



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA



# Procedimentos inferenciais sobre índices de capacidade do processo

Autor: Maurício Raymundo Belleza  
Orientador: Professora Dra. Liane Werner

Porto Alegre, dezembro de 2011.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática  
Departamento de Estatística

# Procedimentos inferenciais sobre índices de capacidade do processo

Autor: Maurício Raymundo Belleza

Monografia apresentada para obtenção  
do grau de Bacharel em Estatística.

Banca Examinadora:  
Professora Dra. Liane Werner (orientador)  
Professora Dra. Márcia Elisa Soares Echeveste

Porto Alegre, dezembro de 2011.

*Dedico este trabalho aos meus pais, pois sem eles, nada do que se passou em  
minha vida seria possível.*

*O insucesso é apenas uma oportunidade para recomeçar de novo com mais inteligência – Henry Ford.*

# Agradecimentos

Acredito que palavras sejam pouco para agradecer a todas as pessoas que passaram e virão a passar pela minha vida. Porém, gostaria que vocês soubessem que é de coração.

Inicialmente, gostaria de agradecer aos meus familiares, tios, tias, primos, padrinhos, mas, principalmente, meus avós, meus pais e meus irmãos. Tudo que está se passando nesta fase da minha vida não seria possível sem o suporte que vocês me deram e continuam dando, sem as lições que tenho aprendido ao longo deste caminho, enfim, sem tudo o que vocês me proporcionam. Pai, mãe, Migas, Rafa, vô e vó, amo vocês!

Gostaria de agradecer também a todos os meus amigos e colegas, tanto os de Canela quanto os de Porto Alegre. Tantas aventuras e aprendizados que tive ao longo desses anos com os irmãos que a vida escolhe vão servir pra contarmos histórias para as próximas gerações!

Agradeço aos colegas de faculdade, inclusos os que já estão formados, por dividirem o tempo entre estudos e momentos de descontração, os quais com certeza ajudaram a amenizar as dificuldades e frustrações que o curso de Estatística apresenta à medida que as cadeiras vão passando.

Agradeço aos colegas de laboratório, Verinha, Diego, Sabrina, Monique, Patrícia, João, Pedro, a todo o pessoal do LOPP, por terem se tornado meus bons amigos, partilhado alguns dos meus bons e maus momentos no curso de graduação e por terem me trazido alguns ensinamentos que vou levar para o resto da minha vida.

Agradeço também à professora Liane, por ter me proporcionado uma ótima experiência no ramo de pesquisa, possibilitando a publicação de artigos em eventos e revistas científicas, apresentação em Salão de Iniciação Científica, assessorias estatísticas prestadas junto com ela, à professora Márcia, por ter aceitado o convite para ser minha banca de avaliação desta monografia, e também à UFRGS e à FAPERGS por terem me dado suporte financeiro para contribuir com o meio acadêmico.

Por último, mas não menos importante, agradeço à minha namorada, Marzane, que foi compreensiva nesse tempo em que estive escrevendo este trabalho, por alguns finais de semana que não pude ir encontrá-la em razão do desenvolvimento deste estudo. Guriazinha, eu te amo muito! Todo esse tempo ao teu lado me tem feito ser uma pessoa melhor!

# Resumo

Este estudo busca avaliar, por meio da técnica de simulação de Monte Carlo, os efeitos da não normalidade dos dados de um processo produtivo nos intervalos de confiança dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  tradicionais. As distribuições estudadas foram a normal ( $\mu = 300$ ;  $\sigma^2 = 400$ ), a exponencial ( $\lambda = 1/300$ ) e a gama ( $\alpha = 1800$ ;  $\beta = 6$ ). Os parâmetros para as distribuições não normais foram escolhidos de forma que elas apresentassem média igual ao parâmetro  $\mu$  da distribuição normal, o qual representa a média da referida distribuição. Para analisar os efeitos da não normalidade dos dados, utilizou-se o teste Z para diferença de proporções no intuito de aferir a probabilidade de cobertura dos intervalos, que é a razão entre a quantidade de vezes que eles contêm o verdadeiro valor do índice e o número de replicações. Os níveis de confiança utilizados nos intervalos foram de 90% e 95%. O nível de significância utilizado no referido teste foi de 5%. As probabilidades foram construídas com base em 1000 observações. Os resultados indicam que, em relação aos intervalos de confiança dos índices de capacidade na distribuição normal, as distribuições não normais apresentaram diferenças significativas nas probabilidades de cobertura. Com isso, com 5% de significância, a ausência de normalidade dos dados não permite que os intervalos de confiança dos índices de capacidade tradicionais capturem adequadamente a real capacidade do processo.

**Palavras-chave:** Capacidade do processo, Intervalos de confiança, Não-normalidade.

# Sumário

|  |    |
|--|----|
| <b>1. INTRODUÇÃO</b> .....                 | 9  |
| <b>2. CAPACIDADE DO PROCESSO</b> .....     | 10 |
| <b>3. METODOLOGIA</b> .....                | 14 |
| <b>4. ANÁLISE DOS RESULTADOS</b> .....     | 16 |
| <b>4.1. Distribuição normal</b> .....      | 16 |
| <b>4.2. Distribuição exponencial</b> ..... | 17 |
| <b>4.3. Distribuição gama</b> .....        | 19 |
| <b>5. CONCLUSÕES</b> .....                 | 20 |
| <b>6. REFERÊNCIAS</b> .....                | 21 |

Este artigo será submetido a “REVISTA GESTÃO E PRODUÇÃO”.



## 1. INTRODUÇÃO

Um produto ou serviço de qualidade pode ser definido como aquele que atende de forma confiável, acessível, segura e no tempo certo, às necessidades do cliente (CAMPOS, 2004). Em se tratando do desempenho, Slack *et al.* (1999) e Moraes (2006) informam que a qualidade possui grande importância, pois envolve todos os tipos de consumidores, tornando possível a diminuição de custos e o aumento de confiabilidade. Considerando os fatos supracitados, aumento na qualidade provoca aumento na satisfação desses consumidores.

Para que os consumidores se sintam satisfeitos, é necessário que os produtos atendam a determinadas características. Não é possível, porém, assegurar que os processos apresentem produtos com todas as suas características atendidas com exatidão, pois, de acordo com Deleryd (1998), o grande problema para proceder com melhoras na qualidade de processos, produtos e serviços é a existência de variabilidade. No intuito de sinalizar o comportamento desta variabilidade, surgiu o Controle Estatístico de Processo (CEP).

Uma das ferramentas do CEP é a análise de capacidade do processo. Barriga *et al.* (2003) e Costa *et al.* (2005) a definem como a habilidade de produzir itens em conformidade com a tolerância especificada. Para Montgomery (2004) a análise de capacidade consiste no uso de técnicas estatísticas para quantificar a variabilidade do processo, analisá-la em relação aos limites de especificação do produto e auxiliar o desenvolvimento e a fabricação na eliminação ou redução dessa variabilidade.

A capacidade do processo é usualmente medida por meio de índices, cujo objetivo é fornecer uma linguagem comum e de fácil compreensão para quantificar o desempenho (CHANG *et al.*, 2002). Os índices de capacidade são amplamente utilizados para determinar se um processo é capaz de produzir itens de acordo com uma determinada tolerância (TANG; THAN, 1999).

Diversos autores mencionam a existência de índices de capacidade na literatura (PEARN; CHEN, 1997; RAMOS; HO, 2003; CHEN *et al.*, 2003). Kane (1986) propôs o primeiro índice,  $C_p$ , para mensurar a variação do processo quando relacionada aos limites de especificação. Após, outros índices foram criados, todos tendo base na suposição de que os dados do processo devem possuir distribuição normal, denominados neste estudo por índices tradicionais.

Deve-se enfatizar que, em aspectos práticos, os parâmetros envolvendo os índices de capacidade são desconhecidos, sendo necessário fazer uso das estimativas desses parâmetros e, por consequência, de estimativas desses índices (RAMOS; HO, 2003). Tais estimativas estão sujeitas a erros que podem estar relacionados à quantidade de dados disponíveis e, em

outras situações, por haver um conhecimento restrito sobre o comportamento do processo. Ainda, os valores estimados para os índices são considerados os verdadeiros valores, ao invés de serem tratados como variáveis aleatórias ou como estimativas pontuais (FRANKLIN, 1999; CHANG; WU, 2008). Dados esses empecilhos, a literatura estabelece intervalos de confiança para os índices de capacidade  $C_p$  e  $C_{pk}$  para processos que apresentam distribuição normal (BISSELL, 1990; KOTZ; JOHNSON, 1993).

Outro aspecto relatado por Gonzalez e Werner (2009) é que, tratando-se de processos produtivos reais, nem sempre os dados satisfazem a suposição de normalidade. Dado o fato mencionado, o uso de índices tradicionais implica em riscos de avaliar que o processo é capaz quando na verdade não o é. Ainda, segundo Oliveira (2005), a aplicação desses índices na situação de não normalidade implica em diferenças na proporção de itens não conformes em relação à distribuição normal.

Considerando o aspecto da não normalidade, aliado ao aspecto da estimação intervalar dos índices de capacidade, o objetivo deste trabalho é avaliar, por meio da utilização de simulação, os intervalos de confiança para os índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  quando os dados do processo não satisfazem a suposição de normalidade.

## 2. CAPACIDADE DO PROCESSO

Existem maneiras, tais como a construção de um histograma com os dados do processo e a posterior comparação com as especificações de projeto, de avaliar a capacidade de um processo (MONTGOMERY, 2004). Depois de realizada a avaliação preliminar da capacidade do processo, é preciso quantificá-la.

Os índices de capacidade, que proveem medidas numéricas para avaliar o atendimento das especificações pelo processo, aplicaram-se popularmente à indústria para aferir o desempenho da produção (CHANG, 2009). Quatro são os índices tradicionais:  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  e  $C_{pmk}$ . Contudo, este trabalho irá tratar das propriedades dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$ , que são os mais utilizados para avaliar a capacidade do processo (CHOI *et al.*, 1996; RAMOS; HO, 2003; LIN, 2005).

Emprega-se o índice  $C_p$  para avaliar características do tipo “nominal-é-melhor”. Tal índice informa o quanto o processo é potencialmente capaz de produzir itens dentro dos limites de especificação (GONZALEZ; WERNER, 2009). Entretanto, ele não mede a real capacidade, pelo fato de não considerar, em seu cálculo, a centralização do processo. A Equação (1) expõe como o índice é calculado.

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \quad (1)$$

em que *LIE* e *LSE* são, respectivamente, os limites inferior e superior de especificação e  $\sigma$  é o desvio-padrão do processo.

O índice  $C_{pk}$  afere a real capacidade do processo. Diferentemente do índice  $C_p$ , ele considera em seu cálculo a variabilidade do processo e a sua centralização (ou não) (RIVERA *et al.*, 1995). A Equação (2) descreve o cálculo do índice.

$$C_{pk} = \frac{\min\{\mu - LIE, LSE - \mu\}}{3\sigma} \quad (2)$$

em que *LIE*, *LSE* e  $\sigma$  são citados na equação do índice  $C_p$ , e  $\mu$  é a média do processo.

Quando se trata de aspectos práticos, porém, os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  são desconhecidos, sendo utilizadas estimativas desses parâmetros. Por consequência do uso dessas estimativas, os índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  são calculados com base nos parâmetros estimados (NAGATA; NAHAGATA, 1994; FRANKLIN, 1999), e tais resultados são considerados como os verdadeiros valores da capacidade do processo, ao invés de serem variáveis aleatórias ou estimativas pontuais (FRANKLIN, 1999; CHANG; WU, 2008). Segundo Ramos e Ho (2003), a obtenção dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  a partir dos parâmetros estimados está exposta a erros, que podem estar associados a razões como o reduzido conhecimento sobre o desempenho do processo. Ainda segundo estes autores, outra abordagem é que, embora os valores calculados para  $C_p$  e  $C_{pk}$  sejam maiores do que 1, não é possível garantir que o processo é capaz. Para que seja possível relacionar os índices de capacidade à porcentagem de itens não conformes, é necessária a utilização de uma distribuição de probabilidade para o cálculo dessa porcentagem, e, caso a distribuição dos índices estimados seja conhecida, a construção de intervalos de confiança é factível.

Diversos autores estudaram as propriedades inferenciais dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  quando a distribuição dos dados do processo é normal (KANE, 1986; KOTZ; JOHNSON, 1993; MATHEW *et al.*, 2007; LOVELACE *et al.*, 2009). Para o índice  $C_p$ , os limites de confiança podem ser obtidos a partir da suposição de que o intervalo para o desvio-padrão pode ser adquirido por meio dos percentis da distribuição qui-quadrado com  $(n - 1)$  graus de liberdade (BISSELL, 1990; CHOU *et al.*, 1990). A Equação (3) ilustra os limites de confiança.

$$\hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2}{n-1}} \leq C_p \leq \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{n-1,\alpha/2}^2}{n-1}} \quad (3)$$

Em que  $\hat{C}_p$  é a estimativa do índice  $C_p$ ,  $\chi_{n-1,\alpha}^2$  é o percentil  $\alpha$  da distribuição qui-quadrado com  $(n - 1)$  graus de liberdade e  $1 - \alpha$  é o nível de confiança. Já em relação ao índice  $C_{pk}$ , diversos autores propuseram a construção de limites unilaterais e bilaterais de

confiança utilizando a aproximação para a distribuição normal padrão (BISSELL, 1990; KUSHLER; HURLEY, 1992; NAGATA; NAHAGATA, 1994). Mathew *et al.* (2007) propõem a utilização de um intervalo de confiança generalizado para o respectivo índice. Neste estudo, será empregada a aproximação de Bissell (1990), que é evidenciada pela Equação (4).

$$\hat{C}_{pk} \left( 1 - \frac{z_{\alpha}}{2} \sqrt{\frac{1}{9n\hat{c}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right) \leq C_{pk} \leq \hat{C}_{pk} \left( 1 + \frac{z_{\alpha}}{2} \sqrt{\frac{1}{9n\hat{c}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right) \quad (4)$$

Os índices tradicionais, embora sejam largamente empregados no meio industrial, têm validade somente quando os dados do processo apresentam distribuição normal. Gonzalez e Werner (2009) relatam que o desconhecimento de ferramentas de análise de capacidade para dados não normais por parte da indústria leva-a a utilizar os índices tradicionais, gerando interpretações equivocadas sobre a capacidade do processo produtivo. Ainda, Oliveira (2005) informa que a proporção de itens em não conformidade difere em relação à distribuição normal quando tais índices são aplicados em distribuições não normais.

Em relação à situação de não normalidade, diversos índices vêm sendo estudados, como nos trabalhos de Clements (1989), Pearn e Chen (1997), Chen e Ding (2001), Vännman e Albing (2007), para citar alguns exemplos. Contudo, os desvios de normalidade são pouco investigados quando se trata da construção de intervalos de confiança para os índices tradicionais de capacidade. Autores reconhecidos por estudos de capacidade, tais como Kotz e Johnson (1993) e Montgomery (2004) não abordam esse problema específico. Por outro lado, autores, como Choi *et al.* (1996), Balamurali e Kalyanasundaram (2002) e Abdolshah *et al.* (2009) propõem a utilização de técnicas de simulação para avaliar situações especiais como a descrita anteriormente. Choi *et al.* (1996) e Balamurali e Kalyanasundaram (2002) contemplam, em seus trabalhos, a simulação por reamostragem (*bootstrap*), nos quais se utiliza a probabilidade de cobertura dos intervalos para avaliar a eficiência do respectivo método. Tal probabilidade se define pela razão entre a quantidade de vezes que o intervalo contém o parâmetro e o número de replicações utilizadas na simulação. Já Abdolshah *et al.* (2009) contemplam a simulação de Monte Carlo.

O método de simulação de Monte Carlo investiga as distribuições aleatórias de variadas estatísticas e determina o efeito da violação de suposições intrínsecas às distribuições de probabilidade (BARROS, 2005). Três passos são recomendados para proceder com este método: i) estabelecer a população de interesse; ii) gerar amostras aleatórias da população em questão e obter as estatísticas de interesse, tais como média e desvio-padrão e iii) criar a distribuição empírica da estatística de interesse. Assim, segundo o referido autor, compara-se

a distribuição empírica com uma determinada distribuição de probabilidade. Sendo assim, este trabalho contemplará o método de simulação de Monte Carlo para atingir seu objetivo, que visa avaliar o comportamento dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$ , bem como de seus respectivos limites de confiança, quando os dados do processo não apresentam distribuição normal.

Para avaliar o comportamento dos limites de confiança dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$ , será utilizado o teste Z bilateral para diferença de proporções. A hipótese nula ( $H_0$ ) do teste é de que as proporções de X e de Y são iguais, enquanto a hipótese alternativa ( $H_1$ ) é de que tais proporções são diferentes. Para rejeitar a hipótese nula, o p-valor deve ser menor que  $\alpha$ . A Equação (5) ilustra a estatística de teste (FREUND, 2006).

$$Z_{calc} = \frac{\left(\frac{x}{n_x} - \frac{y}{n_y}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} \quad (5)$$

Em que  $\hat{p} = (x + y)/(n_x + n_y)$ ,  $x$  é o número de sucessos em X,  $y$  é o número de sucessos em Y,  $n_x$  é o tamanho de amostra de X e  $n_y$  é o tamanho de amostra de Y. Neste estudo,  $x$  é o número de vezes que os intervalos de confiança contêm o verdadeiro valor de  $C_p$  ou  $C_{pk}$ ,  $y$  é a probabilidade nominal de cobertura de 0,90 ou 0,95 multiplicada pelo número de replicações,  $n_x$  e  $n_y$  são a quantidade de replicações da simulação.

Abaixo é possível visualizar um exemplo de aplicação do teste Z para diferença de proporções, adaptado de Freund (2006). Um estudo evidenciou que 56 dentre 80 indivíduos que assistiram a um comercial de uma marca de enlatados durante uma novela (X) e 38 dentre 80 indivíduos que assistiram ao mesmo comercial durante uma partida de futebol (Y) recordaram-se da referida marca duas horas depois. Ao nível de 5% de significância ( $\alpha = 0,05$ ), o que é possível concluir sobre a alegação de que é mais eficaz anunciar tal produto durante o horário de uma novela do que durante uma partida de futebol? Deve-se supor que o custo da propaganda seja igual nos referidos programas.

A partir do enunciado do exemplo acima, tem-se que a hipótese nula é que a proporção de pessoas que se recordaram da marca de enlatados duas horas após assistir ao seu comercial em uma novela é igual à proporção de pessoas que se recordaram da referida marca duas horas após assistir ao seu comercial em uma partida de futebol ( $p_x = p_y$ ), contra a hipótese de que a proporção de X é maior que a de Y. Substituindo  $x = 56$ ,  $y = 38$ ,  $n_x = 80$ ,  $n_y = 80$ , têm-se:

$$\hat{p} = \frac{56 + 38}{80 + 80} = \frac{94}{160} = 0,5875$$

Sendo assim, obtém-se  $Z_{calc}$ ,

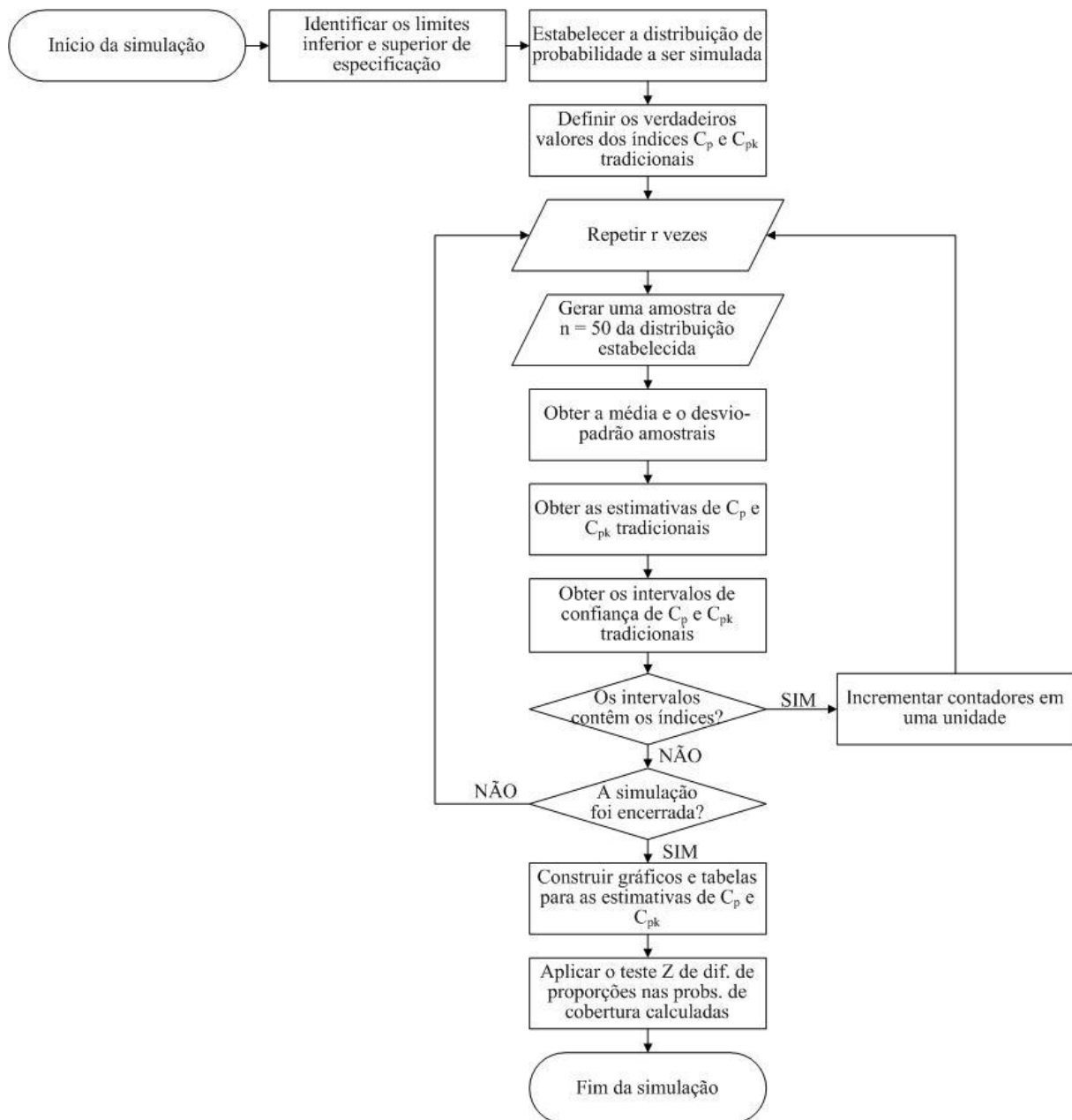
$$Z_{calc} = \frac{\frac{56}{80} - \frac{38}{80}}{\sqrt{(0,5875)(0,4125) \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80}\right)}} \approx 2,89$$

Utilizando um nível de significância ( $\alpha$ ) igual a 0,05, rejeita-se a hipótese nula ( $H_0$ ), pois  $Z_{calc} \geq 1,64$ . Conclui-se então que anunciar a marca de enlatados durante uma novela é mais eficaz do que anuncia-la durante uma partida de futebol.

### 3. METODOLOGIA

Este estudo apresenta caráter explicativo, pois, de acordo com Gil (2002), este tipo de pesquisa procura distinguir os fatores que determinam ou contribuem para o acontecimento de certos fenômenos. Ainda, segundo o referido autor, no que se refere aos procedimentos técnicos utilizados, o presente trabalho apresenta caráter experimental, pelo fato de fazer uso de simulação de dados.

O fluxograma da Figura 1 é proposto para proceder com o estudo do comportamento dos índices de capacidade  $C_p$  e  $C_{pk}$  em situações de desvio da normalidade, bem como os intervalos de confiança. Inicialmente, serão estabelecidos os limites inferior e superior de especificação. Após, para cada uma das distribuições a serem simuladas obter com os parâmetros os reais valores dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$ . Na sequência, uma quantidade expressiva de amostras será gerada, quantidade esta igual a 1000, sendo estas amostras aleatórias de tamanho  $n = 50$ . Tal tamanho de amostra foi escolhido, pois, segundo Ramos e Ho (2003), não se costumam encontrar estudos de capacidade do processo que utilizem tamanhos de amostra maiores que este, em razão do custo para obter os dados e de uma possível interferência no processo de produção. As amostras geradas são provenientes de: (i) uma distribuição normal com média igual a 300 e desvio-padrão igual a 20; (ii) uma distribuição exponencial com média igual a 300 e (iii) uma distribuição gama com parâmetros de forma ( $\alpha$ ) e de escala ( $\beta$ ) iguais, respectivamente, a 1800 e 6. Os parâmetros das distribuições: exponencial e gama foram definidos de tal forma que a média fosse igual à definida para a distribuição normal. Os dados serão obtidos por meio de geradores de amostras aleatórias do software R, versão 2.12.2.



**Figura 1 – Fluxograma proposto para estudo dos intervalos de confiança em situações de desvio de normalidade. Fonte: elaborado pelos autores.**

Após calcula-se a média e o desvio-padrão de cada uma das 1000 amostras geradas. Uma vez estimados a média e o desvio padrão e com base nas Equações (1) e (2) explicitadas na seção 2, são calculadas estimativas dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  para cada amostra.

Para construir os intervalos de confiança dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  em cada amostra, serão utilizadas as Equações (3) e (4), referidas na seção 2. Os níveis de confiança utilizados para obtenção dos intervalos são de 90% e 95%.

Então, após a obtenção dos intervalos, será calculada a probabilidade de cobertura de  $C_p$  e  $C_{pk}$ , que é a razão entre a quantidade de vezes que os verdadeiros valores de  $C_p$  e  $C_{pk}$

estão contidos nos respectivos intervalos e a quantidade de amostras analisadas. Após, será aplicado o teste Z para diferença de proporções para verificar se a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança dos índices difere significativamente do nível de confiança utilizado, a partir daqui denominado como probabilidade nominal de cobertura. O nível de significância utilizado para o referido teste é de 5%.

Por fim, serão construídos histogramas dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  para as amostras provenientes de uma distribuição normal com média 300 e desvio-padrão 20, para as amostras provenientes de uma distribuição exponencial com média igual a 300 e para as amostras provenientes de uma distribuição gama com parâmetros  $\alpha = 1800$  e  $\beta = 6$ . Também serão construídas tabelas contendo os índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  definidos para cada distribuição, o tamanho de amostra utilizado e a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança obtidos.

#### 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Esta seção apresentará três subseções, sendo a subseção 1 utilizada para análise das simulações da distribuição normal, a subseção 2 para análise das simulações da distribuição exponencial e a subseção 3 para análise das simulações da distribuição gama.

##### 4.1. Distribuição normal

Inicialmente foram definidos os limites de especificação para calcular os índices de capacidade  $C_p$  e  $C_{pk}$ . Os limites de especificação inferior e superior estabelecidos foram de, respectivamente, de 240 e 360 unidades numéricas. O índice  $C_p$  calculado para a distribuição normal foi de 0,98, enquanto o índice  $C_{pk}$  calculado foi de 0,94.

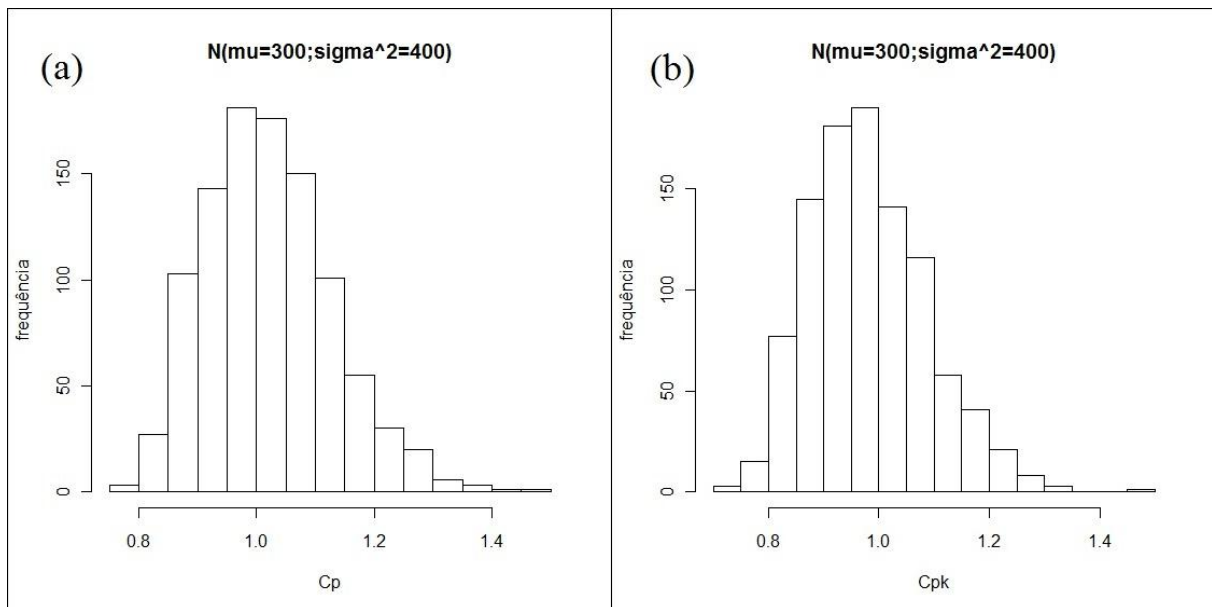
A Figura 2 (a), descreve o histograma do índice  $C_p$ , enquanto Figura 2 (b) expõe o histograma do índice  $C_{pk}$  para as amostras aleatórias da distribuição normal, com média igual a 300 unidades numéricas e desvio-padrão de 20 unidades numéricas. Por meio de análise gráfica, é possível verificar que tanto a distribuição de  $C_p$ , quanto a distribuição de  $C_{pk}$ , são levemente assimétricas à direita, sendo a concentração de valores de  $C_p$  maior entre 0,90 e 1,10, e a de  $C_{pk}$  maior entre 0,85 e 1,05.

Quanto à probabilidade de cobertura dos intervalos do índice  $C_p$ , verificou-se, de acordo com a Tabela 1, que o intervalo de 90% de confiança do referido índice obteve uma probabilidade de cobertura de 0,890, enquanto o intervalo de 95% de confiança obteve probabilidade de 0,947. O teste Z para diferença de proporções foi aplicado, e foi possível constatar, com 5% de significância, não há evidências de que as probabilidades de cobertura dos intervalos de  $C_p$ , tanto o de 90% (p-valor = 0,4657) quanto o de 95% de confiança (p-



valor = 0,7614), apresentem diferenças significativas em relação à probabilidade de cobertura nominal.

Em relação à probabilidade de cobertura dos intervalos do índice  $C_{pk}$ , constatou-se, conforme a Tabela 1, que o intervalo de 90% de confiança do referido índice apresentou uma probabilidade de 0,906, enquanto o intervalo de 95% de confiança obteve probabilidade de 0,960. Empregou-se o teste Z para diferença de proporções, e verificou-se, com 5% de significância, tanto para o intervalo de 90%, quanto para o intervalo de 95% de confiança, que não foi possível rejeitar a hipótese nula de que as referidas probabilidades são iguais às probabilidades nominais de 0,90 e 0,95, respectivamente (IC(90%): p-valor = 0,6503; IC(95%): p-valor = 0,2807).



**Figura 2 – Distribuição de (a)  $C_p$  e (b)  $C_{pk}$  das amostras aleatórias da distribuição normal( $\mu = 300$ ;  $\sigma^2 = 400$ ).**

#### **4.2. Distribuição exponencial**

Para os limites de especificações estabelecidos no item 4.1 os valores de  $C_p$  e  $C_{pk}$  calculados foram, respectivamente, de 0,06 e 0,05.

A Figura 3 (a), descreve o histograma do índice  $C_p$ , enquanto Figura 3 (b) expõe o histograma do índice  $C_{pk}$  para as amostras aleatórias da distribuição exponencial, com média igual a 300 unidades numéricas. É possível averiguar, por meio de análise gráfica, que a distribuição do índice  $C_p$  apresenta assimetria à direita, com concentração de valores maior entre 0,05 e 0,08. Já a distribuição do índice  $C_{pk}$ , também por análise gráfica, apresenta

assimetria à esquerda, com alguns valores negativos registrados. Os valores de  $C_{pk}$  possuem concentração maior entre 0,02 e 0,06.

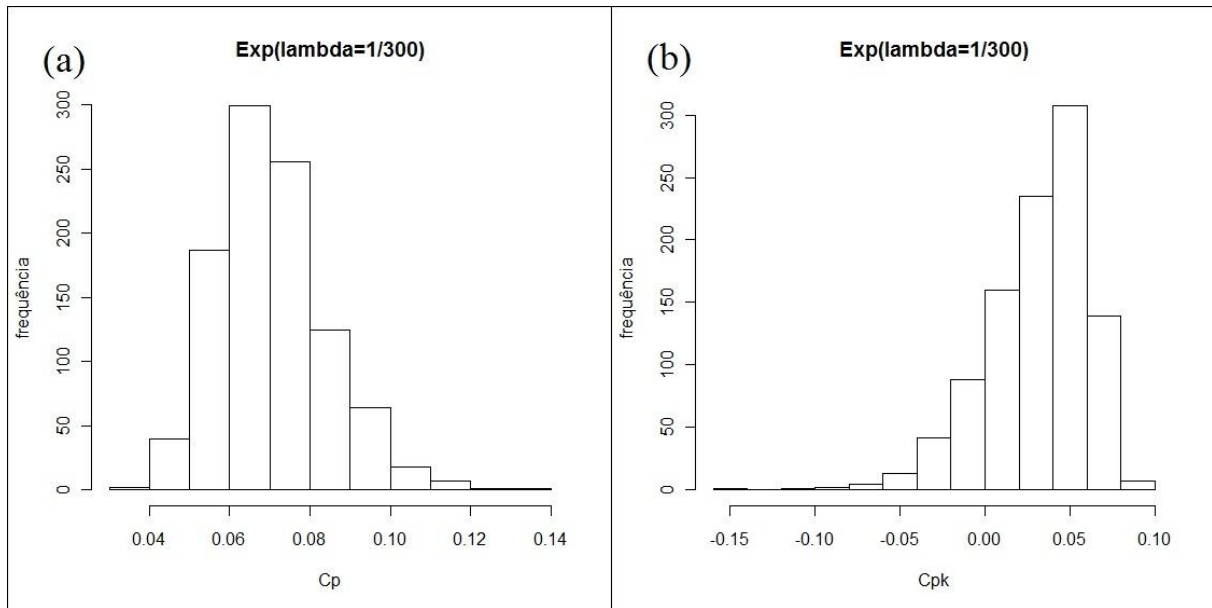
**Tabela 1 – Probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  para 1000 replicações.**

| Distribuição  | $C_p$<br>definido | $C_{pk}$<br>definido | Prob. nominal<br>de cobertura | Prob. de cobertura do<br>intervalo |          |
|---------------|-------------------|----------------------|-------------------------------|------------------------------------|----------|
|               |                   |                      |                               | $C_p$                              | $C_{pk}$ |
| N(300; 400)   | 0,98              | 0,94                 | 0,90                          | 0,890                              | 0,906    |
|               |                   |                      | 0,95                          | 0,947                              | 0,960    |
| Exp(1/300)    | 0,06              | 0,05                 | 0,90                          | 0,563*                             | 0,848*   |
|               |                   |                      | 0,95                          | 0,658*                             | 0,848*   |
| Gama(1800; 6) | 3,30              | 3,19                 | 0,90                          | 0,518*                             | 0,363*   |
|               |                   |                      | 0,95                          | 0,649*                             | 0,454*   |

\* indica que o valor é significativamente diferente da probabilidade nominal de cobertura.

Em relação à probabilidade de cobertura dos intervalos do índice  $C_p$ , verificou-se, de acordo com a Tabela 1, que o intervalo de 90% de confiança obteve probabilidade de 0,563, enquanto o intervalo de 95% de confiança apresentou probabilidade de 0,638. Utilizou-se o teste Z para diferença de proporções, e constatou-se, com 5% de significância, que há evidências de que os intervalos de 90% e de 95% de confiança são diferentes das probabilidades de cobertura em relação às probabilidades nominais de 0,90 e 0,95, respectivamente (IC(90%): p-valor < 0,0001; IC(95%): p-valor < 0,0001).

Quanto à probabilidade de cobertura dos intervalos do índice  $C_{pk}$ , observou-se, conforme Tabela 1, que o intervalo de 90% de confiança apresentou probabilidade de 0,848, enquanto o intervalo de 95% de confiança apresentou também probabilidade de 0,848. Também foi aplicado o teste Z para diferença de proporções, e verificou-se, com 5% de significância, que há evidências de que as probabilidades de cobertura dos intervalos de 90% e de 95% de confiança são diferentes das probabilidades nominais de 0,90 e 0,95, respectivamente (IC(90%): p-valor = 0,0005; IC(95%): p-valor < 0,0001).



**Figura 3 – Distribuição de (a)  $C_p$  e (b)  $C_{pk}$  das amostras aleatórias da distribuição exponencial( $\lambda = 1/300$ ).**

#### 4.3. Distribuição gama

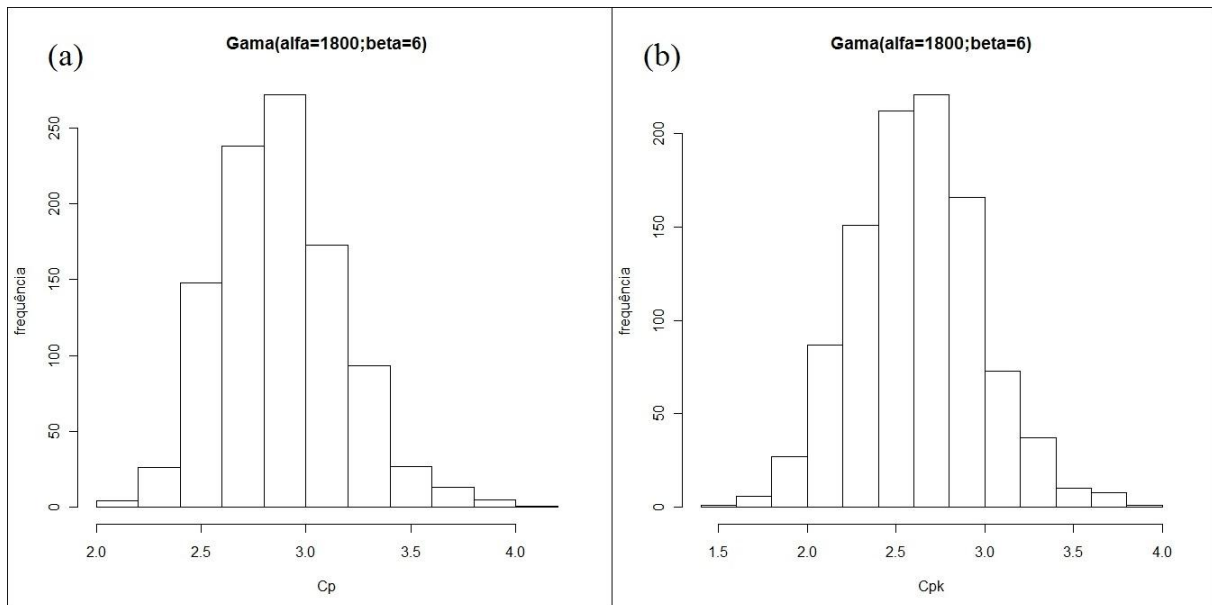
Para os limites de especificações estabelecidos no item 4.1, os valores de  $C_p$  e  $C_{pk}$  calculados foram de, respectivamente, 3,30 e 3,19.

A Figura 3 (a), descreve o histograma do índice  $C_p$ , enquanto Figura 3 (b) expõe o histograma do índice  $C_{pk}$  para as amostras aleatórias da distribuição gama, com parâmetros de forma ( $\alpha$ ) e de escala ( $\beta$ ) iguais a, respectivamente, 1800 e 6. Por meio de análise gráfica, é possível notar que a distribuição de  $C_p$  se aproxima de uma distribuição normal, com uma concentração de valores maior na faixa entre 2,60 e 3,20. A distribuição de  $C_{pk}$  também se assemelha a uma distribuição normal, verificando-se uma concentração maior de valores na faixa entre 2,40 e 3,00.

No que tange à probabilidade de cobertura dos intervalos do índice  $C_p$ , observou-se, conforme Tabela 1, que o intervalo de 90% de confiança apresentou probabilidade de 0,518, enquanto o de 95% obteve probabilidade de 0,649. Empregou-se o teste Z para diferença de proporções, e foi possível constatar que, com 5% de significância, as hipóteses nulas de que as probabilidades de cobertura dos intervalos de 90% e 95% de confiança são iguais às probabilidades nominais de 0,90 e 0,95, respectivamente, são rejeitadas (IC(90%): p-valor < 0,0001; IC(95%): p-valor < 0,0001).

Quanto à probabilidade de cobertura dos intervalos do índice  $C_{pk}$ , foi possível notar, segundo Tabela 1, que o intervalo de 90% apresentou probabilidade de 0,363, enquanto o de 95% obteve probabilidade de 0,454. O teste Z para diferença de proporções foi aplicado, e observou-se que são rejeitadas as hipóteses nulas de que os intervalos de 90% e 95% de

confiança possuem probabilidades de cobertura iguais às probabilidades nominais de 0,90 e 0,95, respectivamente (IC(90%): p-valor < 0,0001; IC(95%): p-valor < 0,0001).



**Figura 4 – Distribuição de (a)  $C_p$  e (b)  $C_{pk}$  das amostras aleatórias da distribuição  $\text{gama}(\alpha = 1800; \beta = 6)$ .**

## 5. CONCLUSÕES

Este estudo propôs avaliar, por meio de simulação, os intervalos de confiança dos índices de capacidade  $C_p$  e  $C_{pk}$ , conforme Equações (3) e (4) propostas por Bissell (1990), quando os dados do processo não satisfazem a suposição de normalidade.

Em relação às probabilidades nominais de 0,90 e 0,95, os processos com dados normais não apresentaram diferenças significativas nas probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança dos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$ . Tal fato é esperado, dado que os índices de capacidade foram construídos sob a suposição de que o processo é normalmente distribuído. Já as distribuições não normais abordadas neste estudo apresentaram probabilidades de cobertura significativamente diferentes das referidas probabilidades nominais, sendo aquelas menores.

Considerando os fatos mencionados anteriormente, verifica-se, a 5% de significância, que a não satisfação da suposição de normalidade dos dados não atende aos intervalos de confiança dos índices de capacidade tradicionais. Isto corrobora o aspecto de que os referidos índices não são medidas adequadas para situações em que os dados apresentam comportamento diferenciado em relação à distribuição normal.

Além disto, este estudo reforça as conclusões de outras pesquisas com dados não normais aplicados em índices estruturados para dados que apresentam distribuição normal, porém sempre usando estimativas pontuais. Aqui se conclui que, mesmo utilizando

procedimentos inferenciais os resultados também não são adequados, uma vez que por ser as probabilidades de cobertura estatisticamente diferentes isto indica que os intervalos não estão contendo os valores reais de  $C_p$  e  $C_{pk}$ .

## 6. REFERÊNCIAS

ABDOLSHAH, M.; ISMAIL, M. Y. B.; YUSUFF, R. M.; HONG, T. S. Process capability analysis using Monte Carlo simulation. *2009 International Conference on Information Management and Engineering*, p. 335-339. 2009.

BALAMURALI, S.; KALYANASUNDARAM, M. Bootstrap lower confidence limits for the process capability indices  $C_p$ ,  $C_{pk}$  and  $C_{pm}$ . *International Journal of Quality and Reliability Management*, v. 19, n. 8/9, p. 1088-1097. 2002.

BARRIGA, G. D. C.; HO, L. L.; BORGES, W. S. Um índice de capacidade para especificações unilaterais. *Gestão e Produção*, São Carlos, Brasil. V. 13, n. 1, p. 40-49, 2003.

BARROS, E. A. C. *Aplicações de simulação Monte Carlo e Bootstrap*. Trabalho de diplomação (Graduação). Universidade Estadual de Maringá, Maringá. 2005. 52 p.

BISSELL, A. F. How reliable is your capability index? *Applied Statistics*, Londres, V. 39, n. 3, p. 331-340. 1990.

CAMPOS, V. F. *TQC – Controle da Qualidade Total (no estilo japonês)*. Nova Lima: INDG Tecnologia e Serviços Ltda, 2004. 256 p.

capability index  $C_{pk}$ . *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 25, n. 1-2, p. 160-166. 2005.

CHANG, Y. C. Interval estimation of capability index  $C_{pmk}$  for manufacturing processes with asymmetric tolerances. *Computers and Industrial Engineering*, v. 56, p. 312-322, 2009.

CHANG, Y. C.; WU, C. W. Assessing process capability based on the lower confidence bound of  $C_{pk}$  for asymmetric tolerances. *European Journal of Operation Research*, v. 190, n. 1, p. 205-227. 2008.

CHANG, Y. S.; CHOI, I. S.; BAI, D. S. Process capability indices for skewed populations. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 18, p. 383-393. 2002.

CHEN, J. P.; DING, C. G. A new process capability index for non-normal distributions. *The International Journal of Quality & Reliability Management*, v. 18 n. 6-7, p. 762-770, 2001.

CHEN, K.S., PEARN, W.L., LIN, P.C. Capability measures for processes with multiple characteristics. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 19, nº 2, p. 101-110. 2003.

CHOI, K. C.; NAM, K. H.; PARK, D. H. Estimation of capability index based on bootstrap method. *Microelectronics Reliability*, v. 36, n. 9, p. 1141-1153. 1996.

CHOU, Y. M.; OWEN, D. B.; BORREGO, A. S. A. Lower confidence limits on process capability indices. *Journal of Quality Technology*, v. 22, n. 3, p. 223-229. 1990.

CLEMENTS, J. A. - Process capability calculations for non-normal distributions. *Quality Progress*, v. 22, nº 2, p. 95-100. 1989.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. *Controle Estatístico de Qualidade*, 2ª Edição. São Paulo: Editora Atlas, 2005. 334 p.

DELERYD, M. On the gap between theory and practice of process capability studies. *International Journal of Quality & Reliability Management*, v. 15, nº 12, p. 178-191. 1998.

FRANKLIN, L. A. Sample size determination for lower confidence limits for estimating process capability indices. *Computers and Industrial Engineering*, v. 36, p. 603-614. 1999.

FREUND, J. E. *Estatística aplicada: economia, administração e contabilidade*, 11ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2006. 536 p.

GONZALEZ, P. U.; WERNER, L. Comparação dos índices de capacidade do processo para distribuições não-normais. *Gestão e Produção*, São Carlos, Brasil. V. 16, n. 1 p. 121-132. 2009.

KANE, V. E. Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, v. 18, nº 1, p. 41-52. 1986.

KOTZ, S.; JOHNSON, N. L. *Process Capability Indices*. Londres: Chapman & Hall, 1993. 222 p.

KOTZ, S.; PEARN, W.L. *Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices: A Comprehensive Exposition of Quality Control Measures*. Cingapura: World Scientific, 2006. 378 p.

LIN, H. C. Using normal approximation for calculating the p-value in assessing process capability index  $C_{pk}$ . *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 25, p. 160-166. 2005.

MATHEW, T.; SEBASTIAN, G.; KURIAN, K. M. Generalized confidence intervals for process capability indices. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 23, n. 4, p. 471-481. 2007.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4ª Edição. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2004. 513 p.

- MORAES, C. F. *Estudo da utilização do gráfico de controle individual e do índice de capacidade sigma para dados não normais*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Itajubá, 2006.
- NAGATA, Y.; NAHAGATA, H. Approximation formulas for the lower confidence limits of process capability indices. *Okayama Economic Review*, v. 25, n. 4, p. 301-314. 1994.
- OLIVEIRA, E. S. *Análise de dados não-normais no contexto da metodologia six sigma*. Trabalho de diplomação (Graduação). Instituto de Engenharia de Produção e Gestão, Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI, Itajubá, 2005. 15 p.
- PEARN, W. L.; CHEN, K. S. Capability indices for non-normal distributions with an application in electrolytic capacitor manufacturing. *Microelectronics Reliability*, v. 37, n. 12, p. 1853-1858, 1997.
- RAMOS, A. W.; HO, L. L. Procedimentos inferenciais em índices de capacidade para dados autocorrelacionados via *bootstrap*. *Produção*, São Paulo, Brasil. V. 13, n. 3, p. 50-62. 2003.
- RIVERA, L. A. R.; HUBELE, N. F.; LAWRENCE, F. P.  $C_{pk}$  index estimation using data transformation. *Computers and Industrial Engineering*, v. 29, n. 1-4, p. 55-58. 1995.
- SLACK, N.; CHAMBERS, S.; HARLAND, C.; HARRISON A.; JOHNSTON, R. *Administração da Produção*, 1ª ed. São Paulo: Editora Atlas, 1999.
- TANG, L. C.; THAN, S. E. Computing process capability indices for non-normal data: A review and comparative study. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 15, p. 339-353. 1999.

## INFERENCE PROCEDURES OVER PROCESS CAPABILITY INDICES

**Abstract:** This study seeks to evaluate, through the use of the Monte Carlo simulation technique, the effects of non-normality of a productive process data over the confidence intervals for the traditional  $C_p$  and  $C_{pk}$  indices. The studied distributions were the normal ( $\mu = 300$ ;  $\sigma^2 = 400$ ), the exponential ( $\lambda = 1/300$ ) and the gamma ( $\alpha = 1800$ ;  $\beta = 6$ ) ones. The parameters for the non-normal distributions were chosen in order to present the mean equal to the  $\mu$  parameter from the normal distribution, which represents the mean of the last one. To analyze the effects of non-normality of the data, the Z test for difference of proportions was used in order to assess the coverage probability, which is the ratio between the number of times that the intervals contain the true value of the index and the number of replications, of the constructed intervals, whose utilized confidence levels were of 90% and 95%. The utilized significance level was 5%. The probabilities were built over the base of 1000 repetitions. The

results indicate that, in relation with the process capability indices confidence intervals for the normal distribution, the non-normal ones presented significant differences in the coverage probabilities. With this, it is possible to affirm, with a 5% significance level, that the lack of normality on data affects the traditional process capability indices confidence intervals.

**Keywords:** Process capability, Confidence intervals, Non-normality.