UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Základy matematiky KMA/ZAM
Teoretické základy informatiky I KI/TZI1

Přednáška 10
Hierarchie číselných oborů

jiri.cihlar@ujep.cz

O čem budeme hovořit:

- Přirozená čísla
- Celá čísla
- Racionální čísla
- Desetinná čísla
- Reálná čísla
- Komplexní čísla

Přirozená čísla

Shrnutí vlastností přirozených čísel

- Operace sčítání a násobení jsou na N_0 uzavřené, komutativní i asociativní, obě mají neutrální prvek (0, resp. 1) a násobení je vůči sčítání distributivní.

  Ani jedna z těchto operací nemá inverzní prvky.

  Další aritmetické operace – odčítání a dělení – nejsou na množině N_0 uzavřené.

  Množina N_0 je spočetná, její kardinální číslo je $\aleph_0$.

Celá čísla

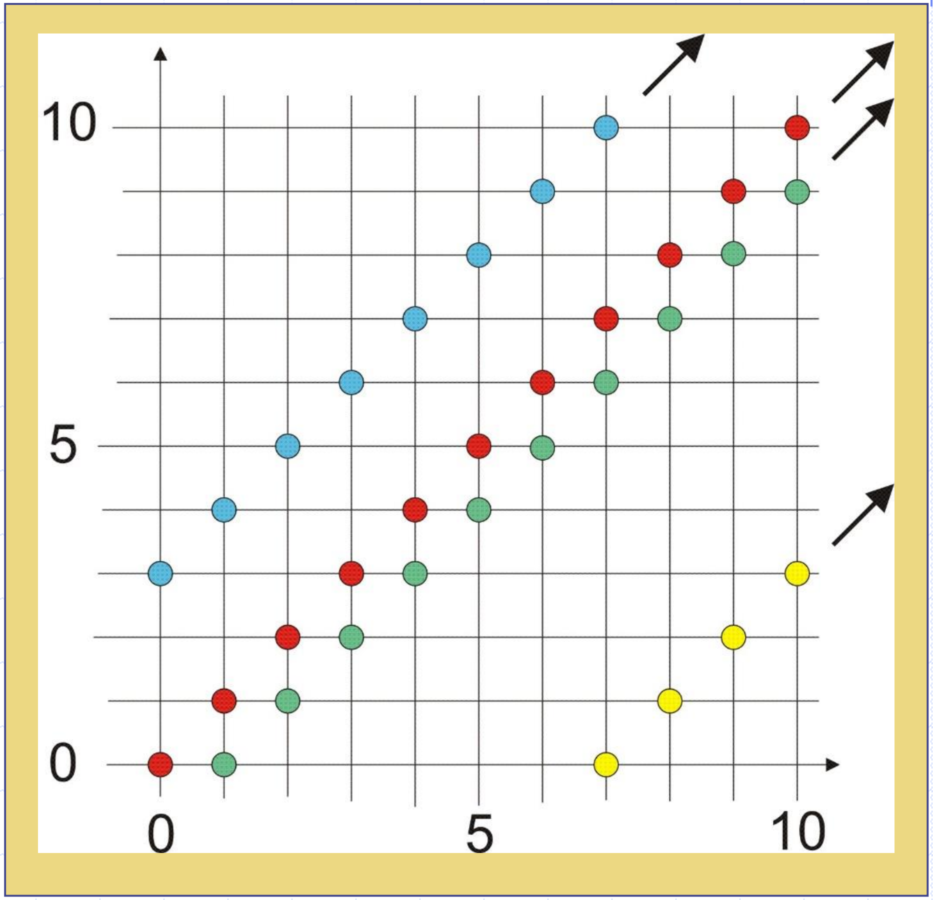
Konstrukce celých čísel

- Na kartézském součinu $N_0 \times N_0$ definujeme ekvivalenci:

$$[a,b] \sim [c,d] \iff$$
$$\iff \quad a + d = b + c$$

Celá čísla jsou pak třídami rozkladu podle této ekvivalence.

Třída s červenými dvojicemi je číslo 0, třída s modrými dvojicemi je číslo -3.



Shrnutí vlastností celých čísel

Operace sčítání a násobení jsou na Z uzavřené, komutativní i asociativní, obě mají neutrální prvek (0, resp. 1) a násobení je vůči sčítání distributivní.

Operace sčítání má inverzní prvky, operace násobení nemá inverzní prvky.

Struktura (Z,+) je tedy komutativní grupa, operace odčítání je na Z uzavřená.

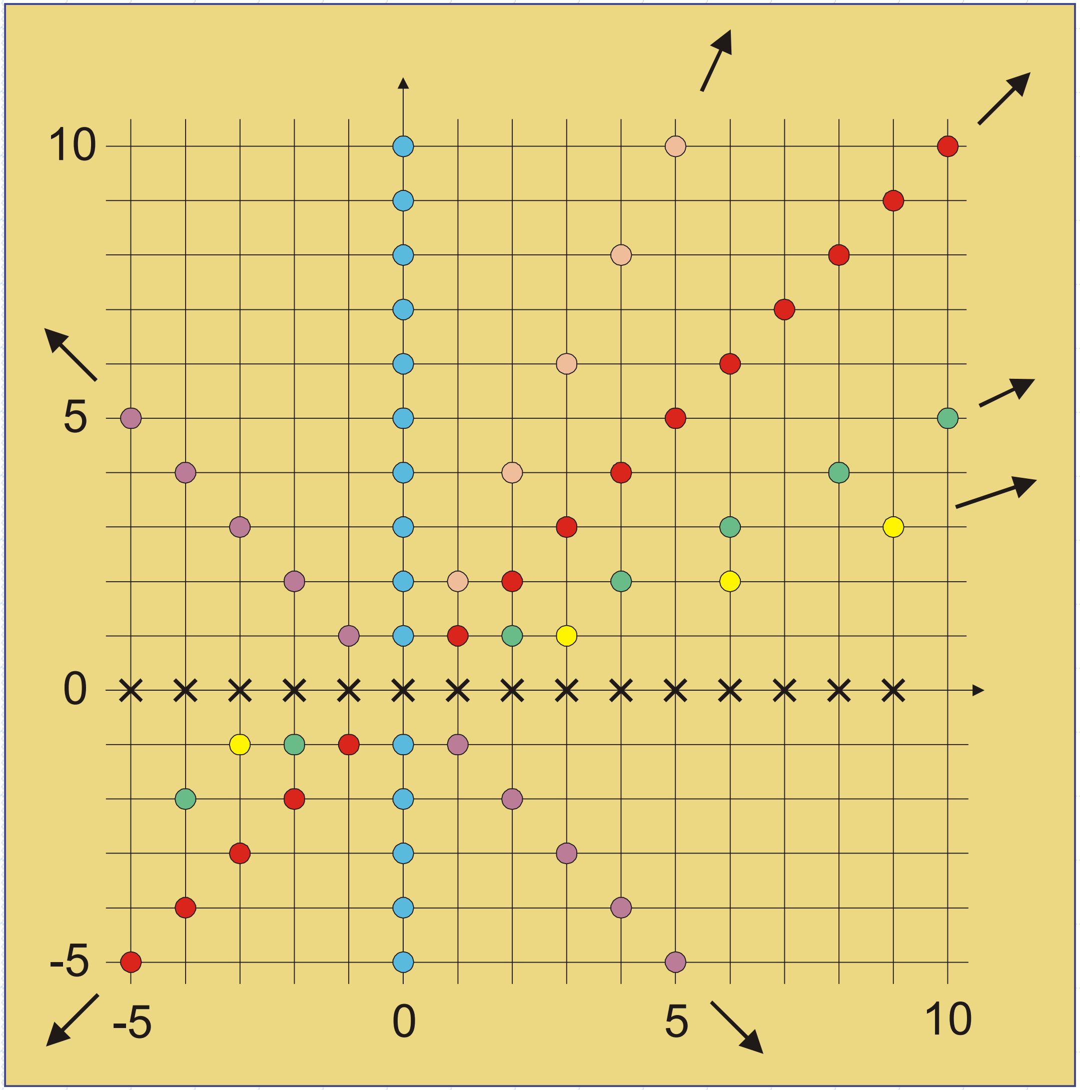
Další aritmetická operace – dělení – není na množině Z uzavřená.

Množina Z je spočetná, její kardinální číslo je $\aleph_0$.

Racionální a desetinná čísla

Racionální čísla a zlomky

Racionální čísla definujeme jako třídy navzájem ekvivalentních zlomků.



Definice racionálních a desetinných čísel

Kladná racionální čísla jsou taková, která lze zapsat ve tvaru **zlomku**, který má tvar:

$$\frac{p}{q}, \quad p \in N, q \in N$$

Kladná desetinná čísla jsou taková, která lze zapsat ve tvaru **desetinného zlomku**, který má tvar:

$$\frac{p}{10^n}, \quad p \in N, n \in N_0$$

Každé desetinné číslo je racionální.

Příklady racionálních čísel, která jsou desetinnými čísly

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{5}{10^1}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2.2.2} = \frac{3.5.5.5}{2.2.2.5.5.5} = \frac{375}{10^3}$$

$$\frac{31}{40} = \frac{31}{2.2.2.5} = \frac{31.5.5}{2.2.2.5.5.5} = \frac{775}{10^3}$$

atd.

Příklad racionálního čísla, které není desetinné

Předpokládejme, že platí:

$$\frac{1}{3} = \frac{p}{10^n}$$

Co z tohoto předpokladu vyplývá?

$$10^n = 3 \,.\, p$$

$$2^n \,.\, 5^n = 3 \,.\, p$$

Na levé i pravé straně rovnosti je stejné číslo. Levá strana říká, že v jeho rozkladu na prvočísla jsou jen dvojky a pětky, ale pravá strana říká, že je tam trojka. **To není možné!**

Jak poznáme kdy je zlomek zápisem desetinného čísla a kdy není?

Zlomek nejprve zkrátíme tak, aby čitatel a jmenovatel byla nesoudělná čísla.

Rozložíme jmenovatele na součin prvočísel.

Pak jsou jen dvě možnosti:

rozklad obsahuje jen prvočísla 2 nebo 5

(a dané číslo je desetinné),

rozklad obsahuje i jiné prvočíslo než 2 nebo 5

(a dané číslo není desetinné).

Desetinné rozvoje racionálních čísel

Desetinné rozvoje racionálních čísel jsou dvojího druhu:

ukončené – to jsou desetinná čísla,

nekonečné periodické – to jsou racionální čísla, která nejsou desetinná.

Jak dokázat, že když desetinný rozvoj není ukončený, pak je periodický? Stačí uvážit, jak veliké mohou být zbytky při dělení.

Typy desetinných rozvojů čísel 1/n:

Podívejte se na hodnoty v tabulce.

Jaké typy desetinných rozvojů tam nalezneme?

2	0,500000000	8	0,125000000	14	0,071428571
3	0,333333333	9	0,111111111	15	0,066666667
4	0,250000000	10	0,100000000	16	0,062500000
5	0,200000000	11	0,090909091	17	0,058823529
6	0,166666667	12	0,083333333	18	0,055555556
7	0,142857143	13	0,076923077	19	0,052631579

Jak poznáme kdy má zlomek desetinný rozvoj s předperiodou?

Rozložíme jmenovatele zkráceného zlomku na součin prvočísel.

Rozklad obsahuje jak prvočísla 2 nebo 5, tak i jiné prvočíslo než 2 nebo 5.

Příklad

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2.3} = 0{,}16666\ldots$$

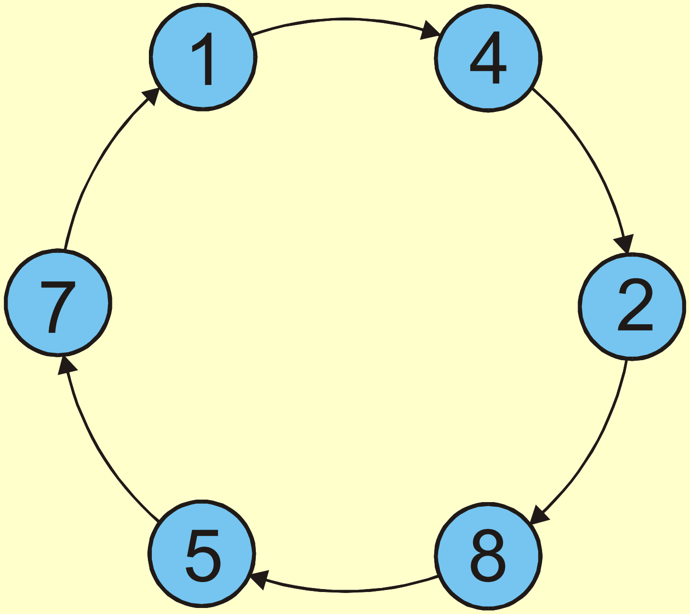
Jak to pokračuje u zlomků tvaru 1/n?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- ukončený rozvoj
- periodický rozvoj (prvočíslo)
- periodický rozvoj
- periodický rozvoj + předperioda

Úloha z rekreační matematiky:
Násobte „kouzelné číslo“ 142 857 postupně čísly jedna, dvě, tři, atd. Co objevíte zajímavého?

$$142\,857 \times 1 = 142\,857$$
$$142\,857 \times 2 = 285\,714$$
$$142\,857 \times 3 = 428\,571$$
$$142\,857 \times 4 = 571\,428$$
$$142\,857 \times 5 = 714\,285$$
$$142\,857 \times 6 = 857\,142$$
$$142\,857 \times 7 = 999999$$



Příklad

1 : 7 = 0,142857….

10

30

20

60

40

50

10

2 : 7 = 0,285714….

20

60

40

50

10

30

20

Jak určovat dlouhé periody?

Využije se toho, že číslice v periodách čísel ***k*/*n*** pro ***k*** = 1, 2, 3, atd. jsou vůči sobě cyklicky posunuty.

Například:

1/7 = 0,142857……

2/7 = 0,285714……

3/7 = 0,428571……

atd.

Jak zjistit délku periody

$$1 = 0,\overline{9} = 0,9999999999\ \dots$$

Pak můžeme usuzovat z těchto příkladů:

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 0,9999999999\ \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = 0,3333333333\ \dots$$

$$1 = 11 \cdot \frac{1}{11} = 0,9999999999\ \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{11} = 0,0909090909\ \dots$$

$$1 = 7 \cdot \frac{1}{7} = 0,9999999999\ \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{7} = 0,1428571428\ 57\dots$$

Jak zjistit délku periody zlomku 1/*n*

Budeme pracovat s posloupností čísel tvaru $\mathbf{10^{\mathit{k}} - 1}$, kde *k* je přirozené číslo.

Z těchto čísel vybereme nejmenší takové, které je dělitelné číslem ***n*.**

Pak zlomek ***1/n*** bude mít periodu délky ***k*.**

Vyhledání zlomku pro daný desetinný rozvoj

$$1{,}5\overline{23} = 1{,}5 + 0{,}0232323\ \ldots\ldots = \frac{3}{2} + \frac{23}{10^3} + \frac{23}{10^5} + \ldots\ldots =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{23}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\ldots\right) = \frac{3}{2} + \frac{23}{10^3} . \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{23}{10^3} . \frac{100}{99} = \frac{3}{2} + \frac{23}{990} = \frac{3 \cdot 495 + 23}{990} = \frac{1508}{990}$$

V čem se vlastnosti struktur shodují?

- Obě sčítací struktury **(D, +)** i **(Q, +)** jsou komutativní grupy (komutativita, asociativita, existence neutrálního prvku a existence inverzních prvků).
- V desetinných i racionálních číslech je násobení distributivní vzhledem ke sčítání.

V čem se vlastnosti struktur liší?

- Struktura s násobením **($\mathbf{Q}-\{0\}$, .)** je komutativní grupa (komutativita, asociativita, existence neutrálního prvku a **existence inverzních prvků k nenulovým prvkům**), ale
- podstruktura s násobením **($\mathbf{D}-\{0\}$, .)** není komutativní grupa (komutativita, asociativita, existence neutrálního prvku, ale **inverzní prvky neexistují k řadě nenulových prvků**).

Reálná čísla

Racionální a iracionální čísla

Pokud má číslo svůj periodický desetinný rozvoj ukončený či nekonečný periodický, pak je racionální (vylučujeme periody ze samých nul, resp. devítek).

Pokud má číslo svůj periodický desetinný rozvoj nekonečný a neperiodický, pak je iracionální.

Iracionálními čísly jsou například $\pi, e, \sqrt{2}$, atd.

Reálná čísla

Všechna reálná čísla si můžeme představovat jako body na přímce, tzv. číselné ose.
Reálná čísla R jsou sjednocením množiny všech racionálních čísel Q a množiny všech iracionálních čísel I, tedy R = Q ∪ I.
Množina Q je spočetná, její kardinální číslo je $\aleph_0$, množina I je nespočetná, její kardinální číslo je $\aleph_1$.
Množina všech reálných čísel R je nespočetná, její kardinální číslo je $\aleph_1$.

Shrnutí vlastností reálných čísel

Struktura $(R, +)$ je komutativní grupa, operace odčítání je na R uzavřená.

Struktura $(R-\{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa, operace dělení je na $R-\{0\}$ uzavřená.

Komplexní čísla

Představa komplexních čísel

Všechna komplexní čísla si můžeme představovat jako body v rovině opatřené kartézskou souřadnou soustavou.
Například bod se souřadnicemi $[2;3]$ je znázorněním komplexního čísla $2 + 3 \cdot i$, kde i je tzv. imaginární jednotka. Číslo 2 je tzv. reálná část tohoto komplexního čísla, číslo 3 je pak jeho imaginární částí.
Reálná čísla jsou podmnožinou komplexních čísel, mají tvar $a + 0 \cdot i = a$, a jejich obrazy leží na tzv. reálné ose.
Komplexním číslům, které mají reálnou složku nenulovou, říkáme imaginární čísla, jejich obrazy leží mimo reálnou osu.
Číslům tvaru $0 + b \cdot i$, kde $b \neq 0$, říkáme ryze imaginární čísla. Jejich obrazy leží na imaginární ose.

Shrnutí vlastností komplexních čísel

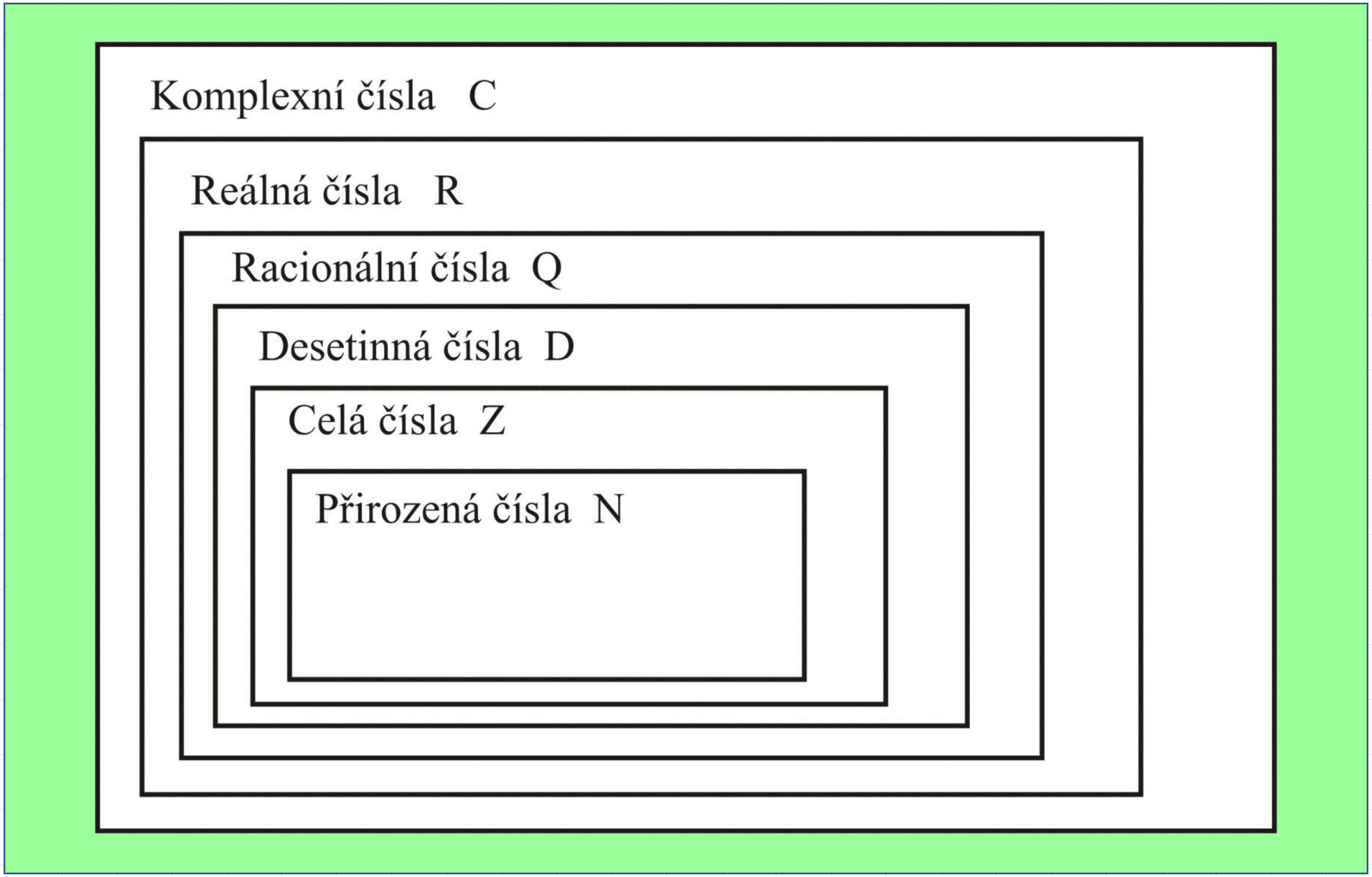
Struktura (C, +) je komutativní grupa, operace odčítání je na C uzavřená.

Struktura (C −{0}, ·) je komutativní grupa, operace dělení je na C −{0} uzavřená.

Zatímco v reálných číslech je možné druhou odmocninu vypočítat jen pro nezáporná čísla, v komplexních číslech je ji možné vypočítat pro libovolné komplexní číslo (má však dvojí výsledek).

Obecněji platí, že n-tá odmocnina z nenulového komplexního čísla má n různých hodnot.

Hierarchie číselných struktur



Uspořádání v číselných strukturách

Uspořádání v přirozených a celých číslech má tu vlastnost, že ke každému číslu (v N_0 kromě nuly) existují sousední čísla, která se od něj liší o jednotku.
U desetinných, racionálních, iracionálních a reálných čísel je situace jiná, tam jsou uspořádání tzv. hustá, což znamená, že mezi dvěma libovolnými čísly z tohoto oboru existuje nekonečně mnoho dalších takových čísel.
Komplexní čísla nelze uspořádat tak, aby uspořádání bylo invariantní vůči sčítání a násobení.

Co je třeba znát a umět?

- Znát vlastnosti přirozených a celých čísel,
- umět dobře rozlišovat desetinná a racionální čísla pomocí vyjádření jak zlomkem, tak i desetinným rozvojem,
- umět dobře rozlišovat racionální a iracionální čísla pomocí jejich desetinných rozvojů,
- znát vlastnosti racionálních a reálných čísel,
- znát kardinální čísla číselných množin.

Děkuji za pozornost