

Úlohy na dvojný integrál
5. října 2021

1. Množina T je trojúhelník ABC (myslíme tím obrazec, tedy nejen body na stranách trojúhelníku, ale i uvnitř). Napište, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ jsou řezy $T_{x,*}$ neprázdné a napište tyto řezy jako interval. Totéž udělejte pro řezy $T_{*,y}$.

$$A = [1, 1], B = [2, 0], C = [0, 4]$$

2. Vypočtěte dvojný integrál z funkce f přes trojúhelník ABC z předchozího příkladu.

$$f(x, y) = x^2 + y$$

3. Předpokládáme, že jste v předchozím příkladě použili Fubiniovu větu a převedli dvojný integrál na dvojnásobný. Vypočtěte dvojnásobný integrál v opačném pořadí.
4. Popište řezy $M_{x,*}$, $M_{*,y}$, je-li M čtyřúhelník $ABCD$.

$$A = [0, 0], B = [2, 2], C = [0, 1], D = [-3, 3]$$

a vypočtěte integrál

$$\int_{M_{*,3/2}} x \, dx$$

5. Načrtněte množinu M a vypočtěte dvojný integrál funkce f na této množině

$$f(x, y) = y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3 - x^2, y \geq x + 1\}$$

6. Odhadněte polohu těžiště obrazce M z předchozí úlohy a vypočtěte ji podle vzorců

$$P = \iint_M dx dy, \quad T_x = \frac{1}{P} \iint_M x \, dx dy, \quad T_y = \frac{1}{P} \iint_M y \, dx dy$$

(7*) Odvoďte vzorce pro těžiště.

- 8* Vypočtěte dvojnásobné integrály

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx$$

Návod: na vnitřní integrál existuje vzorec.

- 9* Vypočtěte dvojnásobné integrály pro malé kladné ε

$$\int_\varepsilon^1 \left(\int_\varepsilon^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy \quad \int_\varepsilon^1 \left(\int_\varepsilon^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx$$

10. V předchozím příkladě vyjdou integrály

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \varepsilon - \operatorname{arctg}(1/\varepsilon), \quad -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \varepsilon + \operatorname{arctg}(1/\varepsilon)$$

Vypočtete limity pro $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

(11*) Vypočtete předchozí tři příklady, zkoumejte symetrii funkce f , na jejím základě určete výsledky a diskutujte výše uvedený výsledek.