UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Základy matematiky KMA/ZAM

Teoretické základy informatiky I KI/TZI1

Přednáška 08

Zobrazení, ekvivalence množin

jiri.cihlar@ujep.cz

O čem budeme hovořit:

- Definice a příklady zobrazení
- Druhy zobrazení podle jejich oborů
- Prosté zobrazení
- Ekvivalence množin
- Nekonečné množiny, kardinalita

Definice a příklady zobrazení

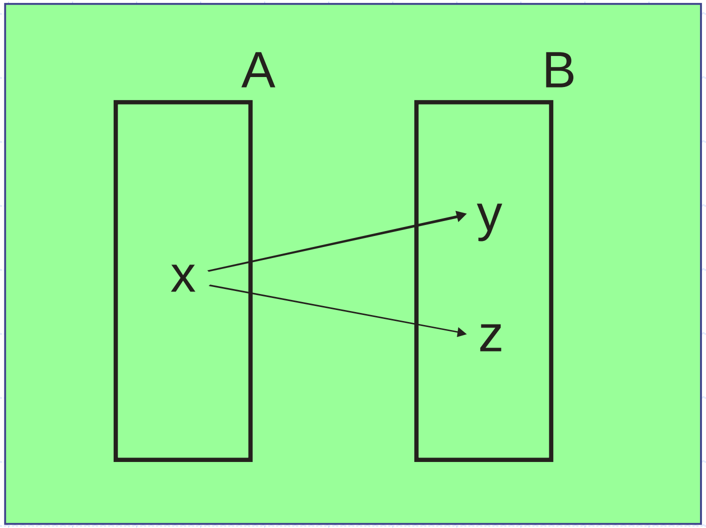
Zobrazení

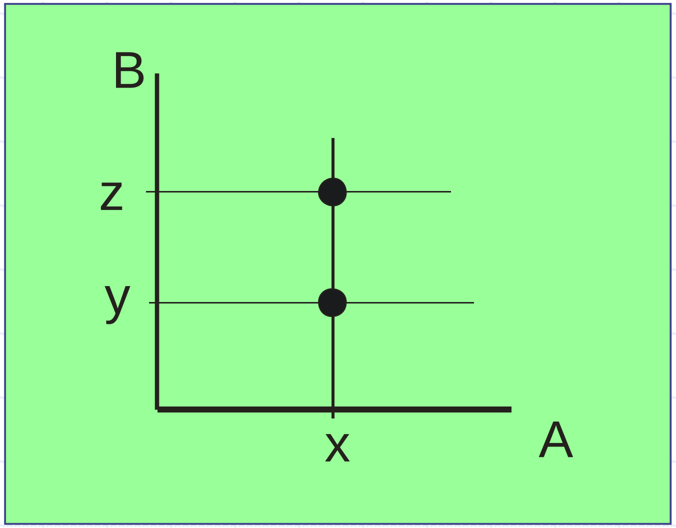
Definice: **Binární relaci $F \subseteq A \times B$ nazýváme zobrazením právě tehdy, když**

$$\neg (\exists x \in A)(\exists y,z \in B)\ x F y \wedge x F z \wedge y \neq z,$$

tj. $$(\forall x \in A)(\forall y,z \in B)\ x F y \wedge x F z \Rightarrow y = z.$$

U zobrazení jsou tedy **zakázány** tyto konfigurace:

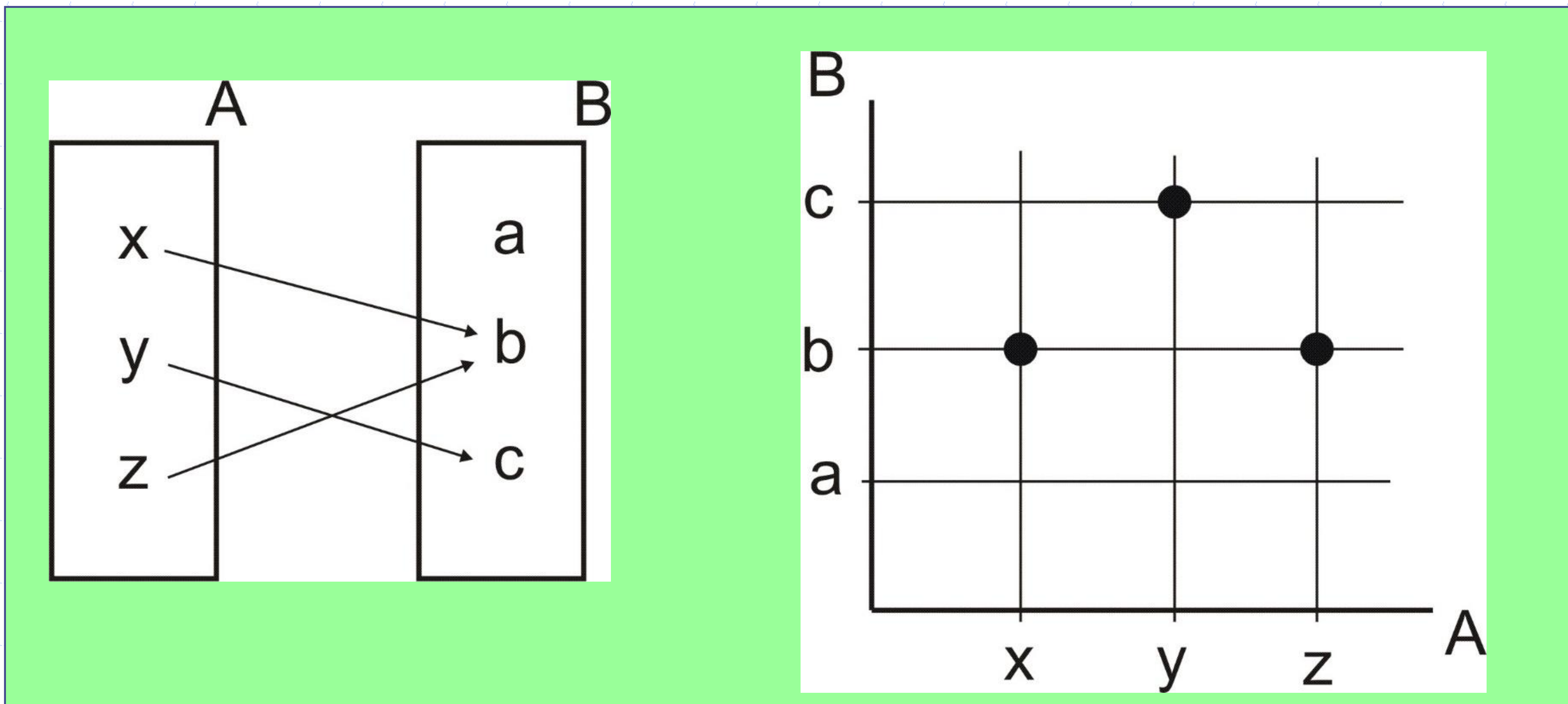




Jednoduchý příklad zobrazení

Tříprvková binární relace $R = \{\langle x, b\rangle, \langle y, c\rangle, \langle z, b\rangle\}$, která je podmnožinou kartézského součinu A × B, je zobrazením.

Neexistují tam dvě „rozbíhající se šipky“, neexistují tam dvě „tečky nad sebou“.



Příklady zobrazení v aritmetice

- Když hovoříme o dvojnásobku přirozeného čísla, máme na mysli zobrazení, které každému přirozenému číslu $n \in N$ přiřazuje jednoznačně číslo $2 \cdot n \in N$.
- Když hovoříme o nějaké posloupnosti reálných čísel, máme na mysli zobrazení, které každému přirozenému číslu $n \in N$ přiřazuje nějaké reálné číslo $a_n \in R$.
- Když hovoříme o funkci $y = \sin x$, máme na mysli zobrazení, které každému reálnému číslu $x \in R$ přiřazuje jednoznačně jeho „sinus“, tedy reálné číslo $y \in \langle -1, 1 \rangle$.
- Když hovoříme o součtu dvou celých čísel, máme na mysli zobrazení, kde vzory jsou všechny uspořádané dvojice $\langle x, y \rangle$ celých čísel, a obrazem je celé číslo $x + y$.

Příklady zobrazení v geometrii

- Příklady bodových zobrazení v geometrii, kdy vzory i obrazy jsou body jisté roviny, jsou například osová souměrnost určená danou osou souměrnosti, translace (posunutí) bodu o daný vektor, rotace kolem daného středu o určitý úhel, stejnolehlost s daným středem a kladným koeficientem, atd.
- Sestrojení kolmice k dané přímce p daným bodem A lze považovat za zobrazení, kde je vzorem uspořádaná dvojice $\langle p, A\rangle$ a obrazem přímka kolmá na p procházející bodem A.
- Sestrojení kružnice s daným středem S a daným poloměrem r lze považovat za zobrazení, kde je vzorem uspořádaná dvojice $\langle S, r\rangle$ a obrazem je hledaná kružnice.

Druhy zobrazení podle jejich oborů

Druhy zobrazení mezi množinami A, B

Je-li dáno zobrazení $F \subseteq A \times B$, pak jeho první i druhý obor jsou podmnožinami množin A, B, tedy platí **■F $\subseteq$ A $\wedge$ F■ $\subseteq$ B** .

V tomto obecném případě nazýváme zobrazení F **zobrazením z množiny A do množiny B.**

Mohou však nastat případy, kdy platí, že

■F = A , resp. **F■ = B** , resp. obojí.

V těchto případech užíváme pro zobrazení speciální názvy.

Druhy zobrazení mezi množinami A, B

Nechť je dáno zobrazení $F \subseteq A \times B$.

Jestliže platí **■F = A** $\wedge$ **F■** $\subseteq$ **B** , pak F nazýváme **zobrazením množiny A do množiny B.**

Jestliže platí **■F** $\subseteq$ **A** $\wedge$ **F■ = B** , pak F nazýváme **zobrazením z množiny A na množinu B.**

Jestliže platí **■F = A** $\wedge$ **F■ = B** , pak F nazýváme **zobrazením množiny A na množinu B.**

Příklady zobrazení různých druhů

- Osová souměrnost v rovině ρ je příkladem zobrazení, kdy jak vzory, tak i obrazy jsou všechny body této roviny, je to tedy zobrazení množiny ρ na množinu ρ.
- U dvojnásobku přirozeného čísla, tedy u zobrazení $n \to 2n$, jsou vzory všechna přirozená čísla, ale jejich obrazy jsou pouze sudá čísla. Je to tedy zobrazení množiny *N* do množiny *N*.
- Dekadický logaritmus $y = \log x$ má za vzory pouze kladná čísla, a jejich obrazy jsou všechna reálná čísla. Je to tedy zobrazení z množiny *R* na množinu *R*.
- Speciální nepřímá úměrnost – funkce $y = \frac{1}{x}$, jejímž grafem je rovnoosá hyperbola, má za vzory i za obrazy všechna nenulová reálná čísla, je to tedy zobrazení z množiny *R* do množiny *R*.

Prosté zobrazení

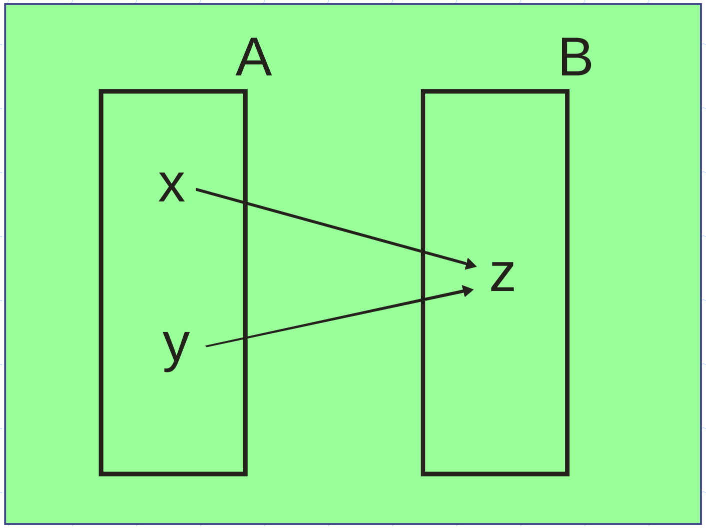
Prosté zobrazení

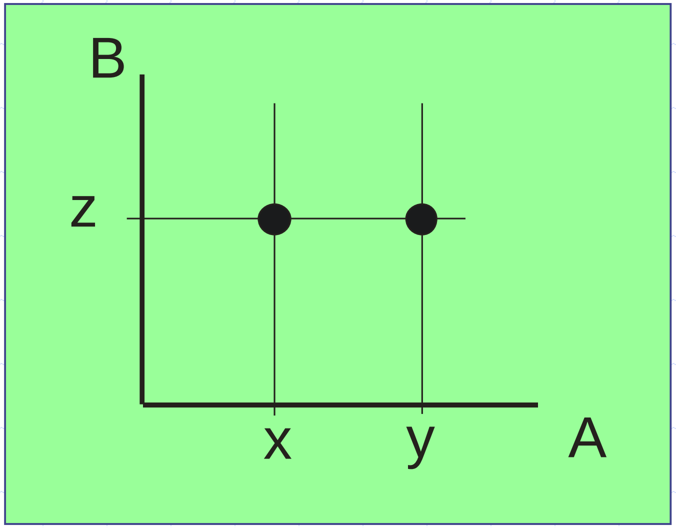
Definice: Zobrazení $F \subseteq A \times B$ nazýváme prosté právě tehdy, když

$$\neg\, (\exists x,y \in A)\, (\exists z \in B)\;\; x\, F\, z \wedge y\, F\, z \wedge x \neq y\,,$$

tj. $$(\forall x,y \in A)\, (\forall z \in B)\; x\, F\, z \wedge y\, F\, z \Rightarrow x = y\,.$$

U prostých zobrazení jsou **zakázány** tyto konfigurace:





Příklady

- Osová souměrnost v rovině ρ je příkladem prostého zobrazení, protože neexistuje žádný bod v rovině, který by byl obrazem alespoň dvou různých bodů roviny ρ.
- Funkce $y = \log x$, resp. $y = \frac{1}{x}$ jsou prostá zobrazení, protože u žádné z nich neexistují dvě různá reálná čísla x taková, že by jim funkce přiřazovala tutéž funkční hodnotu.
- Funkce $y = \sin x$ není prosté zobrazení, protože existují různá čísla x, kterým tato funkce přiřazuje tutéž hodnotu. Například všechny násobky čísla π mají sinus roven 0.
- Funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ je periodická, na svém definičním oboru tedy není prostým zobrazením. Pokud bychom se ale omezili jen na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, tam by prostým zobrazením byla.

Ekvivalence množin

Vzájemně jednoznačné zobrazení

Je-li F prosté zobrazení množiny A na množinu B, nazývá se F vzájemně jednoznačné zobrazení A na B.

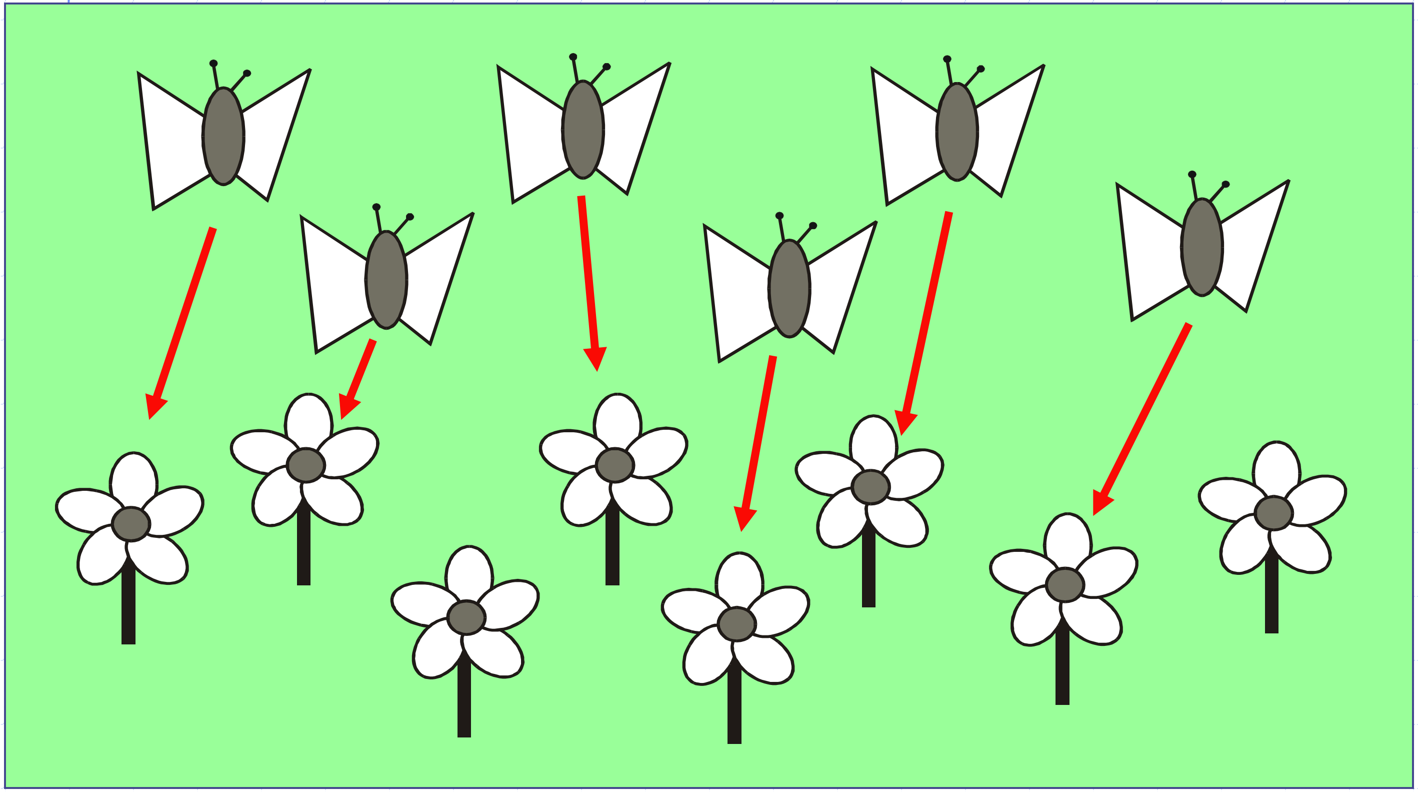
Příklady:

Funkce $\mathbf{y = x^2}$ je vzájemně jednoznačným zobrazením množiny $\{\mathbf{1; 2; 3; 4}\}$ na množinu $\{\mathbf{1; 4; 9; 16}\}$.

Funkce $\mathbf{y = 2^x}$ je vzájemně jednoznačným zobrazením množiny **všech reálných čísel** na množinu **všech kladných čísel**.

Úloha pro děti

Mohou malé děti, které ještě neumějí počítat, zjistit, zda je na obrázku více motýlků nebo více květinek nebo je jich stejně?



A jak?

Úloha pro tanečního mistra

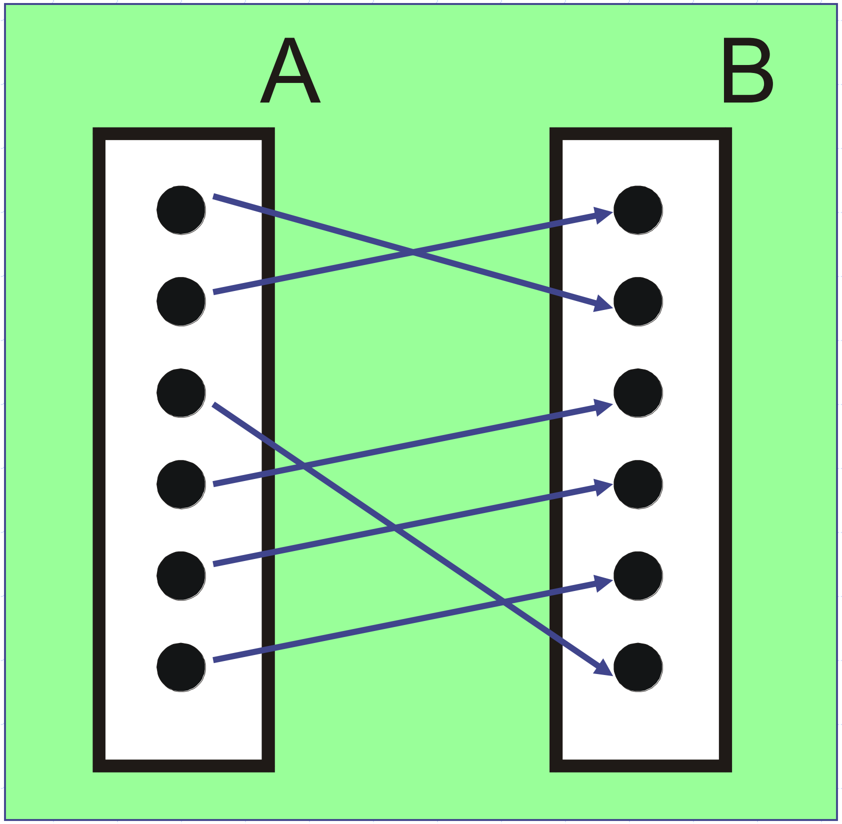
Taneční mistr pravděpodobně umí počítat, ale vzhledem k velkému počtu mladých slečen a pánů v sále (a jejich neustálému pohybu) je mu to málo platné.

Může přesto snadno zjistit, zda je v sále více slečen nebo více pánů nebo je jich stejně?

A jak?

Jak obecně poznat čeho je více či méně?

Budeme se snažit „**prvky obou množin spárovat**“.



Množina A je ekvivalentní s množinou B právě tehdy, když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení A na B.

Budeme to zapisovat:

$A \sim B$.

Kardinální čísla

Když jsou dvě množiny ekvivalentní, pak říkáme, že mají stejné kardinální číslo.

$$A \sim B \iff \text{card } A = \text{card } B$$

Například:

card {10; 2; #} = card {0; 1; 2} = 3

card {a} = card {0} = card { # } = 1

card { } = 0

Přirozená čísla jsou kardinální čísla konečných množin.

Kardinalita nekonečných množin

Nekonečné ekvivalentní množiny

Znáte pohádku o nekonečném hotelu?

1) Ekvivalence množin **N** a {**101; 102; 103; … **}

1	2	3	4	5	6	…
101	102	103	104	105	106	…

2) Ekvivalence množin **N** a **S**:

1	2	3	4	5	6	…
2	4	6	8	10	12	…

Všechny tyto nekonečné množiny mají stejné kardinální číslo, které se označuje $\aleph_0$. Množinám s tímto kardinálním číslem se říká spočetné množiny.

Geometrické ekvivalentní množiny

Následující geometrické útvary jsou **ekvivalentní** množiny bodů:

libovolné dvě (i nestejně dlouhé) úsečky,

libovolné dvě přímky,

libovolná úsečka a libovolná přímka, atd.

Také všechny tyto nekonečné množiny mají stejné kardinální číslo.

Definice: **Množina se nazývá nekonečná právě tehdy, když je ekvivalentní s nějakou svou vlastní podmnožinou.**

Mohutnost množiny a její potence

Předpokládejme, že všech přirozených čísel je stejně, jako všech podmnožin přirozených čísel.

Jdou tedy **„spárovat“**.

1	$\longrightarrow$	**1. podmnožina**
2	$\longrightarrow$	**2. podmnožina**
3	$\longrightarrow$	**3. podmnožina**
4	$\longrightarrow$	**4. podmnožina**
5	$\longrightarrow$	**5. podmnožina**
6	$\longrightarrow$	**6. podmnožina**
…		**…**
…		**…**

V prvním seznamu jsou tedy **všechna** přirozená čísla a ve druhém seznamu jsou **všechny podmnožiny** přirozených čísel.

Co z toho dále plyne?

Situace může vypadat například takto:

Číslo	Název podmnožiny	1	2	3	4	5	6	7	8	…..
1.	sudá čísla	$\boxed{\text{N}}$	A	N	A	N	A	N	A	….
2.	prvních pět čísel	A	$\boxed{\text{A}}$	A	A	A	N	N	N	….
3.	prvočísla	N	A	$\boxed{\text{A}}$	N	A	N	A	N	….
4.	čísla větší než 3	N	N	N	$\boxed{\text{A}}$	A	A	A	A	….
5.	druhé mocniny	A	N	N	A	$\boxed{\text{N}}$	N	N	N	….
…..	…………………….	….	….	….	….	….	….	….	….	….

Seznam podmnožin ale není úplný!!!

nová podmnožina	**A**	**N**	**N**	**N**	**A**	….	….	….	….

To je SPOR !

A jaký je závěr?

Předpoklad, že lze spárovat všechna přirozená čísla a všechny podmnožiny přirozených čísel vede ke sporu.

Tyto dvě množiny tedy nemají „stejnou mohutnost“, **jejich kardinální čísla jsou různá.**

$$\boxed{card\ N \neq card\ Pot(N)}$$

Existuje tedy „více nekonečen“, **nekonečné množiny mohou mít různá kardinální čísla**.

Označujeme je postupně $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, atd.

Pot(N) je ekvivalentní s (0;1)

Ukažme, že podmnožiny přirozených čísel je možné spárovat s reálnými čísla z intervalu (0;1):

Název podmnožiny přirozených čísel	Místo za „dvojkovou“ čárkou								
	1	2	3	4	5	6	7	8	….
sudá čísla	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	….
prvních pět čísel	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	….
prvočísla	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	….
čísla větší než 3	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	….
druhé mocniny	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	….
………………………	….	….	….	….	….	….	….	….	….

Alefy

Kardinální číslo spočetné množiny (tedy množiny ekvivalentní s N) označujeme „**alef 0**“.

$$card\ N = \aleph_0$$

Platí toto tvrzení (**zobecněná hypotéza kontinua**):

$$card\ A = \aleph_\alpha \quad \Rightarrow \quad card\ Pot\,(A) = \aleph_{\alpha+1}$$

Pak:

$$card\ Pot\,(N) = card\ R = \aleph_1$$

„Alefů“ je tedy nekonečně mnoho!

Představa kardinálních čísel

Druh množin	Kardinální číslo	Příklady množin
Nekonečné množiny	…	atd.
	$\aleph_2$	Pot(R), množina všech podmnožin úsečky
	$\aleph_1$	Pot(N), R, (0;1), body přímky či úsečky
	$\aleph_0$	{1; 2; 3; 4; 5; 6; … } , S, L
Konečné množiny	…	atd.
	3	{a; b; c} , {10; 2; #} , …..
	2	{a; b} , {3; 7} , { #;• } , …..
	1	{a} , {0} , {#} , …
	0	∅

Co je třeba znát a umět?

- Znát definici a příklady zobrazení,
- umět určit oba obory zobrazení,
- znát druhy zobrazení podle vlastností jejich oborů,
- znát definici a rozumět pojmu prosté zobrazení,
- rozumět definici ekvivalence množin,
- znát různé příklady spočetných množin,
- znát různé příklady množin s kardinálními čísly $\aleph_1$ a $\aleph_2$.

Děkuji za pozornost