Seminar zur Algebraischen Geometrie II

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 1 vom 20. April 2009

Thema 1 (Graduierte Ringe via Polynomringe)**.** Zeigen Sie, dass Polynomringe im folgenden Sinne die universellen graduierten Ringe sind:

1. Sei I eine Menge und sei $(d_i)_{i\in I}$ eine Familie ganzer Zahlen. Zeigen Sie, dass es auf dem Polynomring $A := \mathbb{Z}[(X_i)_{i\in I}]$ genau eine Graduierung $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit der Eigenschaft gibt, dass $X_i \in A_{d_i}$ für alle $i \in I$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass jeder (kommutative) graduierte Ring zu einem graduierten Ring der Form $\mathbb{Z}[(X_i)_{i\in I}]/\mathfrak{a}$ isomorph ist, wobei I eine geeignete Menge ist, die Unbestimmten $(X_i)_{i\in I}$ mit geeigneten Graden versehen sind und $\mathfrak{a}$ ein graduiertes Ideal in $\mathbb{Z}[(X_i)_{i\in I}]$ ist.

   Hinweis. Ein Homomorphismus von graduierten Ringen ist ein Ringhomomorphismus graduierter Ringe, der mit den Graduierungen verträglich ist.

Thema 2 (Tensor- und äußere Algebren)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei A ein R-Modul.

1. Skizzieren Sie die Konstruktion der *Tensoralgebra* $T(A)$ von A und zeigen Sie, dass die Tensoralgebra $T(A)$ bezüglich der kanonischen Graduierung eine graduierte R-Algebra ist.

2. Skizzieren Sie die Konstruktion der *äußeren Algebra* $\bigwedge A$ von A und zeigen Sie, dass diese bezüglich der kanonischen Graduierung eine graduierte R-Algebra ist.

3. Sind die graduierten Algebren $T(A)$ bzw. $\bigwedge A$ kommutativ?

Hinweis. Eine kurze Einführung in Tensor- und äußere Algebren findet sich in S. Langs Buch „Algebra“ (Kapitel XVI.7 und XIX.1).

Thema 3 (Čech-Kohomologie als graduierter Ring)**.** Sei X ein topologischer Raum, sei $U := (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X und sei F eine Prägarbe von Ringen auf X.

1. Zeigen Sie, dass die Čech-Koketten $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} C^n(U;F)$ bezüglich dem folgenden Produkt – dem sogenannten *Cup-Produkt* – einen graduierten Ring bilden: Zu $f \in C^m(U;F)$ und $g \in C^n(U;F)$ definieren wir das Produkt $f \cup g \in C^{m+n}(U;F)$ durch
$$(f \cup g)_i := f_{i_0,\dots,i_m}|_{U_i} \cdot g_{i_m,\dots,i_{m+n}}|_{U_i}$$
   für alle $i \in I^{m+n+1}$.

2. Zeigen Sie, dass das Cup-Produkt $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} C^n(U;F)$ ein Produkt auf der Čech-Kohomologie $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^n(U;F)$ induziert, das Čech-Kohomologie zu einem graduierten Ring macht.

3. Wie sieht dieses Produkt auf $H^0(U;F)$ aus?

Besprechung am 29. April 2009