

Matematika I – přednáška 20

Shrnutí co bylo minule

Integrace racionálních funkcí.

Co bude dnes

Integrace funkcí typu $R(x, \sqrt[n]{(ax + b)/(cx + d)})$. Shrnutí metod integrace.

Tyto slidy jsou na adrese

<http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching>

(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 20

Integrace funkcí typu $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ (pouze ke zkoušce úrovně α)

Racionální funkce dvou proměnných: podíl dvou polynomů dvou proměnných

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$$

Příklady racionálních funkcí dvou proměnných:

$$R(u, v) = \frac{uv + v^3 - 1}{u^2 + 1}, \quad R(u, v) = \frac{2}{2 - v}, \quad R(u, v) = \frac{u + v}{u - v}, \quad \text{atd.}$$

Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$

Předpokládejme, že $ad - bc \neq 0$.

Tato nerovnost zaručuje, že polynomy $ax + b$ a $cx + d$ jsou nesoudělné (tj. ani jeden z nich není číselným násobkem druhého).

Je možné použít substituci $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$

Odtud vyjádříme x a dx . Tímto způsobem integrál převedeme na integrál racionální funkce proměnné t .

Příklad. Vypočítejme integrál $\int \frac{\sqrt{1-x}}{1+x} dx$.

Integrovaná funkce je definovaná a spojitá na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 1)$. Na každém z těchto intervalů tudíž existuje primitivní funkce i neurčitý integrál.

Užijeme substituci $t = \sqrt{1-x}$. Odtud plyne: $x = 1 - t^2$ a $dx = -2t dt$.

Dosazením do integrálu dostáváme

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1+x} dx = \int \frac{t}{1+(1-t^2)} (-2t) dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-2} dt$$

Toto je integrál racionální funkce, který již umíme vypočítat.

Vypočítejte si tento integrál sami.

Do výsledku nakonec dosadíme $t = \sqrt{1-x}$.

Další příklady: Vypočítejte integrály

$$1) \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x} dx, \quad 2) \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$

Postup řešení: viz TABULE

Další speciální integrály

1) Typ $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$

a) $a < 0$ a navíc

kvadratický polynom $ax^2 + bx + c$ měl dva různé reálné kořeny α, β .

Pak $t = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$ a viz předchozí substituce.

b) $a > 0$ V tomto případě můžeme použít tzv. Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a}x.$$

Další speciální integrály

2) Typ $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Pomocí univerzální goniometrické substituce

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

převědeme na parciální zlomky.

Jak?

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \sin^2(x/2) = 1 - \cos^2(x/2) = \frac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)},$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

„Diferencováním” rovnice $\operatorname{tg}(x/2) = t$ dále obdržíme:

$$\frac{1}{2 \cos^2(x/2)} dx = dt, \quad \text{tj. } \frac{1}{2} [1 + \operatorname{tg}^2(x/2)] dx = dt.$$

Integrály bez elementárních výsledků

Známé integrály, jejichž primitivní funkce se nedají vyjádřit pomocí konečného počtu funkcí.

1) Binomické integrály

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}$$

pokud $p, \frac{m+1}{n}, p + \frac{m+1}{n}$ není celé

2) Eliptické integrály

$$\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}$$

Integrály bez elementárních výsledků

3) Fresnelovy integrály

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt.$$

Atd, viz např.:

https://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_1_7.pdf

Příklady řešení integrálů, shrnutí: