, d\mu \right| &= \alpha \int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu = \operatorname{Re} \int_X g\, d\mu \\ &= \int_X \operatorname{Re} g\, d\mu = \int_X u\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu, \end{aligned}$$

neboť integrál za druhou rovností je reálné číslo.

Pro $1 \leq p < \infty$ a měřitelnou komplexní funkci f na X označme

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\, d\mu \right)^{1/p}.$$

a označme $L^p(\mu)$ systém všech f, pro něž $\|f\|_p < \infty$. Zřejmě platí $\|f\|_p = 0$, právě když $f = 0$ s.v. (věta 5.11(a)) a

$$\|cf\|_p = |c|\, \|f\|_p, \quad c \in \mathbb{C}. \tag{5.6}$$

Pro f, $g \in L^p(\mu)$ je

$$|f + g|^p \leqslant (2 \max(|f|, |g|))^p \leqslant 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right), \tag{5.7}$$

tudíž $L^p(\mu)$ je lineární prostor. Ukážeme, že platí trojúhelníková nerovnost

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Nejprve dokážeme následující nerovnost.

Lemma 5.13. *Pro $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ a $0 < \lambda < 1$ platí*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leqslant \lambda a + (1 - \lambda) b. \tag{5.8}$$

Důkaz. Nerovnost je zřejmá pro $b = 0$. Pro $b \neq 0$ definujme $c := a/b$. Máme dokázat, že $c^\lambda \leqslant \lambda c + 1 - \lambda$. Funkce $t \mapsto t^\lambda - \lambda t$, $t > 0$, je rostoucí na $(0, 1)$ a klesající na $(1, \infty)$, takže maximální hodnotu (rovnou $1 - \lambda$) nabývá v bodě 1. □

Jsou-li p a q kladná reálná čísla, pro něž $p + q = pq$, neboli

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{5.9}$$

pak p, q nazýváme **sdružené exponenty**. Z (5.9) je zřejmé, že $p > 1$, $q > 1$. Pro $p = 2$ je $q = 2$ a tyto sdružené exponenty jsou obzvláště důležité.

Věta 5.14 (Hölderova nerovnost). *Nechť p a q jsou sdružené exponenty a f, g jsou měřitelné komplexní funkce na X. Potom*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\, \|g\|_q. \tag{5.10}$$

Důkaz. Nechť nejprve $\|f\|_p = 1$ a $\|g\|_q = 1$. Nerovnost (5.8) dává pro $a := |f(x)|^p$, $b := |g(x)|^q$ a $\lambda = 1/p$ (pro každé $x \in X$, v němž jsou hodnoty $f(x)$, $g(x)$ definovány)

$$|f(x)\, g(x)| \leqslant \frac{1}{p}\, |f(x)|^p + \frac{1}{q}\, |g(x)|^q,$$

takže

$$\int_X |f\, g|\, d\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{5.11}$$

Nerovnost (5.10) je triviálně splněna, pokud $\|f\|_p = 0$ nebo $\|g\|_q = 0$, neboť v takovém případě $f = 0$ s.v. nebo $g = 0$ s.v. Také případ $\|f\|_p = \infty$ nebo $\|g\|_q = \infty$ je zřejmý. V ostatních případech aplikujeme (5.11) na $f/\|f\|_p$ místo f a na $g/\|g\|_q$ místo g a dostáváme tak (5.10). □

Věta 5.15 (Minkowského nerovnost). *Nechť $p \geqslant 1$ a f, g jsou měřitelné komplexní funkce. Potom platí*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p\,. \tag{5.12}$$

Důkaz. Pro $p=1$ je nerovnost zřejmá. Nechť $p>1$. Platí

$$|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}\,.$$

Z Hölderovy nerovnosti dostáváme (p a q jsou sdružené exponenty)

$$\begin{aligned}\int_X |f+g|^p\,d\mu &\leqslant \|f\|_p\,\|\,|f+g|^{p-1}\,\|_q + \|g\|_p\,\|\,|f+g|^{p-1}\,\|_q = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\Big(\int_X |\,f+g\,|^p\,d\mu\Big)^{1/q},\end{aligned} \tag{5.13}$$

neboť $(p-1)q=p$. Jestliže $\|f\|_p+\|g\|_p=\infty$ nebo $\|f\|_p+\|g\|_p=0$, nerovnost (5.12) zřejmě platí. Jestliže $\|f\|_p+\|g\|_p<\infty$, pak $\|f\|_p^p+\|g\|_p^p<\infty$ a tedy podle (5.7) je

$$0 < \int_X |\,f+g\,|^p\,d\mu < \infty\,. \tag{5.14}$$

Můžeme tedy nerovnost (5.13) vydělit integrálem z (5.14). Dostáváme tak (5.12), neboť $1-1/q=1/p$. □

Pro funkci $f \mapsto \|f\|_p$ platí (5.6) a (5.12), obecně však není pravda, že $\|f\|_p=0$ implikuje $f=0$ všude. Podle věty 5.11(a) je $\|f\|_p=0$, právě když $f=0$ s.v.

Budeme stejně jako dříve psát $f \sim g$, pokud $\|f-g\|_p=0$. Tato relace je ekvivalence v $L^p(\mu)$, která definuje rozklad $L^p(\mu)$ na třídy ekvivalence. Každá třída ekvivalence obsahuje všechny funkce, které jsou ekvivalentní nějaké zvolené funkci.

Nechť $\widetilde{f}$ je třída ekvivalence a f_1, $f_2 \in \widetilde{f}$. Potom $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p$. Můžeme tedy definovat $\|\widetilde{f}\|_p := \|f_1\|_p$. Množina tříd ekvivalence je lineární prostor, definujeme-li $\widetilde{f}+\widetilde{g}$ přirozeným způsobem: zvolíme $f \in \widetilde{f}$, $g \in \widetilde{g}$ a $\widetilde{f}+\widetilde{g}$ je, podle definice, třída ekvivalence obsahující $f+g$; podobně pro násobek $c\widetilde{f}$, $c \in \mathbb{C}$. Je zřejmé, že takto definovaný součet a násobek nezávisí na konkrétní volbě $f \in \widetilde{f}$, $g \in \widetilde{g}$.

Přechod od funkcí k třídám ekvivalence nám umožňuje uvažovat $L^p(\mu)$ jako normovaný prostor s normou $\widetilde{f} \mapsto \|\widetilde{f}\|_p$. Striktně vzato tedy prvky normovaného lineárního prostoru $L^p(\mu)$ nejsou funkce, nýbrž třídy ekvivalentních funkcí. V analýze je zvykem takové rozlišení mlčky akceptovat a mluvit o $L^p(\mu)$ jako o prostoru funkcí.

Podobně při definici $d(\widetilde{f},\widetilde{g}) := \|f-g\|_p$, $f \in \widetilde{f}$, $g \in \widetilde{g}$ je $(L^p(\mu), d)$ metrický prostor.

Mezi prostory $L^p(\mu)$ zaujímá výjimečné postavení prostor $L^2(\mu)$ tím, že v něm lze zavést skalární součin.

Definujme

$$\langle f,g\rangle := \int_X f\bar{g}\,d\mu\,, \qquad f,g \in L^2(\mu)\,.$$

Potom zřejmě pro každé $f,g,h \in L^2(\mu)$ a $c \in \mathbb{C}$ platí

(a) $\langle f,f\rangle \geqslant 0$ a $\langle f,f\rangle = 0$, právě když f je nulový prvek prostoru $L^2(\mu)$,

(b) $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$,

(c) $\langle f+h,g\rangle = \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle$,

(d) $\langle cf,g\rangle = c\langle f,g\rangle$.

Prostor $L^2(\mu)$ je tedy **prostor se skalárním součinem** a je zřejmě $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$, $f \in L^2(\mu)$.

Nechť f_j, $j \in \mathbb{N}$, jsou funkce z $L^p(\mu)$. Říkáme, že posloupnost $\{f_j\}$ je **cauchyovská** posloupnost v $L^p(\mu)$, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\|f_j - f_k\|_p \leqslant \varepsilon$ pro všechna j, $k \in \mathbb{N}$, $j \geqslant m$, $k \geqslant m$.

Věta 5.16. *Nechť $p \geqslant 1$ a nechť $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost v $L^p(\mu)$. Potom $\{f_j\}$ obsahuje vybranou posloupnost, která konverguje ve skoro všech bodech.*

Důkaz. Z definice cauchyovské posloupnosti vyplývá, že existují přirozená čísla $j_1 < j_2 < \dots$ taková, že

$$\|f_{j_{k+1}} - f_{j_k}\|_p \leqslant 1/2^k\,. \tag{5.15}$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$g_n := \sum_{k=1}^{n} |\,f_{j_{k+1}} - f_{j_k}\,|, \qquad g := \sum_{k=1}^{\infty} |\,f_{j_{k+1}} - f_{j_k}\,|\,.$$

Z (5.15) a Minkowského nerovnosti je $\|g_n\|_p \leqslant 1$, a protože skoro všude platí $g^p = \lim_{n\to\infty} g_n^p$, dostáváme podle Leviho věty (věta 5.4) nerovnost $\|g\|_p \leqslant 1$. Odtud podle věty 5.11(c) plyne, že $g<\infty$ s.v. Vidíme, že řada

$$f_{j_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x)\big) \tag{5.16}$$

konverguje absolutně pro s.v. $x \in X$. Jestliže řada (5.16) v bodě x konverguje, označíme $f(x)$ její součet. Jelikož pro $k \in \mathbb{N}$ je

$$f_{j_1} + \sum_{k=1}^{n-1} (f_{j_{k+1}} - f_{j_k}) = f_{j_n} \text{ s.v.},$$

platí

$$f = \lim_{n\to\infty} f_{j_n} \quad \text{s.v.}\,. \tag{5.17}$$

□

Jedním z nejvýznamnějších výsledků Lebesgueovy teorie je úplnost metrického prostoru $L^p(\mu)$.

Věta 5.17. *Nechť $p \geqslant 1$ a $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost v $L^p(\mu)$. Potom existuje funkce $f \in L^p(\mu)$ taková, že*

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_p = 0\,. \tag{5.18}$$

Jinak řečeno: každá cauchyovská posloupnost v $L^p(\mu)$ je konvergentní.

Důkaz. Podle věty 5.16 existuje vybraná posloupnost $\{f_{j_n}\}$, která konverguje skoro všude k funkci f (viz (5.17)). Dokážeme, že $f \in L^p(\mu)$ a platí (5.18). Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť pro $m \in \mathbb{N}$ a všechna $j, k \in \mathbb{N}$, $j \geqslant m$, $k \geqslant m$ platí $\|f_j - f_k\|_p \leqslant \varepsilon$. Je-li $j \geqslant m$, z Fatouova lemmatu (věta 5.4) dostáváme

$$\int_X |f - f_j|^p \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_{j_n} - f_j|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon^p\,. \tag{5.19}$$

Odtud plyne $f - f_j \in L^p(\mu)$, tudíž $f \in L^p(\mu)$, neboť $f = (f - f_j) + f_j$. Z (5.19) vidíme, že platí (5.18). □

Věta 5.17 tedy říká, že $L^p(\mu)$ je úplný normovaný lineární prostor, tedy **Banachův prostor**, a $L^2(\mu)$ je úplný prostor se skalárním součinem, neboli $L^2(\mu)$ je **Hilbertův prostor**.

Ortonormální posloupnosti v L^2

Nechť X je prostor s mírou μ a nechť $\{\varphi_j\}$ je posloupnost měřitelných komplexních funkcí na X. Říkáme, že $\{\varphi_j\}$ je **ortonormální posloupnost**, jestliže

$$\int_X \varphi_j \overline{\varphi_l} \, d\mu = \begin{cases} 1, & j = l\,, \\ 0, & j \neq l\,. \end{cases}$$

Zřejmě $\varphi_j \in L^2(\mu)$, a tudíž

$$\langle \varphi_j, \varphi_l \rangle = \begin{cases} 1, & j = l\,, \\ 0, & j \neq l\,. \end{cases}$$

Pro $f \in L^2(\mu)$ definujeme j-tý **Fourierův koeficient**

$$\widehat{f}(j) := \langle f, \varphi_j \rangle = \int_X f \overline{\varphi_j} \, d\mu\,, \quad j \in \mathbb{N}\,.$$

Řada

$$\sum_{j=1}^{\infty} \widehat{f}(j)\, \varphi_j$$

se nazývá **Fourierova řada** funkce f vzhledem k $\{\varphi_j\}$.

Příklad 5.18. Pro $X = (-\pi, \pi)$ a $\mu = \lambda/2\pi$ (λ je restrikce Lebesgueovy míry na $(-\pi, \pi)$) tvoří funkce (viz příklad 6.5)

$$\{1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, \dots\}, \quad x \in (-\pi, \pi)\,, \tag{5.20}$$

ortonormální posloupnost v $L^2(\lambda/2\pi)$, které se obvykle říká **trigonometrický systém**; viz kap. 6.

Funkce

$$\left\{1, \sqrt{2}\cos x, \sqrt{2}\sin x, \sqrt{2}\cos 2x, \sqrt{2}\sin 2x, \dots\right\}, \quad x \in (-\pi, \pi)\,,$$

tvoří ortonormální posloupnost v $L^2(\lambda/2\pi)$.

Věta 5.19. *Nechť $\{\varphi_j\}$ je ortonormální posloupnost v $L^2(\mu)$, $f \in L^2(\mu)$ a*

$$s_k := \sum_{j=1}^{k} \widehat{f}(j)\, \varphi_j\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Nechť $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ a

$$t_k := \sum_{j=1}^{k} c_j\, \varphi_j\,. \tag{5.21}$$

Potom

$$\int_X |f - s_k|^2 \, d\mu \leqslant \int_X |f - t_k|^2 \, d\mu\,,$$

přičemž rovnost platí, právě když $c_j = \widehat{f}(j)$, $j \in \{1, \dots, k\}$.

Jinak řečeno, mezi všemi funkcemi t_k ve tvaru (5.21), funkce s_k poskytuje nejlepší aproximaci funkce f v normě prostoru $L^2(\mu)$.

Důkaz. Platí (píšeme jen $\sum$ pro součet od 1 do k)

$$\langle f, t_k\rangle = \left\langle f, \sum c_j\varphi_j\right\rangle = \sum \widehat{f}(j)\overline{c_j}\,,$$

$$\|t_k\|_2^2 = \left\langle \sum c_j\varphi_j, \sum c_l\varphi_l\right\rangle = \sum |c_j|^2\,.$$

Odtud

$$\begin{aligned}\|f-t_k\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \langle f, t_k\rangle - \langle t_k, f\rangle + \|t_k\|_2^2 = \\ &= \|f\|_2^2 - \sum \widehat{f}(j)\,\overline{c_j} - \sum \overline{\widehat{f}(j)}\,c_j + \sum |c_j|^2 = \\ &= \|f\|_2^2 - \sum |\widehat{f}(j)|^2 + \sum |c_j - \widehat{f}(j)|^2\,.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Speciálně pro $c_j = \widehat{f}(j)$ dostáváme $\|f - s_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum |\widehat{f}(j)|^2$, a tedy platí nerovnost $\|f - t_k\|_2^2 \geqslant \|f - s_k\|_2^2$. □

Korolár 5.20. *Platí*

$$\sum_{j=1}^{k} |\widehat{f}(j)|^2 \leqslant \|f\|_2^2\,.$$

Důkaz. Položme $c_j = \widehat{f}(j)$, $j \in \{1, \ldots, k\}$. Výsledek plyne z (5.22). □

Limitním přechodem pro $k \to \infty$ dostaneme následující větu:

Věta 5.21 (Besselova nerovnost). *Nechť $\{\varphi_j\}$ je ortonormální posloupnost a nechť $f \in L^2(\mu)$. Potom*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{f}(j)|^2 \leqslant \|f\|_2^2\,.$$

Speciálně platí $\lim_{j\to\infty} \widehat{f}(j) = 0$.

Věta 5.22 (Rieszova-Fischerova věta). *Nechť $\{\varphi_j\}$ je ortonormální posloupnost v $L^2(\mu)$. Nechť $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$ a dále nechť*

$$s_k := c_1\varphi_1 + \ldots + c_k\varphi_k\,.$$

Potom existuje funkce $f \in L^2(\mu)$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} \|f - s_k\|_2 = 0\,, \tag{5.23}$$

$$c_j = \widehat{f}(j), \quad j \in \mathbb{N}\,. \tag{5.24}$$

Důkaz. Pro $k > m$ je

$$\|s_k - s_m\|_2^2 = |c_{m+1}|^2 + \ldots + |c_k|^2\,,$$

tedy posloupnost $\{s_k\}$ je cauchyovská v $L^2(\mu)$. Podle věty 5.17 existuje funkce $f \in L^2(\mu)$ taková, že platí (5.23).

Nechť $j \in \mathbb{N}$ a $k > j$. Z definice s_k plyne, že $c_j = \langle s_k, \varphi_j\rangle$. Vidíme, že

$$\widehat{f}(j) - c_j = \int_X f\overline{\varphi_j}\,d\mu - \int_X s_k\overline{\varphi_j}\,d\mu\,,$$

tudíž

$$|\widehat{f}(j) - c_j| \leqslant \|f - s_k\|_2\|\varphi_j\|_2\,.$$

Nyní z (5.23) plyne (5.24). □

Zavedeme ještě jeden pojem. Nechť $\{\varphi_j\}$ je ortonormální posloupnost. Říkáme, že $\{\varphi_j\}$ je **úplná ortonormální posloupnost** v $L^2(\mu)$, jestliže platí: je-li $f \in L^2(\mu)$ a

$$\int_X f\overline{\varphi_j}\,d\mu = 0\,, \quad j \in \mathbb{N}\,, \tag{5.25}$$

potom $\|f\|_2 = 0$. Jestliže tedy pro f, $g \in L^2(\mu)$ platí $\widehat{f}(j) = \widehat{g}(j)$, $j \in \mathbb{N}$, je $f = g$ skoro všude.

Ukažeme, že pro každou úplnou ortonormální posloupnost v Besselově nerovnosti nastává rovnost.

Věta 5.23 (Parsevalova rovnost). *Nechť $\{\varphi_j\}$ je úplná ortonormální posloupnost v $L^2(\mu)$. Je-li $f \in L^2(\mu)$, potom*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{f}(j)|^2 = \int_X |f|^2\,d\mu\,. \tag{5.26}$$

Důkaz. Z Besselovy nerovnosti (věta 5.21) plyne, že $\sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{f}(j)|^2 < \infty$. Definujme

$$s_k = \widehat{f}(1)\varphi_1 + \ldots + \widehat{f}(k)\varphi_k\,.$$

Potom platí

$$\|s_k\|_2^2 = |\widehat{f}(1)|^2 + \ldots + |\widehat{f}(k)|^2\,. \tag{5.27}$$

Podle Rieszovy-Fischerovy věty (věta 5.22) existuje funkce $g \in L^2(\mu)$ taková, že $\widehat{f}(j) = \widehat{g}(j)$, $j \in \mathbb{N}$, a

$$\lim_{k\to\infty} \|g - s_k\|_2 = 0\,.$$

Zřejmě

$$\big|\|s_k\|_2 - \|g\|_2\big| \leqslant \|g - s_k\|_2, \quad k \in \mathbb{N},$$

takže

$$\lim_{k\to\infty} \|s_k\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \|f\|_2^2,$$

neboť $f = g$ skoro všude. Nyní z (5.27) dostáváme (5.26). □

Poznámka 5.24. Označme l^2 prostor všech posloupností komplexních čísel $y = \{y_j\}$, pro něž $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 < \infty$. Pro posloupnost $y = \{y_j\}$ položíme

$$\|y\| := \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2\Big)^{1/2}.$$

Jestliže ν je **aritmetická míra** na $\mathbb{N}$ (tj. $\nu(A)$ = počet prvků množiny A, pokud je A konečná, jinak $\nu(A) = \infty$), potom l^2 je prostor $L^2(\nu)$.

Nechť $\{\varphi_j\}$ je úplná ortonormální posloupnost v $L^2(\mu)$. Pokud ztotožníme v $L^2(\mu)$ funkce, které se rovnají skoro všude, potom z věty 5.23 a z věty 5.22 plyne tento důležitý výsledek: *zobrazení*

$$f \mapsto \{\widehat{f}(j)\}, \quad f \in L^2(\mu),$$

je prosté zobrazení $L^2(\mu)$ na l^2, které je izometrické, tj.

$$\|f\|_2 = \|\{\widehat{f}(j)\}\| := \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{f}(j)|^2\Big)^{1/2}.$$

V tomto smyslu lze $L^2(\mu)$ považovat za *nekonečněrozměrný euklidovský prostor*, v němž bod f má *souřadnice* $\widehat{f}(1), \widehat{f}(2), \dots$ vzhledem k *souřadnicovému systému* tvořenému vektory $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

Kapitola 6

Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^d$

Víme, že $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda_d)$ je prostor s mírou. Místo $L^1(\lambda_d)$ se obvykle píše $L^1(\mathbb{R}^d)$. Pokud $A \in \mathcal{L}^d$, můžeme uvažovat restrikci σ-algebry $\mathcal{L}^d$ na A a restrikci λ_d na měřitelné podmnožiny A. Dostáváme tak nový prostor s mírou $(A, \mathcal{L}^d(A), \lambda_d|_A)$, kde $\mathcal{L}^d(A) := \{\widetilde{A} \cap A : \widetilde{A} \in \mathcal{L}^d\}$ a $\lambda_d|_A(B) := \lambda_d(B)$, $B \in \mathcal{L}^d(A)$. Výrok „$f \in L^1$ na A“ nebo „$f \in L^1(A)$“ znamená, že f je integrovatelná na tomto prostoru s mírou. Analogický význam má symbol $L^*(A)$.

Je-li $d = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, I je některý z intervalů $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) a $f \in L^1(I)$, pak se obvykle místo $\int_I f\,d\lambda_1$ užívá označení

$$\int_a^b f \text{ nebo } (L)\int_a^b f.$$

Často se píše

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Symboly $\int_a^{\infty} f$, $\int_{-\infty}^{b} f$ a také $L^p(I)$ nebo $L^p((a,b))$ mají zřejmý význam.

Protože Lebesgueova míra každé jednobodové množiny je rovna nule, nehraje roli, zda koncové body intervalu do integračního oboru patří či nikoli.

Lebesgueův, Riemannův a Newtonův integrál

Definice Lebesgueova integrálu neposkytuje prakticky žádnou možnost výpočtu v konkrétních situacích.

Nejprve ukážeme, že Lebesgueův integrál je zobecněním Riemannova integrálu, který budeme značit $(R)\int_a^b f$.