

## Electromagnétisme B

### Equations de Maxwell: ondes, électrostatique, magnétostatique, induction

#### *Sommaire*

Equations de Maxwell locales et globales dans un milieu conducteur

Equations de Maxwell et ondes électromagnétiques dans le vide

Equations de Maxwell et ondes électromagnétiques dans un diélectrique; onde de plasma

Equations de Maxwell en régime stationnaire

électrostatique et théorème de Gauss

magnétostatique et théorème d'Ampère; dipôle magnétique

*Exemples d'application des théorèmes*

*Applications astrophysiques: champs magnétiques solaires*

Force de Laplace et *applications au soleil*

Loi d'Ohm

Induction magnétique

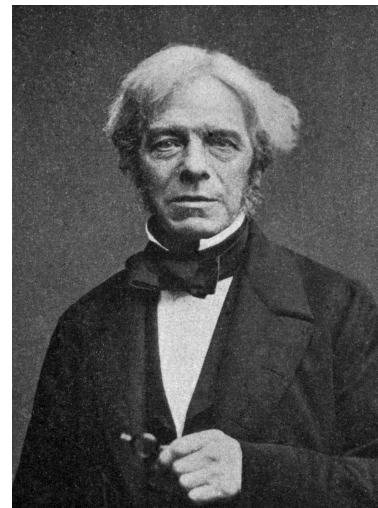
Aspects énergétiques: énergie électrique, magnétique, puissance transportée

Analogie électrostatique/gravitation

Dans tout le cours, les vecteurs sont en caractères gras

## I - Equations de Maxwell dans un milieu conducteur

Maxwell (1831-1879): formalisation mathématique des travaux antérieurs sur l'électricité et le magnétisme, réalisés notamment par Gauss (1777-1855), Faraday (1791-1867) et Ampère (1775-1836). Il proposa un ensemble d'équations présentées la première fois à la Royal Society en 1864 qui décrivent le champ électrique et le champ magnétique ainsi que leur interaction avec la matière (charges et courants). Mais il faudra attendre l'avènement de l'analyse vectorielle au 20ème siècle pour aboutir aux 4 équations modernes.



*Maxwell, Gauss, Faraday, Ampère, pionniers de l'électromagnétisme (Wikipedia)*

## *Equations de Maxwell locales dans un milieu conducteur*

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

*Equation de Maxwell Gauss*

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$$

*Equation de Maxwell Faraday*

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

*Equation de Maxwell Thomson ou flux*

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$$

*Equation de Maxwell Ampère*

$\mathbf{E}$  champ électrique (unité: V m<sup>-1</sup>) - *champ vectoriel*

$\mathbf{B}$  champ magnétique (unité: T) - *champ vectoriel*

$\mathbf{j}$  densité volumique de courant électrique (unité: A m<sup>-2</sup>) - *champ vectoriel* (  $I = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  )

$\rho$  = densité volumique de charge électrique (unité: C m<sup>-3</sup>) - *champ scalaire* (  $q = \iiint \rho \, dv$  )

$\epsilon_0$  permittivité du vide ( $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$  unités SI ou m<sup>-3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>4</sup> A<sup>2</sup>)

$\mu_0$  perméabilité magnétique du vide ( $4\pi \cdot 10^{-7}$  unités SI ou m kg s<sup>-2</sup> A<sup>-2</sup>)

$\mu_0 \epsilon_0 C^2 = 1$  (C =  $3 \cdot 10^8$  m s<sup>-1</sup> vitesse de la lumière dans le vide).

div, **rot** opérateurs "divergence" et "rotationnel" agissant sur les variables d'espace.

$\text{div } \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}$  et  $\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \wedge \mathbf{E}$  (en coordonnées cartésiennes seulement)

Avec  $\nabla$  opérateur « NABLA » des dérivées spatiales ( $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ ).

$$\mathbf{E} = - \mathbf{grad} V - \partial \mathbf{A} / \partial t$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$$

et la condition de jauge de Coulomb,  $\mathbf{div} \mathbf{A} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} V \text{ est le potentiel scalaire (unité: V) - } \textit{champ scalaire} \\ \mathbf{A} \text{ est le potentiel vecteur (unité: T m) - } \textit{champ vectoriel} \\ \partial \mathbf{A} / \partial t \text{ est le champ électromoteur (unité: V m}^{-1}\text{) - } \textit{champ vectoriel} \end{array} \right.$$

Remarques:

-l'équation de Maxwell Faraday  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$

découle de  $\mathbf{E} = - \mathbf{grad} V - \partial \mathbf{A} / \partial t$  en prenant son rotationnel

-l'équation de Maxwell flux  $\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$

découle de  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$  en prenant sa divergence

-la divergence de l'équation de Maxwell Ampère  $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$

combinée avec l'équation de Maxwell Gauss  $\mathbf{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ ,

donne l'équation de conservation de la charge:

$$\partial \rho / \partial t + \mathbf{div} \mathbf{j} = 0$$

Sous forme intégrée sur un volume  $V$  entouré par une surface fermée  $S$ , le théorème d'Ostrogradski donne sur cette équation:

$$\boxed{\partial q / \partial t + \oiint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\partial q / \partial t = -I} \quad \text{avec } q \text{ charge interne à } V$$

$I = \oiint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  est l'intensité du courant (A) traversant la surface frontière  $S$  comptée positivement vers l'extérieur.

Dans un milieu conducteur neutre :

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{j} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-$$

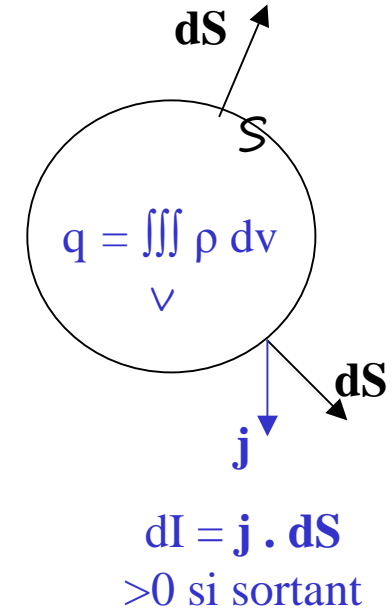
Dans un métal,  $\mathbf{v}_+ = \mathbf{0}$  d'où

$$\boxed{\mathbf{j} = \rho_- \mathbf{v}_-}$$

$\mathbf{j}$  est produit par les électrons mobiles ( $\sim 1$  électron libre par atome)

$\mathbf{j}$  est opposé à leur mouvement car  $\rho_- = -n e$  où  $n$  est la densité volumique d'électrons (en  $m^{-3}$ , environ  $10^{29} m^{-3}$  dans un métal) et  $-e$  la charge de l'électron ( $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ ).

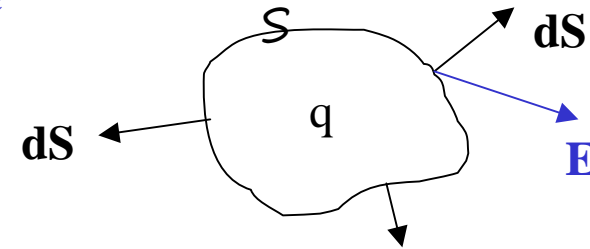
*Les équations de Maxwell sont locales; elles existent sous forme globale intégrée sur l'espace permettant d'exploiter les symétries pour déterminer  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à partir d'une distribution de charges ou de courants donnée.*



*Equations de Maxwell globales pour un conducteur:*

*utilisation du théorème d'Ostrogradski "flux divergence"*

*Surface fermée  $S$  entourant un volume  $V$*



$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{E} \, dv = \iiint \rho/\epsilon_0 \, dv, \quad \text{avec} \quad \iiint \operatorname{div} \mathbf{E} \, dv = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{et} \quad \iiint \rho/\epsilon_0 \, dv = q/\epsilon_0$$

$$\rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0$$

*Théorème de Gauss*

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée  $S$  est égal à la somme des charges intérieures  $q$  (en Coulomb) divisée par  $\epsilon_0$  ( $d\mathbf{S}$  est orienté vers l'extérieur)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{B} \, dv = 0, \quad \text{avec} \quad \iiint \operatorname{div} \mathbf{B} \, dv = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

*B à flux conservatif*

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée  $S$  est nul: le champ magnétique est à flux conservatif ( $\rightarrow$  pas de monopôle magnétique)

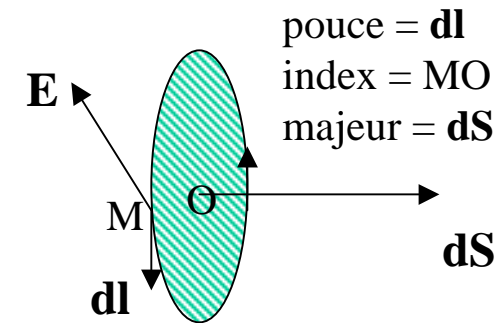
*Equations de Maxwell globales pour un conducteur:*

*utilisation du théorème de Stokes ou du “rotationnel”*

*Contour fermé  $\mathcal{C}$  orientant une surface  $S$  (règle des doigts)*

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$$

$$\iint \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \partial / \partial t \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{avec} \quad \iint \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Stokes})$$



$$\rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \partial \Phi(\mathbf{B}) / \partial t$$

*Loi de Maxwell Faraday (Flux  $\Phi$  : unité = Weber)*

*La circulation du champ électrique sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  est l'opposé de la variation du flux magnétique à travers toute surface enlacée et orientée par ce contour*

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$$

$$\iint \mathbf{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \epsilon_0 \partial / \partial t \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{avec} \quad \iint \mathbf{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Stokes})$$

$$\rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 [ I + \epsilon_0 \partial \Phi(\mathbf{E}) / \partial t ] \quad \text{Théorème d'Ampère généralisé}$$

*La circulation du champ magnétique sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  est égal à la somme des courants électriques  $I$  et de déplacement  $\epsilon_0 \partial \Phi(\mathbf{E}) / \partial t$  (mesurés en A), enlacés par ce contour, et multipliés par  $\mu_0$  (le contour  $\mathcal{C}$  oriente la surface enlacée)*

## II - Equations de Maxwell dans le vide et ondes électromagnétiques

Dans le vide,  $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ :

$\text{div } \mathbf{E} = 0$	<i>Equation de Maxwell Gauss</i>
$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$	<i>Equation de Maxwell Faraday</i>
$\text{div } \mathbf{B} = 0$	<i>Equation de Maxwell flux</i>
$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$	<i>Equation de Maxwell Ampère</i>

La combinaison aboutit à l'équation de d'Alembert avec  $\Delta$  opérateur Laplacien:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$$

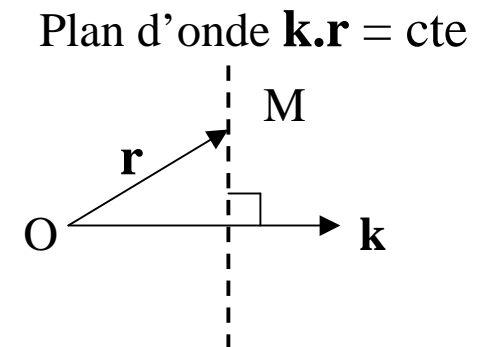
$\Delta \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E}$  en coordonnées cartésiennes ( $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ )

*Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH)*

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  où  $|\mathbf{E}| = E_0$  est l'amplitude

est solution de l'équation;  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$  (x, y, z) décrit l'espace; le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  indique la direction de propagation. Sa norme  $k$  ( $\text{m}^{-1}$ ) est liée à la pulsation  $\omega$  ( $\text{rd s}^{-1}$ ) par la relation de dispersion

$\omega = C k$ , où  $C$  est la vitesse de la lumière ( $\mu_0 \varepsilon_0 C^2 = 1$ ).





Pour une OPPH:  $\partial/\partial t = i \omega$      $\text{div} = -i \mathbf{k} \cdot$      $\text{rot} = -i \mathbf{k} \wedge$      $\text{grad} = -i \mathbf{k}$

→  $\mathbf{B} = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) / \omega$  est le champ magnétique associé à l'OPPH (Maxwell Faraday).

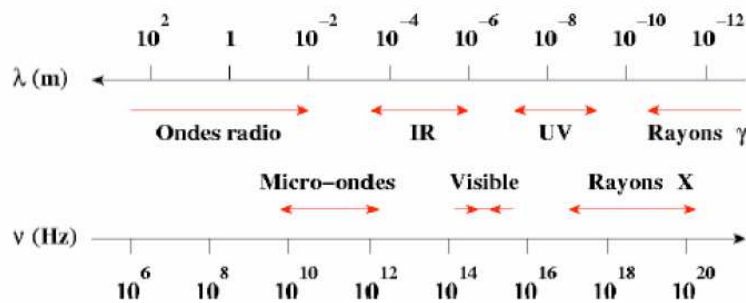
L'onde est transversale. Les vecteurs  $(\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$  forment un trièdre direct.

$\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation  $\mathbf{k}$ .

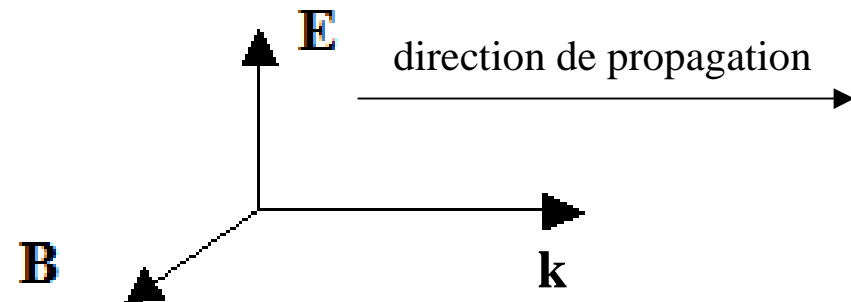
$\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont en phase et on a la relation  $\mathbf{E} = c \mathbf{B}$  entre leurs normes.

La densité moyenne d'énergie électromagnétique locale est  $\langle \rho_E \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2$  (J m<sup>-3</sup>).

La puissance moyenne propagée par l'OPPH est  $\langle \Pi \rangle = \langle \rho_E \rangle c = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 c$  (W m<sup>-2</sup>).



*Spectre électromagnétique*



### III - Equations de Maxwell et ondes dans un diélectrique LHI (isolant, charges liées)

sans charge ( $\rho = 0$ ), ni courant ( $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ):

$\text{div } \mathbf{D} = 0$	<i>Equation de Maxwell Gauss</i>
$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$	<i>Equation de Maxwell Faraday</i>
$\text{div } \mathbf{B} = 0$	<i>Equation de Maxwell flux</i>
$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \partial \mathbf{D} / \partial t$	<i>Equation de Maxwell Ampère</i>

$\mathbf{D}$  est le vecteur déplacement électrique ( $\text{C m}^{-2}$ ).

Milieu LHI:  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$  polarisation du milieu ( $\text{C m}^{-2}$ )

$\chi$  susceptibilité, constante complexe sans dimension qui dépend de la pulsation de l'onde

$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$	solution: OPPH de la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$
---	---

$\mathbf{k} = (\omega / C) (1 + \chi)^{1/2} = n (\omega / C)$ complexe
$n(\omega) = n_1 - i n_2 = (1 + \chi)^{1/2}$ et $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$

$n$  indice de réfraction complexe  
(milieu dispersif si  $n$  dépend de  $\omega$ )  
 $n_1, n_2$  indices de dispersion et d'absorption

Vitesse de <u>phase</u>	$v_\phi = \omega / R_e(\mathbf{k}) = C / n_1(\omega)$	et puissance moyenne transportée	$\langle \Pi \rangle = \langle \rho_E \rangle v_g$
Vitesse de <u>groupe</u>	$v_g = d\omega / dR_e(\mathbf{k})$		

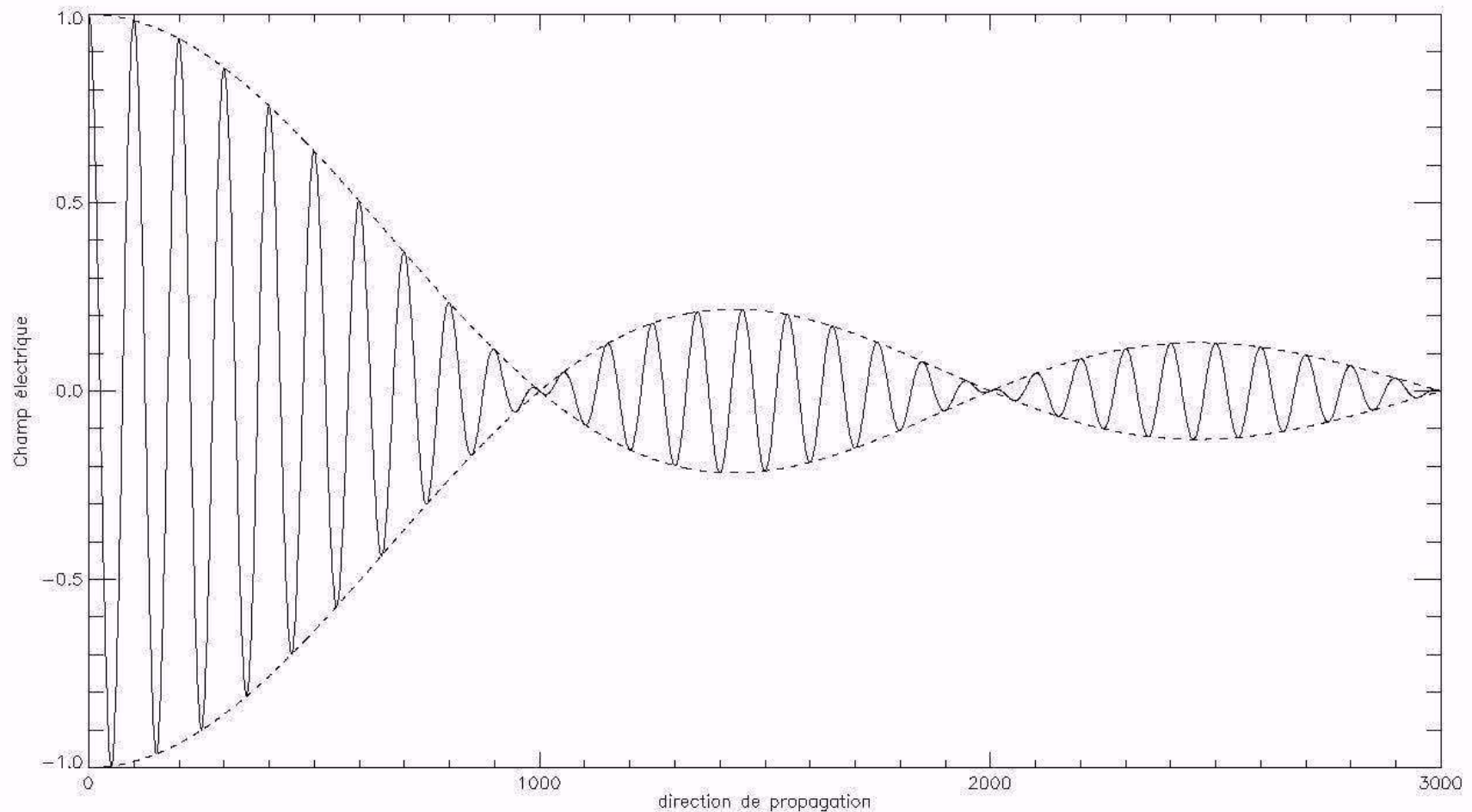
→ transport densité d'énergie moyenne  $\langle \rho_E \rangle = 1/2 \varepsilon_0 |n|^2 |E|^2$  ( $\text{J m}^{-3}$ ) à la vitesse de groupe  $v_g$ .

Propagation d'un paquet d'onde  $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int \mathbf{E}_0(\omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} d\omega$  centré sur la pulsation  $\omega_0$  de bande passante étroite  $\delta\omega \ll \omega_0$  ( $\omega_0 - \delta\omega/2 < \omega < \omega_0 + \delta\omega/2$ )

Vitesse de phase = vitesse du signal de pulsation  $\omega_0$

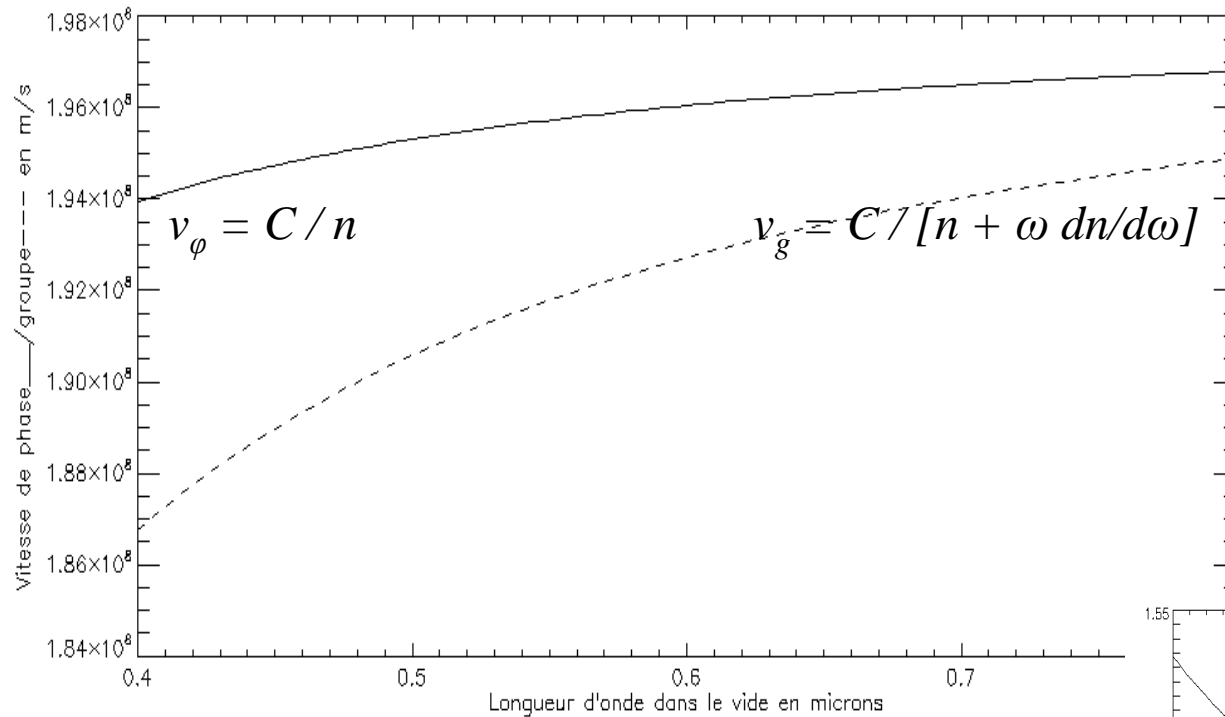
Vitesse de groupe = vitesse de l'enveloppe = vitesse de propagation de l'énergie

Ci dessous:  $\mathbf{E}_0(\omega) = \text{constante}$ , l'enveloppe est un sinus cardinal



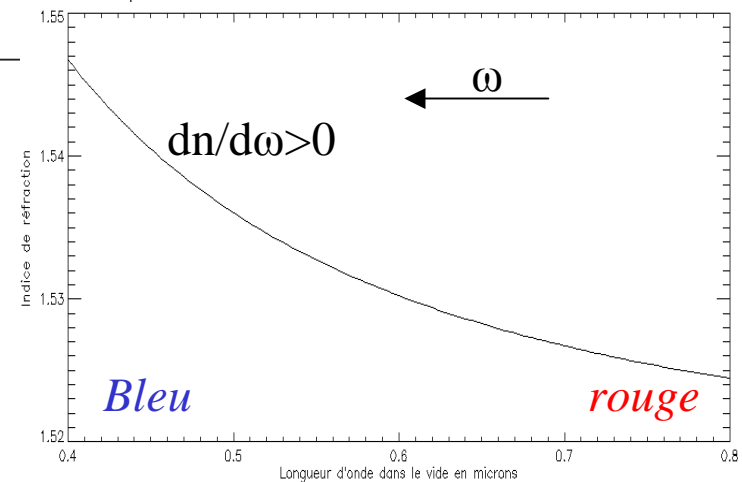
*Exemple 1 de milieu LHI: verre d'indice  $n$  dépendant de la pulsation ou de la longueur d'onde*

$$v_{\phi} = \omega / k = C / n, \quad v_g = d\omega / dk = C / [n + \omega dn/d\omega] < v_{\phi}$$



← *Vitesse de phase et vitesse de groupe du verre en fonction de la longueur d'onde de 0.4 à 0.8 microns*

*Indice de réfraction  $n$  du verre en fonction de la longueur d'onde de 0.4 à 0.8 microns*



Exemple 2 de milieu LHI: ondes dans un plasma d'électrons libres de vitesse  $v \ll C$

le milieu est LHI de susceptibilité  $\chi = -\omega_p^2 / \omega^2$

où  $\omega_p = (N e^2 / \epsilon_0 m)^{1/2}$  est la pulsation plasma électronique ou pulsation de coupure.

Relation de dispersion des ondes :  $k^2 = \omega^2 / C^2 (1 + \chi) = (\omega^2 - \omega_p^2) / C^2$

- Lorsque  $\omega < \omega_p$ ,  $k$  imaginaire pur, l'onde est absorbée

- Lorsque  $\omega > \omega_p$ ,  $k$  réel pur, l'onde se propage

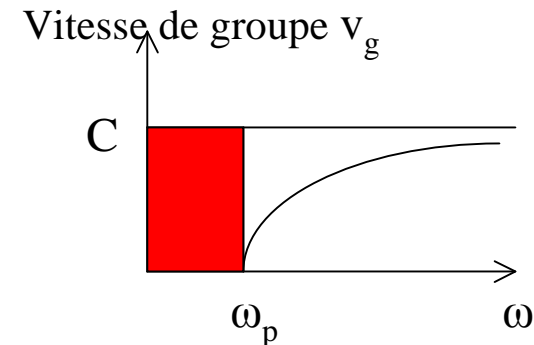
$$n = (1 - \omega_p^2 / \omega^2)^{1/2} < 1$$

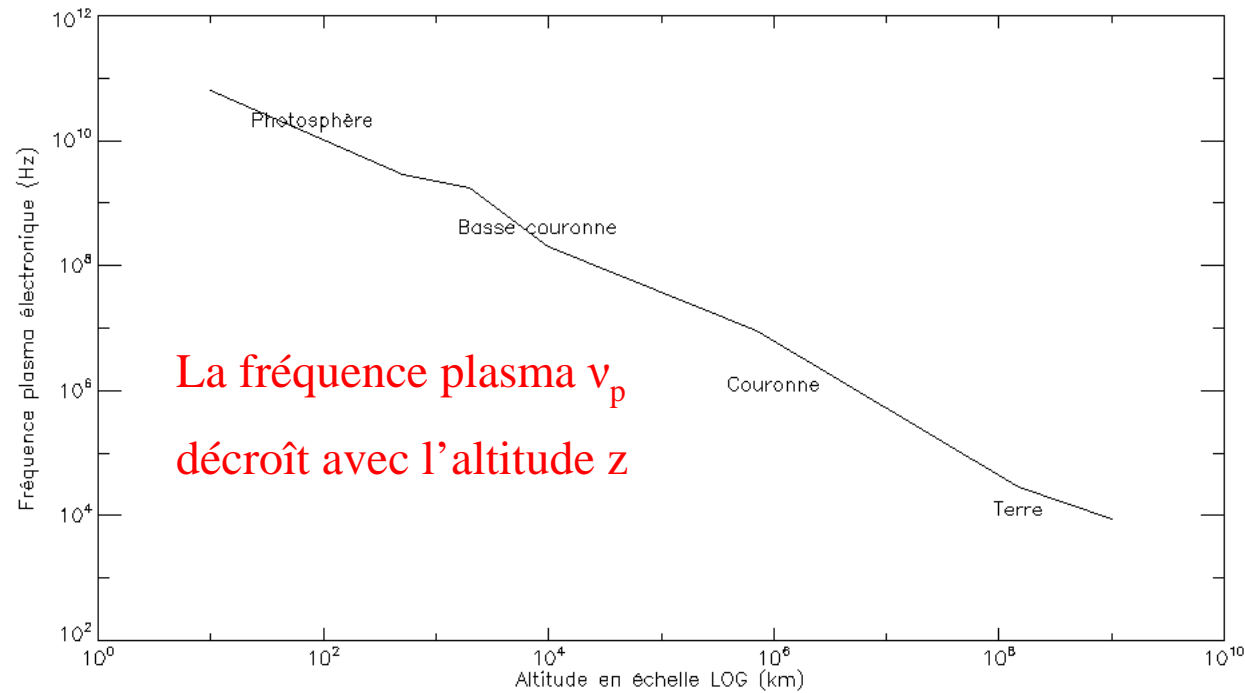
Vitesse de phase  $v_\phi = C/n > C$

Vitesse de groupe  $v_g$  liée à la vitesse de phase par la relation  $v_g = C^2 / v_\phi < C$

L'énergie volumique moyenne est  $\langle \rho_E \rangle = 1/2 \epsilon_0 |E|^2$  (électromagnétique + cinétique des particules soumises à la force  $-e \mathbf{E}$ ), unité  $J m^{-3}$ .

Puissance moyenne transportée  $\langle \Pi \rangle = \langle \rho_E \rangle v_g$  ( $Wm^{-2}$ ) vitesse de transport  $v_g$



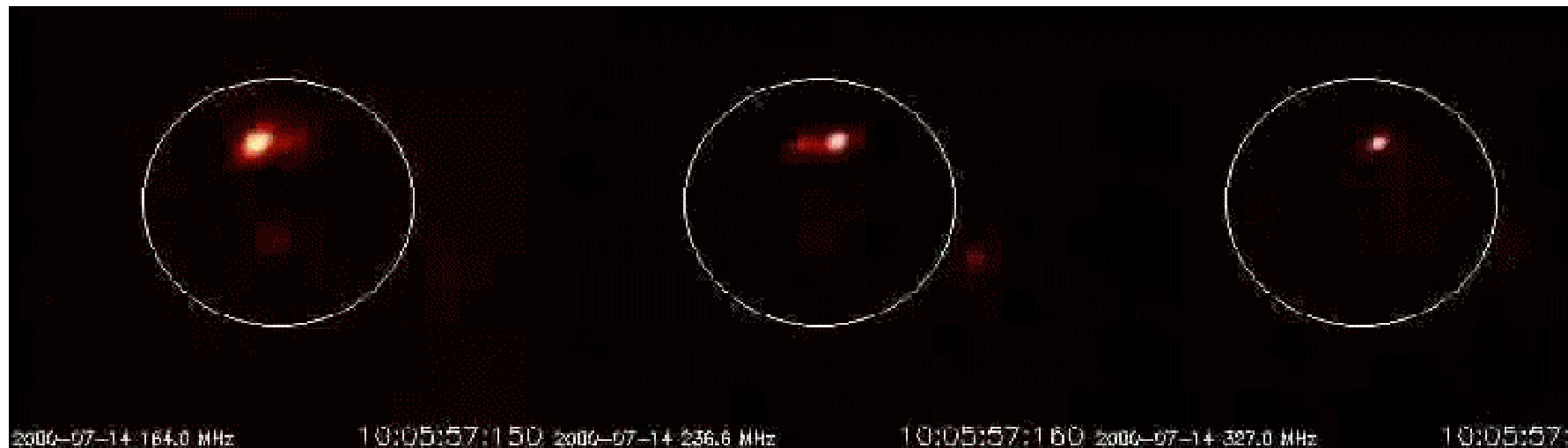


*Application au soleil:*

$$\omega_p = (N e^2 / \epsilon_0 m)^{1/2}$$

Valeurs de  $\nu_p = \omega_p / 2\pi$  dans l'atmosphère solaire en fonction de l'altitude  $z$  (échelles LOG)

Observations du soleil à 164, 236 et 327 MHz (Nançay) dans la basse couronne exploitant la relation entre la fréquence plasma et l'altitude de vision



## IV - Equations de Maxwell en régime stationnaire (ou permanent) dans un conducteur

en régime stationnaire:  $\partial/\partial t = 0$ ; on obtient:

### L'électrostatique

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

*Equation de Maxwell Gauss*

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

*Equation de Maxwell Faraday*

### La magnétostatique

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

*Equation de Maxwell flux*

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

*Equation de Maxwell Ampère*

Les équations sont découplées. Dans le vide, on aurait  $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ .

→ Les charges statiques  $\rho$  constituent la source du champ électrique  $\mathbf{E}$ .

→ Les courants électriques permanents  $\mathbf{j}$  constituent la source du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

→  $\mathbf{E}$  est à circulation conservative,  $\mathbf{B}$  est à flux conservatif

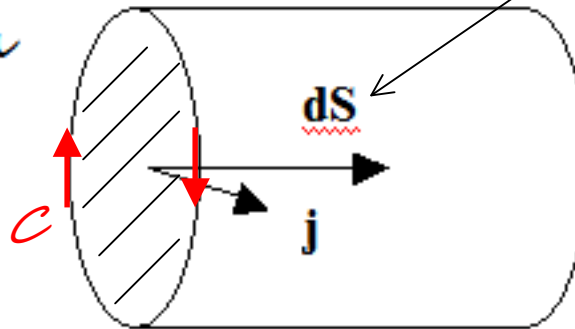
$$\mathbf{E} = - \text{grad } V \text{ et } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

avec  $V$  potentiel scalaire,  $\mathbf{A}$  potentiel vecteur

L'intensité du courant électrique  $I$  (A) est le flux de la densité volumique de courant  $\mathbf{j}$  au travers de la section  $S$  du conducteur ( $I$  est un scalaire, mais  $\mathbf{j}$  est un vecteur):

$$I = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (I \text{ en A; } \mathbf{j} \text{ en A m}^{-2})$$

*section S du conducteur*



*$d\mathbf{S}$  est orienté par le contour  $\mathcal{C}$  (règle des doigts)*

*ici  $I > 0$ ; si on change l'orientation de  $\mathcal{C}$ ,  $d\mathbf{S}$  change de sens et  $I < 0$*

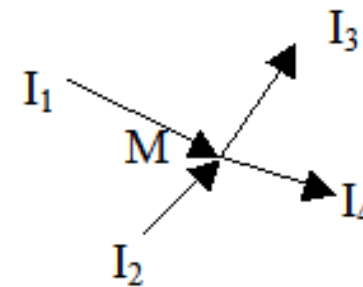
### Loi des noeuds

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \text{ ou } \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \text{ sur une surface fermée } S: \text{ c'est la loi des noeuds.}$$

Dans le volume interne à la surface  $S$ ,  
il n'y a pas d'accumulation de courant, soit:

*courants entrants en  $M$  = courants sortants en  $M$*

$$\text{loi des noeuds en } M: I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$





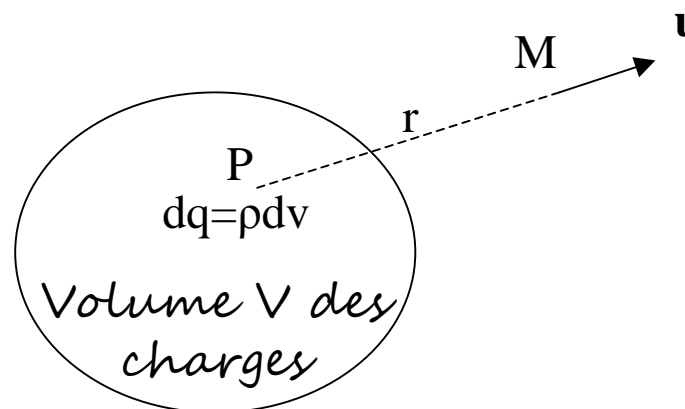
## Electrostatique

De  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  et de  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$ , on tire l'équation de Poisson du potentiel scalaire V:

$$\Delta V + \rho/\epsilon_0 = 0$$

→ permet de calculer  $V(\mathbf{M})$  *connaissant la distribution des charges dans le volume V*

$$V(\mathbf{M}) = (1/4\pi\epsilon_0) \iiint_V [\rho/r] dv$$



Le volume  $V$  contient la charge  $q = \iiint \rho dv$

et  $\mathbf{E}(\mathbf{M}) = -\mathbf{grad} V(\mathbf{M}) = (1/4\pi\epsilon_0) \iiint_V [\rho \mathbf{u}/r^2] dv$

(issu de  $\mathbf{grad}(1/r) = -\mathbf{u}/r^2$ )

$\mathbf{u}$  vecteur unitaire orienté de la charge élémentaire  $dq = \rho dv$  (au point P du volume V) vers le point M:  $\mathbf{u} = \mathbf{PM} / \|\mathbf{PM}\|$ ,  $r = \|\mathbf{PM}\|$

Pour une charge ponctuelle  $q$ , c'est la loi de Coulomb:

$$V(\mathbf{M}) = (1/4\pi\epsilon_0) q/r \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\mathbf{M}) = (1/4\pi\epsilon_0) q \mathbf{u}/r^2$$

*Remarque 1:* le champ électrique d'une charge ponctuelle vérifie  $\text{div } \mathbf{E} = 0$

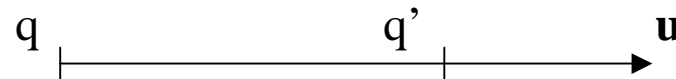
*Remarque 2:* son potentiel est harmonique; il vérifie l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$

La force exercée sur une charge  $q'$  par le champ électrique  $\mathbf{E}$  est  $\mathbf{F} = q' \mathbf{E}$

*Remarque:* l'énergie potentielle de la charge  $q'$  dans le potentiel  $V$  est  $E_p = q' V$

La force exercée par la charge  $q$  sur la charge  $q'$  est  $\mathbf{F} = (1/4\pi\epsilon_0) q' q \mathbf{u}/r^2$

avec  $\mathbf{u}$  vecteur unitaire orienté de  $q$  vers  $q'$



Elle est répulsive (charges de même signe) ou attractive (charges de signe opposé).

## *Théorème de Gauss de l'électrostatique*

Imaginons un volume  $V$  entouré par une surface  $S$  fermée et contenant une distribution volumique de charges  $\rho(x, y, z)$ .

La charge intérieure à  $V$  est  $q = \iiint_V \rho \, dv$

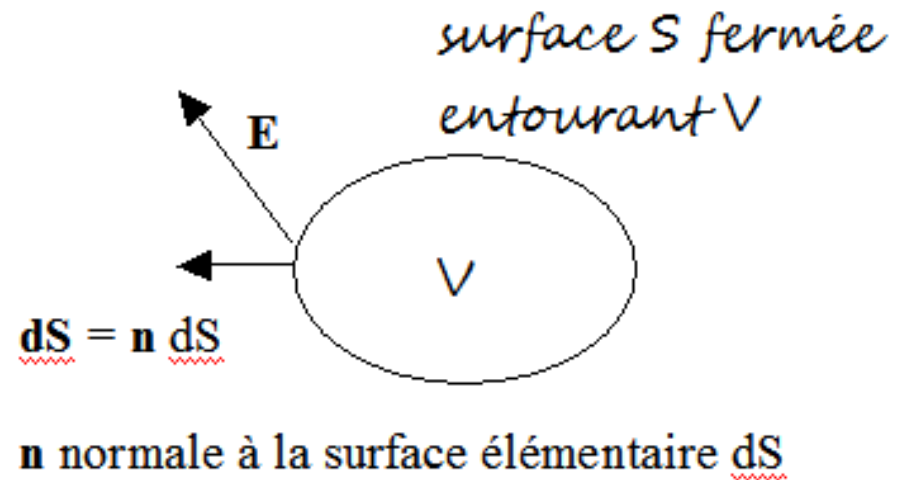
$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma \text{ charges intérieures} / \epsilon_0$$

Le flux du champ électrique  $\mathbf{E}$  à travers une surface fermée  $S$  est égal à la somme des charges intérieures au volume  $V$  délimité par cette surface, divisée par  $\epsilon_0$

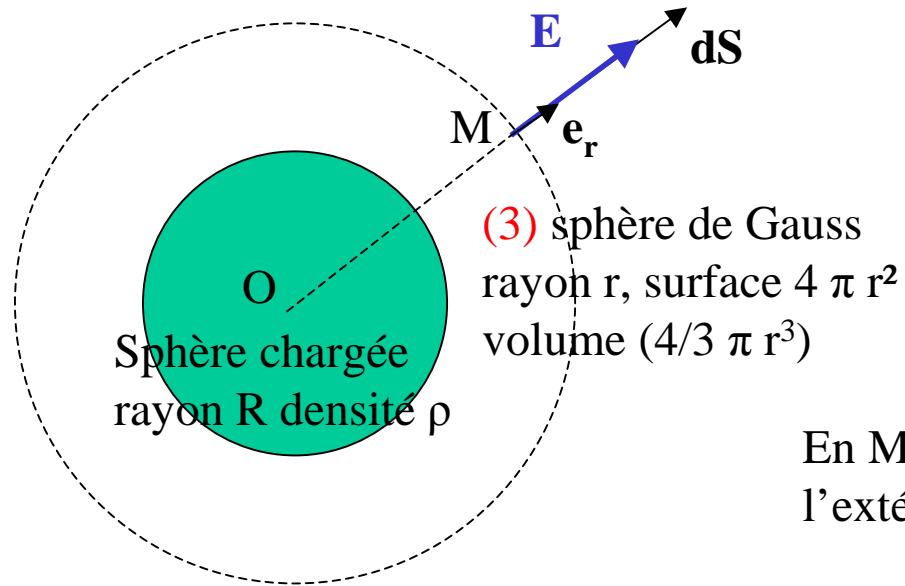
Très utilisé pour déterminer le champ électrique  $\mathbf{E}$  lorsque les invariances et symétries du problème permettent de calculer son flux:  $\mathbf{E}$  est dans le plan de symétrie des charges.

*Lignes du champ électrique*

$$dx/E_x = dy/E_y = dz/E_z$$



*Théorème de Gauss de l'électrostatique: exemple d'une sphère chargée en volume*



(1) invariances:  $\mathbf{E}$  ne dépend que de  $r$

(2) Symétries: tout plan passant par le centre  $O$  de la sphère est plan de symétrie des charges

$\rightarrow \mathbf{E} = E(r) \mathbf{e}_r$  est radial

En  $M$ :  $\mathbf{E}$  colinéaire à  $d\mathbf{S}$  (orientée vers l'extérieur) et constant sur la sphère de rayon  $r$

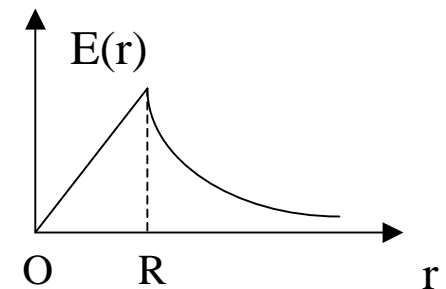
(4)  $r < R$ : flux:  $E 4 \pi r^2$ ; charge intérieure  $4/3 \pi r^3 \rho$

$$E 4 \pi r^2 = (4/3 \pi r^3 \rho) / \epsilon_0 \rightarrow E(r) = \rho r / 3 \epsilon_0$$

(5)  $r > R$ : flux:  $E 4 \pi r^2$ ; charge intérieure  $q = 4/3 \pi R^3 \rho$

$$E 4 \pi r^2 = (4/3 \pi R^3 \rho) / \epsilon_0 \rightarrow E(r) = \rho R^3 / 3 r^2 \epsilon_0 = q / 4 \pi \epsilon_0 r^2$$

(on retrouve la loi de Coulomb,  $q$  = charge de la sphère de rayon  $R$ )

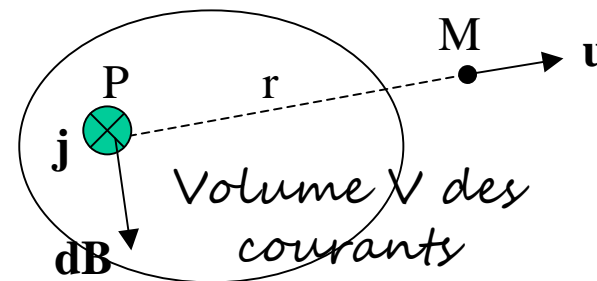


## Magnétostatique

De  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  et de  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , avec la jauge de Coulomb  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , on tire l'équation de Poisson du potentiel vecteur:

$$\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} = 0$$

la solution est 
$$\mathbf{A}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) \iiint_V [\mathbf{j}/r] dv$$



→ permet de calculer  $\mathbf{A}(\mathbf{M})$  connaissant la distribution des courants  $\mathbf{j}$  dans l'espace

$r = \text{PM}$  distance du courant  $\mathbf{j}$  à  $\mathbf{M}$ .  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  fournit la loi de Biot et Savart:

$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) \iiint [\mathbf{j} \wedge \mathbf{u}/r^2] dv$$

$d\mathbf{B}$  champ élémentaire orthogonal à  $\mathbf{j}$  et à  $\mathbf{u}$  s'oriente avec la règle des doigts de la main droite:  
 $\mathbf{j} =$  pouce;  $\mathbf{u}$  vecteur unitaire orienté du courant  $\mathbf{j}$  en  $\mathbf{P}$  vers le point  $\mathbf{M}$ ,  $d\mathbf{B} =$  majeur

Pour des courants filiformes dans lesquels circule un courant d'intensité  $I$ :

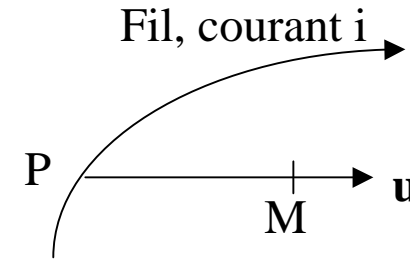
$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) \int I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}/r^2$$

de potentiel vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) \int [I d\mathbf{l}/r]$$

l'intégrale curviligne porte sur l'élément de courant  $d\mathbf{l}$ .

$\mathbf{u} = \mathbf{PM} / \|\mathbf{PM}\|$  est le vecteur unitaire orienté du courant  $i d\mathbf{l}$  situé en P vers le point M.



Pour une charge ponctuelle q en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) q \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} / r^2$$

de potentiel vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) q \mathbf{v} / r$$

Toute charge en mouvement crée un champ magnétique.

$\mathbf{B}$  est orthogonal à la vitesse  $\mathbf{v}$  de la charge q et au vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ .

*Cas magnétostatiques particuliers: champ "potentiel" et "sans force" dans le vide*

Dans le vide, sans courant,  $\mathbf{j} = \mathbf{0} \rightarrow \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

En astrophysique, il existe des champs sans courant donc sans force: on les appelle "champs potentiels". Ils satisfont l'équation de Laplace:

$$\Delta \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$  implique que  $\mathbf{B}$  dérive d'une fonction potentiel  $\varphi$  telle que

$$\mathbf{B} = \text{grad } \varphi$$

## Champs potentiels dans un plan $xOy$

Dans un espace à 2 dimensions (plan  $xOy$ ), avec  $\mathbf{B}$  ( $B_x, B_y, 0$ ) dépendant seulement des coordonnées  $x$  et  $y$ , on peut écrire  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  où  $\mathbf{A} = \psi(x,y) \mathbf{e}_z$ , ce qui implique:

$$\mathbf{B} = \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \wedge \mathbf{e}_z$$

$\varphi(x,y) = \text{constante}$  est l'équation des lignes équipotentielles  
 $\psi(x,y) = \text{constante}$  est l'équation des lignes de champ

Ces deux fonctions  $\varphi(x,y)$  et  $\psi(x,y)$  obéissent aux conditions de Cauchy:

$$\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y \quad \text{et} \quad \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$$

Impliquant qu'elles sont harmoniques:  $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$ . On démontre que:

- la fonction complexe  $f(z) = \varphi + i\psi$  est une fonction analytique de la variable  $z = x + iy$

-  $df(z)/dz = B_x - i B_y$

Le champ magnétique complexe  $B_x - i B_y$  dérive donc du potentiel complexe  $f(z) = \varphi + i\psi$

*Champs potentiels dans un plan: exemple de l'arcade magnétique*

$$f(z) = -i h B_0 e^{iz/h} = \varphi + i \psi$$

où  $z = x + i y$ ,  $h$  échelle de hauteur,  $B_0$  constante

$$\begin{aligned} df/dz &= B_x - i B_y \\ &= B_0 e^{-y/h} [ \cos(x/h) + i \sin(x/h) ] \end{aligned}$$

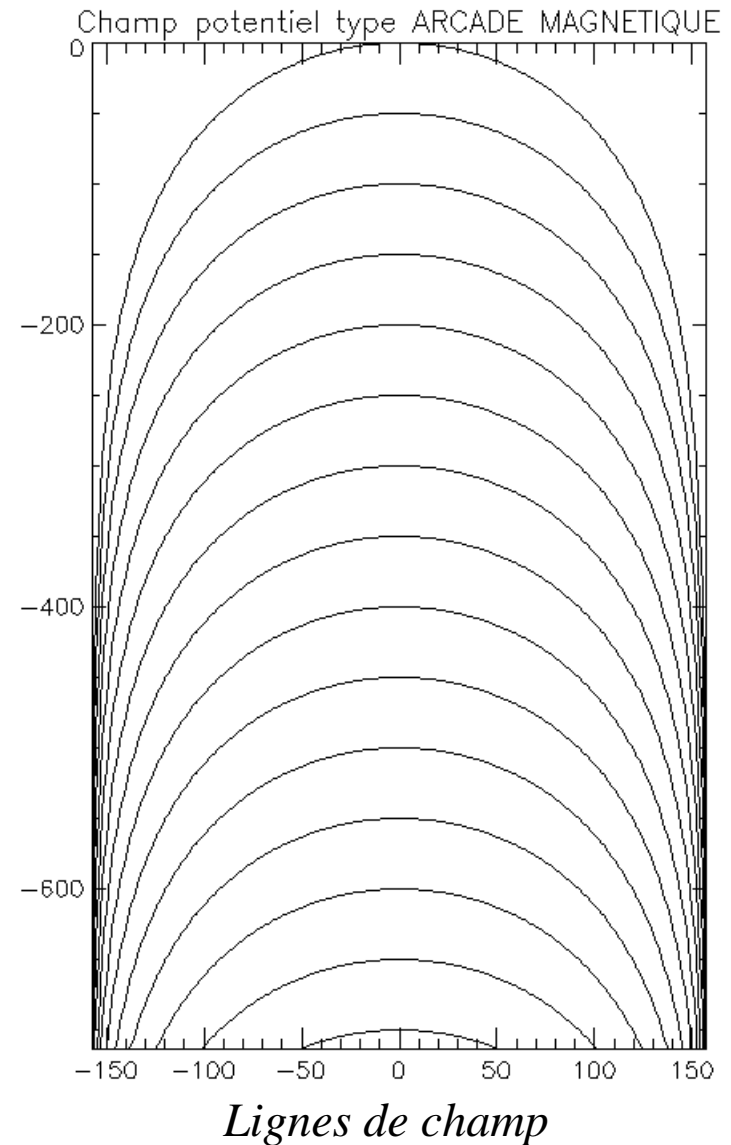
$$\begin{cases} B_x = B_0 e^{-y/h} \cos(x/h) \\ B_y = -B_0 e^{-y/h} \sin(x/h) \end{cases}$$

$$f(z) = h B_0 e^{-y/h} [ \sin(x/h) - i \cos(x/h) ]$$

$$\begin{cases} \varphi = h B_0 e^{-y/h} \sin(x/h) \\ \psi = -h B_0 e^{-y/h} \cos(x/h) \end{cases}$$

Lignes de champ:  $\psi = \text{constante}$

Équation:  $y = h \ln|\cos(x/h)| + \text{constante}$

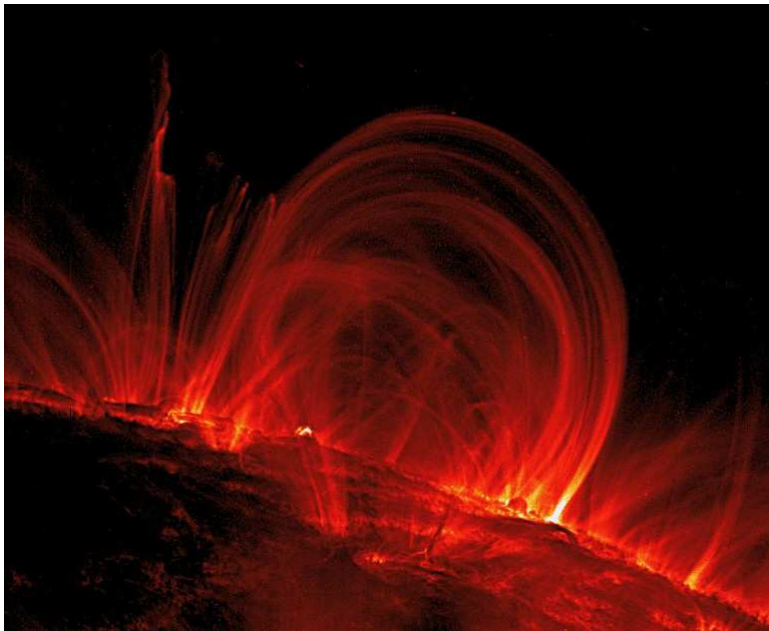




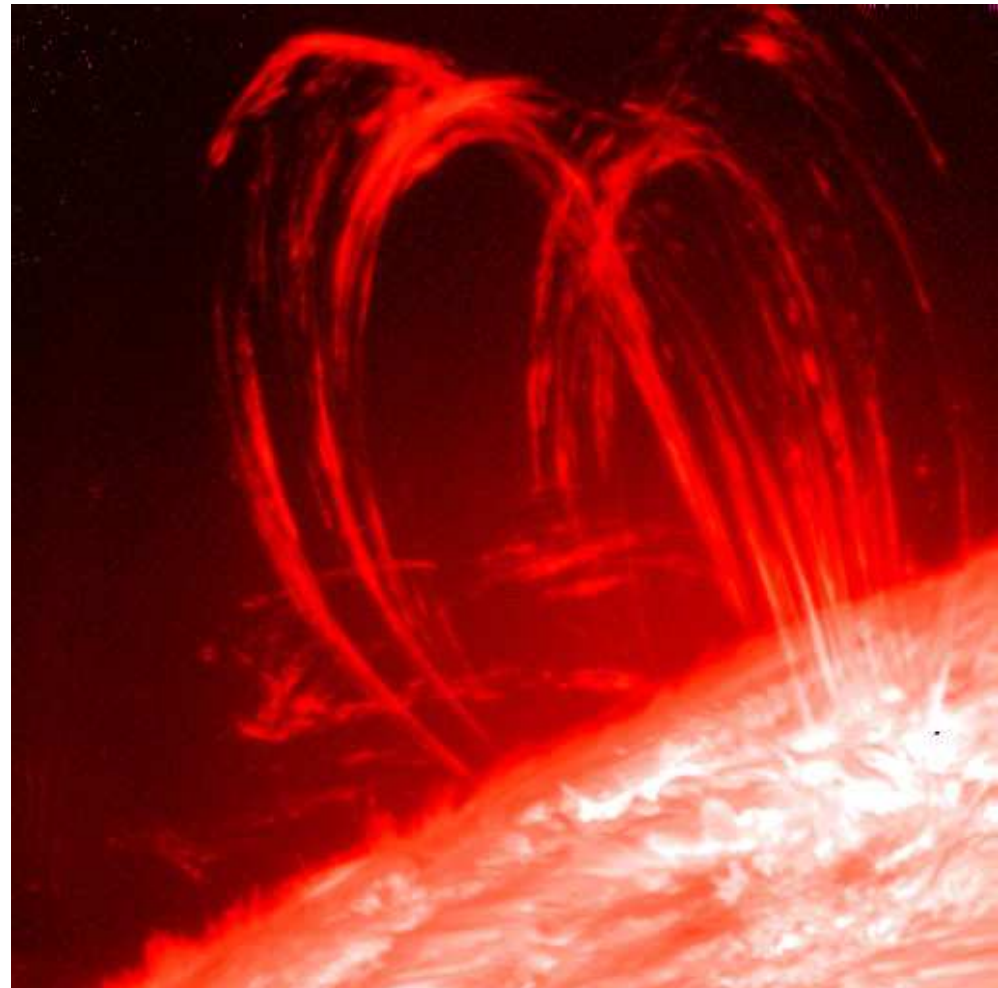
Il existe aussi des champs avec courant mais sans force, pour lesquels la force de Laplace  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  est nulle. C'est le cas lorsque  $\mathbf{j}$  est colinéaire au champ magnétique  $\mathbf{B}$ , soit  $\mu_0 \mathbf{j} = \alpha \mathbf{B}$ ,  $\alpha$  étant une constante ( $\alpha = 0$  redonne un champ potentiel) .

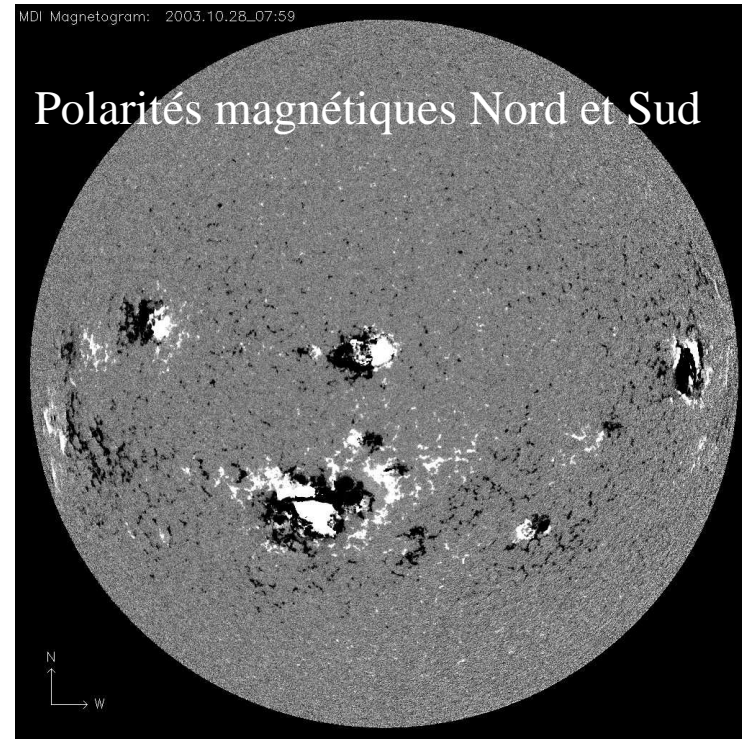
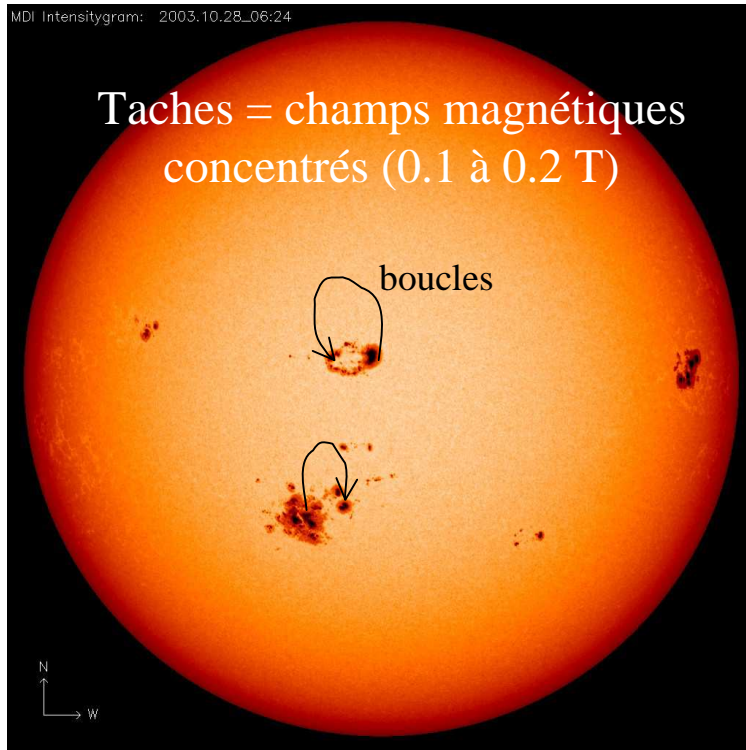
$\mathbf{B}$  est solution l'équation d'Helmoltz:

$$\Delta \mathbf{B} + \alpha^2 \mathbf{B} = \mathbf{0}$$



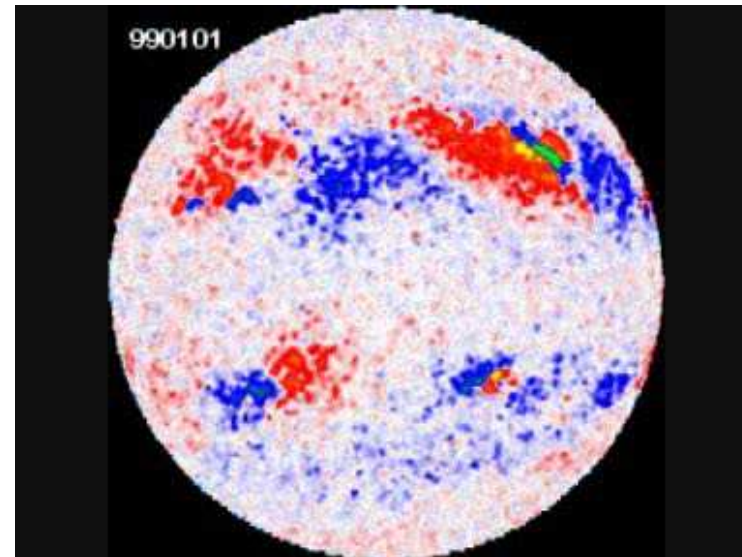
Exemples de boucles ou arcades magnétiques approximativement sans force sur la surface solaire (TRACE/NASA et SVST La Palma)

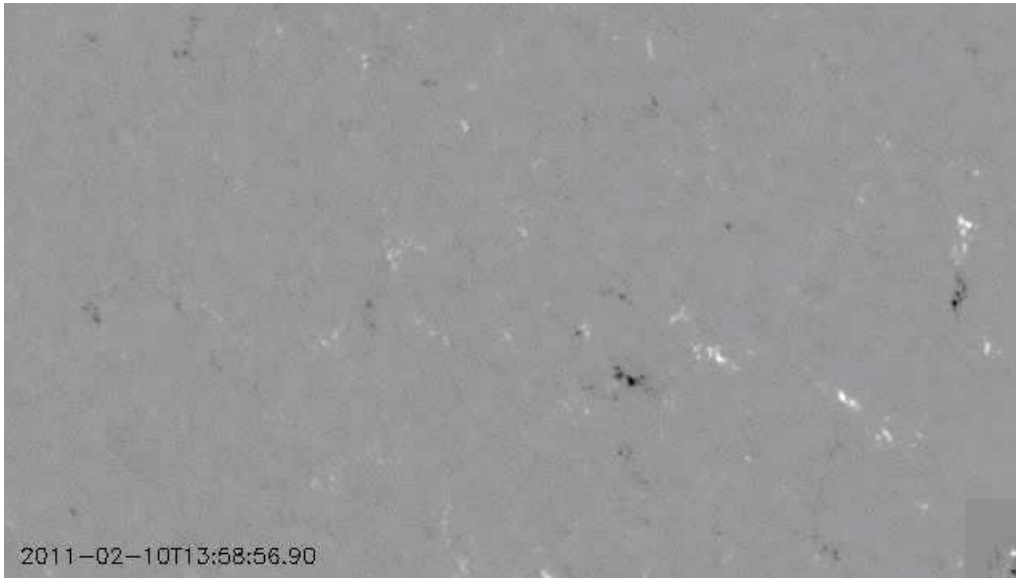




*Exemples: manifestations à grande échelle du magnétisme solaire*

Cycle d'activité solaire des taches de 11 ans et cycle magnétique de 22 ans (polarités des hémisphères opposées avec renversement tous les 11 ans) – satellite SOHO/MDI-ESA/NASA et Mont Wilson (USA)





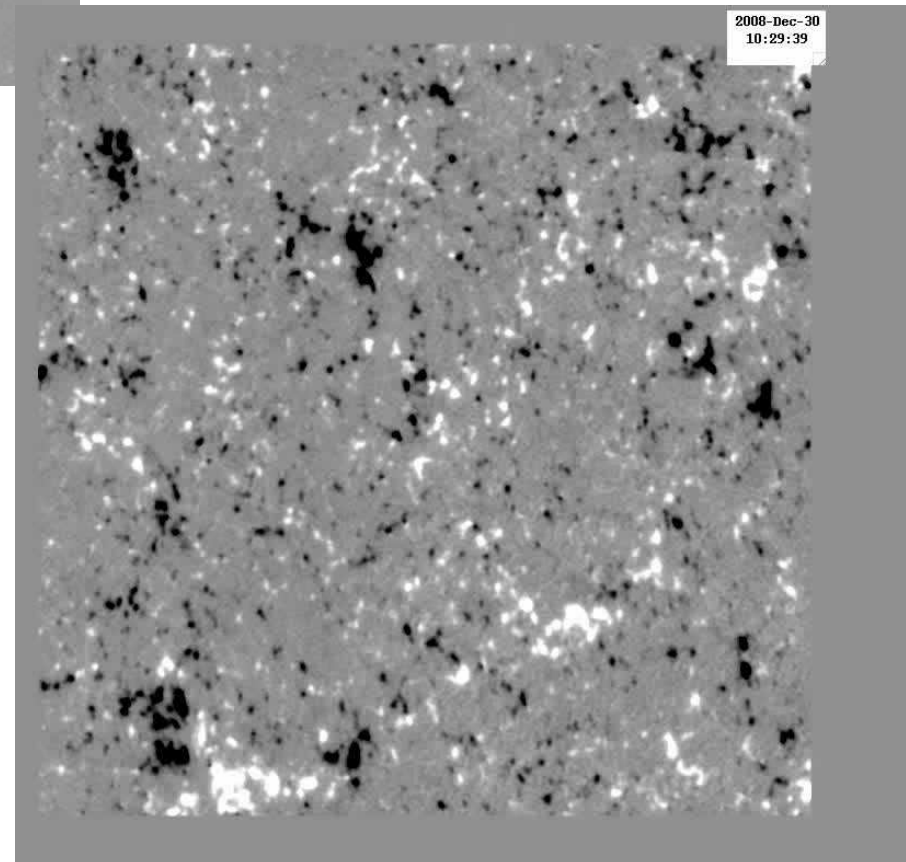
*Exemple de manifestation à moyenne échelle du champ magnétique du soleil*

← Emergence des champs magnétiques d'une région active sur plusieurs jours (champ fort de 0.1 à 0.2 T, polarités nord et sud); satellite SOHO/MDI-ESA/NASA

*Exemple de manifestation à petite échelle du champ magnétique du soleil*

Evolution des champs magnétiques des zones calmes (champs faibles < 0.01 T, polarités nord et sud). La contribution des champs faibles est identique à celle des champs forts (taches localisées) car ils couvrent toute la surface solaire.

Pas temporel: 5 minutes, champ: 1' x 1'  
Satellite HINODE JAXA/NASA  
télescope SOT instrument NFI →



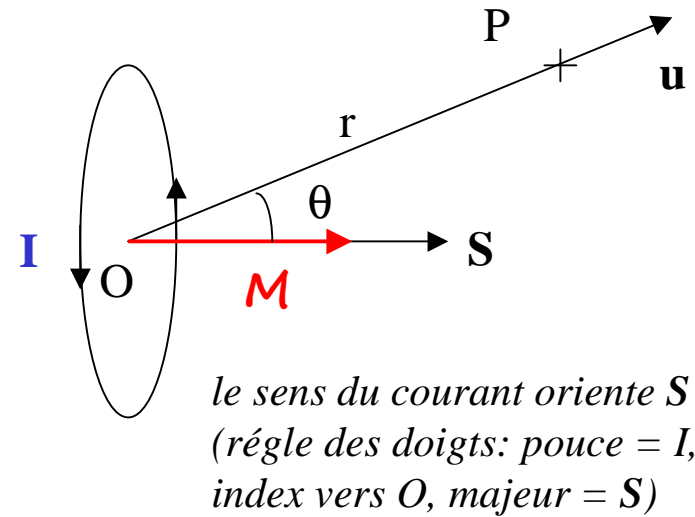
## Dipôles magnétiques

- Moment magnétique d'une spire de courant

$$\mathbf{M} = I \mathbf{S} \quad (\text{A m}^2)$$

A grande distance, la spire de courant constitue un dipôle magnétique

- Potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et champ magnétique  $\mathbf{B}$  en P, avec  $r = OP$ , sont:



$$\mathbf{A}(P) = (\mu_0/4\pi) \mathbf{M} \wedge \mathbf{u} / r^2$$

$$\mathbf{B}(P) = - (\mu_0/4\pi) \text{grad}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} / r^2)$$

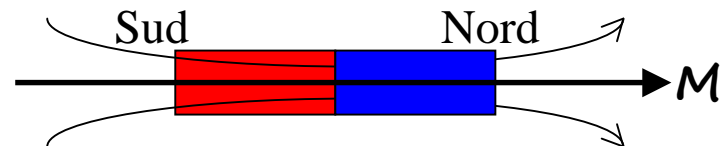
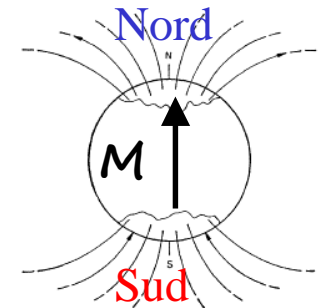
avec  $\mathbf{u}$  vecteur unitaire dirigé de  $O$  vers  $P$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ :

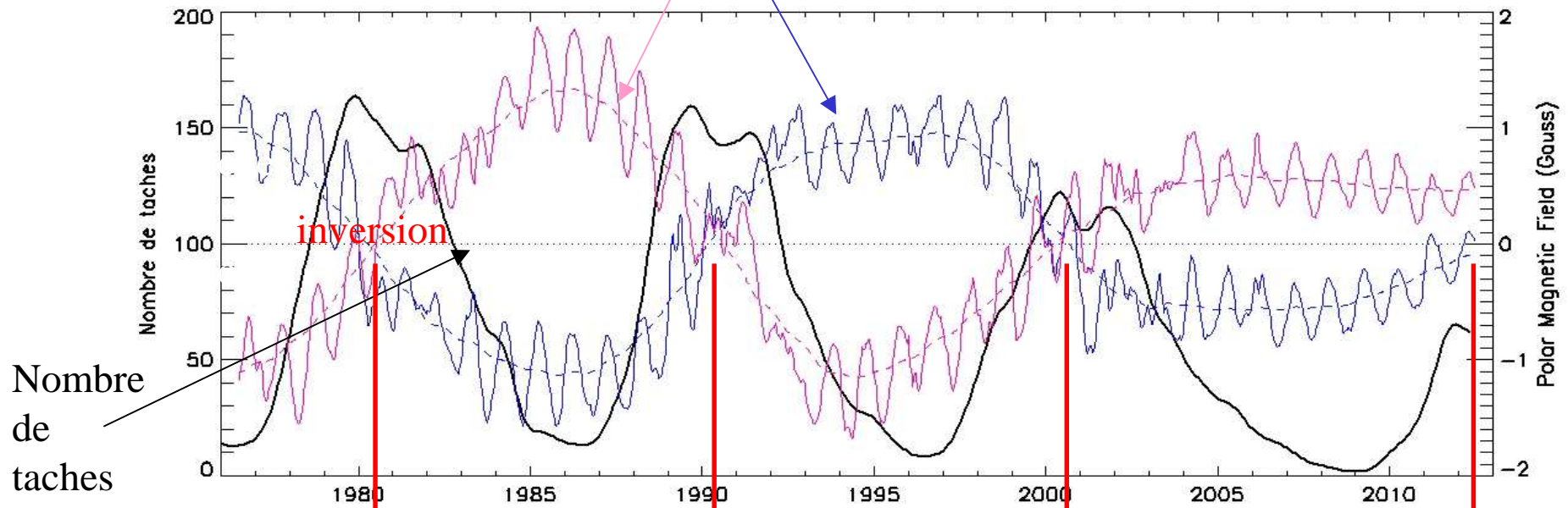
$$\mathbf{B}(P) = (\mu_0/4\pi) \mathbf{M} / r^3 (2 \cos\theta, \sin\theta)$$

Equation des lignes de champ:  $r = k \sin^2\theta$

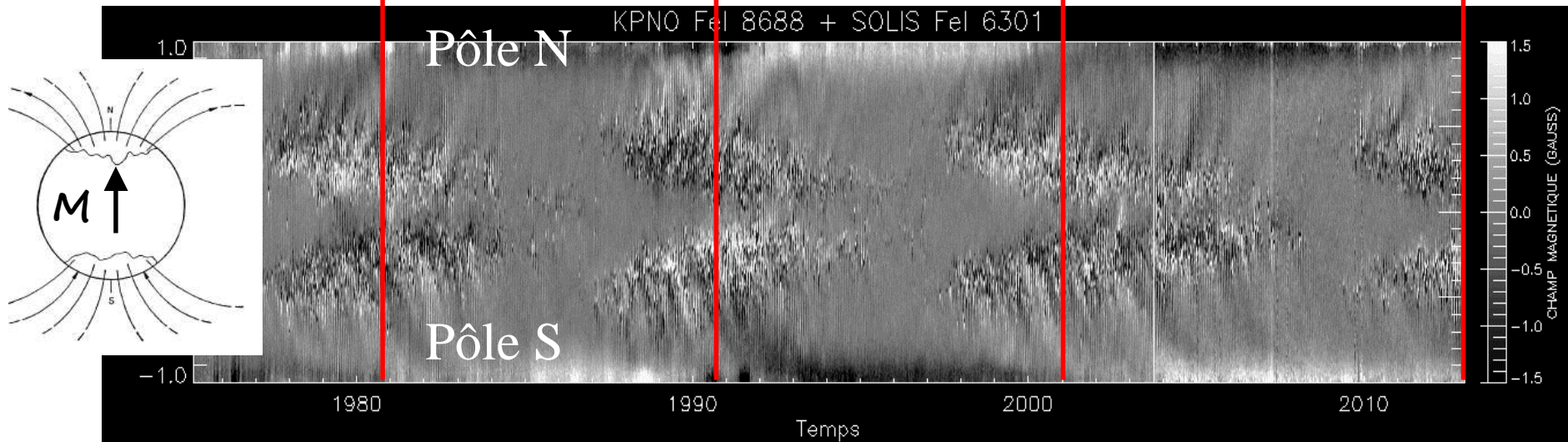
*Application:* champ dipolaire du soleil et de la Terre  
champ magnétique d'un aimant



Champ magnétique des pôles N et S solaires (Wilcox, USA) – 1 Gauss =  $10^{-4}$  T



Carte synoptique du champ magnétique solaire temps, latitude (Kitt Peak, USA)



## *Théorème d'Ampère de la magnéto-statique*

Imaginons une surface  $S$  s'appuyant sur un contour  $C$  fermé et orienté, et traversée par une distribution volumique de courants  $\mathbf{j}(x,y,z)$ .

L'intensité enlacée est est  $I = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$

où  $d\mathbf{S}$  est orientée par  $C$  (*règle des doigts de la main droite: pouce sur  $C$ , index vers le centre de  $C$ , majeur = vecteur  $S$* )

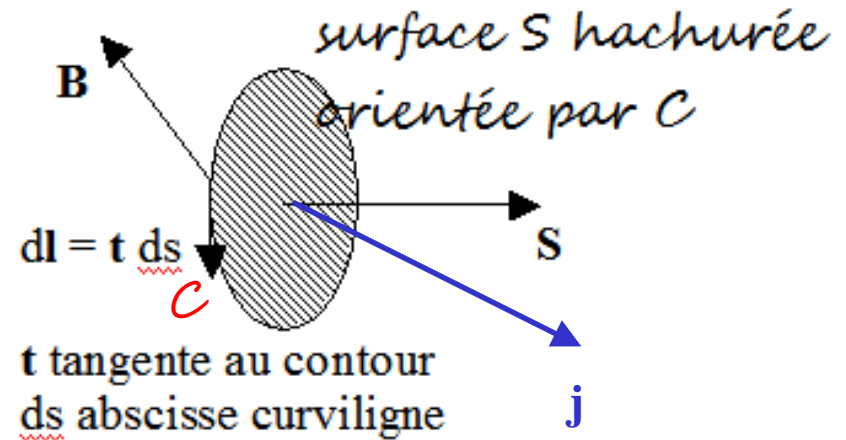
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \Sigma \text{ Intensités enlacées}$$

La circulation du champ magnétique  $\mathbf{B}$  sur un contour fermé  $C$  est égal à la somme des intensités enlacées par ce contour, multipliée par  $\mu_0$

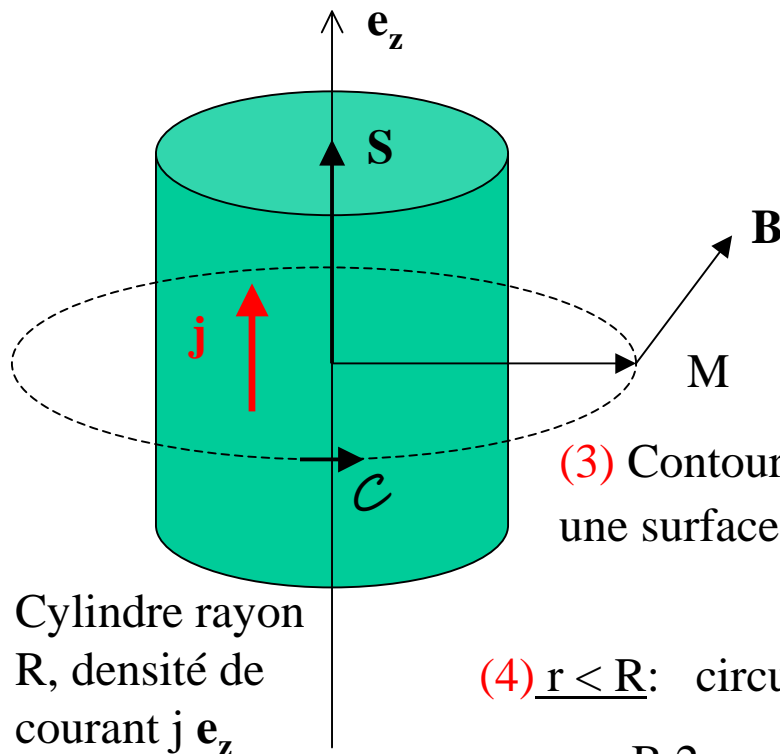
Très utilisé pour déterminer le champ magnétique  $\mathbf{B}$  lorsque les symétries du problème permettent de calculer sa circulation:  $\mathbf{B}$  est orthogonal au plan de symétrie des courants.

*Lignes du champ magnétique*

$$dx/B_x = dy/B_y = dz/B_z$$



*Théorème d'Ampère de la magnétostatique: exemple du courant cylindrique infini selon Oz*



Cylindre rayon  $R$ , densité de courant  $j \mathbf{e}_z$  uniforme

(1) invariances:  $\mathbf{B}$  ne dépend que de  $r$

(2) Symétries: tout plan passant par l'axe  $\mathbf{e}_z$  du cylindre est plan de symétrie des courants

→  $\mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_\theta$  est orthoradial

(3) Contour orienté  $\mathcal{C}$  de rayon  $r$ , périmètre  $2 \pi r$ , oriente une surface enlacée  $\mathbf{S} = \pi r^2 \mathbf{e}_z$  dans le même sens que  $\mathbf{j}$

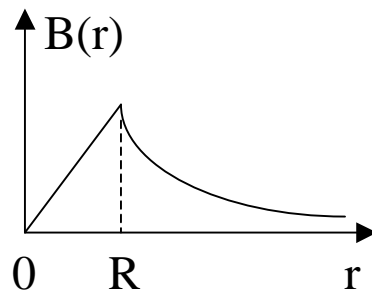
(4)  $r < R$ : circulation:  $B 2 \pi r$ ; courant intérieur  $\pi r^2 j$

$$B 2 \pi r = \mu_0 (\pi r^2 j) \rightarrow B(r) = \mu_0 r j / 2$$

(5)  $r > R$ : circulation:  $B 2 \pi r$ ; courant intérieur  $I = \pi R^2 j$

$$B 2 \pi r = \mu_0 (\pi R^2 j) \rightarrow B(r) = \mu_0 R^2 j / 2 r = \mu_0 I / 2 \pi r$$

(on retrouve la loi du fil infini,  $I$  = intensité totale du courant traversant le cylindre de rayon  $R$ )



## V - Force de Laplace subie par un courant

Lorsqu'un courant électrique de densité volumique  $\mathbf{j}$  ( $\text{A m}^{-2}$ ) est plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , il subit une force magnétique volumique:

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{unité: N m}^{-3}) \quad \text{orthogonale à } \mathbf{j} \text{ et à } \mathbf{B}$$

Elle s'oriente avec la règle des doigts de la main droite.

*Circuit filiforme*

Si le courant MN est filiforme d'intensité  $I$ , la force de Laplace est:

$$\mathbf{F} = \int_M^N I \mathbf{dl} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{unité: N})$$

$\mathbf{dl}$  élément de courant (unité: m) orienté par  $I$ .

La force de Laplace  $\mathbf{dF}$  est orthogonale au plan formé par les vecteurs  $\mathbf{dl}$  (élément de courant) et  $\mathbf{B}$  (champ magnétique).

Un courant colinéaire au champ magnétique ne subit pas de force de Laplace.

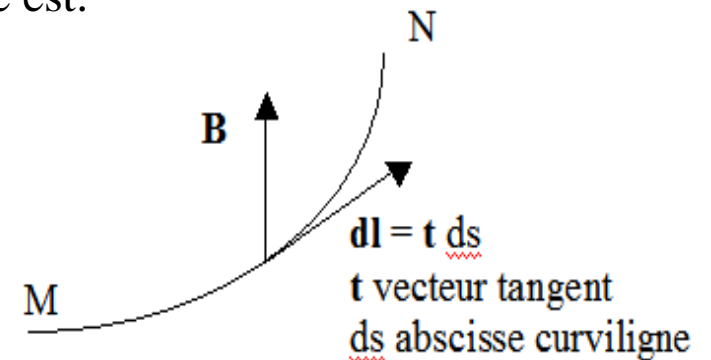
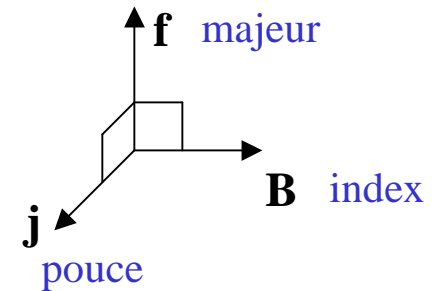




Image CaII K 393.4 nm

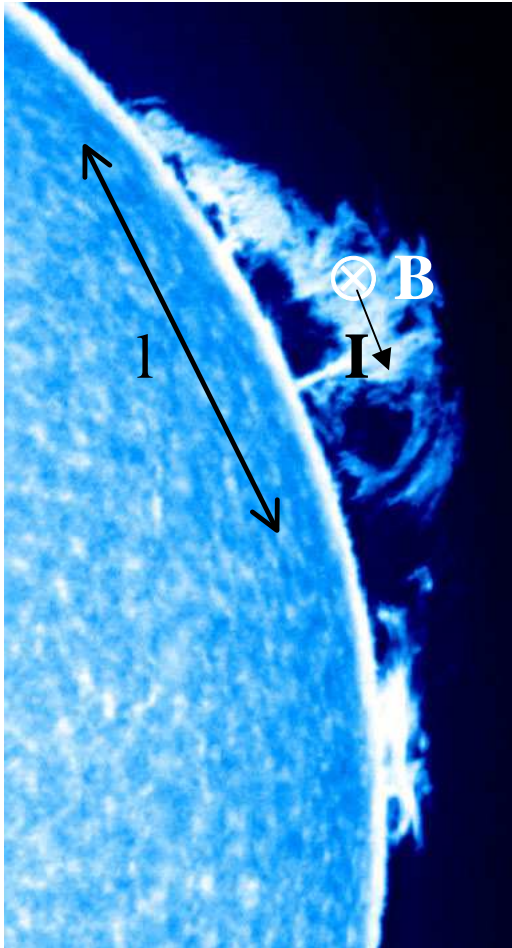
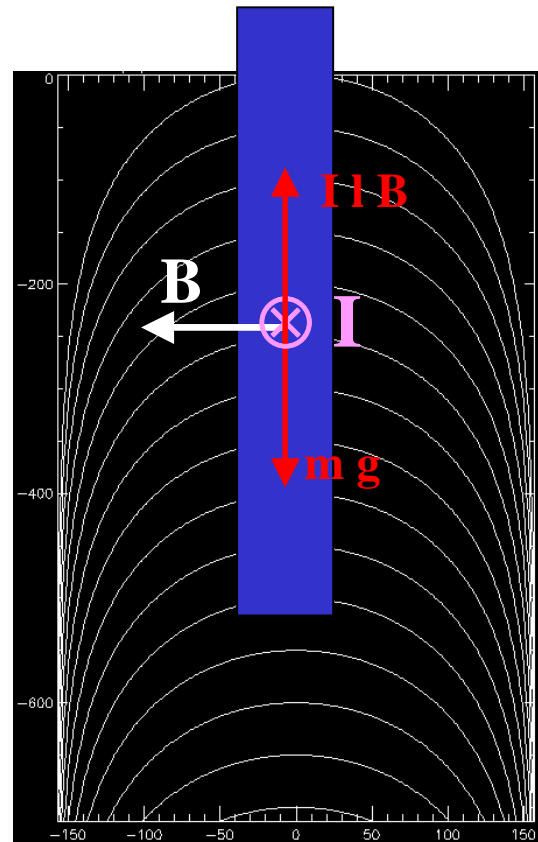
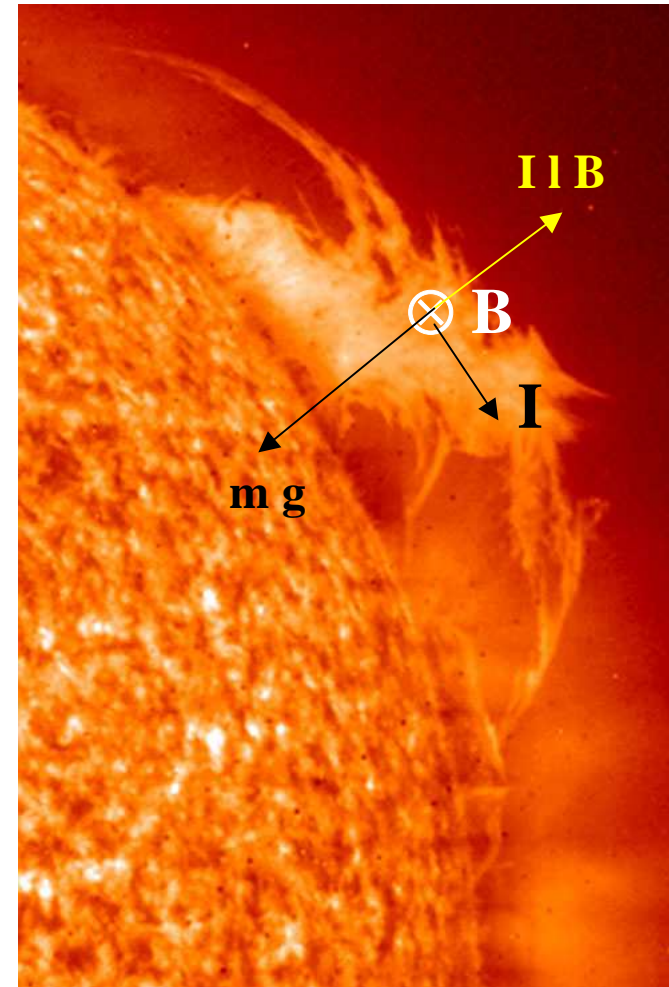


Image SOHO/EIT HeII 30.4 nm

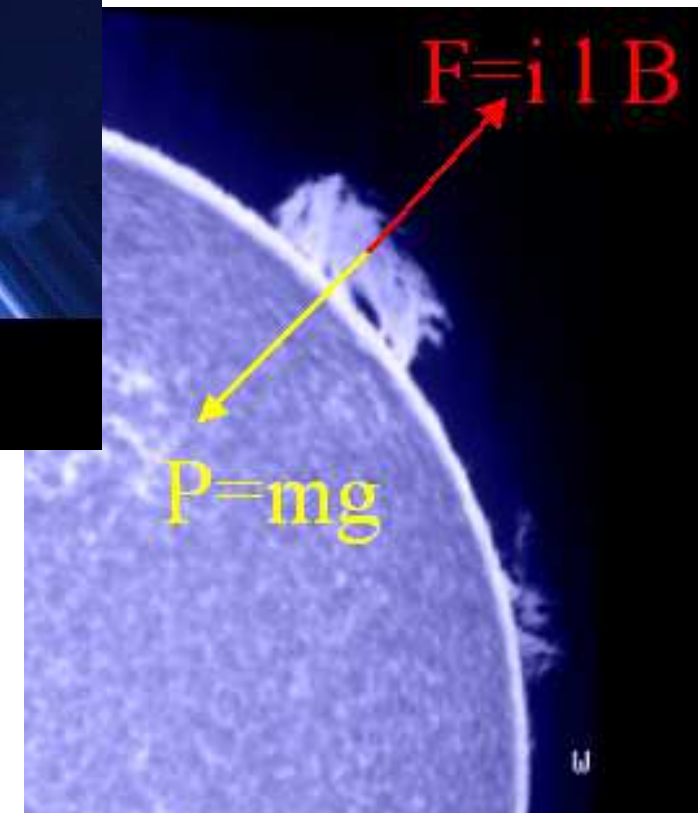
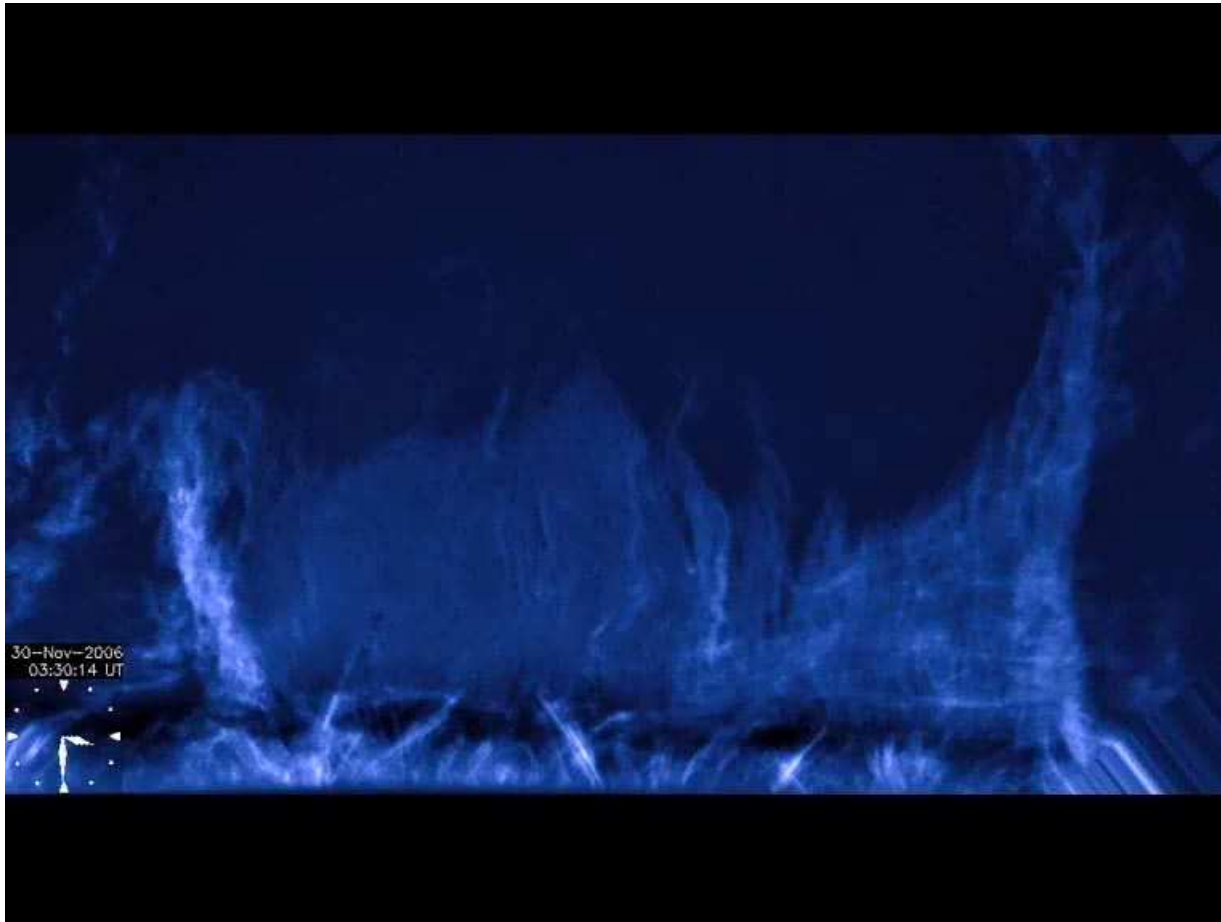


Champ magnétique

*Application:* protubérances solaires, de champ magnétique faible horizontal (0.001 à 0.002 T). La matière est parcourue par des courants électriques ( I ) qui les soutiennent contre la gravité ( m g ,  $g = 275 \text{ m/s}^2$ ) en créant une force de Laplace ( I l B ) vers le haut.

*Exemples, force de Laplace*

← Imagerie raie CaII H  
396.8 nm bande 0.3 nm,  
satellite HINODE/BFI  
JAXA/NASA



Protubérances dans la couronne solaire ( $10^6\text{K}$ )  
constituées de matière « dense et froide » ( $10^4\text{ K}$ )  
soutenue contre la gravité solaire ( $g = 275\text{ m s}^{-2}$ )  
par la force de Laplace. Hauteur 50 000 km au  
dessus du limbe.

## VI - Loi d'OHM

*Loi d'Ohm locale pour un milieu conducteur fixe*

$$\boxed{\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}} \quad (\text{A m}^{-2})$$

où  $\gamma$  est la conductivité électrique du milieu ( $\text{S m}^{-1}$ ). La résistivité est son inverse  $1/\gamma$  ( $\Omega \text{ m}$ )

*Exemples de valeurs de conductivité:*

- métaux:  $10^7 \text{ S m}^{-1}$  (cuivre, argent  $5 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1}$ , eau de mer  $5 \text{ S m}^{-1}$ , eau pure  $10^{-4} \text{ S m}^{-1}$ )

- atmosphère solaire:  $\gamma = 8 \cdot 10^{-4} \text{ T}^{3/2} \text{ S m}^{-1}$  où T est la température en K du milieu

Photosphère et chromosphère (10000 K) :  $\gamma \approx 10^3 \text{ S m}^{-1}$

Couronne ( $10^6 \text{ K}$ ) :  $\gamma \approx 10^6 \text{ S m}^{-1}$

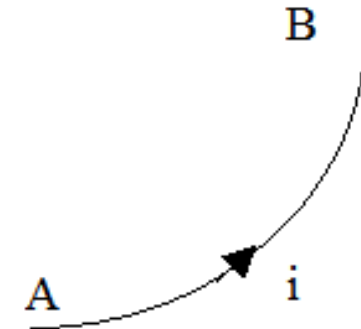
(plasma très conducteur)

*Loi d'Ohm pour un circuit filiforme AB*

$$V_A - V_B = R i \quad (i \text{ intensité en A})$$

$$\boxed{R = L / \gamma S} \quad \text{est la résistance du fil } (\Omega)$$

entre A et B, avec L sa longueur (m) et S sa section ( $\text{m}^2$ )



La puissance Joule dissipée entre A et B est  $\boxed{\mathcal{P} = (V_A - V_B) i = R i^2}$  (W)

## *Loi d'Ohm locale pour un milieu conducteur mobile*

$$\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de déplacement du conducteur. Le terme  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ , champ électromoteur, provient du fait que le conducteur "voit" dans son propre référentiel un champ électrique  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  différent de celui ( $\mathbf{E}$ ) du référentiel fixe.

## **VII - ARQS dans un conducteur et induction magnétique**

Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS), équations de Maxwell:

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

*Equation de Maxwell Gauss*

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$$

*Equation de Maxwell Faraday*

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

*Equation de Maxwell Thomson ou flux*

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

*Equation de Maxwell Ampère sans courant de déplacement*

Vrai si  $\underline{L} \ll \underline{C T}$  (L, T longueur et temps caractéristique)

Vrai si  $\underline{v} \ll \underline{C / L}$  pour des évolutions basses fréquences  $v$

Vrai si  $\underline{v} \ll \underline{C}$  pour un circuit mobile de vitesse  $v$

L'hypothèse ARQS implique la loi des noeuds  $\boxed{\text{div } \mathbf{j} = 0}$

dans un conducteur ( $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ ),  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  implique  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ , d'où  $\rho = 0$ : un conducteur en ARQS est globalement neutre

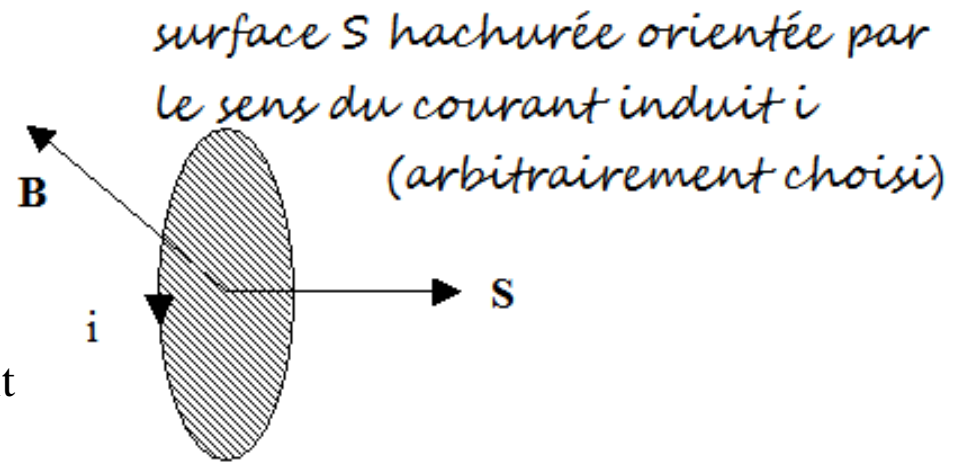
### Loi de Faraday

Considérons un circuit fermé  $\mathcal{C}$  et prenons le flux de l'équation de Maxwell Faraday sur la surface  $S$  appuyée sur son contour; d'après le théorème de Stokes:

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = e = - \partial \Phi(\mathbf{B}) / \partial t} \quad (\text{Volt})$$

C'est la loi de Faraday.

$\Phi(\mathbf{B}) = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  est le flux du champ magnétique  $\mathbf{B}$  à travers la surface  $S$  du circuit



Il apparaît une fem (force électromotrice) d'induction  $e$  dans deux cas, avec courant induit  $i$  si:

- 1)  $\mathbf{B}$  varie dans le temps
- 2) le circuit se déplace dans un champ constant.  $\Phi(\mathbf{B})$  porte alors le nom de flux coupé.

## Origine du courant induit dans un champ magnétique extérieur variable

<i>Maxwell Faraday</i>	<i>Loi d'Ohm</i>	<i>Maxwell Ampère</i>
$\Phi(\mathbf{B}_{\text{ext}})$ variable	$\rightarrow$	$\mathbf{E}$
	$\rightarrow$	$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$
		$\rightarrow$
		$\mathbf{B}_{\text{induit}}$

Exemple: plaques à induction  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  (sinusoïdal, vertical)  $\rightarrow$   $\mathbf{E}, \mathbf{j}$  (orthoradial, horizontal)

Loi d'Ohm généralisée pour un circuit filiforme AB

$V_A - V_B = R i - e \quad \text{où} \quad e = - \partial \left[ \int_{AB} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right] / \partial t$
---

où R est la résistance du fil AB en Ohms ( $\Omega$ ),

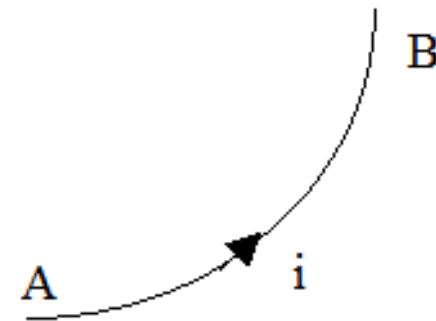
bilan de puissance entre A et B :  $\mathcal{P} = R i^2 - e i$

Si le circuit est fermé :  $V_A = V_B$  et  $e = - \partial \left[ \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right] / \partial t = - \partial \Phi(\mathbf{B}) / \partial t$  (théorème de Stokes),

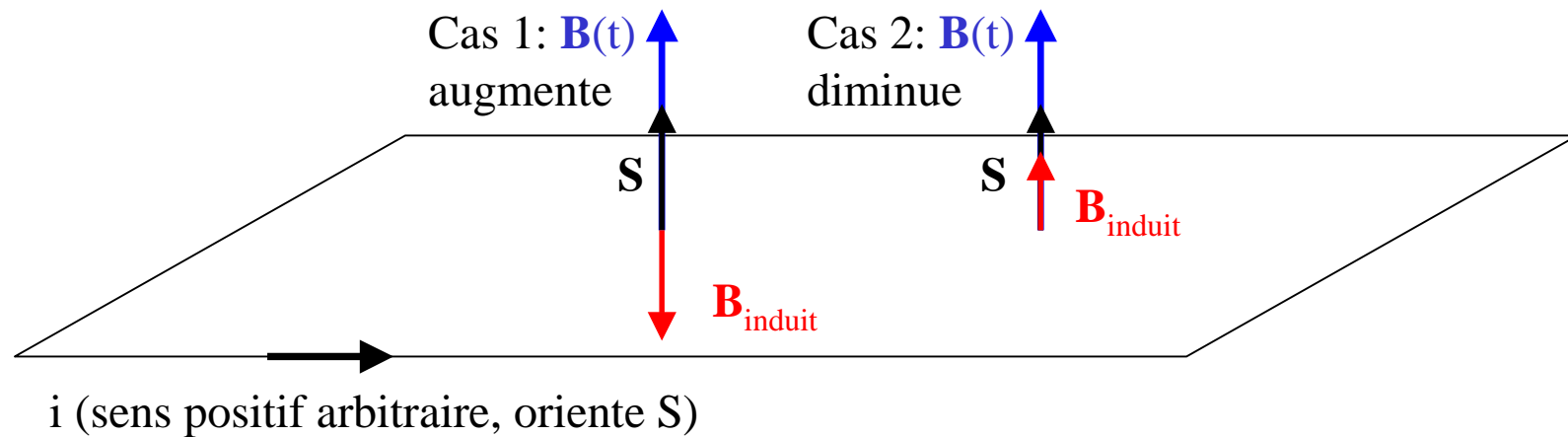
il apparaît un courant induit  $i = e / R$  et une quantité d'électricité induite  $q = \Delta \Phi / R$

Loi de Lenz ou le signe « - » de la loi de Faraday:

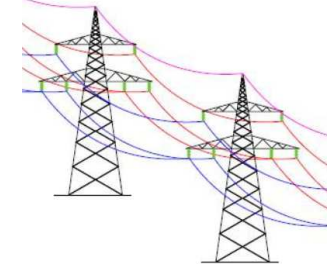
Les effets de l'induction s'opposent à la cause qui leur a donné naissance.



*Exemple de phénomène d'induction magnétique: variation du champ magnétique dans un circuit rectangulaire de surface  $S$ , résistance  $R$*



Application: induction dans les lignes de transport de l'électricité



$$R i + \partial\Phi/\partial t = 0$$

$$\Phi(\mathbf{B}) = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B S \quad \rightarrow \quad i = - (S/R) \partial B/\partial t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B \text{ augmente} \rightarrow \partial B/\partial t > 0 \rightarrow i < 0 \rightarrow \mathbf{B}_{\text{induit}} \text{ orienté vers le bas (Biot et Savart)} \\ B \text{ diminue} \rightarrow \partial B/\partial t < 0 \rightarrow i > 0 \rightarrow \mathbf{B}_{\text{induit}} \text{ orienté vers le haut (Biot et Savart)} \end{array} \right.$$

$\rightarrow$  apparition d'un champ magnétique induit s'opposant à la variation de  $\mathbf{B}(t)$  (loi de Lenz)

$$\mathbf{B}_{\text{induit}} = (\mu_0 i / \pi) (a^2+b^2)^{1/2} / a b \quad \text{au centre du circuit avec } S = a b \text{ (rectangle)}$$

## VIII - Equation de conservation de l'énergie électromagnétique (milieu conducteur)

Introduisons le vecteur de Poynting

$$\mathbf{P} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})/\mu_0$$

*l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique est :*

$$\partial/\partial t(\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0) + \text{div } \mathbf{P} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad \text{ou} \quad \partial/\partial t(\rho_E) + \text{div } \mathbf{j}_E = s$$

$\rho_E = \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0$  est la densité volumique d'énergie électromagnétique ( $\text{J m}^{-3}$ ) avec

$\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  densité volumique d'énergie électrique ( $\text{J m}^{-3}$ ) ou pression électrique (Pa)

$\mathbf{B}^2/2\mu_0$  densité volumique d'énergie magnétique ( $\text{J m}^{-3}$ ) ou pression magnétique (Pa)

$\mathbf{P}$  (où  $\mathbf{j}_E$ ) densité volumique de courant d'énergie, ou puissance transportée ( $\text{W/m}^2$ ).

$s = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  source/perte d'énergie ( $\text{W m}^{-3}$ ) ou densité de puissance des charges mobiles

*Plasma de charges mobiles subissant la force de Lorentz et une force dérivant d'un potentiel*

$$\partial/\partial t(\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0 + E_c + E_p) + \text{div } \mathbf{P} = 0 \quad (\text{conservation énergie ELM} + \text{mécanique})$$

$E_c$ ,  $E_p$  densités volumiques d'énergie cinétique et potentielle des charges mobiles.



*Equation globale de conservation de l'énergie électromagnétique dans un volume  $V$  conducteur*

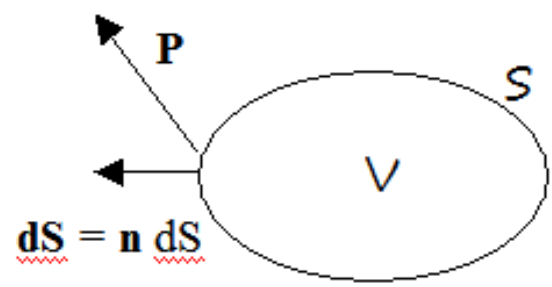
dans un conducteur fixe,  $s = - \mathbf{j}^2 / \gamma$  = perte par effet JOULE ( $\text{W m}^{-3}$ ), d'où (Ostrogradski):

$$\frac{\partial}{\partial t} [ \iiint (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2 + \mathbf{B}^2 / 2\mu_0) dv ] + \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \iiint (\mathbf{j}^2 / \gamma) dv$$

Puissance  
électromagnétique (W)  
du volume  $V$

Perte/gain aux  
frontières sur  $S$   
(W)

Perte par effet  
Joule (W)  
dans le volume  $V$



$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$  est la puissance électromagnétique entrante/sortante par la surface  $S$  frontière (perte ou gain selon que  $\mathbf{P}$  est orienté sur  $S$  vers l'extérieur ou l'intérieur)

Conséquences en régime permanent:

l'énergie électromagnétique  $\iiint (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2 + \mathbf{B}^2 / 2\mu_0) dv$  est conservée

→ les sorties aux frontières sont égales aux entrées moins l'effet Joule  $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \iiint (\mathbf{j}^2 / \gamma) dv$

→ hors effet Joule, la puissance électromagnétique entrante est égale à la puissance sortante (conservation du débit d'énergie  $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = 0$ , schématiquement  $P_1 S_1 = P_2 S_2$ ).

## Bilan d'énergie du circuit filiforme fermé en ARQS

Dans le cas d'un circuit filiforme fermé sur lui même, de résistance  $R$ ,

$$\boxed{R i + \partial\Phi/\partial t = 0} \quad \text{où } \Phi \text{ est le flux magnétique total}$$

Si le circuit possède une inductance propre  $L$  (unité: Henry H) et baigne dans un champ magnétique extérieur variable  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ :

$$\boxed{\Phi = L i + \Phi_{\text{ext}}}$$

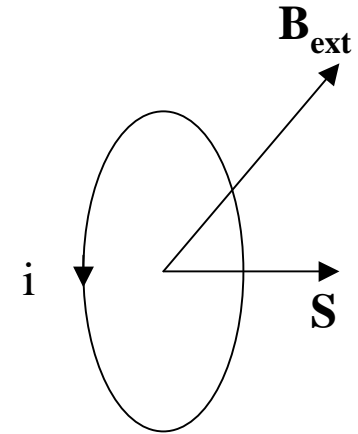
$L i$  flux propre et  $\Phi_{\text{ext}} = \iint \mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{S}$  flux du champ extérieur au travers du circuit.

Equation électrique  $\boxed{R i + L \partial i/\partial t + \partial\Phi_{\text{ext}}/\partial t = 0}$

Bilan de puissance  $\boxed{R i^2 + \partial(1/2 L i^2)/\partial t + i \partial\Phi_{\text{ext}}/\partial t = 0}$

Où

$$\boxed{\begin{array}{l} R i^2 \text{ est la puissance Joule (W)} \\ 1/2 L i^2 \text{ est l'énergie magnétique du circuit (J)} \\ i \partial\Phi_{\text{ext}}/\partial t \text{ la puissance échangée avec l'extérieur (W)} \end{array}}$$



*Bilan d'énergie de la propagation d'une onde en milieu LHI (dans la direction Oz)*

$$\boxed{\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^2 / 2\mu_0) + \text{div } \mathbf{P} = 0} \quad (\mathbf{j} = 0, \rho = 0 \text{ dans un diélectrique LHI})$$

$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  où  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 n^2$  et  $n = n_1 - i n_2$  indice de réfraction complexe

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\omega n_2 z / C} e^{i\omega(t - n_1 z / C)}} \quad \text{d'où } |\mathbf{E}| = E_0 e^{-\omega n_2 z / C}$$

est une onde évanescence en général ( $n_1 \neq 0$  et  $n_2 \neq 0$ ), stationnaire absorbée si  $n_1 = 0$ , propagative si  $n_2 = 0$  avec  $n_1$  indice de dispersion,  $n_2$  indice d'absorption.

$\mathbf{B} = \mathbf{k} \mathbf{E} / \omega$  où  $\mathbf{k} = (\omega / C) \mathbf{n}$

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \mathbf{B}^* / \mu_0) = \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \text{Re}(\mathbf{k} / \omega \mu_0) \rightarrow \boxed{\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 (n_1 / C \mu_0) e^{-2\omega n_2 z / C}}$$

Puissance transportée en  $\text{Wm}^{-2}$

$$\langle \text{div } \mathbf{P} \rangle = \frac{\partial}{\partial z} (\langle \mathbf{P} \rangle) = -\varepsilon_0 E_0^2 \omega n_1 n_2 e^{-2\omega n_2 z / C} \leq 0$$

$$\rightarrow \boxed{\langle \partial \rho_E / \partial t \rangle = -\langle \text{div } \mathbf{P} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \omega n_1 n_2 e^{-2\omega n_2 z / C} \geq 0}$$

Puissance déposée en  $\text{Wm}^{-3}$

( $\rho_E = \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 / \mu_0$ )

- Onde propagative:  $n_2 = 0$ ,  $\langle \mathbf{P} \rangle \neq 0$ ,  $\langle \partial \rho_E / \partial t \rangle = 0$ , transport d'énergie sans dépôt
- Onde absorbée:  $n_1 = 0$ ,  $\langle \mathbf{P} \rangle = 0$ ,  $\langle \partial \rho_E / \partial t \rangle = 0$ , pas de transport d'énergie
- Onde évanescence:  $n_1 \neq 0$ ,  $n_2 \neq 0$ ,  $\langle \mathbf{P} \rangle \neq 0$ ,  $\langle \partial \rho_E / \partial t \rangle > 0$ , transport avec dépôt

## IX - Analogie électrostatique/gravitation

Le champ de gravitation  $\mathbf{G}$  créé par une masse  $m$  obéit à la loi de Newton:

$$\mathbf{G}(M) = - K m \mathbf{u} / r^2 \quad (\text{m s}^{-2})$$



$\mathbf{u}$  vecteur unitaire allant vers le point  $M$  où l'on considère les effets gravitationnels de la masse  $m$

$$K = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ unités SI } ( \text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{s}^{-2} )$$

En remplaçant  $-K$  par  $1/4\pi\epsilon_0$  et  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{G}$  dans les deux premières équations de Maxwell, on obtient les équations du champ de gravitation, avec  $\rho$  masse volumique:

$$\text{div } \mathbf{G} = - 4\pi K \rho$$

*Equation de Maxwell Gauss*

$$\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{0}$$

*Equation de Maxwell Faraday*

$$\mathbf{G} = - \text{grad } V$$

$V$  potentiel de gravitation (unité:  $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )

Le potentiel  $V$  est solution de l'équation de Poisson

$$\Delta V = 4\pi K \rho$$

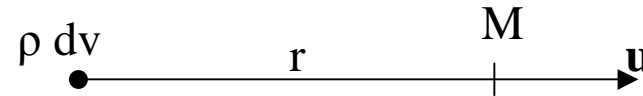
Dont la solution est

$$V(M) = - K \iiint_V [\rho/r] dv$$

On en tire pour le champ gravitationnel:

$$\mathbf{G}(M) = - K \iiint_V [\rho \mathbf{u}/r^2] dv$$

( $\mathbf{u}$  vecteur unitaire de  $dm = \rho dv$  vers le point M)

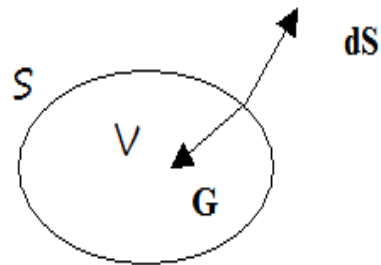


Les intégrales portent sur le volume  $V$  contenant la distribution des masses.

*Théorème de Gauss du champ de gravitation*

Le flux du champ de gravitation à travers une surface fermée  $S$  est égal à la somme des masses intérieures au volume  $V$  (en kg) entouré par cette surface, multipliée par  $- 4 \pi K$

$$\oiint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = - 4 \pi K (\Sigma \text{ masses intérieures})$$



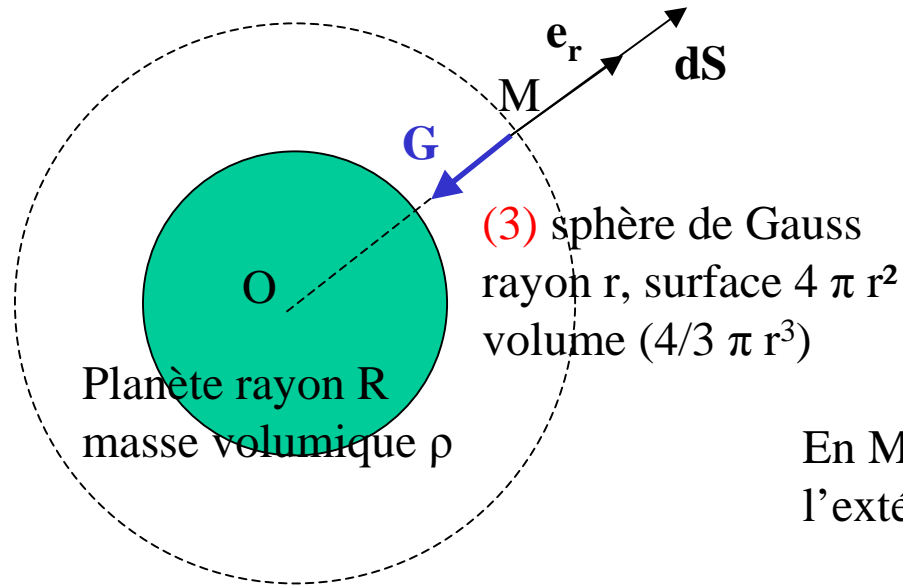
Masse intérieure:

$$M = \iiint_V \rho dv \text{ sur le volume } V$$

Symétries: mêmes propriétés que pour le champ électrique:

$\mathbf{G}$  est dans le plan de symétrie des masses

*Théorème de Gauss de la gravitation: exemple du champ de gravitation d'une planète homogène ( $\rho$  uniforme) de rayon  $R$*



(1) invariances:  $\mathbf{G}$  ne dépend que de  $r$

(2) Symétries: tout plan passant par le centre  $O$  de la sphère est plan de symétrie des masses

$\rightarrow \mathbf{G} = G(r) \mathbf{e}_r$  est radial

En  $M$ :  $\mathbf{G}$  colinéaire à  $d\mathbf{S}$  (orientée vers l'extérieur) et constant sur la sphère de rayon  $r$

(4)  $r < R$ : flux:  $G 4 \pi r^2$ ; masse intérieure  $4/3 \pi r^3 \rho$

$$G 4 \pi r^2 = - 4 \pi K (4/3 \pi r^3 \rho) \rightarrow G(r) = - 4 \pi K \rho r / 3$$

(5)  $r > R$ : flux:  $G 4 \pi r^2$ ; masse intérieure  $m = 4/3 \pi R^3 \rho$

$$G 4 \pi r^2 = - 4 \pi K (4/3 \pi R^3 \rho) \rightarrow G(r) = - 4 \pi K \rho R^3 / 3 r^2 = - K m / r^2$$

(on retrouve la loi de Newton,  $m$  = masse de la sphère de rayon  $R$ )

