Programm

des

Königlichen und Gröning'schen Gymnasiums

zu

Stargard in Pomm.,

mit welchem

ZU DER AM 1. UND 2. APRIL

stattfindenden öffentlichen Prüfung

ehrerbietigst einladet

Prof. Dr. G. Lothholz,
Director.

Inhalt:

1879. Progr. Nr. 110.

Stargard.
Gedruckt bei F. Hendess.
1879.

I.

Attraction

von geraden Linien und Punkten.

1. Anziehung zweier gerader Linien im Raume in der Richtung ihrer kürzesten Entfernung.

Es sei $PP^1 = e$ die kürzeste Entfernung zweier homogener materieller gerader Linien AB und CD. Jedes Element der einen ziehe jedes der andern nach einem Gesetze an, welches allgemein, als Funktion der Entfernung ϱ, durch $f(\varrho)$ ausgedrückt werde. Die Masseneinheiten der Linien seien m und μ. Ist dann X ein Punkt der ersten Linie, Y der zweiten, und $PX = x$, $PY = y$, so wird das Element dx der ersten von dy der zweiten mit der Kraft $m \mu\, dx\, dy\, f(XY)$ in der Richtung XY angezogen. Die allein in Betracht kommende Componente derselben, in der Richtung der kürzesten Entfernung beider Linien ist, wenn $AA^1 \mathrel{+\!\!\!\!\!=} PQ$:

$$m \mu\, dx\, dy\, f(XY) \cos. A^1 A C$$

$$= m \mu\, dx\, dy\, f(XY) \frac{1}{XY}.$$

Es ist aber, wenn φ den Winkel zwischen beiden bezeichnet:

$$XY = \sqrt{e^2 + x^2 + y^2 - 2\, xy \cos. \varphi},$$

also ist die Gesammtkraft K, mit welcher die eine von der andern angezogen wird:

$$K = m \mu e \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{f(\varrho)\, dx\, dy}{\varrho}$$

wo

$$\varrho^2 = e^2 + x^2 + y^2 - 2\, xy \cos. \varphi$$

und

$$x_1 = PA,\ x_2 = PB;\ y_1 = QC,\ y_2 = QD$$

ist. — Dabei werden die Entfernungen E und E^1 der Angriffspunkte dieser Kraft von P und Q gegeben durch

$$E = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{x\, f(\varrho)\, dx\, dy}{\varrho}}{\int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{f(\varrho)\, dx\, dy}{\varrho}};\quad E^1 = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{y\, f(\varrho)\, dx\, dy}{\varrho}}{\int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{f(\varrho)\, dx\, dy}{\varrho}}.$$

Betrachten wir in Folgendem zwei specielle Fälle. Die Anziehung wirke: A) nach dem Newton'schen Gesetze, B) nach dem Gesetze der Elasticität.

A) Nach dem Newton'schen Gesetze ist

$$f(\varrho) = \frac{\varkappa}{\varrho^2}, \text{ also}$$

$$K = m\,\mu\,e\,\varkappa \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{(e^2 + x^2 + y^2 - 2\,xy\,\cos.\,\varphi)^3}}.$$

Nun ist:

$$\int \frac{dy}{\varrho^3} = \frac{1}{e^2 + x^2 \sin.\,^2\varphi} \int \frac{e^2 + x^2 \sin.\,^2\varphi}{\varrho^3}\,dy$$

$$= \frac{1}{e^2 + x^2 \sin.\,^2\varphi}\left\{\int \frac{e^2 + x^2 + y^2 - 2\,xy\cos.\,\varphi}{\varrho^3}\,dy - \int \frac{x^2 \cos.\,^2\varphi - 2\,xy\cos.\,\varphi + y^2}{\varrho^3}\,dy\right\}$$

$$= \frac{1}{e^2 + x^2 \sin.\,^2\varphi}\left\{\int \frac{dy}{\varrho} - \int \frac{(y - x\cos.\,\varphi)^2}{\varrho^3}\,dy\right\}$$

$$= \frac{1}{e^2 + x^2 \sin.\,^2\varphi}\left\{\int \frac{dy}{\varrho} - (y - x\cos.\,\varphi)\int \frac{d\varrho}{\varrho^2} + \int dy \int \frac{d\varrho}{\varrho^2}\right\} =$$

$$\frac{1}{e^2 + x^2 \sin.\,^2\varphi}\left\{\int \frac{dy}{\varrho} + \frac{y - x\cos.\,\varphi}{\varrho} - \int \frac{dy}{\varrho}\right\} = \frac{y - x\cos.\,\varphi}{(e^3 + x^2 \sin.\,^2\varphi)\sqrt{e^2 + x^2 + y^2 - 2xy\cos.\,\varphi}}.$$

also

$$K = m\,\mu\,e\,\varkappa \int\limits_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{y_2 - x\cos.\,\varphi}{(e^2 + x^2 \sin.\,^2\varphi)\sqrt{e^2 + x^2 + y_2^2 - 2\,xy_2\cos.\,\varphi}} - \frac{y_1 - x\cos.\,\varphi}{(e^2 + x^2 \sin.\,^2\varphi)\sqrt{e^2 + x^2 + y_1^2 - 2\,xy_1\cos.\,\varphi}} \right\} dx.$$

Durch die Substitution $\sqrt{e^2 + x^2 + y^2 - 2\,xy\cos.\,\varphi} = u + x$ wird

$$I = \int \frac{(y - x\cos.\,\varphi)\,dx}{(e^2 + x^3\sin.\,^2\varphi)\sqrt{e^2 + x^2 + y^2 - 2xy\cos.\varphi}} = -2\int \frac{u^2\cos.\,\varphi + 2\,uy + (y^2 - e^2)\cos.\,\varphi}{4e^2(u + y\cos.\varphi)^2 + \sin.\,^2\varphi(u^2 - y^2 - e^2)}\,du$$

Der Nenner lässt sich als Produkt darstellen:

$$\sin.\,^2\varphi\left\{(u - y)^2 + e^2 \operatorname{cotg.}^2\frac{\varphi}{2}\right\}\left\{(u + y)^2 + e^2 \operatorname{tg.}^2\frac{\varphi}{2}\right\}.$$

also wird

$$I = -\frac{2}{\sin.\,^2\varphi}\int \frac{u^2\cos.\,\varphi + 2\,uy + (y^2 - e^2)\cos.\,\varphi}{\left\{(u - y)^2 + e^2\operatorname{cotg.}^2\frac{\varphi}{2}\right\}\left\{(u + y)^2 + e^2\operatorname{tg.}^2\frac{\varphi}{2}\right\}}\,du =$$

$$-\frac{2}{\sin.\,^2\varphi}\left\{\cos.^2\frac{\varphi}{2}\int \frac{du}{(u - y)^2 + e^2\operatorname{cotg.}\frac{^2\varphi}{2}} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\int \frac{du}{(u + y)^2 + e^2\operatorname{tg.}\frac{^2\varphi}{2}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{e \sin.\varphi}\left\{ \text{arc. tg.} \frac{(u-y)\,\text{tg.}\frac{\varphi}{2}}{e} - \text{arc. tg.} \frac{(u+y)\,\text{cotg.}\frac{\varphi}{2}}{e}\right\}$$

folglich

$$K = \frac{m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\varphi}\left\{ \text{arc. tg.} \frac{(\sqrt{e^2+x^2+y^2-2\,xy\cos.\varphi} - x - y)\,\text{tg.}\frac{\varphi}{2}}{e}\right.$$

$$\left. - \text{arc. tg.} \frac{(\sqrt{e^1+x^2+y^2-2\,xy\cos.\varphi} - x + y)\,\text{cotg.}\frac{\varphi}{2}}{e}\right\}_{x = x_2,\ y = y_2}^{x =_1 x,\ y = y_1}$$

Die Rechnung vereinfacht sich wesentlich, wenn eine der beiden Linien, z. B. CD, nach beiden Seiten hin ins Unendliche sich erstreckt. Es ist

$$\frac{y - x\cos.\varphi}{(e^2+x^2\sin.^2\varphi)\sqrt{e^2+x^2+y^2-2xy\cos.\varphi}} = \frac{1 - \frac{x\cos.\varphi}{y}}{(e^2+x^2\sin.^2\varphi)\frac{1}{y}\sqrt{e^2+x^2+y^2-2xy\cos\varphi}},$$

also, da die Wurzel stets positiv bleibt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{(e^2+x^2+y^2-2\,xy\cos.\varphi)^3}} = \frac{2}{e^2+x^2\sin.^2\varphi},$$

folglich

$$K = 2\,m\,\mu\,e\,\varkappa\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{e^2+x^2\sin.^2\varphi} = \frac{2\,m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\varphi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\frac{\sin.\varphi}{e}\,dx}{1+\frac{x^2\sin.^2\varphi}{e^2}}$$

$$= \frac{2\,m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\varphi}\Big[\text{arc. tg.}\frac{x\sin\varphi}{e}\Big]_{x = x_1}^{x = x_2}$$

$$= \frac{2\,m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\varphi}\left\{\text{arc. tg.}\frac{x_2\sin.\varphi}{e} - \text{arc. tg.}\frac{x_1\sin.\varphi}{e}\right\}$$

und

$$EK = 2\,m\,\mu\,e\,\varkappa\int_{x_1}^{x_1}\frac{x\,dx}{e^2+x^2\sin.^2\varphi} = \frac{m\,\mu\,e\,\varkappa}{\sin.^2\varphi}\,\text{log. nat.}\frac{e^2+x_2^2\sin.^2\varphi}{e^2+x_1^2\sin.^2\varphi},$$

also

$$E = \frac{e\left\{\text{log. nat.}(e^2+x_2^2\sin.^2\varphi) - \text{log. nat.}(e^2+x_1^2\sin.^2\varphi\right\}}{\sin.\varphi\left(\text{arc. tg.}\frac{x_2\sin.\varphi}{e} - \text{arc. tg.}\frac{x_1\sin.\varphi}{e}\right)}$$

Sind AA^1 und BB^1 die Entfernungen der Punkte A und B von CD und γ der Bogen des Winkels zwischen AA^1 und BB^1, so wird

$$E = \frac{2\,e\,l.\frac{BB^1}{AA_1}}{\gamma\ \sin.\ \varphi};\ K = \frac{2\,m\,\mu\,\varkappa\,\gamma}{\sin.\ \varphi}.$$

Ist auch die zweite Linie unendlich lang, also $x_2 = - x_1 = \infty$, so wird

$$E = O.$$

$$K = \frac{2\,m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\ \varphi}.\ \pi^{*})$$

d. h.: Die Kraft, mit welcher sich zwei unendlich lange materielle, nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehende gerade Linien einander in der Richtung ihrer kürzesten Entfernung zu nähern streben ist unabhängig von ihrer Entfernung und dem Sinus ihres Winkels umgekehrt proportional.

B. Wirken die Elemente auf einander nach dem Gesetze der Elasticität, ist also

$$f(\varrho) = \varkappa\,\varrho,$$

so wird

$$K = m\,\mu\,e\,\varkappa \int_{x_1}^{x_2} x\,dx \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$= m\,\mu\,e\,\varkappa\,(x_2 - x_1)\,(y_2 - y_1)$$

oder, wenn die Längen der Linien mit L und $\varLambda$ bezeichnet werden,

$$K = m\,\mu\,e\,\varkappa\,L\,\varLambda$$

und

$$E\,K = m\,\mu\,e\,\varkappa \int_{x_1}^{x_2} x\,dx \int_{y_1}^{y_2} dy$$

---

*) Es sei mir gestattet, hier auf eine mir bisher unbekannte Näherungs-Construction von Π hinzuweisen, welche freilich nur theoretisches Interesse bietet — Es ist:

$$\sin.\ \alpha = 2^n \cos.\ \frac{\alpha}{2}\ \cos.\ \frac{\alpha}{4}\ \cos.\ \frac{\alpha}{8}\ \ldots\ \cos.\ \frac{\alpha}{2^n}\ \sin.\ \frac{\alpha}{2^n},\ \text{also für } n = \infty$$

$$\sin.\ \alpha = \alpha.\ \cos.\ \frac{\alpha}{2}\ \cos\ \frac{\alpha}{4}\ \cos.\ \frac{\alpha}{8}\ \ldots\ \text{in inf.}$$

oder

$$\alpha = \frac{\sin.\ \alpha}{\cos.\ \frac{\alpha}{2}\ \cos.\ \frac{\alpha}{4}\ \cos.\ \frac{\alpha}{8}\ \cdots}$$

also

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos.\ \frac{\pi}{4}\ \cos.\ \frac{\pi}{8}\ \cos.\ \frac{\pi}{16}\ \cdots}$$

d. h.: Errichtet man im Punkte A eines Kreis-Quadranten AOB ein Loth AX_1 bis zur Halbirungslinie des Winkels AOB in X_2, ein zweites Loth X_1Y_2 bis zur Halbirungslinie von X_1OB, in X_2 bis zur nächsten u. s. w., so nähert sich die Linie OX unbegrenzt der Länge des Kreisbogens AB. -- Der Fehler ist jedesmal kleiner als $OY - OX_n$, wenn X_nY das bis OB verlängerte Loth in X_n bezeichnet.

$$= m \mu e \varkappa \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \varDelta = m \mu e \varkappa L \varDelta \frac{x_2 + x_1}{2}$$

also, wenn ξ die Entfernung der Mitte der Linie A B von P bedeutet:

$$E K = m \mu e \varkappa L \varDelta \xi$$

und

$$E = \xi.$$

Die gegenseitige Anziehungskraft zweier materieller gerader Linien, welche nach dem Gesetze der Elasticität auf einander wirken, ist in der Richtung ihrer kürzesten Entfernung nur von dieser Entfernung und ihrer Länge abhängig, von ihrer sonstigen Lage und Richtung aber unabhängig.

Zwei Linien von constanter Länge in parallelen Ebenen ziehen einander mit constanter Kraft an.

Die Attractionskraft zweier nicht paralleler und nicht anstossender Kanten eines Parallelepipedons ist in der Richtung ihrer Entfernung dem Inhalte des Parallelepipedons proportional.

Der Angriffspunkt der Kraft liegt im Mittelpunkt jeder Linie.

2. Drehungsmomente.

In Folgendem werde unter dem Drehungsmomente D einer geraden Linie in einer bestimmten Ebene die Summe der Produkte aller auf dieselbe in der Ebene wirkenden Kräfte in ihre Hebelarme verstanden.

1. Drehungsmoment einer geraden Linie, welche von einem festen Punkt angezogen wird.

Eine gerade materielle Linie A B mit der Masseneinheit m möge sich um einen ihrer Punkte P in einer festen Ebene drehen können. Q sei ein Punkt mit der Masse μ, welcher jedes Linienelement nach dem Gesetze $f(\varrho)$ anzieht. Q werde vorläufig in der Drehungsebene angenommen. Das Linienelement dx der Linie A B am Punkte Q wird von Q mit der Kraft $m \mu\, dx\, f(\varrho)$ in der Richtung X Q angezogen. Die gegen A B senkrecht gerichtete Componente dieser Kraft ist

$$m \mu\, dx\, f(\varrho) \sin. P X Q,$$

oder da

$$\sin. P X Q = \frac{P Q \sin. X P Q}{X P}$$

ist

$$= m \mu P Q \sin. X P Q \frac{f(\varrho)}{\varrho} dx.$$

Setzt man also

$$P Q = e;\ X P Q = \varphi,\ P X = x,\ P A = x_1,\ P B = x_2,$$

so wird die Componente

$$= m \mu e \sin \varphi \frac{f(\varrho)}{\varrho} dx,$$

also das Drehungsmoment der Linie

$$D = m \mu e \sin. \varphi \int_{x_1}^{x_2} \frac{x f(\varrho) dx}{\varrho},$$

wo e sin. φ die Entfernung des Punktes P von der Linie repräsentirt, und wo

$$\varrho^2 = e^2 + x^2 - 2 e x \cos. \varphi$$

ist.

A. In der Voraussetzung des Newton'schen Gesetzes $f(\varrho) = \frac{\varkappa}{\varrho^2}$ wird

$$D = m \mu e \varkappa \sin. \varphi \int_{x_1}^{x_2} \frac{x\, dx}{\sqrt{(e^2 + x^2 - 2 e x \cos. \varphi)^3}}.$$

Es ist

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{(e^2 + x^2 - 2 e x \cos. \varphi)^3}} = \int \frac{(x - e \cos. \varphi)\, dx}{\sqrt{(e^2 + x^2 - 2 e x \cos. \varphi)^3}} + e \cos. \varphi \int \frac{dx}{\sqrt{(e^2 + x^2 - 2 e x \cos. \varphi)^3}}$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{e^2 + x^2 - 2 e x \cos. \varphi}} + e \cos. \varphi \frac{x - e \cos. \varphi}{e^2 \sin.^2 \varphi \sqrt{e^2 + x^2 - 2 e x \cos. \varphi}}$$

$$= \frac{- e \sin.^2 \varphi + x \cos. \varphi - e \cos.^2 \varphi}{e \sin.^2 \varphi \sqrt{e^2 + x^2 - 2 e x \cos. \varphi}}$$

$$= \frac{x \cos. \varphi - e}{e \sin.^2 \varphi \sqrt{e^2 + x^2 - 2 e x \cos \varphi}},$$

also

$$D = \frac{m \mu \varkappa}{\sin. \varphi} \left\{ \frac{x_2 \cos. \varphi - e}{\sqrt{e^2 + x_2^2 - 2 e x_2 \cos. \varphi}} - \frac{x_1 \cos. \varphi - e}{\sqrt{e^2 + x_1^2 - 2 e x_1 \cos. \varphi}} \right\}.$$

Sind A^1 und B^1 die Projektionen der Punkte A und B auf P Q, so ist

$$x_2 \cos. \varphi - e = - B^1 Q; \quad x_1 \cos. \varphi - e = - A^1 Q,$$

$$\sqrt{e^2 + x_2^2 - e x_2 \cos. \varphi} = B Q, \quad \sqrt{e^2 + x_1^2 - 2 e x_1 \cos. \varphi} = A Q,$$

also

$$\frac{x_2 \cos. \varphi - e}{\sqrt{e^2 + x_2^2 - 2 e x_2 \cos. \varphi}} = - \cos. BQP, \quad \frac{x_1 \cos. \varphi - e}{\sqrt{e_2 + x_1^2 - 2 e x_1 \cos. \varphi}} = - \cos. AQP.$$

Demnach ist, wenn $A Q P = \alpha_1$, $B Q P = \alpha_2$ gesetzt wird:

$$D = \frac{m \mu \varkappa}{\sin. \varphi} (\cos. \alpha_1 - \cos. \alpha_2)$$

oder auch, wenn Q M den Winkel A Q B halbirt und Winkel M Q P mit δ, AQB mit γ bezeichnet wird

$$D = \frac{2 m \mu \varkappa \sin. \frac{\gamma}{2} \sin. \frac{\delta}{2}.}{\sin. \varphi}$$

Ist S der Scheitelpunkt eines Winkels, so ist das Drehungsmoment einer Linie zwischen seinen Schenkeln, welche sich um einen festen Punkt P drehen kann und von S nach dem Newton'schen Gesetze angezogen wird, nur von dem Winkel abhängig, den sie mit P S bildet, und zwar dem Sinus desselben umgekehrt proportional. — Für parallele Linien zwischen den Schenkeln, deren fester Pnnkt auf P S liegt, ist das Drehungsmoment constant.

Gleichgewicht findet dann, und nur dann statt, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ ist, d. h.:

Eine um einen Punkt drehbare von einem festen Punkte nach dem Newton'schen Gesetze angezogene Linie befindet sich im Gleichgewicht, wenn ihre beiden Hebelarme von dem festen Punkte aus gleich gross erscheinen, ein Satz, der sich durch eine drehbare Nadel und einen Magnet experimentell beweisen lässt.

Demnach ist eine um P drehbare Linie A B für alle Punkte eines über P und dem vierten zu A P B harmonischen Punkte construirten Halbkreises im Gleichgewicht, also auch für einen beliebigen Bogen desselben.

Anmerkung: Nehmen wir statt der Linie A B einen Punkt mit der Masse M und nennen seine Entfernung vom Drehungspunkte ξ, so ist nach Obigem das Drehungsmoment

$$= M \mu e \sin. \varphi \frac{\xi}{\varrho^3}.$$

Zwei an den Endpunkten eines Hebels mit den beiden Armen ξ und ξ_1 befindliche Massen M und M_1, welche von einem festen Punkte angezogen werden, befinden sich also im Gleichgewicht, wenn sich ihre Entfernungen von dem Punkte

$$= \sqrt[3]{M \xi} : \sqrt[3]{M_1 \xi_1}$$

verhalten. — Ist der Punkt von beiden gleich weit entfernt, so gilt das gewöhnliche Hebelgesetz. —

Ist die Linie A B nach beiden Seiten hin unendlich lang, so wird

$$\alpha_1 = -\varphi, \ \alpha_2 = 180 - \varphi,$$

also

$$D = 2 \, m \mu \varkappa \operatorname{cotg.} \varphi.$$

Dasselbe ist unabhängig von P Q.

B. Für den Fall $f(\varrho) = \varkappa \varrho$ wird

$$D = m \mu e \varkappa \sin. \varphi \int_{x_1}^{x_2} x \, dx$$

$$= m \mu e \varkappa \sin. \varphi \frac{x_2^2 - x_1^2}{2},$$

also, wenn l die Länge von A B und ξ die Entfernung ihrer Mitte von P bedeutet:

$$D = m \mu e \varkappa . l \xi . \sin. \varphi.$$

Es findet das Gleichgewicht statt, wenn $\xi = o$ ist, d. h.:

Eine um ihren Mittelpunkt drehbare, von einem festen Punkte nach dem Elasticitätsgesetze angezogene gerade Linie befindet sich für jede Lage des anziehenden Punktes im Gleichgewicht.

Liegt der Punkt Q nicht in der Drehungsebene, so ist das Drehungsmoment dem vorigen gleich, nur multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels zwischen A Q B und jener Ebene. Die Gesetze für das Gleichgewicht bleiben genau dieselben; es kann also an die Stelle des Kreisbogens sub A. ein beliebiges Stück der entsprechenden Kugel und sub B. jeder anziehende Punkt im Raume, folglich auch jede Fläche und jeder beliebige Körper gesetzt werden.

2. Drehungsmoment zweier Linien in einer Ebene.

Zwei gerade materielle Linien A B und C D mit den Masseneinheiten m und μ und dem Durchschnittspunkte S liegen in einer Ebene und können sich in derselben um die festen Punkte P und Q drehen. Ihre Elemente mögen sich wieder nach dem Gesetze $f(\varrho)$ anziehen. Sind dann X und Y beliebige Punkte auf A B resp. C D, und setzt man

$$SP = p,\ SQ = q;\ SX = x,\ SY = y;\ \angle ASC = \varphi,$$

so ist nach 1 das Drehungsmoment, welches auf A B durch die Anziehung des Linienelements dy ausgeübt wird

$$D = m\mu y \sin.\varphi\, dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x-p)\, f(\varrho)}{\varrho}\, dx;$$

folglich sind die Drehungsmomente D_x und D_y beider Linien:

$$D_x = m\mu \sin.\varphi \int_{x_1}^{x_2} (x-p)\, dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{y\, f(\varrho)\, dx}{\varrho}$$

und

$$D_y = m\mu \sin.\varphi \int_{y_1}^{y_2} (y-q) \int_{x_1}^{x_2} \frac{x\, f(\varrho)\, dx}{\varrho},$$

wo $x_1 = SA$, $x_2 = SB$; $y_1 = SC$, $y_2 = SD$ und $\varrho^2 = x^2 + y^2 - 2\,xy \cos.\varphi$ ist.

A. Ist wieder $f(\varrho) = \frac{\varkappa}{\varrho^2}$, so wird

$$D_x = m\mu\varkappa \sin.\varphi \int_{x_1}^{x_2} (x-p)\, dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{y\, dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 2\,xy \cos.\varphi}}.$$

Nun ist bereits gefunden

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{y\, dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 2\,xy \cos.\varphi)^3}} = \frac{y_2 \cos.\varphi - x}{x \sin.^2\varphi \sqrt{x^2 + y_2^2 - 2\,xy_2 \cos.\varphi}} - \frac{y_1 \cos.\varphi - x}{x \sin.^2\varphi \sqrt{x^2 + y_1^2 - 2\,xy_1 \cos.\varphi}},$$

also wird

$$D_x = \frac{m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\,\varphi}\left\{\int_{x_1}^{x_2}\frac{(y_2\cos.\,\varphi - x)(x-p)}{x\sqrt{x^2+y_2^2-2\,xy_2\cos.\,\varphi}}\,dx - \int_{x_1}^{x_2}\frac{(y_1\cos.\,\varphi - x)(x-p)}{x\sqrt{x^2+y_1^2-2\,xy_1\cos.\,\varphi}}\,dx\right\}.$$

Es ist aber

$$I = \int\frac{(y\cos.\,\varphi - x)(x-p)}{x\sqrt{x^2+y^2-2\,xy\cos.\,\varphi}}\,dx = \int\frac{-x(x-y\cos.\,\varphi)+px-py\cos.\,\varphi}{x\sqrt{x^2+y^2-2\,xy\cos.\,\varphi}}\,dx$$

$$= -\int\frac{(x-y\cos.\,\varphi)\,dx}{\sqrt{x^2+y^2-2\,xy\cos.\,\varphi}} + p\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos.\,\varphi}} - py\cos.\,\varphi\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos.\,\varphi}}.$$

$$\int\frac{x-y\cos.\,\varphi}{\sqrt{x^2+y^2-2\,xy\cos.\,\varphi}}\,dx = \sqrt{x^2+y^2-2\,xy\cos\varphi};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2-2\,xy\cos.\,\varphi}} = \log.\,\text{nat.}\,(x-y\cos.\,\varphi+\sqrt{x^2+y^3-2\,xy\cos.\,\varphi})$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+y^3-2\,xy\cos.\,\varphi}} = -\frac{1}{y}\log.\,\text{nat.}\,(y-x\cos.\,\varphi+\sqrt{x+y-2\,xy\cos.\,\varphi})$$
$$+\frac{1}{y}\log.\ \text{nat.}\ xy,$$

also

$$I = -\sqrt{x^2+y^2-2\,xy\cos.\,\varphi} + p\log.\,\text{nat.}\,(x-y\cos.\,\varphi+\sqrt{x^2+y^2-2\,xy\cos.\,\varphi})$$
$$-p\cos.\,\varphi\log.\,\text{nat.}\,(y-x\cos.\,\varphi+\sqrt{x^2+y^2-2\,xy\cos.\,\varphi}) + p\cos.\,\varphi\log.\,\text{nat.}\,xy.$$

Folglich

$$D = \frac{m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\,\varphi}\left\{\sqrt{x_1^2+y_1^2-2x_1y_1\cos.\,\varphi} - \sqrt{x_2^2+y_2^2-2x_2y_2\cos.\,\varphi} - \sqrt{x_1^2+y_2^2-2x_1y_2\cos.\,\varphi}\right.$$
$$\left.+\sqrt{x_2^2+y_1^2-2\,x_2y_1\cos.\,\varphi}\right\} + p\,\frac{m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\,\varphi}\left\{l.\,\frac{(x_2-y_2\cos.\,\varphi+\sqrt{x^2+y^2-2\,xy\cos.\,\varphi})}{(x_1-y_2\cos.\,\varphi+\sqrt{x_1^2+y_2^2-2x_1y_2\cos.\,\varphi})}\right.$$
$$\frac{(x_1-y_1\cos.\,\varphi+\sqrt{x_1^2+y_1^2-2\,x_1y_1\cos.\,\varphi})}{(x_2-y_1\cos.\,\varphi+\sqrt{x_2^2+y_1^2-2\,x_2y_1\cos.\,\varphi})} - \cos.\,\varphi\ l.\,\frac{(y_2-x_2\cos.\,\varphi}{(y_2-x_1\cos.\,\varphi}$$
$$\left.\frac{+\sqrt{x_2^3+y_2^2-2\,x_2y_2\cos.\,\varphi})\,(y_1-x_1\cos.\,\varphi+\sqrt{x_1^2+y_1^2-2\,x_1y_1\cos.\,\varphi})}{+\sqrt{x_1^2+y_2^2-2\,x_1y_2\cos.\,\varphi})\,(y_1-x_2\cos.\,\varphi+\sqrt{x_2^2+y_1^2-2\,x_2y_1\cos.\,\varphi})}\right\}$$

Dabei ist

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2-2x_1y_1\cos.\,\varphi} = AC,\ \sqrt{x_1^2+y_2^2-2x_1y_2\cos.\,\varphi} = AD,\ \sqrt{x_2^2+y_1^2-2\,x_2y_1\cos.\,\varphi} = BC,$$
$$\sqrt{x_2^2+y_2^2-2\,x_2y_2\cos.\,\varphi} = BD$$

und, wenn A^1, B^1, C^1, D^1 die Projektionen von A, B, C, D auf die andere Linie sind

$x_2 - y_2\cos.\,\varphi = BD^1$, $x_2 - y_1\cos.\,\varphi = BC^1$, $x_1 - y_2\cos.\,\varphi = AD^1$, $x_1 - y_1\cos.\,\varphi = AC^1$

$y_2 - x_2\cos.\,\varphi = B^1D$, $y_1 - x_2\cos.\,\varphi = B^1C$, $y_2 - x_1\cos.\,\varphi = A^1D$, $y_1 - x_1\cos.\,\varphi = A^1C$

also

$$D_x = \frac{m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\,\varphi}(AD + BC - AC - BD) + p\,\frac{m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\,\varphi}\left\{ l.\,\frac{(BD^1 + BD)\,(AC^1 + AC)}{(AD^1 + AD)\,(BC^1 + BC)} - \cos.\,\varphi\, l.\,\frac{(B^1D + BD)\,(A^1C + AC)}{(A^1D + AD)\,(B^1C + BC)} \right\}.$$

Durch Vertauschung von p mit q erhält man D_y. In dem speciellen Falle, dass der Drehungspunkt mit dem Durchschnittspunkte der beiden Linien zusammenfällt, wird $p = q = o$ und das gegenseitige Drehungsmoment beider Linien

$$D = \frac{m\,\mu\,\varkappa}{\sin.\,\varphi}\left\{ AD + BC - AC - BD \right\},$$

d. h.: Das gegenseitige Drehungsmoment zweier, um den gemeinschaftlichen Punkt drehbarer, nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehender Linien ist dem Ueberschuss der Summe zweier Gegenseiten des Vierecks, dessen Diagonalen die Linien sind, über die der beiden andern direkt und dem Sinus ihres Winkels umgekehrt proportional.

Wird die eine Linie CD nach beiden Seiten hin unendlich lang, so ist

$$AD - BD = AB\cos.\,\varphi \text{ und } BC - AC = AB\cos.\,\varphi,$$

also für $AB = 1$

$$D = m\,\mu\,\varkappa\, l\,\operatorname{cotg.}\varphi.$$

Das Drehungsmoment wird unabhängig von der Lage des Punktes, in welchem AB von CD geschnitten wird.

Soll Gleichgewicht herrschen, so muss

$$AD + BC - BD - AC = o$$

sein, d. h.: Zwei einander anziehende, um ihren Durchschnittspunkt drehbare Linien befinden sich dann, und nur dann im Gleichgewicht, wenn sie die Diagonalen eines Tangentenvierecks bilden.

B. Für $f(\varrho) = \varkappa\,\varrho$ wird

$$D_x = m\,\mu\,\varkappa\sin.\,\varphi\int_{x_1}^{x_2}(x - p)\,dx\int_{y_1}^{y_2} y\,dy = \frac{m\,\mu\,\varkappa\sin.\,\varphi}{4}\left\{(x_2 - p)^2 - (x_1 - p)^2\right\}(y_2^2 - y_1^2)$$

$$= m\,\mu\,\varkappa\sin.\,\varphi\,\frac{BP^2 - PA^2}{2}\cdot\frac{SD^2 - SC^2}{2},$$

oder, wenn AB mit L, CD mit $\varLambda$ und die Entfernung ihrer Mittelpunkte von S mit l und λ und von P, resp. Q mit l^1 und λ^1 bezeichnet wird

$$D_x = m\,\mu\,\varkappa\sin.\,\varphi\,.\,L\,l^1\,.\,\varLambda\,\lambda,$$

und entsprechend

$$D_y = m\,\mu\,\varkappa\sin.\,\varphi\,.\,\varLambda\,\lambda^1\,.\,L\,l.$$

Es findet Gleichgewicht statt, wenn l, resp. l^1, oder λ^1 resp. $\lambda = o$ wird, d. h.: Die angezogene Linie ist im Gleichgewicht, wenn sie sich entweder um ihren Mittelpunkt drehen kann (was bereits oben gefunden ist), oder die anziehende Linie durch sie halbirt wird.

3. Nehmen wir jetzt zwei beliebige gerade Linien, A B und C D im Raume, welche sich um einen ihrer Punkte P resp. Q in zwei beliebigen Ebenen drehen können und einander anziehen. Der Winkel der Ebenen sei γ und ihre Durchschnittslinie werde von A B und C D in S und T geschnitten. Zur Bestimmung der Lage setzen wir: S T = e, S P = p, T Q = q; $\angle$ T S A = α, $\angle$ S T C = β; S A = x_1, S B = x_2, T C = y_1, T D = y_2. Alsdann ergiebt sich das Drehungsmoment D_x der ersten Linie in ähnlicher Weise wie in den früheren Fällen:

$$D_x = m\mu \int_{x_1}^{x_2} (x - p)\, dx \int_{y_1}^{y_2} \left\{ e \sin.\alpha - y\,(\sin.\alpha \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta \cos.\gamma) \right\} \frac{f(\varrho)}{\varrho}\, dy,$$

wo ϱ diesmal bestimmt ist durch

$\varrho^2 = e^2 + x^2 + y^2 - 2\,x\,y\,(\sin.\alpha \sin.\beta \cos.\gamma - \cos.\alpha \cos.\beta) - 2\,e\,(x \cos.\alpha + y \cos.\beta)$

Bezeichnen wir noch den Winkel zwischen beiden Linien mit φ und den, welchen die eine mit der auf der andern in der Drehungsebene derselben senkrechten Richtung bildet mit φ' resp. φ'', so ist

$$\cos.\varphi = \sin.\alpha \sin.\beta \cos.\gamma - \cos.\alpha \cos.\beta \text{ und}$$

$\cos.\varphi' = \sin.\alpha \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta \cos.\gamma$, $\cos.\varphi'' = \sin.\beta \cos.\alpha + \cos.\beta \sin.\alpha \cos.\gamma$ also

$$D_x = m\mu \int_{x_1}^{x_2} (x - p)\, dx \int_{y_1}^{y_2} (e \sin.\alpha - y \cos.\varphi') \frac{f(\varrho)}{\varrho}\, dy; \text{ und}$$

$$\varrho^2 = e^2 + x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cos.\varphi - 2\,e\,(x \cos.\alpha + y \cos.\beta).$$

Durch Vertauschung von α und β, p und q, φ' und φ'' erhält man D_y.

Stehen die Linien auf der Durchschnittslinie senkrecht, ist also $\alpha = \beta = 90^0$, so kommen wir auf den unter I für E K entwickelten Ausdruck zurück. — Wird $\gamma = o$, so fallen die Linien in eine Ebene und setzten wir dann e = o, was gestattet ist, da in diesem Falle die Durchschnittslinie an eine beliebige Stelle gelegt werden kann, so reducirt sich die Formel auf die in II., 2 gefundene.

Wenn die Drehungsebenen parallel liegen, so wird die Form des Integrals unbrauchbar. Man findet aber leicht direkt, wenn unter e in diesem Falle die kürzeste Entfernung der Linien verstanden wird:

$$D_x = m\,\mu \sin.\varphi \int_{x_1}^{x_2} (x - p)\, dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{y\, f(\varrho)}{\varrho}\, dy, \text{ und}$$

$$\varrho^2 = e^2 + x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cos.\varphi.$$

A. Für $f(\varrho) = \frac{\varkappa}{\varrho^2}$ wird:

$$D = m\mu\varkappa \int_{x_1}^{x_2} (x - p)\, dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{(e \sin.\alpha - y \cos.\varphi')\, dy}{\sqrt{(e^2 + x^2 + y^2 - 2xy \cos.\varphi - 2\,e\,(+ \cos.\alpha + y \cos.\beta))^3}},$$

oder nach der ersten Integration, mit Berücksichtigung der Beziehungen zwischen den Winkeln:

$$D = m\mu\varkappa \int_{x_1}^{x_2} (x-p)\,dx \left[\frac{e^2 \cos.\alpha \sin.\beta \cos.\gamma + x^2 \cos.\varphi' - x\,y \cos.\varphi \cos.\varphi' -}{(e^2 \sin.^2\beta + x^2 \sin.^2\varphi - 2\,e\,x \sin.\beta \cos.\varphi'')} \right.$$

$$\left. \frac{e\,x(\cos.\alpha \cos.\varphi' + \sin.\beta \cos.\gamma) - e\,y(\cos.\beta \cos.\varphi' - \sin.\alpha)}{\sqrt{e^2 + x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cos.\varphi - 2\,e(x \cos.\alpha + y \cos.\beta)}} \right]_{y=y_1}^{y=y_2}$$

Die Integration lässt sich nach den gewöhnlichen Methoden vollständig ausführen, giebt aber im Allgemeinen kein übersichtliches Resultat.

Sind die Drehungsebenen parallel und die Fusspunkte der kürzesten Entfernung zugleich die Drehungspunkte, so wird

$$D_x = D_y = m\mu\varkappa \sin.\varphi \int_{x^1}^{x^2}\int_{y^1}^{y^2} \frac{x\,y\,dx\,dy}{\sqrt{(e^2 + x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cos.\varphi)^3}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{(e^2+x^2+y^2-2\,x\,y \cos.\varphi)^3}} = \frac{x\,y \cos.\varphi - x^2 - e^2}{(e^2 + x^2 \sin.^2\varphi)\sqrt{e^2 + x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cos.\varphi}}, \text{ also}$$

$$D = m\mu\varkappa \left\{ - \frac{\sqrt{e^1 + x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cos.\varphi}}{\sin.\varphi} \right\}_{y=y_1}^{y=y^2}$$

$$- e^2 \operatorname{cotg.}\varphi \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{y - x \cos.\varphi}{(e^2 + x^2 \sin.^2\varphi)\sqrt{e^2 + x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cos\varphi}} \right\}_{y=y_1}^{y=y_2} dx.$$

Das zweite Integral reducirt sich, wie oben gefunden, durch die Substitution $\sqrt{e^2 + x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cos.\varphi} - x = u$ auf die Form

$$= \frac{1}{2 \sin.^2 \frac{\varphi}{2}} \int \frac{du}{(u-y)^2 + e^2 \operatorname{cotg.}^2 \frac{\varphi}{2}} + \frac{1}{2 \cos.^2 \frac{\varphi}{2}} \int \frac{du}{(u+y)^2 + e^2 \operatorname{tg.}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$= - \frac{1}{e \sin.\varphi} \left\{ \operatorname{arc.tg.} \frac{(u-y) \operatorname{tg.}\frac{\varphi}{2}}{e} - \operatorname{arc.tg.} \frac{(u+y) \operatorname{cotg.}\frac{\varphi}{2}}{e} \right\}$$

also wird

$$D = m\mu\varkappa \left\{ - \frac{\sqrt{e^2+x^2+y^2-2xy \cos\varphi}}{\sin.\varphi} + \frac{e \cos.\varphi}{\sin.^2\varphi} \left(\operatorname{arc.tg.} \frac{\sqrt{e^2+x^2+y^2-2xy \cos.\varphi} - x - y}{e \operatorname{cotg.}\frac{\varphi}{2}} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{arc.tg.} \frac{\sqrt{e^2 + x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cos.\varphi} - x + y}{e \operatorname{tg.}\frac{\varphi}{2}} \right\}_{x=x_1,\ y=y^1}^{x=x_2,\ y=y^2}$$

Stehen die beiden Linien auf einander senkrecht, so wird

$$D = \frac{m \mu \varkappa}{\sin. \varphi} \left\{ AD + BC - BD - AC \right\}.$$

Es findet wieder Gleichgewicht statt, wenn das windschiefe Viereck ABCD einer Kugel umgezeichnet ist.

Erstreckt sich CD nach beiden Seiten ins Unendliche, so wird

$$D = m \mu \varkappa \sin. 2 \varphi \int \frac{x\, dx}{e^2 + x^2 \sin.^2 \varphi} = \frac{2\, m \mu \varkappa \cos. \varphi}{e} \left\{ \text{arc. tg.} \frac{x_2 \sin. \varphi}{e} - \text{arc. tg.} \frac{x_1 \sin. \varphi}{e} \right\}.$$

Lassen wir eine gerade Linie sich so bewegen, dass sie auf CD senkrecht bleibt und stets beide Linien schneidet, so stellt der Ausdruck in der letzten Klammer den Bogen des Winkels dar, um welchen sich diese Linie dreht, wenn sie von A bis B fortrückt. Bezeichnen wir denselben mit ε, so wird

$$D = \frac{2\, m \mu \varkappa \varepsilon \cos. \varphi}{e}.$$

Für zwei Linien, welche einander schneiden und sich um ihren Durchschnittspunkt, aber in verschiedenen Ebenen drehen können, wird in der allgemeinen Formel $e = o$, $p = q = o$, und es ist

$$D_x = D_y = m \mu \varkappa \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_2}^{y_2} \left(\frac{x \cos. \varphi' - y \cos. \varphi \cos. \varphi'}{\sin.^2 \varphi \sqrt{x^2 + y^2 - 2\, x y \cos. \varphi}} \right) dx$$

$$= \frac{m \mu \varkappa \cos. \varphi'}{\sin.^2 \varphi} \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2\, x y \cos. \varphi} \right)_{x = x_1,\, y = y_1}^{x = x_2,\, y = y_2}, \text{ also}$$

$$D = \frac{m \mu \varkappa \cos. \varphi'}{\sin.^2 \varphi} \left\{ BD + AC - BC - AD \right\}.$$

Die Bedingung für das Gleichgewicht ist wiederum $AC + BD = AD + BC$.

B. Setzen wir $f(\varrho) = \varkappa \varrho$, so wird

$$D_x = m \mu \varkappa \int_{x_1}^{x_2} (x - p)\, dx \int_{y_1}^{y_2} (e \sin. \alpha - y \cos. \varphi')\, dy$$

$$= \frac{1}{4} m \mu \varkappa \left\{ (x_2 - p)^2 - (x_1 - p)^2 \right\} \left\{ 2\, e \sin. \alpha (y_2 - y_1) - \cos. \varphi' (y_2^2 - y_1^2) \right\},$$

also nach der obigen Bezeichnung:

$D_x = m \mu \varkappa L l' \varLambda (e \sin. \alpha - \lambda \cos. \varphi')$; $D_y = m \mu \varkappa \varLambda \lambda' L (e \sin. \beta - l \cos. \varphi'')$.

3. Bewegung.

Schliesslich mögen noch die Gleichungen für die Bewegung der Linien unter gegenseitigem Einflusse aufgestellt werden. Es sei T das Trägheitsmoment einer geraden Linie, welche mit einer festen Axe den Winkel φ bildet und sich in einer festen Ebene um einen auf ihr gelegenen Punkt drehen kann; also in unserem Falle für die erste Linie

$$T = \frac{m}{3}(x_2^3 - x_1^3) = \frac{m L^3}{3} \pm m L x^1,$$

wo x^1 die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen der Endpunkte der Linien von dem Drehungspunkte bedeutet und $= o$ wird, wenn die Linie in diesem Punkte anfängt. Wirkt dann auf sie eine durch das Drehungsmoment D repräsentirte Kraft, so ist die Gleichung für ihre Bewegung $T \frac{d^2\varphi}{d t^2} = D$. — Für zwei Linien, auf welche nur ihre Anziehung wirkt, lassen sich die D, wie in Obigem zum Theil ausgeführt ist, als Funktionen constanter Grössen und der beiden Winkel α und β, welche sie mit der Durchschnittslinie der Drehungsebenen bilden, darstellen. Diese seien $F(\alpha, \beta)$ und $F_1(\alpha, \beta)$. Dann sind die Gleichungen

$$T \frac{d^2\alpha}{d t^2} = F(\alpha, \beta);\; T_1 \frac{d^2\beta}{d t^2} = F_1(\alpha, \beta).$$

In manchem der betrachteten Fälle, z. B. wenn sich die Linien um einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, wenn auch in verschiedenen Ebenen, drehen können, wird $F = F_1$, also

$$T \frac{d^2\alpha}{d t^2} = T_1 \frac{d^2\beta}{d t}, \text{ folglich}$$

$$T \frac{d\alpha}{d t} = T_1 \frac{d\beta}{d t} + \text{Const.}$$

und bei der Annahme, dass beide die Bewegung zu gleicher Zeit anfangen

$$T w = T_1 w_1 \text{ oder } w : w_1 = T_1 : T,$$

wenn w und w_1 die Wirbelgeschwindigkeiten sind. Die Winkel α und β mögen im Anfange α_1 und β_1 sein; dann folgt weiter

$$T(\alpha - \alpha_1) = T_1(\beta - \beta_1).$$

In dem Falle, dass beide Linien in derselben Ebene bleiben, lässt sich die feste Axe stets so bestimmen, dass $T\alpha_1 = T_1\beta_1$ ist, also wird dann

$$\alpha : \beta = T_1 : T.$$

Mit Hülfe dieser oder der vorigen Relation reducirt sich $F(\alpha, \beta)$ auf $\Phi(\alpha)$ oder $\Phi_1(\beta)$ und es wird

$$T \frac{d^2(\alpha)}{dt.^2} = \Phi(\alpha);\; T_1 \frac{d^2(\beta)}{dt.^2} = \Phi(\beta).$$

Wird beispielsweise eine Linie A B mit dem festen Punkte A von einer in ihrer Drehungsebene liegenden durch A gehenden unendlich langen Geraden nach dem Newton'schen Gesetze angezogen, so ist, wie oben gefunden $D = 2\, m \mu \varkappa l \text{ cotg. } \varphi$, also

$$\frac{L^3}{3} \frac{d^2\varphi}{d t^2} = -2 \mu \varkappa l \text{ cotg. } \varphi, \text{ also}$$

$$w^2 = -\frac{4 \mu \varkappa l}{3 L^3} \text{ log. nat. sin. } \varphi.$$

Die vollständige Integration lässt sich indessen nur in seltenen Fällen ausführen.

Bei der Voraussetzung, dass eine Gerade von einer andern in ihrer Drehungsebene gelegenen Linie nach dem Elasticitätsgesetze angezogen wird, wurde D in der Form $C \text{ sin. } \varphi$ gefunden, also ist dann

$$T \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = C \sin. \varphi.$$

Dies ist aber genau dieselbe Gleichung, wie die, welche für die Bewegung eines Pendels gilt und in bekannter Weise durch elliptische Funktionen aufgelöst werden kann. In der gemachten Voraussetzung befolgt also die Linie das gewöhnliche Pendelgesetz.

Dasselbe gilt auch wenn die anziehende Linie durch den Drehungspunkt geht, und die sich bewegende nicht in einer festen Ebene, sondern frei im Raume schwingen kann.

II.

Curven gleicher Steilheit

auf Flächen zweiten Grades.

Die Steilheit einer Fläche in Bezug auf eine feste Ebene wird in jedem Punkte durch den Winkel bestimmt, den die in diesem Punkte angelegte Tangentialebene mit der festen Ebene bildet. Die Reihe der Punkte, für welche dieser Winkel, der mit α bezeichnet werde, constant ist, möge die Curve gleicher Steilheit und die feste Ebene die Richtungsebene genannt werden. Die Gleichungen der Curve lassen sich ohne Weiteres aufstellen. Ist $F(x, y, z) = o$ die Gleichung einer beliebigen Fläche n^{ten} Grades in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z Axe auf der Richtungsebene senkrecht steht, so wird der Winkel α zwischen der Tangentialebene im Punkte ξ, η, ζ und der Ebene x y bestimmt durch

$$\operatorname{tg.} \alpha = \frac{\sqrt{\left(\frac{d F(\xi, \eta, \zeta)}{d \xi}\right)^2 + \left(\frac{d F(\xi, \eta, \zeta)}{d \eta}\right)^2}}{\frac{d F(\xi, \eta, \zeta)}{d \zeta}}.$$

Bezeichnen wir also den constanten Werth von tg. α mit $\varkappa$, und nennen $\varkappa$ die Steilheit, so sind die Gleichungen der Curve von der Steilheit $\varkappa$:

$$\begin{cases} F(\xi, \eta, \zeta) = o. \\ \left(\frac{d F(\xi, \eta, \zeta)}{d \xi}\right)^2 + \left(\frac{d F(\xi, \eta, \zeta)}{d \eta}\right)^2 - \varkappa^2 \left(\frac{d F(\xi, \eta, \zeta)}{d \zeta}\right)^2 = o. \end{cases}$$

Die Curve erscheint hiernach als Durchschnitt zweier Flächen vom n^{ten} und $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, also für $n = 2$ als Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades. Sie besteht im Allgemeinen aus zwei getrennten Theilen, da die der Steilheit $-\alpha$ entsprechende Curve in vorstehender Gleichung mit enthalten ist.

Hat die Fläche einen Mittelpunkt, so möge die durch denselben gehende Richtungsebene die Grundebene genannt werden. Wählen wir diese zur x y Ebene des Coordinatensystems, so hat die auf das Centrum bezogene Gleichung einer Mittelpunktsfläche zweiten Grades die Form:

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2\,a_1\eta\zeta + 2\,b_1\xi\zeta + 2\,c_1\xi\eta + d = o,$$

also heisst die zweite Gleichung der Curve

$$(a\xi + b_1\zeta + c_1\eta)^2 + (b\eta + a_1\zeta + c_1\xi)^2 - \varkappa^2(c\zeta + a_1\eta + b_1\xi)^2 = o.$$

Diese Gleichung ist homogen und stellt demnach eine Kegelfläche dar, woraus der Satz resultirt:

Jede Curve gleicher Steilheit auf einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf eine beliebige Ebene, wird vom Mittelpunkt der Fläche aus durch einen Kegel zweiten Grades projicirt.

Die beiden Paraboloide können als Flächen angesehen werden, deren Mittelpunkt in Unendlichen liegt, also geht für diese der Kegel in einen Cylinder über.

Durch Elimination von ξ, η, ζ erhalten wir die Projectionen der Curve auf die Coordinatenebenen als Gleichungen vierten Grades. Auch diese bestehen im Allgemeinen aus zwei getrennten Theilen.

Wird aber eine Hauptebene als Richtungsebene genommen, so fallen beide Theile zusammen, und der Grad der Curve reducirt sich auf den zweiten. Um diese zu finden, wollen wir der auf ihre Hauptebenen bezogenen Mittelpunktsfläche zweiten Grades die Gleichung geben

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

Dann sind die Gleichungen der Curve gleicher Steilheit in Bezug auf die x y:

$$\begin{cases} \dfrac{\xi^2}{a} + \dfrac{\eta^2}{b} + \dfrac{\zeta^2}{c} = 1. \\[2ex] \dfrac{\xi^2}{a^2} + \dfrac{\eta^2}{b^2} - \dfrac{\varkappa^2\zeta^2}{c^2} = o. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung ist unabhängig von den Vorzeichen der Grössen a, b, c, also:

Wenn ein einfaches Hyperboloid, ein zweifaches Hyperboloid und ein Ellipsoid in Grösse und Richtung dieselben Axen haben, so liegen die drei Curven der gleichen Steilheit $\varkappa$ auf einem und demselben Kegel.

Die Projectionen sind:

$$\text{in y z: } \frac{\zeta^2\varkappa^2}{c^2}\left(a + \frac{c}{\varkappa^2}\right) - \frac{\eta^2}{b^2}\,(a - b = 1,$$

$$\text{in x z: } \frac{\xi^2}{a^2}\,(a - b) + \frac{\varkappa^2\zeta^2}{c^2}\left(b + \frac{c}{\varkappa^2}\right) = 1,$$

$$\text{in x y: } \frac{\xi^2}{a^2}\left(a + \frac{c}{\varkappa^2}\right) + \frac{\eta^2}{b^2}\left(b + \frac{c}{\varkappa^2}\right) = 1,$$

woraus sich die Gestalt derselben in jedem speciellen Falle unmittelbar erkennen lässt. So sind z. B. bei einem Ellipsoid die Projectionen in den beiden durch die grössere Axe der Grundebene gehenden Hauptebenen stets Ellipsen, während die in der dritten Ebene stets eine Hyperbel ist.

Eine weitere Reduction des Grades kann nur in einem Falle eintreten, wenn nämlich a, b oder c negativ d. h. die Fläche ein einfaches Hyperboloid und $\varkappa^2 = -\frac{c}{a}$ resp. $-\frac{c}{b}$ ist. Alsdann wird aus zweien der Gleichungen

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{a-b}} \text{ oder } \eta = \frac{b}{\sqrt{b-a}},$$

also ist dann die Projektion auf zwei Ebenen eine gerade Linie. Daraus ergiebt sich der Satz:

Auf einem einfachen Hyperboloid liegen alle Punkte, in denen die Fläche gegen eine Hauptebene dieselbe Neigung hat, wie die Asymptote, welche gegen dieselbe Ebene am steilsten gerichtet ist, in einer Ebene.

Die übrigen Curven gleicher Steilheit haben doppelte Krümmung, wenn nicht etwa die Fläche durch Rotation entstanden ist.

Die in den Punkten gleicher Steilheit an die Fläche gelegten Tangentialebenen bilde eine gradlinige, abwickelbare Fläche (Siehe Monge, Application de l'analyse, Nro. VIII.), welche die Umhüllungsfläche gleicher Steilheit genannt werden möge. Ihr Durchschnitt mit der Grundebene heissen die Spur der Curve. — Die Gleichung der Umhüllungsfläche findet man durch Elimination von ξ, η, ζ, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ aus den drei Gleichungen

$$\begin{cases} F(\xi, \eta, \zeta) = 0 \\ \left(\frac{d\,F(\xi, \eta, \zeta)}{d\,\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\,F(\xi, \eta, \zeta)}{d\,\eta}\right)^2 - \varkappa^2\left(\frac{d\,F(\xi, \eta, \zeta)}{d\,\zeta}\right)^2 = 0 \\ (x-\xi)\,\frac{d\,F(\xi, \eta, \zeta)}{d\,\xi} + (y-\eta)\,\frac{d\,F(\xi, \eta, \zeta)}{d\,\eta} + (z-\zeta)\,\frac{d\,F(\xi, \eta, \zeta)}{d\,\zeta} = 0 \end{cases}$$

und ihren Ableitungen.

Da die Ebenen constante Neigung haben, so folgt, dass auch die erzeugenden Geraden mit der Grundebene den constanten Winkel α bilden und auf der Curve senkrecht stehen. Kennt man diese, so kann man die Fläche also auch in der Weise entstehen lassen, dass man an der Spur eine gerade, gegen dieselbe normal gerichtete, Linie so entlang bewegt, dass sie stets denselben Winkel α (resp. $-\alpha$) mit der Ebene der Spur bildet.

Die Projectionen der erzeugenden Geraden sind die Normalen der Spur, folglich ist die Projection der Wendungscurve die Evolute der Spur. — Die Krümmungslinien bilden ebene Curven, die man erhält, wenn man die Fläche mit einer Richtungsebene durchschneidet, da alle so entstehenden Curven die erzeugenden Geraden senkrecht durchschneiden. Ist e die Entfernung einer solchen Curve von der Grundebene, so ist die Projektion des Theiles der erzeugenden Geraden, der zwischen beiden Ebenen liegt $= \frac{e}{\varkappa}$, also erhält man die Gestalt der Krümmungslinien, wenn man auf jeder Normalen der Spur nach innen und aussen ein constantes Stück abschneidet. Jede Krümmungslinie ist demnach eine Evolvende der Evolute der Spur. Ist die Spur beispielsweise die Evolvende eines Kreises, so sind alle Krümmungslinien einander congruent.

Die Grösse F eines Theiles der Fläche, sowie der Länge der Wendungscurve lässt sich aus dem Inhalte F_p des entsprechenden Theiles der Spur und der Länge L_p ihrer Evolute unmittelbar finden, denn es ist

$$F_p = F \cos. \alpha, \; L_p = L \cos. \alpha.$$

Die vollständige Fläche erstreckt sich nach oben und unten bis ins Unendliche. Legen wir durch zwei beliebige erzeugende Gerade Ebenen, welche auf der Grundebene senkrecht stehen, so enthalten diese zwischen sich einen geschlossenen Theil der Fläche. Derselbe wird durch die Wendungscurve in zwei Theile getheilt und da beide dieselbe Projektion haben, so sind sie flächengleich, d. h.:

Der geschlossene Theil einer beliebigen Umhüllungsfläche gleicher Steilheit, welcher zwischen zwei auf der Spur senkrecht stehenden Ebenen liegt, wird durch die Wendungscurve halbirt.

Es sei jetzt wieder

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

die Gleichung einer Mittelpunktsfläche zweiten Grades. Dann ist die Tangentialebene in ξ, η, ζ

$$\frac{x\,\xi}{a} + \frac{y\,\eta}{b} + \frac{z\,\zeta}{c} = 1.$$

Verbinden wir mit ihr die beiden Bedingungsgleichungen

$$\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} = 1 \text{ und } \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \varkappa^2 \frac{\zeta^2}{c^2} = 0,$$

und eliminiren ξ und η, so wird

$$x \sqrt{c^2 - \zeta^2 (\varkappa^2 b + c)} + y \sqrt{\zeta^2 (\varkappa^2 a + c) - c^2} = (c - z\,\zeta) \sqrt{a - b}.$$

Für jedes bestimmte ζ erhalten wir vier Tangentialebenen; zugleich erkennt man, dass ζ in die Grenzen

$$\frac{c}{\sqrt{\varkappa^2 b + c}} \text{ und } \frac{c}{\sqrt{\varkappa^2 a + c}}$$

eingeschlossen ist. — Um die Gleichung der Spur zu erhalten, setzen wir $z = 0$ und bekommen die vier Geraden in $x\,y$, welche bei ihrer Bewegung die gesuchte Spur umhüllen:

$$x \sqrt{c^2 - \zeta^2 (\varkappa^2 b + c)} + y \sqrt{\zeta^2 (\varkappa^2 a + c) - c^2} = c \sqrt{a - b}.$$

Die Differentiation ergiebt:

$$\frac{x (\varkappa^2 b + c)}{\sqrt{c^2 - \zeta^2 (\varkappa^2 b + c)}} = \frac{y (\varkappa^2 a + c)}{\sqrt{\zeta^2 (\varkappa^2 a + c) - c^2}}.$$

Durch Elimination von ζ erhält man die Spur:

$$x^2 \varkappa (\varkappa^2 b + c) + y^2 \varkappa (\varkappa^2 a + c) = \sqrt{x^2 (\varkappa^2 b + c) + y^2 (\varkappa^2 a + c)} \sqrt{(\varkappa^2 a + c)(\varkappa^2 b + c)}$$

oder, wenn wir durch die rechte Seite dividiren und quadriren:

$$\frac{x^2}{a + \frac{c}{\varkappa^2}} + \frac{y^2}{b + \frac{c}{\varkappa^2}} = 1.$$

Die Umhüllungsfläche gleicher Steilheit schneidet also die Grundebene in **einem Kegelschnitt, welcher dem durch dieselbe Ebene gebildeten Hauptschnitt der umhüllten Fläche consocal ist.**

Dieser Kegelschnitt ist beim Ellipsoid stets eine Ellipse, bei den Hyperboloiden je nach der Grösse von $\varkappa$ und der Wahl der Hauptebene Ellipse oder Hyperbel. — Bei dem Paraboloiden wird die Curve in den beiden durch den unendlich fernen Mittelpunkt gehenden Ebenen eine Parabel.

Führt man die Rechnung für die Gleichung der Fläche auf die eine oder andere der oben angeführten Arten aus, und setzt dabei

$$a - b = e;\; a + \frac{c}{\varkappa^2} = p;\; f + \frac{c}{\varkappa} = q,$$

so erhält man eine Gleichung achten Grades, welche in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\Big\{ p x^4 - p y^4 + e \frac{z^4}{\varkappa^4} - q (p + e) x^2 + p (q - e) y^2 - e (p + q) \frac{z^2}{\varkappa^2}$$
$$+ e x^2 y^2 + p x^2 \frac{z^2}{\varkappa^2} - q y^2 \frac{z^2}{\varkappa^2} + e p q \Big\}^2 + 4 x^2 y^2 \Big\{ q x^2 + p y^2 - p q \Big\}^2$$
$$- 4 x^2 \frac{z^2}{\varkappa^2} \Big\{ 9 x^2 + e \frac{z^2}{\varkappa^2} - e q \Big\}^2 - 4 y^2 \frac{z^2}{\varkappa^2} \Big\{ e \frac{z^2}{\varkappa^2} - p y^2 - e p^2 \Big\}^2$$
$$- 4 x^2 y^2 \frac{z^2}{\varkappa^2} \Big\{ (ep + q^2) x^2 + (p^2 - eq) y^2 - (e^2 + pq) \frac{z^2}{\varkappa^2} + (p + q)(pq - 2 e^2) \Big\} = 0,$$

wobei die Relation gilt

$$e p + q^2 = p^2 - e q = e^2 + p q + p^2 + p^2 - p q.$$

Die Fläche besteht aus zwei congruenten Hälften, welche sich in $x y$ in einer Curve zweiten Grades schneiden. Auch die Schnitte in $x z$ und $y z$ enthalten Kegelschnitte. Denn für $y = 0$ wird aus der Gleichung nach einfachen Reduktionen:

$$\Big(q x^2 + e \frac{z^2}{\varkappa^2} - e q\Big)^2 \Big(\Big(x + \frac{z}{\varkappa}\Big)^2 - p\Big) \Big(\Big(x - \frac{z}{\varkappa}\Big)^2 - p\Big) = 0.$$

Der Durchschnitt besteht also aus zwei geraden Linien und dem Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{c} + \frac{z^2}{\varkappa^2 q} = 1.$$

Ebenso enthält die Curve in $y z$ zwei Gerade und ausserdem

$$\frac{z^2}{\varkappa^2 p} - \frac{y^2}{e} = 1.$$

In beiden Curven durchschneidet sich die Fläche selbst.

Die Gestalt der Fläche erkennt man am leichtesten, wenn man sich eine Gerade vorstellt, welche an einem Kegelschnitt so entlang gleitet, dass sie auf demselben senkrecht und gegen seine Ebene constant geneigt bleibt.

Legen wir (pour fixer les idées) eine Ellipse zu Grunde, so wird der Durchschnitt in $x z$ eine Ellipse, in $y z$ eine Hyperbel sein. Wir erhalten alsdann eine Fläche, welche sich zwar ins Unendliche erstreckt, in der Mitte aber drei Räume allseitig umschliesst. Der mittlere derselben gehört beiden Hälften der Fläche an und ist einem geraden elliptischen Doppelkegel zu vergleichen, dessen Mantel aber nicht in zwei Spitzen ausläuft, sondern in einem Ellipsenbogen zugeschärft ist.

Die beiden andern Theile sind congruent und haben die Form einer Sichel. Die innere Kante ist jener Ellipsenbogen; der Rücken wird von der Wendungscurve begrenzt. Derselbe enthält in der Mitte querüber noch eine Kante in Form eines nach aussen concaven Hyperbelbogens, so dass der Raum auch nach Richtung hin als Sichel angesehen werden kann. Einer der oben angeführten allgemeinen Sätze heisst in diesem Falle:

Die Oberfläche der Sichel wird durch die Wendungscurve in zwei nicht congruente, aber flächengleiche Theile getheilt.

Auch die Grössenverhältnisse lassen sich leicht bestimmen.

Die Länge der Wendungscurve ist gleich der Länge der Evolute, dividirt durch cos. α, also gleich

$$\frac{4}{\cos.\ \alpha}\left(\frac{p}{\sqrt{q}} - \frac{q}{\sqrt{p}}\right).$$

Die Oberfläche des mittleren Theiles ist ebenso

$$\frac{2\, p\, q\, \pi}{\cos.\ \alpha}$$

und die einer jeden Sichel:

$$\frac{3\ e^2 \pi}{4\sqrt{p\, q}}.$$

Auch der Rauminhalt lässt sich berechnen, wenn man denselben in unendlich viele schiefabgeschnittene Prismen zerlegt. Man erhält z. B. für die Sicheln das elliptische Integral:

$$V = \frac{2\ \varkappa e^2}{3\ p^2 q \sqrt{p}} \int_0^{\sqrt{p}} \left\{3\ x^2\ (p + q) - p\ (p + 3\ q)\right\} \frac{(p^2 - e\, x^2)\ d\, x}{\sqrt{(p - x^2)\ (p^2 - e\, x^2)}}.$$

Setzt man unter Anwendung der in der „Théorie des fontions doublement périodiques von Briot und Bouquet“ gebrauchten Bezeichnungen $x = \sqrt{p}\,.\,\lambda(z)$, so werden die Grenzen o und $\frac{\omega}{4}$, also

$$V = \frac{2\ \varkappa e^2}{3\ p^2 q \sqrt{p}} \int_0^{\frac{\omega}{4}} \left\{ - p\,(p + p) + (4p^2 + 4\,pq - 2\,q^2)\,\lambda^2(z) - 3\,e\,(p + q)\,\lambda^4(z)\right\} dz.$$

Die weitere Ausführung ergiebt

$$V = \frac{2\ \varkappa e^2}{3\ p^2 q \sqrt{p}} \left\{ \frac{2p^2q}{e} \cdot \frac{\Theta_{\prime}{}'(z)}{\Theta'(z)} + \frac{2\ p^2\, q\, z}{e}\, \Theta_{\prime}{}''(o) - p\,q\,z - p\,(p + p)\,\lambda(z)\,\mu(z)\,\nu(z)\right\}_{z = o}^{z = \frac{\omega}{4}}$$

$$= \frac{\varkappa e^2 \omega}{6\sqrt{p}} \left\{ \frac{2\ p}{e}\ \Theta_{\prime}{}''\ (o) - 1 \right\},$$

wo ω und $\Theta_{\prime}{}''(o)$ von $\frac{e}{p}$ abhängig und durch bekannte Reihen bestimmt sind.

Ist die ursprüngliche Fläche zweiten Grades ein Hyperboloid, und setzen wir

$$\varkappa^2 = -\frac{c}{b}$$

in welchem Falle die Curve gleicher Steilheit eine ebene Hyperbel wird, so reducirt sich die Gleichung achten Grades der Umhüllungsfläche, da alsdann $p = e$ und $q = 0$ wird, auf folgende:

$$\left\{ y^4 - \frac{z^4}{\varkappa^4} + e\,y^2 + e\,\frac{z^2}{\varkappa^2} - x^2 y^2 - x^2\,\frac{z^2}{\varkappa^2} \right\}^2 + 4\,x^2 y^4 - 4\,x^2\,\frac{z^6}{\varkappa^6}$$

$$- 4\,y^2\,\frac{z^2}{\varkappa^2}\left\{ \frac{z^2}{\varkappa^2} - y^2 - e^3 \right\}^2 - 4\,x^2 y^2\,\frac{z^2}{\varkappa^2}\left\{ x^2 + y^2 - \frac{z^2}{\varkappa^2} - 2\,e^2 \right\} = 0,$$

welche man auf die Form bringen kann:

$$\left(y^2 - \frac{z^2}{\varkappa^2}\right)^2 \left\{ (x+e)^2 + y^2 - \frac{z^2}{\varkappa^2} \right\} \left\{ (x-e)^2 + y^2 - \frac{z^2}{\varkappa^2} \right\} = 0.$$

In diesem Falle theilt sich also die Fläche in vier Theile und zwar in die beiden Kegel

$$(x+e)^2 + y^2 - \frac{z^2}{\varkappa^2} = 0 \text{ und } (x-e)^2 + y^2 - \frac{z^2}{\varkappa^2} = 0,$$

und die gemeinschaftlichen Tangentialebenen $z = \pm\, \varkappa\, y$. Beide Kegel sind gerade und kreisförmig und ihre Spitzen liegen in den Brennpunkten der Grundebene. Demnach lässt sich der Satz aussprechen:

Die von einem Brennpunkte einer Hauptebene eines Hyperboloids an dasselbe gezogenen Tangenten erfüllen einen Rotationskegel.

Nehmen wir schliesslich $\varkappa = \sqrt{-1} = i$, so kommen wir auf den bekannten Plücker'schen Satz von den Brennlinien der Flächen zweiten Grades. — Wenn eine gerade Linie mit der x Axe den Winkel α und mit den beiden andern die Winkel φ und ψ bildet, so ist

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\varphi + \cos.^2\psi = 1,$$

also

$$\operatorname{tg.}^2\varphi = \frac{\cos.^2\alpha + \cos.^2\psi}{1 - \cos.^2\alpha - \cos.^2\psi} = \frac{1 + \cos.^2\psi\,(1 + \operatorname{tg.}^2\alpha)}{\operatorname{tg.}^2\alpha - \cos.^2\psi\,(1 + \operatorname{tg.}^2\alpha)}.$$

Wird $\operatorname{tg.}^2\alpha = -1$, so erhält $\operatorname{tg.}^2\varphi$ denselben Werth. Wenn also eine Linie mit einer festen Geraden o x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $= \sqrt{-1}$ ist, so findet dasselbe für jede auf o x senkrechte Linie, folglich auch, wenn wir von dieser aus den Schluss wiederholen, für jede beliebige Gerade des Raumes statt.

Die Curve der gleichen Steilheit i behält also für jede beliebige Richtungsebene dieselbe Steilheit. Und obwohl die Curve, sowie die Umhüllungsfläche in diesem Falle imaginär wird, so bleiben doch die Durchschnittscurven der letzteren mit den Hauptebenen zum Theil reell. Diese waren für die Flächen zweiten Grades

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1,\ \frac{x^2}{e} + \frac{z^2}{\varkappa^2 q} = 1,\ \frac{z^2}{\varkappa^2 p} - \frac{y^2}{e} = 1,$$

also für $\varkappa^2 = -1$:

$$\frac{x^2}{a - c} + \frac{y^2}{a - c} = 1. \qquad - \frac{z^2}{a - c} + \frac{y^2}{a - b} = 1.$$

$$\frac{x^2}{a - c} - \frac{z^2}{a - c} = 1.$$

Dies sind aber die Gleichungen für die Focalcurven, folglich ergiebt sich:

Die Brennlinien einer Fläche zweiten Grades sind die in den Hauptebenen gelegenen Spuren der Curve der gleichen Steilheit i.

Jahresbericht

über das

Königliche und Gröning'sche Gymnasium

von Ostern 1878—79.

I. Vertheilung der Stunden unter die Lehrer.

Winter-Semester 1878–79.

Lehrer.	Ia.	Ib.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IVa.	IVb.	Va.	Vb.	VIa.	VIb.	Vorschule I.	Vorschule II.	Vorschule III.	Summa.
Director Prof. Dr. **Lothholz**, Ordinarius von Ia.	Latein 9 Griechisch 3															12
Prorector Dr. **Wiggert**, Ordinarius von Ib.	Griechisch 3 Hebräisch 2	Latein 7	Griechisch 6 Hebräisch 2													20
Oberlehrer Dr. **Quidde.**	Mathemat. 3 Physik 2	Mathemat. 3 Physik 2	Mathemat. 4 Physik 1	Mathemat. 4 Physik 1												20
Oberlehrer Dr. **Dorschel**, Ordinarius von IIa.		Griechisch 6	Latein 10	Geschichte 3 Homer 2												21
Oberlehrer **Runge**, Ordinarius von IVa.				Religion 2 Deutsch 2 Vergil 2 Hebräisch 2			Latein 10 Deutsch 2 Religion 2									22
Oberlehrer Dr. **Schmidt**, Ordinarius von IIIa.	Geschichte 3	Geschichte 3			Latein 8 Deutsch 2 Geschichte 3					Geographie 2						21
Gymnasiallehrer **Saniter**, Ordinarius von Vb.								Religion 2 Geschichte 3 Rechnen 3	Religion 3	Latein 10 Deutsch 2						23
Gymnasiallehrer **Rohleder**, Ordinarius von IIb.		Horaz 2 Deutsch 3	Geschichte 3 Deutsch 2	Latein 8			Geschichte 3									21
Gymnasiallehrer **Schroeder.**					Mathemat. 4 Naturg. 1	Religion 2 Mathemat. 4 Naturg. 1	Mathemat. 3 Französ. 2		Französ. 3 Naturg. 2	Naturg. 2						24
Gymnasiallehrer **Petrich**, Ordinarius von VIa.	Religion 2 Deutsch 3	Religion 2	Religion 2		Religion 2						Latein 10 Deutsch 2					23
Gymnasiallehrer **Newie.**	Französ. 2	Französ. 2	Französ. 2	Griechisch 4 Französ. 2	Französ. 2 Ovid 2					Religion 3		Religion 3				22
Gymnasiallehrer Dr. **Ziegel**, Ordinarius von IIIb.	Turnen 2		Turnen 2		Griechisch 6	Latein 10 Deutsch 2	Turnen 2									24
Dr. **Steinbrecht**, Ordinarius von IVb.						Griechisch 6 Geschichte 3		Latein 10 Deutsch 2	Geographie 2							23
Kunow, Ordinarius von Va.						Französ. 2		Griechisch 6 Französ. 2	Latein 10 Deutsch 2							22
Sander, Ordinarius von VIb.							Griechisch 6			Französ. 3	Geographie 2	Latein 10 Deutsch 2				23
Dr. **Wolfssohn.**	2 St.				2 St.				2 St.				1 St.			7
Musikdirector **Bischoff.**	Männerchor 1 Allgemeine Chorstunde 1						Singen 2		Singen 2		Singen 2					8
Zeichenlehrer **Keck.**	Zeichnen 2						Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2 Schreiben 3	Zeichnen 2 Schreiben 3	Zeichnen 2 Schreiben 3	Zeichnen 2 Schreiben 3				26
Vorschullehrer **Trost.**											Rechnen 4	Rechnen 4 Geographie 2	Religion 3 Deutsch 9 Schreiben 4 Geographie 2			28
Vorschullehrer **Strutz.**									Rechnen 3	Rechnen 3	Religion 3			18 St.		27
Vorschullehrer **Selke.**											Naturg. 2	Naturg. 2	Rechnen 4 Singen 2		18 St.	28

II. Frequenz-Verhältnisse.

A. Sommer-Semester 1878.

Klasse.	Gesammtzahl.	Evangelische.	Katholische.	Jüdische.	Einheimische.	Auswärtige.
Ober-Prima	25	22	—	3	13	12
Unter-Prima	22	19	—	3	8	14
Ober-Secunda	31	30	—	1	12	19
Unter-Secunda	35	32	—	3	13	22
Ober-Tertia	46	42	1	3	17	29
Unter-Tertia	49	46	—	3	17	32
Ober-Quarta	39	36	—	3	12	27
Unter-Quarta	43	41	—	2	26	17
Ober-Quinta	33	31	—	2	23	10
Unter-Quinta	42	38	1	3	22	20
Ober-Sexta	42	35	2	5	26	16
Unter-Sexta	33	29	1	3	15	18
Summa	440	401	5	34	204	236
Vorschule I.	38	38	—	—	35	3
Vorschule II.	21	18	—	3	20	1
Vorschule III.	33	27	—	6	33	—
Summa	92	83	—	9	88	4

B. Winter-Semester 1878/79.

Klasse.	Gesammtzahl.	Evangelische.	Katholische.	Jüdische.	Einheimische.	Auswärtige.
Ober-Prima	26	23	—	3	13	13
Unter-Prima	20	19	—	1	9	11
Ober-Secunda	32	29	—	3	9	23
Unter-Secunda	42	41	—	1	16	26
Ober-Tertia	47	42	1	4	19	28
Unter-Tertia	45	41	—	4	15	30
Ober-Quarta	38	37	—	1	14	24
Unter-Quarta	39	35	—	4	27	12
Ober-Quinta	50	47	1	2	22	28
Unter-Quinta	41	35	2	4	26	15
Ober-Sexta	36	31	2	3	17	19
Unter-Sexta	36	32	1	3	22	14
Summa	452	412	7	33	209	243
Vorschule I.	28	27	—	1	21	7
Vorschule II.	24	21	—	3	22	2
Vorschule III.	35	31	1	3	33	2
Summa	87	79	1	7	76	11

III. Schüler-Verzeichniss.

Ober-Prima.

1. Emil Hedemann, Bütow.
2. Paul Zantz, Stargard.
3. Paul Hecker, Stargard.
4. Johannes Trost, Stargard.
5. Julius Renner, Stargard.
6. Ernst Schmidt, Horst bei Wangerin.
7. Samuel Meyer, Nörenberg.
8. Carl Herrlinger, Stargard.
9. Georg Hesselbarth, Berlinchen.
10. Georg Keferstein, Heckelberg.
11. Felix Winde, Stargard.
12. Fritz Vogel, Mienken bei Neuwedel.
13. Rudolph Zühl, Templin.
14. Curt v. Unruhe, Frankfurt a. O.
15. Walter Schüler, Stargard.
16. Paul Merner, Stargard.
17. Otto Pagé, Daber.
18. Georg Goldmann, Stargard.
19. Leopold Korn, Berlin.
20. Max Schmidt, Sondershausen.
21. Georg Stephani, Liebenow bei Bahn.
22. Otto Vorpahl, Stettin.
23. John Heskel, Berlin.
24. Johannes Haun, Schwachenwalde bei Augustwalde.

Unter-Prima.

1. Ernst Wuttge, Stargard.
2. August Müller, Stargard.
3. Gustav Tettenborn, Stargard.
4. Hermann Krüger, Schlönwitz bei Schivelbein.
5. Walter v. Schmidt, Karkow bei Freienwalde.
6. Fritz Weber, Neu-Klüken bei Arnswalde.
7. Hugo Levy, Stargard.
8. Erich Müller, Reetz.
9. Otto Stieme, Berlin.
10. Otto Eisleben, Caselow bei Löcknitz.
11. Carl Mantey, Stargard.
12. Oscar Tolks, Heinrichshöhe bei Freienwalde i/Pomm.
13. Wilhelm Gützlaff, Nörenberg.
14. Paul Jahn, Wilhelminenberg bei Priemhausen.
15. Fritz Dumstrey, Borkenstein bei Lenz.
16. Franz Grunenwald, Berlin.
17. Paul Wendeler, Ottilienhof bei Bernstein.
18. Paul Laffert, Stargard.
19. Max Zastrow, Stargard.
20. Hellmuth Richter, Neuwedel.

Ober-Secunda.

1. Johannes Splettstösser, Zühlsdorf bei Arnswalde.
2. Johannes Dammann, Marienwalde.
3. Gustav Blenn, Stargard.
4. Fritz Knust, Stendel b. Passow.
5. Walter Havenstein, Stargard.
6. Erich Schmeling, Massow.
7. Paul Daberkow, Marienfliess.
8. Franz Völker, Arnswalde.
9. Richard Küchel, Stargard.
10. Johannes Gützlaff, Nörenberg.
11. Carl Meinecke, Woldenberg.
12. Fritz Plünzke, Greifenhagen.
13. Axel Boldt, Stargard.
14. Ernst Kuss, Stargard.
15. Georg v. Borries, Stargard.
16. Georg v. Schönermark, Grossburg bei Strehlen.
17. Otto Eben, Ebensee bei Brunstplatz in Westpreussen.
18. Paul Hesselbarth, Berlinchen.
19. Eugen Goldmann, Stargard.
20. Wilhelm Moritz, Pyritz.
21. Georg Grupen, Stargard.
22. Ernst Krüger, Seefeld bei Stargard.
23. Franz Zander, Stargard.
24. Traugott Sauberzweig, Stendel bei Passow.
25. Adolf Manasse, Dölitz.
26. Karl Teske, Karlsbra b. Konitz.
27. Heinrich Michaelis, Albertinenburg bei Berlinchen.
28. Karl Gammert Stargard.

Unter-Secunda.

1. Wilhelm Zander, Stargard.
2. Conrad Paasch, Barnimscunow.
3. Paul Clericus, Barenwinkel bei Schivelbein.
4. Karl v. Boltenstern, Waitendorf bei Damnitz.
5. Ernst Schmeling, Arnimswalde bei Alt-Damm.
6. Hugo Breuer, Pyritz.
7. Franz Geppert, Stargard.
8. Richard Helling, Stargard.
9. Isaak Swarsenski, Marienfliess.
10. Gustav v. Szczepanski, Naugard.
11. Richard Langheinrich, Runow bei Wangerin.
12. Max Lieder, Stargard.
13. Hermann Siegmeyer, Goldbeck bei Trampke.
14. Karl Stavenow, Regenthin.
15. Otto Gruendler, Seehausen.
16. Ernst Snethlage, Waltersdorf bei Königs-Wusterhausen.
17. Max Mälger, Stargard.
18. Otto Plathe, Tetzlaffshagen bei Schwirsen.
19. Richard Zimmermann, Stettin.
20. Curt Dumstrey, Colberg.
21. Hans Reichhelm, Stargard.
22. Paul Krüger, Stargard.
23. Gustav Schröder, Gollin bei Trampke.
24. Emil Bohm, Sachshof.
25. Wilhelm Collatz, Schivelbein.
26. August Stock, Zaddow bei Zachan.
27. Otto Zagelmeyer, Stargard.
28. Hans Coste, Stargard.
29. Franz Splettstösser, Zühlsdorf bei Arnswalde.
30. Albert Kopplin, Arnswalde.
31. Hermann Hartsch, Pegelow bei Stargard.
32. Richard Pägelow, Stargard.
33. Leberecht Maass, Korkenhagen bei Massow.
34. Franz Dusse, Stargard.
35. Ernst Krüger, Schlönwitz bei Schivelbein.
36. Karl Maass, Korkenhagen bei Massow.
37. Wilhelm v. Rosenstiel, Marienwalde.
38. Paul Böning, Schwachenwalde bei Augustwalde.
39. Felix Sauerbier, Stargard.
40. Hugo Nöbel, Wartow b. Wollin.

Ober-Tertia.

1. Hermann Schmeling, Gollnow.
2. Wilhelm Hensel, Kloxin.
3. Ernst Bartolomäus, Schivelbein.
4. Wilhelm Maass, Roggow.
5. Bernhard Paqué, Stargard.
6. Wolfgang v. Zastrow, Stargard.
7. Georg Hülsberg, Daber.
8. Hermann Reeck, Reetz.
9. Georg Köhn, Schönhof bei Massow.
10. Rudolph Kuthe, Stargard.
11. Georg Joachimsthal, Stargard.
12. Hellmuth Michaelis, Stargard.
13. Heinrich Müller, Wasserfelde bei Marienwalde.
14. Siegfried Meyer, Nörenberg.
15. Siegfried Levy, Stargard.
16. Gotthold Mattert, Rügenwalde.
17. Leberecht Mercker, Woltersdorf bei Freienwalde.
18. Karl Brose, Freienwalde.
19. Paul Danker, Stargard.
20. Otto Daniels, Stargard.
21. Friedrich Goltz, Stargard.
22. Friedrich Bartelt, Marienfliess.
23. Karl Schmith, Brandenburg.
24. Konrad Schewe, Pyritz.
25. Matthias v. Below, Seehof.
26. Emil Bollow, Speck bei Gollnow.
27. Ludw. Hammerschmidt, Strausberg bei Berlin.
28. Johannes Müller, Stargard.
29. Clemens Strecker, Prilup bei Pyritz.
30. Hermann Oerthling, Gross-Silber bei Reetz.
31. Gustav Dumstrey, Borkenstein bei Lenz.
32. Karl Köpp, Neuendorf bei Massow.
33. Karl Albrecht, Liebenwalde.
34. Max Gründler, Heidchen.
35. Ernst v. Wedell, Klein Voldikow bei Schmenzin.
36. Lorenz v. Gottberg, Berlin.
37. August Plautz, Stargard.
38. Fritz Splettstösser, Radun bei Arnswalde.
39. Fritz Brauser, Massow.
40. Martin Haken, Storkow.
41. Walter Borchert, Friedefelde bei Pencun.
42. William Hendewerk, Stargard.
43. Paul Lentz, Büche b. Trampke.
44. Martin Löwenthal, Stargard.
45. Paul Freund, Stargard.
46. Max Eyff, Gollnow.
47. v. Braunschweig.

Unter-Tertia.

1. Hermann Hamann, Arnswalde.
2. Adolph Brootzen, Reetz.
3. Max Reichhelm, Stargard.
4. Wilhelm Howe, Reetz.
5. Heinrich Lüdtke, Wollin.
6. Paul Buchholz, Stargard.
7. Siegmund Behrend, Callies.
8. Max Reichelt, Kietzig.
9. Max Tummeley, Zeidlitz bei Wangerin.
10. Bernhard Maass, Roggow bei Stargard.
11. Paul Stöwer, Stargard.
12. Oskar Wolf, Massow.
13. Franz Schmidt, Stargard.
14. Ferdinand Rechholz, Dobberphul bei Dölitz.
15. Paul Wilke, Kunow a. d. Str.
16. Otto Daberkow, Marienfliess.
17. Karl Petermann, Collin bei Stargard.
18. Ferdinand Wolfgramm, Wittchow bei Stargard.
19. Otto Wegener, Klein-Schlatikow bei Zachan.
20. Max Burchardt, Stargard.
21. Otto Manzke, Stargard.
22. Ernst Schlieter, Stargard.
23. Curt Clericus, Stargard.
24. Ludwig Kolbe, Uchtenhagen bei Trampke.
25. Otto Pandikow, Eichhorst bei Jacobshagen.
26. Hellmuth Hesselbarth, Berlinchen.
27. Hugo Tschiersky, Stargard.
28. Otto Müller, Wasserfelde bei Marienwalde.
29. Rudolf Weidemann, Mailand.
30. Martin Marcuse, Stargard.
31. Waldemar Schwarze, Stargard.
32. Paul Löwenstein, Pölitz.
33. Georg Dirksen, Stargard.
34. August Tessendorf, Zachan.
35. Friedrich v. Rosenstiel, Marienwalde.
36. Hermann Butenhof, Freienwalde.
37. Ferdinand Wolsdorf, Schönbrunn bei Damnitz.
38. Reinhold Dorschel, Stargard.
39. Hans Schröder, Gottberg bei Bernstein.
40. August Degner, Zarzig bei Stargard.
41. Ewald v. Wedell, Blankensee bei Bernstein.
42. Georg Schlieben, Cöslin.
43. Hellmuth Kuhnke, Rietzig bei Arnswalde.
44. Bernhard Silbermann, Stargard.
45. Georg Pogge, Bartelshagen bei Teterow in Mecklenburg.

Ober-Quarta.

1. Fritz Teske, Carlsbra b. Conitz.
2. Wilhelm Zühlke, Kitzerow bei Stargard.
3. Franz Bandoly, Stargard.
4. Wilhelm Hübner, Mössin bei Jacobshagen.
5. Richard Schultz, Arnswalde.
6. Arthur Schulz, Altwarp.
7. Emil Splettstösser, Zühlsdorf bei Arnswalde.
8. Erich Grabert, Arnswalde.
9. Fritz Reinsch, Stadthof bei Freienwalde i/Pomm.
10. Fritz Barkowsky, Bernstein.
11. Max Zantz, Stargard.
12. Georg Lichtenberg, Neuwedel.
13. Gustav Mende, Stargard.
14. Paul Förstner, Stargard.
15. Karl Daecke, Colbatz.
16. Georg Schröder, Stargard.
17. Ernst Päske, Conraden.
18. Emanuel v. Schmidt, Berknow bei Schivelbein.
19. Otto Stock, Stargard.
20. Karl Müller, Kannenberg bei Freienwalde i/Pomm.
21. Max Segebarth, Massow.
22. Otto Kutzky, Stargard.
23. Gotthold Büttner, Dölitz.
24. Ernst Tschentscher, Daber.
25. Ernst Schmaltz, Jacobshagen.
26. Gustav Matzky, Stargard.
27. Julius Nack, Belkow.
28. Bruno Haken, Storkow bei Massow.
29. Franz Gustke, Stargard.
30. Wilhelm Sanft, Prillwitz bei Pyritz.
31. Paul Goltz, Stargard.
32. Otto Petrich, Luisenhof bei Flatow in Westpreussen.
33. Emil Gehrke, Stargard.
34. Otto Störke, Stargard.
35. Karl Haack, Sohmsdorf.
36. Georg Freund, Stargard.
37. Albert Köppe, Hermelsdorf bei Schönwalde.
38. Karl Pretzell, Dübzow b. Labes.

Unter-Quarta.

1. Curt Haken, Storkow bei Lenz.
2. Walter Dumstrey, Stargard.
3. Georg Stegemann, Reetz.
4. Ernst Heese, Stargard.
5. Johannes Schmidt, Schönebeck.
6. Paul Plantikow, Blumenberg.
7. Franz Selle, Stargard.
8. Richard Wilke, Stargard.
9. Ferdinand Block, Stargard.
10. Wilhelm Dressler, Stargard.
11. Conrad Bandoly, Stargard.
12. Oscar Levy, Stargard.
13. Louis Schwahn, Stargard.
14. Paul Böder, Stargard.
15. Johannes Felbaum, Stargard.
16. Walter Ruhnke, Ruwen bei Berlinchen.
17. Hans Dumstrey, Borkenstein.
18. Siegbert Giesener, Stargard.
19. Brunow Wilde, Stargard.
20. Rudolph Blumenthal, Stargard.
21. Franz v. Huth, Stargard.
22. Ernst Freyer, Stargard.
23. Hans Traebert, Prützen bei Regenwalde.
24. Max Filter, Stargard.
25. Emil Levy, Stargard.
26. Otto Schliebener, Stargard.
27. Erich Manzke, Stargard.
28. Julius Schmidt, Schloppe.
29. Johannes Wichmann, Stargard.
30. Karl Degner, Zarzig b. Stargard.
31. Paul Ladewig, Braunsberg bei Daber.
32. Max Jonas, Stargard.
33. Johannes Steffen, Daber.
34. Otto Blaffert, Stargard.
35. Arthur Rojahn, Stargard.
36. Franz v. Boltenstern, Waitendorf bei Pyritz.
37. Franz Butenhoff, Freienwalde.
38. Bruno Eyff, Gollnow.
39. Emil Howe, Marienfliess.

Ober-Quinta.

1. Franz Zeglin, Reetz.
2. Ernst Scheel, Stargard.
3. Wilhelm Schumann, Daarz bei Massow.
4. Hermann Mühling, Stargard.
5. Paul Nöbel, Wartow b. Wollin.
6. Erich Maass, Korkenhagen bei Massow.
7. Otto Meyer, Stargard.
8. Martin Protzen, Stargard.
9. Willy Sauberzweig, Berlin.
10. Paul Gehrke, Stargard.
11. Ferdinand Franck, Stargard.
12. Rudolph Hell, Stargard.
13. Max Buchner, Stargard.
14. Max Kersten, Stargard.
15. Arthur Götzke, Gollnow.
16. Justus Pehlemann, Dorotheenhof bei Daber.
17. August v. Schmidt, Berknow bei Schivelbein.
18. Robert Knust, Stendel.
19. Max Clericus, Stargard.
20. Samuel Salinger, Dölitz.
21. Otto Gerneth, Carolinenhorst.
22. Max Rünger. Berlin.
23. Theodor Pupke, Dramburg.
24. Max Riemer, Seefeld bei Stargard.
25. Willy Kirchhoff, Amalienhof bei Woldenberg.
26. Paul Müller, Stargard.
27. Rudolf Starck, Arnswalde.
28. Paul Witte, Kaehnsfelde bei Arnswalde.
29. Gustav Kiesow, Stargard.
30. Robert Poosch, Stargard.
31. Paul Klinge, Schivelbein.
32. Max Petrich, Louisenhof bei Flatow.
33. Max Klemcke, Prenzlau.
34. Hermann Strutz, Petznik bei Dölitz.
35. Alexander Krause, Stargard.
36. Paul Rodenwald, Stargard.
37. Walter v. Koss, Stargard.
38. Paul Bumcke, Stargard.
39. Richard Klose, Stargard.
40. Max Löwenthal, Stettin.
41. Emil Lentz, Büche bei Trampke.
42. Otto Kannenberg, Hohenbenz bei Daber.
43. Fritz Huth, Sandow bei Dölitz.
44. Robert Klotzsch, Stargard.
45. Franz Bosold, Arnswalde.
46. Paul Gutzke, Daber.
47. Johannes Hülsberg, Daber.
48. Paul Hoffmann, Reetz.
49. Albrecht v. Wangenheim, Neu-Lobitz bei Dramburg.
50. Fritz Metzler, Stargard.

Unter-Quinta.

1. Fritz Grams, Niepölzig bei Berlinchen.
2. Carl Knick, Stargard.
3. Emil Eichelbaum, Stargard.
4. Leo Will, Stargard.
5. Otto Boeder, Stargard.
6. Paul Domnick, Stargard.
7. Willy Lebender, Stargard.
8. Carl Jaenke, Klein-Silber bei Reetz.
9. Heinrich Ammon, Stargard.
10. Ernst Splettstösser, Radun bei Arnswalde.
11. Ernst Maelger, Stargard.
12. Walter Piaschewski, Stargard.
13. Adolf Zantz, Stargard.
14. Walter Stephani, Zachan.
15. Adolf Pehlemann, Stargard.
16. Hermann Oesterley, Stargard.
17. Benno Ehrlich, Arnswalde.
18. Erich Müller, Stargard.
19. Ernst Wilde, Stargard.
20. Fritz Sonnemann, Stargard.
21. Johannes Howe, Marienfliess.
22. Sally Marcuse, Stargard.
23. Justus Gerber, Woltersdorf bei Freienwalde.
24. Samuel Ehrlich, Arnswalde.
25. Erich Bandelin, Stargard.
26. Ernst Schulz, Stargard.
27. Carl Mende, Stargard.
28. Fritz Hessenland, Jacobsdorf.
29. Hans Schreiber, Fischersfelde.
30. Willy Kiesow, Stargard.
31. Fritz Kreich, Liebenow bei Reetz.
32. Richard Daecke, Kolbatz.
33. Paul Schoenfeldt, Warnitz.
34. Carl Buchner, Stargard.
35. Raimund Noebel, Wartow auf Wollin.
36. Carl Schmidt, Plötzen-Fliess-Mühle bei Woldenberg.
37. Franz Domnick, Stargard.
38. Hans Lebender, Stargard.
39. Franz Borchardt, Stargard.
40. Fritz Tschentscher, Daber.

Ober-Sexta.

1. Carl Holzkamm, Saatzig.
2. Justus Steffen, Daber.
3. Hans Schroeder, Stargard.
4. Ernst Isert, Reetz.
5. Erich Karow, Stargard.
6. Hermann Thiede, Dramburg.
7. Hans Schoenfeld, Warnitz bei Damnitz.
8. Wilhelm Stalder, Stargard.
9. Berthold Bandelin, Stargard.
10. Max Wilde, Stargard.
11. Julius Daniel, Stargard.
12. Albert Bohl, Hofdamm bei Neumark.
13. Max Levy, Stargard.

14. Paul Dehnel, Stargard.
15. Emil Jackel, Posen.
16. Gustav Howe, Zadlow b. Zachan.
17. Theodor Kurth, Wittchow bei Stargard.
18. Franz Kummbier, Berlin.
19. Erich Wolf, Massow.
20. Martin Ady, Stargard.
21. Richard Witte, Kähnsfelde bei Arnswalde.
22. Ernst Troschel, Berlin.
23. Otto Danker, Stargard.
24. Carl Müller, Buslar bei Damnitz.
25. Ernst Eyck, Eichhorst bei Lippehne.
26. Paul Kolbe, Uchtenhagen bei Stargard.
27. Hermann Steffen, Trampke.
28. Georg Müller, Massow.
29. Hugo Wuttge, Stargard.
30. Reinhold Geeck, Stargard.
31. Richard Foerstner, Stargard.
32. Ernst Arnold, Berlin.
33. Louis de la Barre, Stargard.
34. Karl Braun, Daber.
35. Max Piper, Wutschendorf bei Neu-Strelitz.

Unter-Sexta.

1. Ernst Collrepp, Stargard.
2. Emil Hartwig, Dölitz.
3. Ernst Scharlock, Arnswalde.
4. Fritz Lüder, Rehwinkel bei Jacobshagen.
5. Hans von Wedell, Sadelberg bei Freienwalde.
6. Theodor Bietz, Stabenow bei Jacobshagen.
7. Eduard Parpart, Stargard.
8. Georg Daniel, Stargard.
9. Paul Maelger, Stargard.
10. Erich Heese, Stargard.
11. Werner v. Jaworski, Stargard.
12. Eugen Heym, Guben.
13. Erich Coste, Stargard.
14. Dietrich Sasemihl, Stargard.
15. Theodor Werner, Stargard.
16. Hasso v. Wedell, Frankenstein.
17. Fritz Köpke, Stargard.
18. Otto Kersten, Stargard.
19. Reinhard Dirksen, Stargard.
20. Otto Lunow, Stargard.
21. Emil Müller, Wasserfelde bei Marienwalde.
22. Otto Zantz, Stargard.
23. Max Stalder, Stargard.
24. Otto Block, Stargard.
25. Hans v. Grote, Stargard.
26. Carl Laffert, Stargard.
27. Martin Hell, Schönau bei Daber.
28. Paul Schneider, Stargard.
29. Hermann Pagel, Stargard.
30. Leopold Wolff, Woldenberg.
31. Waldemar Knust, Stendel bei Passow.
32. Emil Kuhnke, Rietzig bei Arnswalde.
33. Otto Gerber, Johannisberg bei Colberg.
34. Bruno Neumann, Giesen bei Calliess.
35. Brunow Holzkamm, Saatzig.
36. Hans Kressin, Gülzow b. Cammin.

Vorschule I.

1. Friedrich Steffen, Trampke.
2. Paul Hesse, Stargard.
3. Eduard Hecker, Stargard.
4. John Jahn, Stargard.
5. Franz Protzen, Stargard.
6. Wilh. Piaschewski, Stargard.
7. Oskar Dubberke, Stargard.
8. Max Ladewig, Braunsberg bei Daber.
9. Heinrich Schmidt, Treptow.
10. Otto Butzke, Stargard.
11. Erich Maelger, Stargard.
12. Friedrich Manzke, Stargard.
13. Walter Neumann, Stargard.
14. Wilhelm Schmidt, Dölitz.
15. Carl Borchardt, Stargard.
16. Richard Zimmermann, Stargard.
17. Alexander Goltz, Stargard.
18. Richard Drichel, Stargard.
19. Albrecht Maass, Korkenhagen bei Massow.
20. Max Giesener, Stargard.
21. Richard Steffen, Stargard.
22. Emil Witte, Kietzig.
23. Carl Wiesing, Stargard.
24. Ernst Freund, Stargard.
25. Georg Lebender, Stargard.
26. Johannes Meissner, Stargard.
27. Arthur Wels, Stargard.
28. Max Schiersmann, Moritzfelde.

Vorschule II.

1. Max Daniel, Stargard.
2. Rudolf Palmié, Stargard.
3. Gustav Hasenjäger, Stargard.
4. Ernst Bennewitz, Stargard.
5. Georg Freund, Stargard.
6. Felix Bauer, Stargard.
7. Fritz Oesterley, Stargard.
8. Eberhard Weisshun, Stargard.
9. Georg Goltz, Stargard.
10. Arthur Brauer, Stargard.
11. Johannes Borchardt, Stargard.
12. Wilhelm Wichmann, Stargard.
13. Johannes Knoefel, Stargard.
14. Martin Werner, Stargard.
15. Ernst Werner, Stargard.
16. Heinrich Freyer, Stargard.
17. Ludwig Wolfssohn, Stargard.
18. Franz Kempe, Stargard.
19. Oskar Fränkel, Stargard.
20. Otto Dressler, Stargard.
21. Hermann Witte, Stargard.
22. Richard Krüger, Stargard.
23. Gustav Schwochow, Bruchhausen.

Vorschule III.

1. Max Siber, Stargard.
2. Richard Domnick, Stargard.
3. Ernst Bittner, Stargard.
4. Hugo Domnick, Stargard.
5. Erich Dorschel, Stargard.
6. Conrad Heese, Stargard.
7. Wilhelm Dolainsky, Stargard.
8. Oskar Raupert, Stargard.
9. Franz Migge, Stargard.
10. Max Reiwald, Stargard.
11. Paul Tettenborn, Stargard.
12. Georg Sonnemann, Stargard.
13. Georg Grützmacher, Stargard.
14. Oscar Piaschewski, Stargard.
15. Carl Jung, Stargard.
16. Georg Bennewitz, Stargard.
17. Conrad Buchner, Stargard.
18. Samuel Protzen, Stargard.
19. Alfred Daniel, Stargard.
20. Carl Branco, Stargard.
21. Samuel Goldschmidt, Stargard.
22. Gustav Löbel, Stargard.
23. Walter Strutz, Stargard.
24. Ernst Wilde, Balsdrey bei Schivelbein.
25. Bruno Coste, Stargard.
26. Otto Parpart, Stargard.
27. Wilhelm Rosa, Stargard.
28. Hans Scheunemann, Stargard.
29. Hugo Witte, Kietzig.
30. Ernst Stauch, Stargard.
31. Georg Wendt, Stargard.
32. Hermann Susemihl, Stargard.
33. Fritz Zühlsdorf, Stargard.
34. Otto v. Grote, Stargard.
35. Otto Knatz, Stargard.

IV. Verzeichniss der Abiturienten.

a. Zu Michaelis 1878.

Name.	Geburtsort.	Confession.	Stand des Vaters.	Altersjahre.	Aufenthalt auf dem hiesigen Gymnasium.	Aufenthalt in Prima.	Bestimmung.
1. Gustav Haack	Kublank bei Stargard	evang.	Bauerhofsbes.	22 1/2	10	3	Jura in Breslau.
2. Paul Kuhnke	Rietzig bei Arnswalde	evang.	Bauerhofsbes.	18	6 1/4	2	Philologie u. Geschichte in Berlin.
3. Max Wendler	Ottilienhof bei Berlinchen	evang.	Gutsbesitzer	20	7	2	Jura in Breslau.
4. Georg Huth	Kuhtz bei Cöslin	evang.	Administrator	20 1/4	7 1/2	2	Philologie in Greifswald.
5. Max Cohn	Neuwedel	jüdisch	Kaufmann	18 1/4	7 1/4	2	Jura in Berlin.
6. Otto Mantey	Neustettin	evang.	Kreisger.-Secret.	20	5	2	Philologie in Berlin.
7. Gustav Kuhnke	Schönfelde	evang.	Schmiedemeister.	20 1/2	6 1/2	2	Jura in Berlin.

b. Zu Ostern 1879.

Name.	Geburtsort.	Confession.	Stand des Vaters.	Altersjahre.	Aufenthalt auf dem hiesigen Gymnasium.	Aufenthalt in Prima.	Bestimmung.
1. Emil Hedemann	Stargard	evang.	Seminarlehrer	21 3/4	8	3 1/2	Theologie in Greifswald.
2. Paul Zantz	Stargard	evang.	Rentier	21	12	3	Medicin in Freiburg.
3. Paul Hecker	Simmatzig bei Schivelbein	evang.	Rentier	19	9	2	Jura in Freiburg.
4. Johannes Trost	Stargard	evang.	Vorschullehrer	19 1/2	11	2	Medicin in Freiburg.
5. Julius Renner.	Herdensau bei Neuwedel i/M.	evang.	Mühlenbaumstr.	19 3/4	1 1/2	2	Medicin in Greifswald.
6. Ernst Schmidt	Beweringen bei Freienwalde i/P.	evang.	Rittergutsbesitz.	19	10 1/2	2	Naturwissenschaft und Mathematik in Freiburg.
7. Samuel Meyer	Nörenberg	jüdisch	Kaufmann	19 1/2	6 1/2	2	Jura in Heidelberg.
8. Carl Herrlinger	Stargard	evang.	Gymnasialdiener	21	12	2	Jura in Breslau.
9. Georg Hesselbarth	Berlinchen	evang.	Gutsbesitzer	21	2	2	Medicin in Berlin.
10. Georg Keferstein	Crossen a/O.	evang.	Pastor	22	2 1/2	2	Medicin in München.
11. Felix Winde	Stargard	evang.	† Deposit.-Kass.-Rendant	21	12	2	Mathematik in Berlin.
12. Fritz Vogel	Mienken bei Neuwedel	evang.	Lehrer	21	10	3	Philologie in Berlin.
13. Rudolf Zühl	Werben bei Seehausen i. d. Altm.	evang.	Apotheker	18 1/2	5 1/2	2	Jura in Heidelberg.
14. Walter Schüler	Stargard	evang.	Kreisgerichtsrath	19	10 1/2	2	Jura in Berlin.
15. Paul Merner	Regenwalde	jüdisch	Kaufmann	19 3/4	4	2	Jura in Heidelberg.
16. Johannes Rohde	Stargard	evang.	Badereibesitzer	21 3/4	1/2	5	Philologie in Berlin.

Die Themata, welche die Abiturienten zu Michaelis zu bearbeiten hatten, waren: Im Lat.: Quibus rebus meruerit Solon de civitate Atheniensium, explicetur. Im Deutschen: Welche Umstände führen nach der Geschichte den Untergang grosser Staaten herbei?

Zu Ostern wurden folgende Themata gestellt: Im Lat.: Cicero, ut vita clarus, ita ingenio maximus (Vellej. II.). Im Deutschen: Welche politischen Verhältnisse haben das Gelingen der Reformation gefördert? In der Mathematik: In einem Kreise sind zwei Sehnen und ein Punkt gegeben. Durch den letzteren eine neue Sehne so zu ziehen, dass ihr Mittelpunkt von der ersten Sehne dreimal so weit entfernt ist als von der zweiten. 2. (Trigonometrie.) Von einem Dreieck kennt man die Grundlinie a, die Transversale t_a, welche dieselbe halbirt und den Winkel

α an der Spitze den Inhalt zu berechnen. Beispiel: $a = 17{,}_{48}$ m. $t\,a = 12{,}_{46}$ m.
$\alpha = 68^0\ 18'$.

3. (Arithmetik): $x^4 - 3\,x^3 y + 2\,x^2 y^2 - 3\,x y^3 + y^4 = 10$
$x^3 y - x^2 y^2 + x y^3 = 21.$

4. (Stereometrie): In eine Halbkugel ist ein Kegel gezeichnet, dessen Spitze im Mittelpunkte der Halbkugel liegt. Den Winkel an der Spitze desselben zu finden, wenn die Gesammtoberfläche der Halbkugel viermal so gross ist als die des Kegels.

Von den 16 Abiturienten zum Ostertermin wurden auf Grund des Ausfalls der schriftlichen Arbeiten vom münlichen Examen dispensirt: **Trost** und **Meyer.**

V. Lehrmittel des Gymnasiums.

Die Bibliothek des Königlichen und Gröning'schen Gymnasiums erhielt:

I. Von dem Königlichen Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten: 1. Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 84 Heft 4. Bd. 85. Bd. 86 Heft 1—3. 2. Rheinisches Museum XXXIII. 3. Zeitschrift für deutsches Alterthum etc., Bd. XXII. Heft 2—4. Bd. XXIII., Heft 1 und 2. 4. Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde, Bd. XIII. und Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde V. 5. Deutsche Schulgesetz-Sammlung. Red. von F. E. Keller. 7. Jahrg. 6. Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge, Bd. VI., Heft 1 und 2.

II. Von der Decker'schen Verlagsbuchhandlung: Abriss der Kirchengeschichte für Gymnasien von Ferd. Baessler. II. Aufl. Berlin 1878. Von der Verlagsbuchhandlung des Herrn Kanitz in Gera: Hauptregeln der griechischen Syntax von Dr. Eug. Frohwein. Gera 1879. Von Herrn Hauptmann Steffen: Révue des deux mondes. Jahrg. 1876—1878. Von der Verlagsbuchhandlung Weber in Bonn: Wittichen, Lehrbuch für den evangelischen Religionsunterricht; von B. G. Teubner in Leipzig: Koch, Griechische Schulgrammatik; von Bädeker in Essen: Spiess, Uebungsbuch zum Uebersetzen aus dem Griechischen ins Deutsche. Von einigen Mitgliedern des Collegiums: Zeitschrift für das Gymnasialwesen; Zarncke, Centralblatt; Jenaer Literaturzeitung.

Dem Königlichen Ministerium der geistlichen etc. Angelegenheiten, so wie den verehrlichen Verlagsbuchhandlungen und den Gönnern des Gymnasiums, welche die Bibliothek so reich beschenkt haben, spreche ich im Namen der Anstalt den herzlichsten Dank aus.

Die für die Auschaffung von physikalischen Apparaten ausgeworfenen und neu bewilligten Summen sind in vorschriftsmässiger Weise verwendet worden.

III. Aus der Falbestiftung: Treu, Geschichte der Stadt Friedeberg i. d. N.; Volkmann, Rhetorik; Mnemosyne, 11 Bde. und Appendix; Vanicek, Griechisch-Lateinisches etymologisches Wörterbuch; Madvigii emendationes Livianae; Curtius, Das Verbum; I. H. H. Schmidt, Synonymik der griechischen Sprache, Bd. 1 und 2; Cobet, Miscellanea critica; Blass, Die attische Beredsamkeit 1 und 3, 1; Dräger, Historische Syntax II; Nicolai, Griechische Literaturgeschichte; Vanicek, Fremdwörter.

IV. Neue Erwerbungen: Die Fortsetzungen von K. O. Müller, Etrusker; Sybel, Historische Zeitschrift; Fleckeisen-Masius, Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik; Ebeling, lexicon Homericum; Centralblatt für das gesammte Unterrichtswesen; Jahrbuch der Erfindungen; Spruner, Hand-Atlas; Grimm, Wörterbuch; Holm, Geschichte Siciliens; Giesebrecht, Geschichte der Kaiserzeit; Hertzberg, Geschichte Griechenlands; Geschichtsschreiber der deutschen Vorzeit; Marquardt, Römische Staatsverwaltung; Keil, Grammatici Latini; Amtsblatt; Zeller, Philosophie der Griechen; Deecke, Etruskische Forschungen; Wattenbach, Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter; Vischer, Kleine Schriften; Meyer, Die kinetische Theorie der Gase; Droysen, Diadochen; Derselbe, Epigonen; Riezler, Geschichte Baierns; Hirschfeld, Untersuchungen; Vogel, Praktische Spectralanalyse.

Die Anträge zur Anschaffung neuer Werke wurden in der Lehrer-Conferenz gestellt und darüber Beschluss gefasst.

VI. Chronik.

Am 13. April wurde das Schuljahr mit der Bekanntmachung der Versetzungen in hergebrachter Weise geschlossen. Die Prüfung der neu angemeldeten Schüler fand den 24. April statt. Am 25. April wurde, nachdem die neuen Schüler aufgenommen waren und der Director auf die Wichtigkeit der Gymnasialstudien hingewiesen hatte, das neue Unterrichtsjahr eröffnet. Leider mussten die Lehrstunden im Laufe des Jahres wegen Erkrankung einzelner Lehrer öfter verändert werden. Herr Prorector Dr. Wiggert, der schon im Winter-Semester mehrere Wochen wegen eines Halsleidens vertreten werden musste, konnte auch zu Anfang des Sommer-Semesters seinen Unterricht nicht gleich übernehmen. Am 17. Mai begann er seine griechischen und hebräischen Lectionen zu ertheilen und im August erst trat er in den vollen Unterricht wieder ein. Herr Oberlehrer Runge, dessen angegriffene Gesundheit bereits in dem vorigen Schuljahre eine Aenderung des Unterrichtsplanes nöthig gemacht hatte, sah sich veranlasst bei dem Königlichen Provinzial-Schul-Collegium um einen halbjährigen Urlaub zu bitten. Derselbe wurde ihm gewährt und der Candidat Weinert gegen Pfingsten zur Aushülfe dem hiesigen Gymnasium überwiesen. Wir sind für die von dem Herrn Collegen Weinert dem Gymnasium geleisteten Dienste sehr dankbar und erinnern uns gern seiner hiesigen Thätigkeit. Ebenso mussten die Herren Oberlehrer Dr. Schmidt, Gymnasiallehrer Schröder, Saniter, Petrich, Newie, Steinbrecht und Herr Vorschullehrer Selke auf kürzere Zeit vertreten werden. Diese vielfachen insbesondere durch Krankheit veranlassten Störungen unterbrachen die Regelmässigkeit des Unterrichts in bedauerlicher Weise. Es mussten zur Vertretung auch solche Lehrer herangezogen werden, welche in den betreffenden Klassen nicht zu unterrichten pflegten.

Am 16. August fand um den hundertjährigen Geburtstag des „Vater Jahn“ würdig zu feiern das Turnfest statt. Auch in diesem Jahre hatte sich eine grosse Anzahl von Freunden gymnastischer Uebungen auf dem Turnplatze eingefunden. Die Leistungen einzelner Schüler waren zum Theil vorzüglich, da auch während des Wintersemesters, wenn die Witterung es einigermassen gestattete, in dem uns von dem verehrlichen Magistrat gütig überlassenen Raume, der freilich nicht geheizt werden kann, von den beiden Turnlehrern Herrn Dr. Ziegel und Herrn Strutz die Schüler im Turnen unterrichtet werden. Nachdem die Turner ihre Kunstfertigkeit gezeigt hatten, traten sie zusammen und sangen die Volkshymne: „Heil Dir im Siegerkranz“. Als die Töne dieses patriotischen Liedes verklungen waren, entwarf Herr Dr. Ziegel in längerer Rede ein Bild des Lebensganges Friedrich Ludwig Jahns. Hierauf fand die Vertheilung der Prämien statt. Es erhielten folgende Schüler Preise: aus Ia.: Haack, Wendeler, Mantey, Vogel, Schüler; aus Ib.: v. Schmidt, Eisleben; aus IIa.: Bokofzer, Küchel, Wendeler, Schmeling; aus IIb.: Grass, Gammert, Breuer, Tessmar, Helling, Stavenow, Michaelis, Schmeling; aus IIIa.: Reichhelm, Merker, Danker, Goltz, Schröder, Haack; aus IIIb.: Stöwer, Hammerschmidt, Haken, Boettger, Hendewerk, Buchholz, Reichhelm, Borchert; aus IVa.: Plantikow, Müller, Barkowski, Zantz, Schröder II.; aus IVb.: Tschentscher, Petrich, Haken II., Stock; aus Va.: Levy, Mühling, Zeglin, Filter, Protzen, Kersten; aus Vb.: Klotzsch, Ammon, Rünger, Splettstösser, Klose, Kannenberg; aus VIa.: Müller, Pless II., Karow, Daniel; aus VIb.: Wuttge, Danker, Arnold, Levy, Heim. Zum Schluss hielt der unterzeichnete Director eine kurze Ansprache an die Schüler, in welcher er ihnen ebenfalls Jahn als echten deutschen Patrioten zum Vorbild hinstellte und ein Hoch auf Se. Majestät unsern geliebten Kaiser und Herrn ausbrachte, in welches Jung und Alt kräftig einstimmte. Mit dem Gesange des „Deutschland über Alles“ etc. schloss das Fest.

Am 23. August gingen Lehrer und Schüler in der Marienkirche zum heiligen Abendmahl.

Der zweite September, der Tag von Sedan, wurde durch eine Festrede des Herrn Gymnasiallehrers Newie in der Aula gefeiert.

Am 4. September fand unter dem Vorsitze des Herrn Geh. Rathes Dr. Wehrmann die Abiturientenprüfung statt.

Am 12. October wurden diejenigen Schüler examinirt, welche sich zur Aufnahme in das Gymnasium gemeldet hatten und den 14. October begann, nachdem die neuen Schüler in ihre Klassen eingeführt waren, der Unterricht des Wintersemesters.

Das Peter-Gröningsfest wurde in üblicher Weise in dem Stein'schen Saale abgehalten. Nach einem die Feier einleitenden Gesange hielt der Oberprimaner Pagé eine lateinische Rede über den Charakter der Electra nach der Tragödie des Sophocles; die Oberprimaner Goldmann und Haun trugen in griechischer Sprache ergreifende Stellen aus demselben Drama vor. Die Unterprimaner Grunenwald, Tolks, Müller und Zastrow recitirten die Eingangsscene der sophocleischen Antigone in griechischer und deutscher Sprache. Hierauf sprach Oberprimaner Vorpahl über Goethe's Tasso. Die Festrede hielt der unterzeichnete Director. Nachdem des um die Stadt Stargard hochverdienten Bürgermeisters Peter Gröning gedacht worden war, wurde die Bedeutung Wilhelm von Humboldt's, der sich als Staatsmann „von Pericleischer Hoheit“ insbesondere um die Hebung der Gymnasien und Universitäten des preussischen Staates die hervorragendsten Verdienste erworben hat, in ausführlicher Rede entwickelt. Schliesslich wurden Prämien vertheilt. Durch die ausserordentliche Güte einer Freundin des Gymnasiums war es dem unterzeichneten Director möglich auch je zweien Schülern der drei Vorklassen Praemien einzuhändigen. Von dem Lehrer-Collegium waren den Herren Curatoren der II. Peter-Gröning'schen Testamentsstiftung vier Schüler aus jeder Klasse vorgeschlagen und je zwei ausgewählt worden. Aus Ia. wurden folgenden Schülern Prämien bewilligt: Paul Hecker und Georg Goldmann; aus Ib.: Ernst Wuttge und Wilhelm Gützlaff; aus IIa.: Gustav Blenn und Fritz Knust; aus IIb.: August Zander, Paul Krüger und P. Clericus; aus IIIa.: Hermann Schmeling und Bernhard Paqué; aus IIIb.: Hermann Hamann und Otto Manzke; aus IVa.: Franz Bandoly und Otto Stock; aus IVb.: Max Filter und Otto Schliebener; aus Va.: Johannes Hülsberg und Paul Gehrke; aus Vb.: Benno Ehrlich und Ernst Wilde; aus VIa.: Max Levy und Paul Dehnel; aus VIb.: Erich Coste und Dietrich Susemihl; aus Vorschule I.: Friedrich Steffen und Richard Steffen; aus Vorschule II.: Ernst Bennewitz und Felix Bauer; aus Vorschule III.: Ernst Bittner und Wilhelm Rosa. Auch zu dieser Feier hatten sich viele Freunde gymnasialer Bildung eingefunden. Am Abende dieses Festtags für die Schule vereinigten sich die Lehrer der Anstalt zu einem Festmahle. Die Zinsen von 1800 Mark sollen nach der testamentarischen Bestimmung des Schulraths Falbe dazu verwandt werden, dass die Lehrer des Gymnasiums jährlich an einem festlichen Tage zusammenkommen und sich bei einem Mahle in fröhlicher Eintracht über Lehr- und Disciplinarfälle unterhalten.

Im Laufe des Schuljahres haben aus der von dem Director und Prorektor des Gymnasiums verwalteten Stiftung des um das Gymnasium so hochverdienten Schulraths Falbe folgende Schüler Unterstützungen erhalten: ein Stipendium die Abiturienten Wiedemann aus Klützow, Heling aus Roggow, Huth aus Sandow; Speisegelder die Primaner Hedemann, Herrlinger, Pagé, Jahn und die Secundaner Blenn und Schröder.

Die Prämie für den besten lateinischen Aufsatz über Horatius empfingen die Oberprimaner Paul Hecker und Georg Keferstein, die für die beste Handschrift erhielten der Quartaner Zühlke und der Quintaner Ammon.

Aus der Stahlkopf'schen Stiftung wurde eine Anzahl von Schülern durch Bücher unterstützt.

Das ansehnliche Moviusstipendium, dessen Verleihung dem Herrn Prediger Koser zusteht, erhielten: die Oberprimaner Pagé, Vogel, Vorpahl, der Unterprimaner Erich Müller und der Obertertianer Bollow.

Auch in dem nun zu Ende gehenden Schuljahre ist mir von freundlicher Hand eine erhebliche Summe zur Unterstützung armer und würdiger Schüler übergeben worden. Ein dankbarer früherer Zögling des Gymnasiums hat mir wiederholt Geld zugestellt, das würdigen und bedürftigen Schülern übermittelt wurde. Ausserdem hatten einige Familien die grosse Güte Gymnasiasten Freitische zu gewähren. Man erkennt aus diesen Thatsachen, dass der mildthätige Sinn, durch welchen sich unser liebes Stargard immer ausgezeichnet hat, noch nicht geschwunden ist. Für alle dem Gymnasium gespendeten Wohlthaten spreche ich auch an dieser Stelle den wärmsten Dank aus.

An dem englischen Unterrichte, welcher von dem Herrn Gymnasiallehrer Saniter ertheilt wird, nahmen im Ganzen im Sommer 21 und im Winter 30 Schüler Theil.

Am 18. Juli 1878 starb der Oberlehrer a. D. Dr. Wilhelm Gotthelf Schirlitz, ein Mann, der dem Königlichen und Gröning'schen Gymnasium viele Jahre hindurch treue Dienste geleistet hatte. Gern besuchte der Unterzeichnete den durch die Beschwerden des Alters in der letzten Zeit seines Lebens oft an sein Studierzimmer gefesselten Collegen und Landsmann, er lauschte mit Vergnügen den Berichten, die er ihm über die Lehrmethode des ehrwürdigen Rectors der berühmten Landesschule Pforta, Dav. Ilgen, gab. Schirlitz war zu Benndorf bei Borna in Sachsen am 5. October 1800 geboren, unter Ilgen besuchte er 1815—19 die Landesschule Pforta, bezog dann die Universität Leipzig, um unter Leitung des grossen Philologen Gottfr. Hermann seine philologischen und unter Krug philosophischen Studien zu machen. Im Jahre 1823 wurde er Lehrer an der lateinischen Hauptschule in Halle. Von 1828 bis 1856 war er an dem Stargarder Gymnasium als Oberlehrer thätig. Ein Augenleiden veranlasste ihn um seine Pensionirung nachzusuchen. Seit dieser Zeit lebte er still und zurückgezogen seinen Studien. Während des Sommers pflegte er einige Monate im Süden Deutschlands oder in Thüringen sich zu erholen, besonders gern weilte er in Freiburg i. Br. und in Heidelberg. Oefter besuchte er seine Brüder, den Director Carl August Schirlitz in Nordhausen und den Professor Samuel Christoph Schirlitz in Wetzlar. In der „Stargarder Zeitung" vom 27. Juli 1878 findet sich von einem vieljährigen Freunde und Collegen des Verewigten folgender Nachruf, der nach meiner Schätzung eine gute Charakteristik des trefflichen, schlichten Mannes enthält: „„Sie sollen, sterbe ich, mir die Gedächtnissrede halten", sprach zu mir vor einem Vierteljahrhundert nach einer Todtenfeier der Verewigte. Diese Worte entschuldigen, ja verpflichten mich, aus der Ferne meine Wehmuth in einem einfachen Bilde seines innern Lebens seinen vielen Freunden auszusprechen, um in ihnen ein lebendigeres hervorzurufen. Ich kann es wagen, da ich mit ihm die schönsten Jahre seiner Thätigkeit durchlebt und neben ihm mehr als zwanzig Jahre für die Jugend gewirkt habe. Stets hat er seine Schüler väterlich geliebt, und Achtung und Vertrauen war der allgemeine Dank derselben. Sein Unterricht war ausgezeichnet durch Fasslichkeit und Beziehung alles Gedächtnissstoffes auf den Verstand, so dass auch Schwächere selten ermatteten. Sein Hauptverdienst war: er lehrte denken. Nicht leicht dürfte ein Lehrer sich eines günstigeren Bildungsganges erfreuen. Aufgewachsen in einer theologischen und pädagogischen Familie, wandte er sich auf der Universität der gemüthvollen Kant'schen Philosophie zu, die lebenslang seinem Geiste dergestalt entsprach, dass er die neueren Systeme kaum zu berühren wagte. Sein Lieblingsgespräch war der Unsterblichkeits-Glaube, den er ausschliesslich auf „das Gewissen in uns" basirte, so dass, wenn ein scharf denkender College Kant's zweite Bürgschaft, „den gestirnten Himmel über uns", mit physikalischen Gründen erhärten wollte, er diese für überflüssig erklärte. Ueberall war seine Aehnlichkeit mit Kant unverkennbar und von ihm selbst eingestanden. Sein Leben war eingezogen und beschaulich; Besuche waren ihm nicht sonderlich erfreulich; lieber ging er auswärts in einen Kreis geistig sich unterhaltender Männer, und um solche Gesellschaft leichter zu finden, hielt er sich in späterer Zeit, wo er das Reisen liebgewann, nur in kleineren Städten auf. Die Ruhe eines Weisen begleitete ihn durch das Leben, und nur zweimal ist er nach eigener Aussage enthusiasmirt gewesen: in jungen Jahren durch eine Gattung der lyrischen Poesie, in reiferen durch öffentliche Verhandlungen behufs Verbreitung allgemeiner Bildung. Die hierdurch veranlassten populären Vorträge werden sicherlich in dankbarem Andenken bleiben. Dass für die Menschheit in ihm ein liebevolles Herz schlug, hatte er schon in seiner ersten Schrift (für Abschaffung der Todesstrafe) bewiesen. Seine Herzensgüte liess ihn von Niemand schlecht denken und sprechen. Fremde Selbstsucht war ihm eine flüchtige Verdunkelung der Seele und ebenso jede andere daraus entspringende Untugend. Pflichtgefühl zeigte er am deutlichsten im Amte, Wahrheitsliebe schon im oberflächlichen Verkehr. Durch und durch friedfertig und wohlwollend hatte er keinen persönlichen Feind. Seinen Freunden bewies er unbedingte Treue, wovon Niemand rührendere Beispiele geben könnte als ich. Man charakterisirt gern Menschen mit einem Wort, für ihn weiss ich nur das lobende: eine kindlich reine Seele. Darum war sein Leben ein zufriedenes, glückliches.*)

Leider sind im Laufe des Schuljahres drei hoffnungsvolle Schüler durch den Tod aus unserer Mitte abgerufen worden. Am 20. April starb der Obertertianer Braatz aus Regenthin, am 29. Sep-

*) Dr. Schirlitz veröffentlichte in dem Programm des Gymnasiums vom Jahre 1838 eine Abhandlung: Syntax des neuhochdeutschen Artikels; 1844 eine Abhandlung: Die deutschen Waffennamen. (Progr.); 1852: Annotationum ad Platonis Phaedonem fasc. I. (Progr.) Im Jahre 1876 gab er heraus: Heidelberg, Freiburg und Konstanz. Natur- und Lebens-Bilder in Versen. Zu Anfang der vierziger Jahre erschien eine philosophische Propädeutik. Stargard (bei Ferd. Hendess).

tember im Hause der Eltern der Untertertianer Franz Moldenhauer aus Massow und am 1. Februar 1879 der Obertertianer Max Gründler aus Heidchen bei Neumark in Pomm. nach vierzehntägiger Krankheit. Ein bösartiger Typhus machte dem Leben dieser uns lieb gewordenen Schüler ein Ende. Der gnädige Gott wolle die schweren Wunden, welche den Herzen der Eltern geschlagen sind, heilen und sie trösten und stärken.

Die Oberprimaner trieben während der Zeit, in welcher zu Michaelis und zu Ostern die schriftlichen Prüfungsarbeiten angefertigt wurden lateinische Privatlectüre, da wegen der Beschränktheit der Räumlichkeiten die Lehrstunden ausfallen mussten.

Am 18. März wurde unter dem Vorsitze des Herrn Geheimen Rathes Dr. Wehrmann die Abiturientenprüfung abgehalten.

Am 21. März fand zur Feier des Geburtstages Sr. Majestät unseres vielgeliebten Kaisers und Herrn im Stein'schen Saale ein Festactus statt. Aus den einzelnen Klassen trugen Schüler patriotische Gedichte vor. Die Festrede hielt Herr Gymnasiallehrer Dr. Ziegel über die Entwicklung des nationalen Sinnes in Deutschland.

VII. Schluss des Schuljahres.

Durch eine Verfügung des Königlichen Schul-Collegiums vom 2. Januar c. a. (S. Nro. 21) ist bestimmt worden, dass die Osterferien den 2. April Mittags beginnen und mit Mittwoch, dem 16. April, endigen sollen, so dass der Unterricht des Sommer-Semesters am Donnerstag der Osterwoche früh 8 Uhr anfängt. In Folge dieser Anordnung finden die öffentlichen Examina in der Weise statt, dass Dienstag von $1\frac{1}{2}$ Uhr ab die Vorklassen und die Gymnasialklassen bis Unterquarta geprüft werden. Am Mittwoch werden sodann von früh $7\frac{1}{2}$ Uhr ab aus den übrigen Klassen Schüler Einzelnes aus lateinischen, griechischen und deutschen Klassikern vortragen. Hierauf werden die Versetzungen bekannt gemacht und die Abiturienten entlassen. Zum Schlusse theilen die Ordinarien den Schülern die Censuren mit. Mittwoch, den 16. April, von früh 9 Uhr findet in dem Königlichen und Gröning'schen Gymnasium die Prüfung neu aufzunehmender Schüler statt. Diejenigen, welche sich der Prüfung unterziehen wollen, haben ein Schulzeugniss und ein Impfungs- resp. Revaccinations-Attest vorzuzeigen.

Ich erlaube mir darauf hinzuweisen, dass die Eltern oder Angehörigen auswärtiger Schüler verpflichtet sind, sich mit mir über die Wahl der Pensionen zu verständigen. Ich bin immer im Stande über Familien, bei denen Schüler Aufnahme finden können, Aufschluss zu geben.

Die am Schlusse des letzten Programms in Aussicht gestellte Aufnahme des Baues eines neuen Gymnasiums ist nicht erfolgt; hoffentlich wird nun endlich in diesem Frühling der Grund zum Neubau gelegt.

Stargard in Pomm., den 25. März 1879.

Prof. Dr. G. Lothholz,
Director.