

5.2.1.7 Achsen / Wellen / Zapfen

Literatur

Lesen Sie zu diesem Thema bitte:

- das Kapitel I 10 (Maschinenelemente) im Handbuch Maschinenbau (Alfred Böge)
- das Kapitel 11 (Achsen, Wellen Zapfen) im Fachbuch Maschinenelemente Roloff / Matek

Die zugehörigen Tabellen und Diagramme finden Sie im Tabellenbuch Roloff Matek

Übungsaufgaben entnehmen Sie bitte der Aufgabensammlung Maschinenelemente Roloff / Matek (Nr.11.1 bis Nr.11.28).

Hausaufgaben Roloff / Matek Aufgabensammlung Nr. 11.4 – 11.5 – 11.6 – 11.7 – 11.10 – 11.13 – 11.15

Kontrollfragen: 11.1 bis 11.3

Allgemeines

Achsen tragen umlaufende oder ruhende Maschinenteile. Auf stillstehenden Achsen drehen die auf ihnen gelagerten Maschinenteile. Anders verhält es sich bei umlaufenden Achsen. Sie drehen sich mit den auf ihnen feststehenden Maschinenteilen. Achsen übertragen im Gegensatz zu Wellen keine Drehmomente.

Wellen tragen wie Achsen Maschinenteile, drehen sich aber selber immer mit und übertragen stets ein Drehmoment.

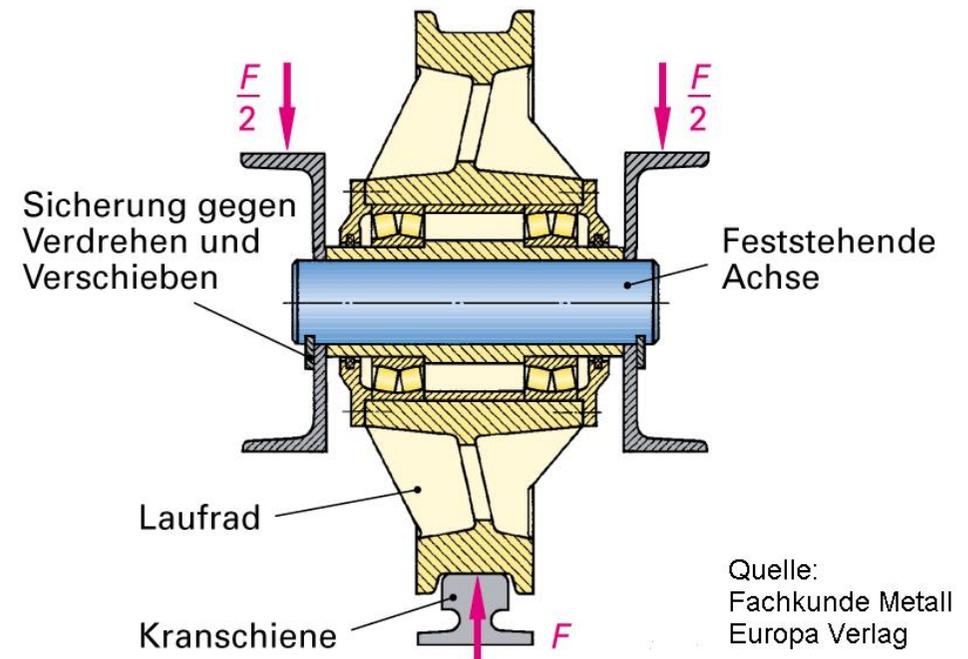
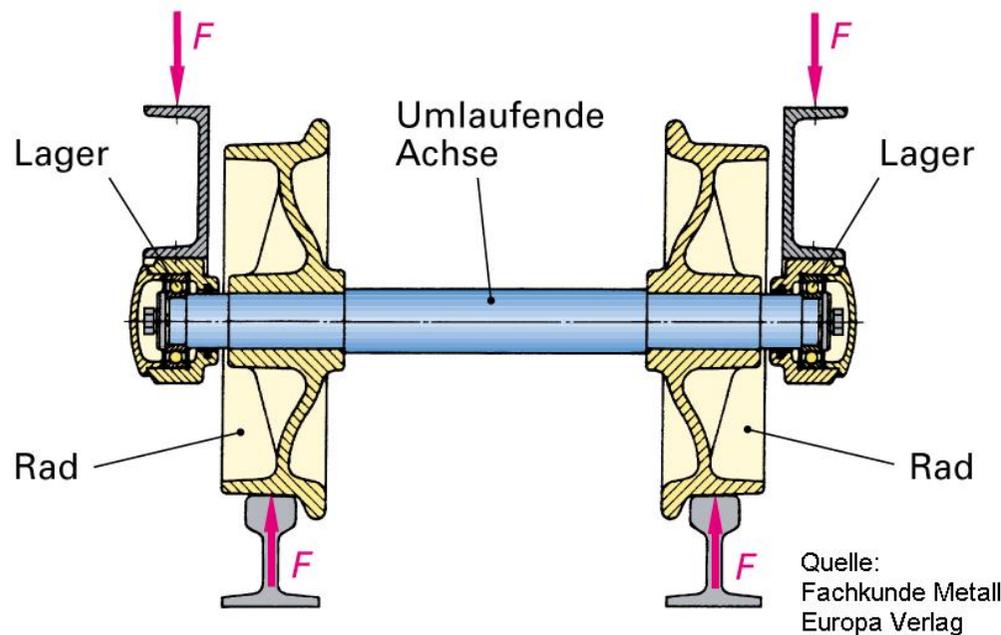
Zapfen werden zum Lagern und Tragen verwendet. Oft handelt es sich um abgesetzte Enden von Achsen oder Wellen, auf denen Maschinenelemente fliegend gelagert werden. Verwendung finden auch Einzelelemente wie Kurbel- oder Spurzapfen.

Achsen

Als Achsen werden Maschinenelemente bezeichnet, auf denen sich umlaufende Räder und Rollen, schwingende Hebel oder ähnliche Bauteile abstützen. Sie werden überwiegend durch Querkräfte auf Biegung, seltener durch Normalkräfte auf Zug oder Druck beansprucht. Die durch die Querkräfte hervorgerufene Schubspannung kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden. Achsen übertragen keine Drehmomente.

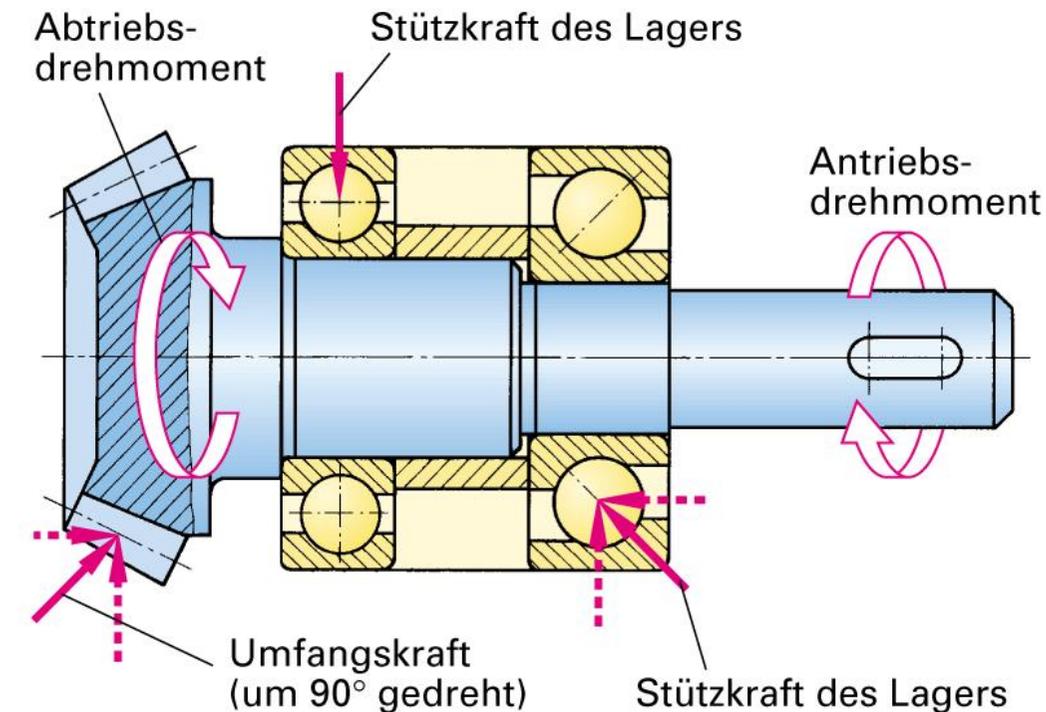
Feststehende Achsen, auf denen sich die Bauteile wie das im Bild dargestellte Laufrad drehen, werden ruhend oder schwellen belastet.

Umlaufende Achsen werden einer ungünstigeren, wechselnden Biegebeanspruchung ausgesetzt. Andererseits sind Ein- und Ausbau sowie die Wartung der Lager bedingt durch die meist bessere Zugänglichkeit mit geringerem Aufwand möglich.



Wellen

Bei Wellen handelt es sich um sich drehende Maschinenelemente, die immer ein Drehmoment übertragen. Mindestens zwei Lager werden zum Abstützen der Welle benötigt. Abbauteile wie Kupplungen oder Getriebeelemente dienen zum Übertragen des Drehmoments. Wellen werden schwelend auf Torsion und in vielen Fällen durch Querkräfte wechseln auf Biegung beansprucht. In einigen Fällen, z.B. bei schräg verzahnten Zahnrädern treten auch Axialkräfte auf. Die aus ihnen resultierenden Normalspannungen sind meist gering, allerdings müssen sie bei der Auslegung der Lager berücksichtigt werden.



Quelle:
Fachkunde Metall
Europa Verlag

Werkstoffe für Achsen und Wellen

Im Allgemeinen werden Wellen und Achsen aus Baustählen (S275JR, E295 oder E335) hergestellt. Bei höheren Ansprüchen werden auch niedrig legierte Vergütungsstähle verwendet (28Mo6, 34CR4 oder 25CrMo4, im Fahrzeugbau auch 16MnCr5). Dabei ist zu beachten, dass die Verwendung legierter Stähle bei wechselnder Biegebeanspruchung nur lohnt, wenn die Kerbwirkung durch entsprechende konstruktive Maßnahmen gering gehalten wird. Zudem sind, bedingt durch gleichen E-Modul, Achsen und Wellen aus hochfesten Stählen nicht steifer als solche aus Baustahl.

Gestaltungshinweise für die Auslegung von Achsen und Wellen

Die äußere Form der Achsen und Wellen wird durch die Funktion und die Anordnung der Anbauteile bestimmt. Ziel des Konstrukteurs muss es sein, kleine Abmessungen anzustreben um Biegemomente und damit auch Gewichte und Größen von Achsen, Wellen sowie deren Anbauteilen und Gehäusen gering zu halten. Darüber hinaus ist auf einfache und wirtschaftliche Fertigung zu achten. Die Vermeidung von Kerbstellen ist oft effektiver als die Wahl hochfester Stähle.

Detaillierte Gestaltungshinweise finden Sie im Fachbuch Roloff Matek in Kapitel 11.2.1.

Berechnungsgrundlagen

Bei der Berechnung von Achsen und Wellen sind immer die mit ihnen verbundenen Bauteile wie Lager, Zahnräder, Riemenscheiben oder Kupplungen mit zu berücksichtigen. Beim Rechenweg wird abhängig von den Kenntnissen, die über das Konstruktionsumfeld vorliegen nach zwei Vorgehensweisen unterschieden:

Variante 1:

Der Einbauraum und damit die groben Abmessungen der Achse oder Welle sind bereits durch übergeordnete konstruktive Notwendigkeiten vorgegeben. Die angreifenden Kräfte und Momente sowie die Abstandsmaße für die Anbauteile liegen in etwa fest, so dass mit Hilfe der Torsions- und Biegemomente die Achse bzw. die Welle mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden kann.

Variante 2:

Hinsichtlich des Einbauraums existieren keine Einschränkungen. Er wird an die noch unbekannt Abmessungen der Achsen und Wellen sowie deren Anbauteile angepasst. Die Abstände der Bauteile und die Wirklinien der angreifenden Kräfte sind noch unbekannt. Die Biegemomente können noch nicht berechnet werden. In diesem Fall werden mit Hilfe einer Entwurfsberechnung die Durchmesser der Wellenstufen, der Radnaben, der Lager u.s.w. sowie deren Abstandsmaße überschlägig in einem Vorentwurf ermittelt. Im Anschluss erfolgt eine Überprüfung vor allem der besonders belasteten Wellenquerschnitte und gegebenenfalls eine Korrektur der angenommenen Werte.

Zur Vereinfachung der Berechnung wird angenommen, dass äußere Kräfte punktförmig in der Mitte der jeweiligen Kontaktfläche angreifen. In Sonderfällen kann bei langen Naben mit einer Streckenlast gerechnet werden.

Achsen und Wellen bis ca. 200mm Durchmesser werden vorzugsweise aus kalt gezogenen oder warm gewalzten runden Profilstäben gefertigt. Größere Durchmesser können geschmiedet oder gegossen werden, um Material und Gewicht zu sparen. Zu diesem Zweck empfiehlt es sich auch, die Durchmesser der Achsen und Wellen über die Länge des Bauteils zu variieren und so anzupassen, dass sie auf die an der jeweiligen Stelle wirkende Belastung abgestimmt sind. Man spricht in diesem Zusammenhang von Anpassung.

Für die Berechnung der Wellenabmessungen sind primär die Höhe und die Art der Belastung ausschlaggebend. In einigen Fällen müssen jedoch auch die elastische Verformung, eine geforderte Steifigkeit und Schwingungen (kritische Drehzahl) berücksichtigt werden.

Berechnung des Biegemoments

Das in einem beliebigen Wellenquerschnitt x wirkende Biegemoment M_{bx} errechnet sich aus der Summe der äußeren Biegemomente, die auf diesen Querschnitt wirken. Jedes einzelne dieser Biegemomente ergibt sich dabei aus dem Produkt einer Querkraft und dem Abstand zwischen der Wirklinie dieser Querkraft und dem betrachteten Wellenquerschnitt.

Für die Auslegung des Wellendurchmessers ist der Wellenquerschnitt mit dem maximalen Biegemoment maßgebend.

Berechnung des Torsionsmoments

Anders als Achsen werden Wellen auch auf Torsion beansprucht. Das Torsionsmoment wird bei auf der Welle platzierten Seiltrommeln, Zahnrädern oder Riemenscheiben als Produkt aus dem Radius des Maschinenelements und dem Betrag der Umfangskraft ermittelt. Wird die Welle über eine Kupplung direkt von einem Motor angetrieben, errechnet sich das Drehmoment aus den Leistungsdaten des Motors nach folgender Gleichung:

$$M_{t\text{enn}} = \frac{9550 \cdot P}{n}$$

Der Faktor „9550“ dient zum Umrechnen der Einheiten. Bedingung ist, dass die physikalischen Größen in den vorgegebenen Einheiten eingesetzt werden:

$M_{t\text{enn}}$ = rechnerisches Torsionsmoment [Nm]

P = Motorleistung [kW]

n = Wellendrehzahl [1/min]

Berechnung des Vergleichsmoments

Wellen übertragen Drehmomente und werden somit auf Torsion belastet. Dazu kommt in vielen Fällen die Biegebelastung. Da Biege- und Torsionsmomente in unterschiedlichen Ebenen wirken, können sie nicht addiert werden. Man behilft sich, indem man ein Vergleichsmoment bestimmt, das in etwa dieselbe Wirkung auf ein Bauteil hat wie Biege- und Torsionsmoment zusammen. Berechnung des Vergleichsmoments:

$$M_{vnenn} = \sqrt{M_{b\max}^2 + 0,75 \left(\frac{\sigma_{bD}}{\varphi \cdot \tau_{tD}} \cdot M_t \right)^2} \quad \text{vereinfacht:} \quad M_{vnenn} = \sqrt{M_{b\max}^2 + 0,75(\alpha_0 \cdot M_t)^2}$$

Faktor $\varphi = 1,73$

Anstrengungsverhältnis $\alpha_0 = 0,7$ (vereinfachende Annahme für bei Achsen und Wellen gebräuchlichen Stahlwerkstoffen)

Dauerfestigkeitswerte σ_{bD} und τ_{tD} nach Roloff Matek Tabellenbuch TB 1-1

Der Anwendungsfaktor K_A

In der Praxis wirken sich die Betriebsbedingungen eines Geräts oder einer Maschine oft festigkeitsmindernd auf Achsen und Wellen aus. Dies trifft insbesondere beim Auftreten von stoßartiger Belastung zu. Um diesen Effekt zu berücksichtigen, wird das rechnerische Belastungsmoment mit einem Anwendungsfaktor K_A multipliziert. Je ungleichmäßiger der Lauf der Maschine und je größer die auftretenden Stöße, umso größer muss der Anwendungsfaktor gewählt werden. Anhaltswerte finden Sie im Tabellenbuch Roloff Matek TB 3-5.

$$M_{eq} = K_A \cdot M_{nenn}$$

Es ergeben sich: $M_{veq} = \sqrt{M_{b\max eq}^2 + 0,75 \left(\frac{\sigma_{bD}}{\varphi \cdot \tau_{tD}} \cdot M_{teq} \right)^2}$ vereinfacht: $M_{veq} = \sqrt{M_{b\max eq}^2 + 0,75(\alpha_0 \cdot M_{teq})^2}$

Bei der Bestimmung des Anwendungsfaktors muss sorgfältig vorgegangen werden, da ein Fehler große Auswirkungen auf das Gesamtergebnis hat.

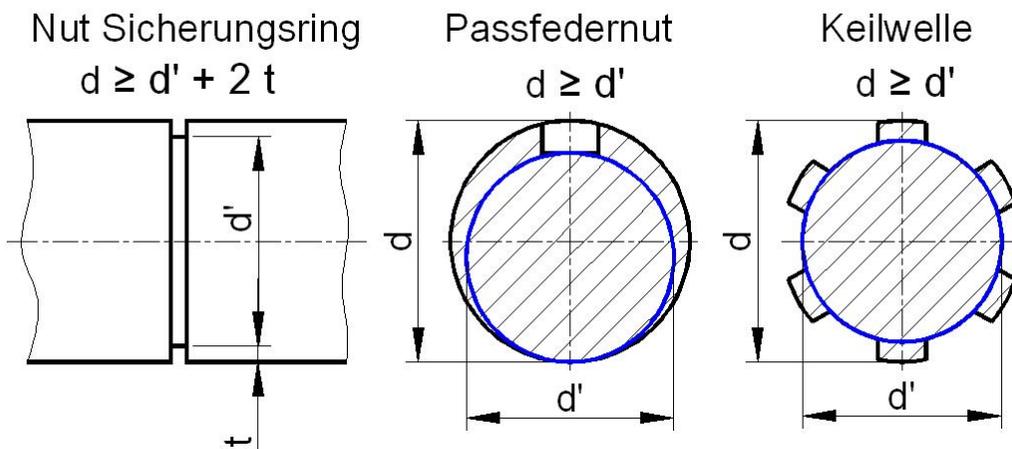
Spannungen und Richtdurchmesser d'

Die im Bauteil maximal vorhandene Spannung errechnet sich, wenn im am stärksten belasteten Querschnitt der Wert für das dort auftretende Moment durch den Wert für das Widerstandsmoment geteilt wird. Für die Ermittlung des Richtdurchmessers wird die auftretende Belastung durch die vom Werkstoff dauerhaft ertragbare Spannung σ_D bzw. τ_D geteilt. (Werte σ_D und τ_D siehe Roloff Matek TB 1-1). Für Vollwellen und Achsen gelten folgende Gleichungen:

Bei Biegebelastung (Achse): $\sigma_{bmax} = M_{bmax} / W_b$ mit $W_b = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$ $d' = 3,4 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{bmax eq}}{\sigma_{bD}}}$

Bei Torsionsbelastung (Welle ohne Querkräfte): $\tau_{tmax} = M_{tmax} / W_p$ mit $W_p = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$ $d' = 2,7 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{tmax eq}}{\tau_{tD}}}$

Bei Torsion und Biegung (Welle mit Querkräften): $\sigma_{vmax} = M_{vmax} / W_b$ mit $W_b = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$ $d' = 3,4 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{vmax eq}}{\sigma_{bD}}}$



Zu beachten ist, dass bei einem durch Kerben geschwächten Querschnitt nur der Durchmesser „d“ des Restquerschnitts für die Berechnung relevant ist.

Zulässige Spannungen und Dauerfestigkeit bei dynamisch belasteten Bauteilen

Für Entwurfsberechnungen wird in der Mechanik oft bei Bauteilen, für die die Kerbwirkung oder andere festigkeitsmindernde Faktoren noch nicht bekannt sind, mit der zulässigen Spannung σ_{zul} gerechnet. Die Werte σ_{zul} für sind niedrig angesetzt und verfügen über eine Sicherheitsreserve, da sie von einer idealen Form ausgehen und tatsächliche Gestalt des Bauteils nicht berücksichtigen.

In den vorhergehenden Kapiteln und im Fachbuch Roloff Matek wird hingegen überwiegend mit Dauerfestigkeitswerten gearbeitet, die abhängig vom Belastungsfall aus dem Tabellenbuch TB 1-1 entnommen werden können.

Die zulässigen Spannungen können mit Hilfe von Sicherheitsfaktoren und unter Berücksichtigung des Lastfalls aus den Dauerfestigkeitswerten berechnet werden. Die Werte sind sinnvoll zu runden.

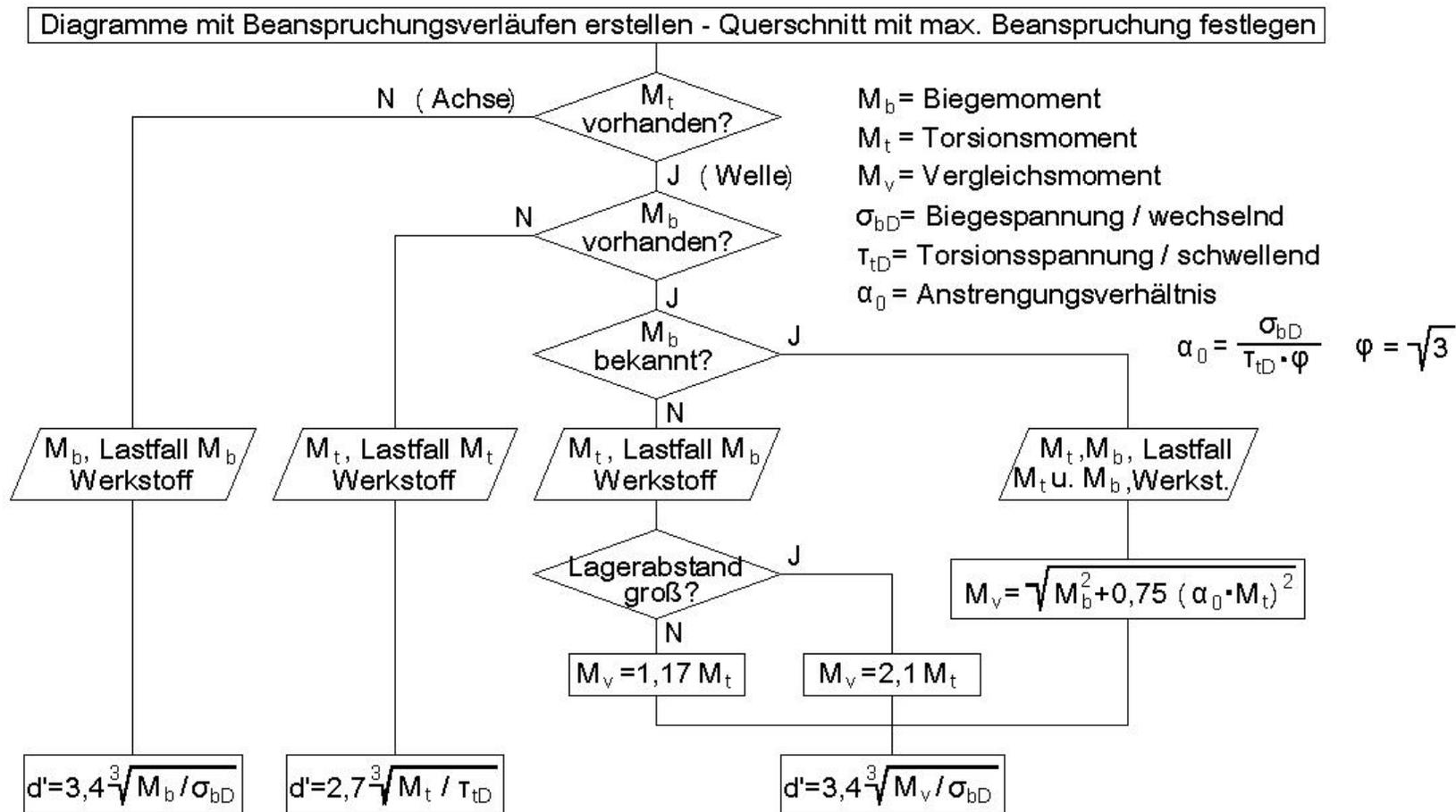
$$\sigma_{zul} = \sigma_D / S_{Dmin} \quad T_{zul} = T_D / S_{Dmin}$$

$S_{Dmin} \approx 3$ bis 4

σ_D, T_D = Dauerfestigkeitswerte aus Tabellenbuch TB 1-1

Überschlägige Wellenberechnung – der Richtdurchmesser d'

Auf Basis des Vergleichsmoments und der Dauerfestigkeitswerte des verwendeten Werkstoffs (siehe Roloff Matek TB 1-1) kann der Richtdurchmesser d' für Achsen und Wellen aus Vollmaterial nach folgendem Ablaufplan berechnet werden:



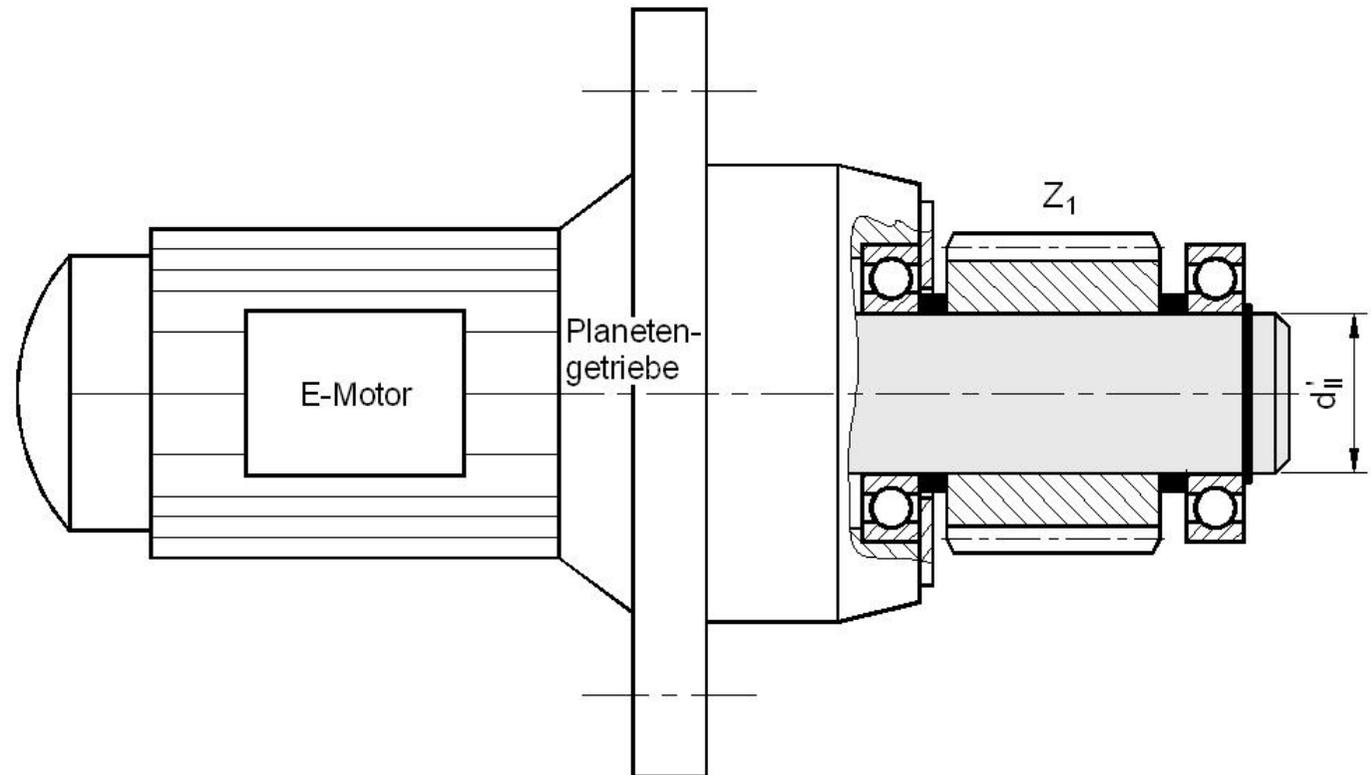
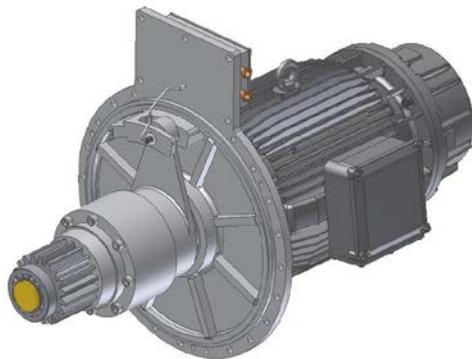
Den vollständigen Ablaufplan, der auch die Berechnung der Richtdurchmesser von hohlen Achsen und Wellen einschließt finden Sie im Fachbuch Roloff – Matek (Bild 11-21)

Aufgabe 1 - Berechnung des Richtdurchmessers einer Welle

Aufgabenstellung:

Ein Elektromotor mit einer Ausgangsleistung von 47kW und einer Drehzahl von 1740 min^{-1} treibt über ein Planetengetriebe und ein zweistufiges Stirnradgetriebe eine Schiffswinde an. Das Übersetzungsverhältnis des Planetengetriebes beträgt $i_1 = 6,818$, sein Wirkungsgrad $\eta_1 = 0,97$. Über ein geradzahntes Ritzel (z_1) soll das Drehmoment auf die nächste Welle übertragen werden. Die Maße der Lager und des Ritzels sowie die Art der Welle – Nabe Verbindung sind noch unbekannt. Für den Betriebsfaktor wird ein Wert von $K_A = 1,5$ angenommen (gleichmäßig umlaufende Antriebsmaschine – Hubwerk als getriebene Maschine). Die Welle wird aus E335 gefertigt.

- Berechnen Sie die Drehmomente der Motorwelle M_{tII} und der Ausgangswelle des Planetengetriebes M_{tIII} . Welchen Beanspruchungsarten ist die Ausgangswelle ausgesetzt?
- Bestimmen Sie den Richtdurchmesser d_{III}' der Welle.



Aufgabe 2 – Überschlägige Ermittlung der Richtdurchmesser eines 2-stufigen Getriebes (RM – Aufg. 11.11)

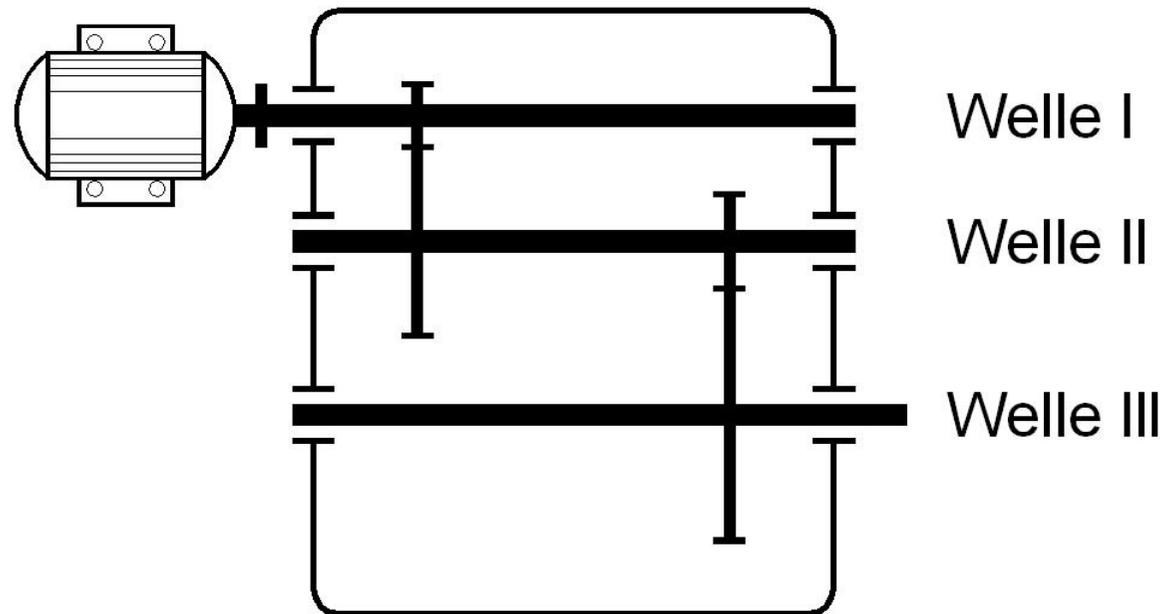
Aufgabenstellung:

Für ein Stirnradgetriebe, dessen Abmessungen noch nicht festgelegt wurden, ist eine Gesamtübersetzung von $i_{ges} = 8$ vorgesehen. Die Übersetzung der ersten Getriebestufe soll $i_1 = 3,5$ betragen. Geplant ist, die Wellen aus Vergütungsstahl C45E zu fertigen.

In welchem Verhältnis stehen die Drehzahlen und die Drehmomente der einzelnen Wellen zueinander?

Welche Belastungsarten wirken in welchen Bereichen der Welle II?

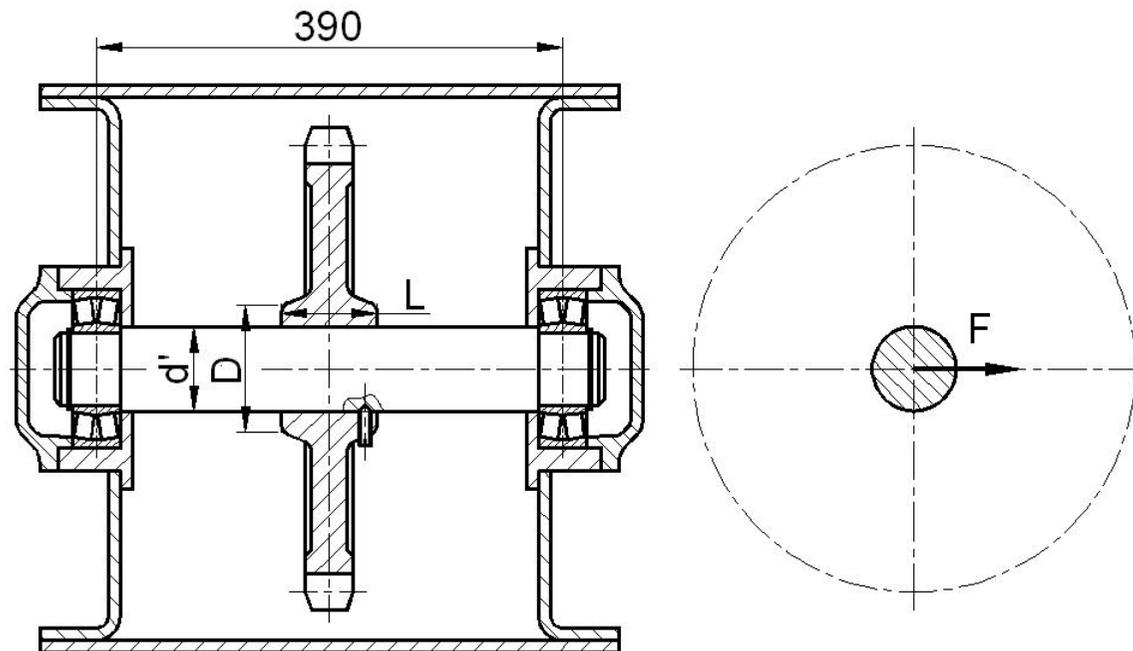
Die Leistung an der Eingangswelle des Getriebes beträgt $P_1 = 60\text{kW}$ bei einer Drehzahl von 1200 min^{-1} . Aufgrund der zu erwartenden Betriebsbedingungen ist mit einem Anwendungsfaktor von $K_A = 1,3$ zu rechnen. Der Wirkungsgrad ist für die Überschlagsrechnung zu vernachlässigen. Berechnen Sie für einen ersten Entwurf die Richtdurchmesser der drei Wellen.



Aufgabe 3 – Ermittlung des Richtdurchmesser der Achse eines Ketten – Trogförderers (RM Aufgabe 11.12)

Aufgabenstellung:

- Handelt es sich um eine feststehende oder eine umlaufende Achse? Wie verteilt sich die Last auf beide Lager?
- Der Durchmesser der Achse aus blankgezogenem Rundstahl E295GC+C (TB 1-1) nach DIN 10277 (TB 1-6) für das Umlenk- Kettenrad in der Spannstation eines Ketten- Trogförderers ist überschlägig zu berechnen. Durch Kettenvorspannung und Reibungswiderstände, insbesondere am oberen Trum ist die Dimensionierung mit einer auf die Achse wirkenden Querkraft von $F = 10\text{kN}$ durchzuführen. Die in der nebenstehenden Zeichnung angegebenen Maße wurden bereits festgelegt.
- Für das Kettenrad aus GS45 sind die Nabenabmessungen (Durchmesser und Länge) festzulegen.

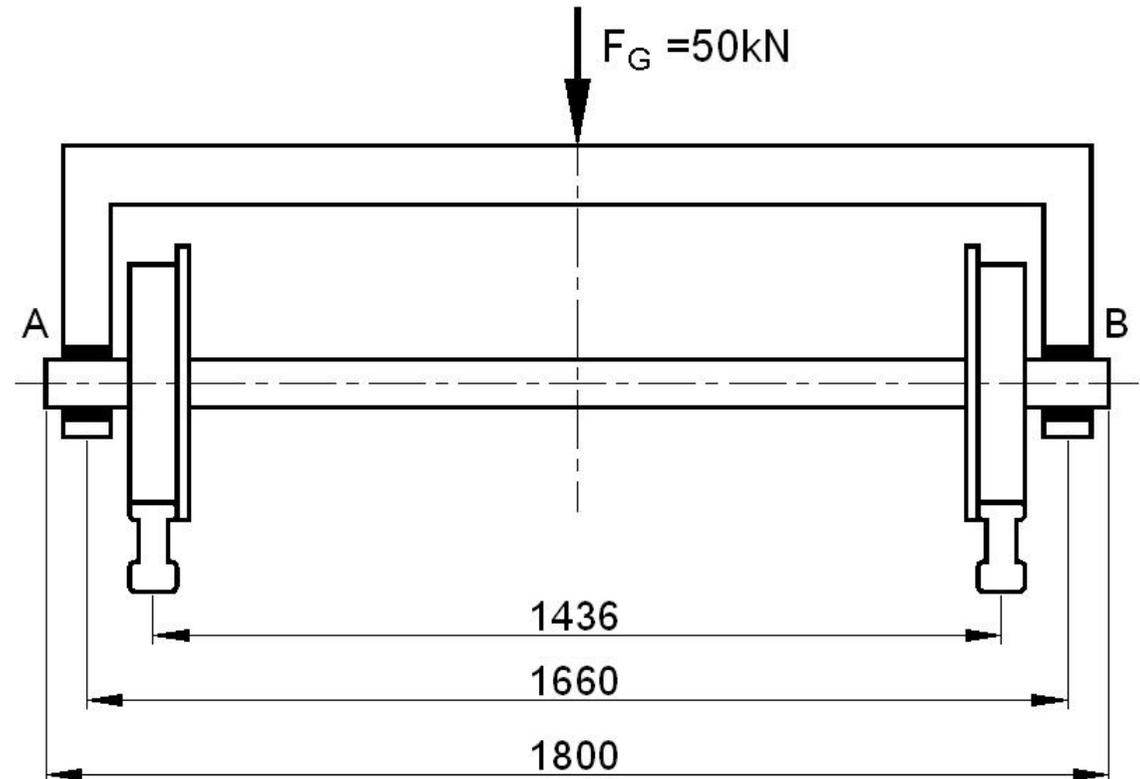


Aufgabe 4 - Ermittlung des Richtdurchmessers der Achse eines Waggons (ähnlich RM Aufgabe 11.9)

Aufgabenstellung:

Die umlaufende Achse aus E295 eines Güterwaggons wird durch das Eigengewicht und die Zuladung mit einer maximalen Gewichtskraft von 50kN belastet. Für den Anwendungsfaktor wird bei gleichmäßig umlaufender Bewegung und leichten bis mittleren Stößen ein Wert von $K_A = 1,2$ gewählt.

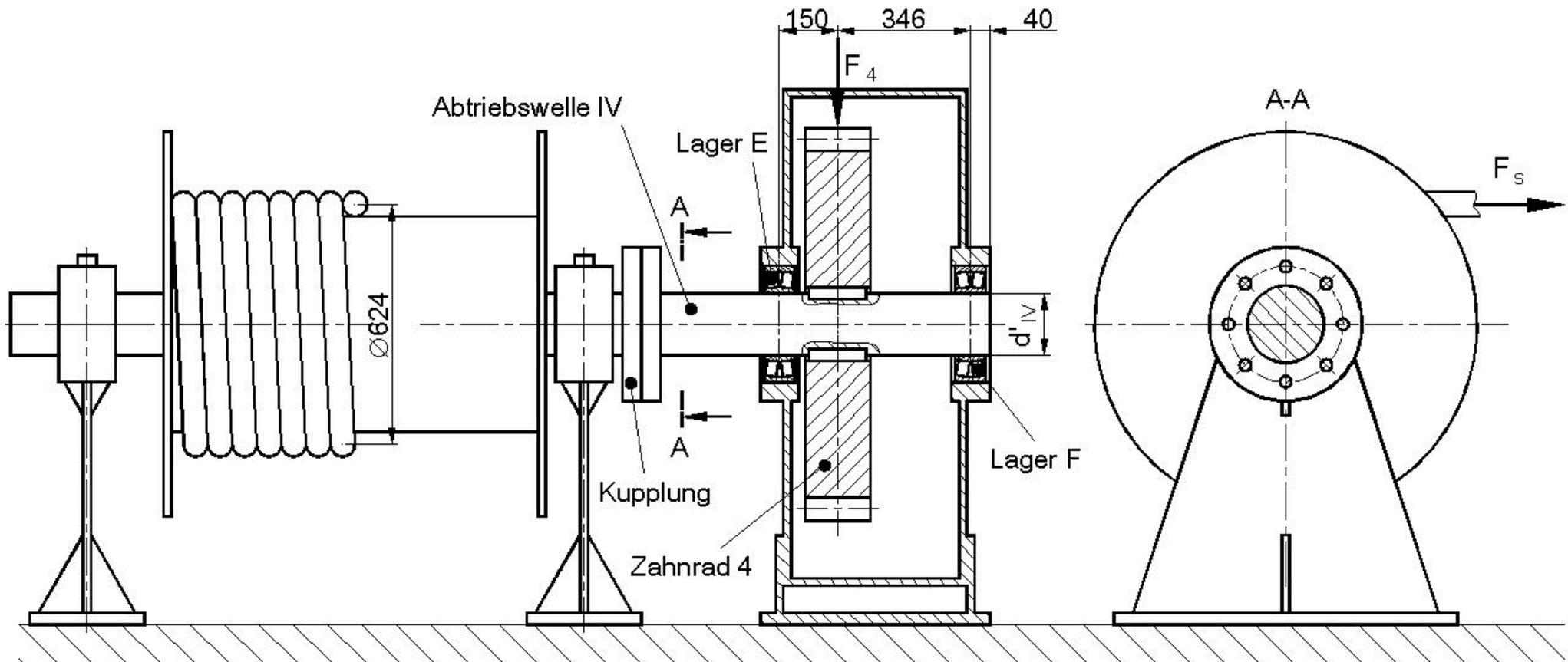
- Berechnen Sie die auf die Achse wirkenden Querkräfte
- Ermitteln Sie das maximale Biegemoment und zeichnen Sie das Querkraft- und das Biegemomentenschaubild maßstäblich über die Länge der Achse (Maßstäbe: 1kN = 10mm und 1kNm = 10mm).
- Welcher Lastfall liegt vor, wie groß sind die zulässigen Spannungen nach TB 1-1?
- Ermitteln Sie den Richtdurchmesser der Achse



Aufgabe 5 - Berechnung des Richtdurchmessers d_{IV}' der Abtriebswelle

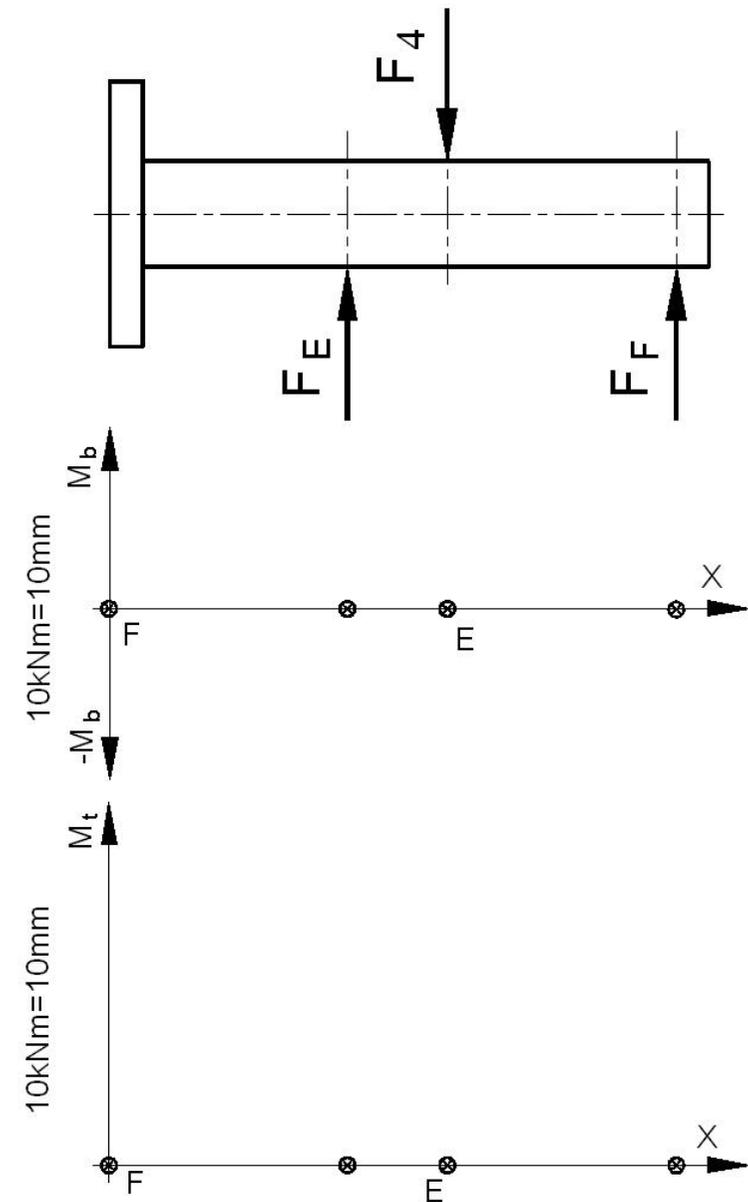
Aufgabenstellung:

Ein E-Motor treibt über ein mehrstufiges Getriebe die Seiltrommel einer Verholwinde an. Die Zugkraft im Seil beträgt $F_S = 150\text{kN}$. Auf die aus 41CrMo4 gefertigte Abtriebswelle wird über ein Geradstirnrad (Zahnrad 4) eine Querkraft von $F_4 = 101124\text{ N}$ ausgeübt. Die Verbindung zwischen dem Zahnrad und der Welle erfolgt über zwei Passfedern. Der Betriebsfaktor wird mit $K_A = 1,5$ angenommen. Zeichnen Sie den Biegemomenten- und den Querkraftverlauf und berechnen Sie d_{IV}' .



Aufgabe 5 - Berechnung des Richtdurchmessers d_{IV}' der Abtriebswelle

- Berechnen Sie das Drehmoment M_{tIV} der Abtriebswelle.
- Ermitteln Sie die Beträge der Lagerkräfte F_E und F_F .
- Welchen Beanspruchungsarten ist die Ausgangswelle ausgesetzt? Bestimmen Sie das maximale Biegemoment und das Vergleichsmoment der Welle. Zeichnen Sie das Biege- und das Torsionsmomentenschaubild der Welle und benennen Sie den am stärksten belasteten Querschnitt
- Bestimmen Sie den Richtdurchmesser d_{IV}' der Abtriebswelle.



Aufgabe 6 - Berechnung des Richtdurchmessers d' für die Achse eines Laufrades (RM Aufgabe 11.14)

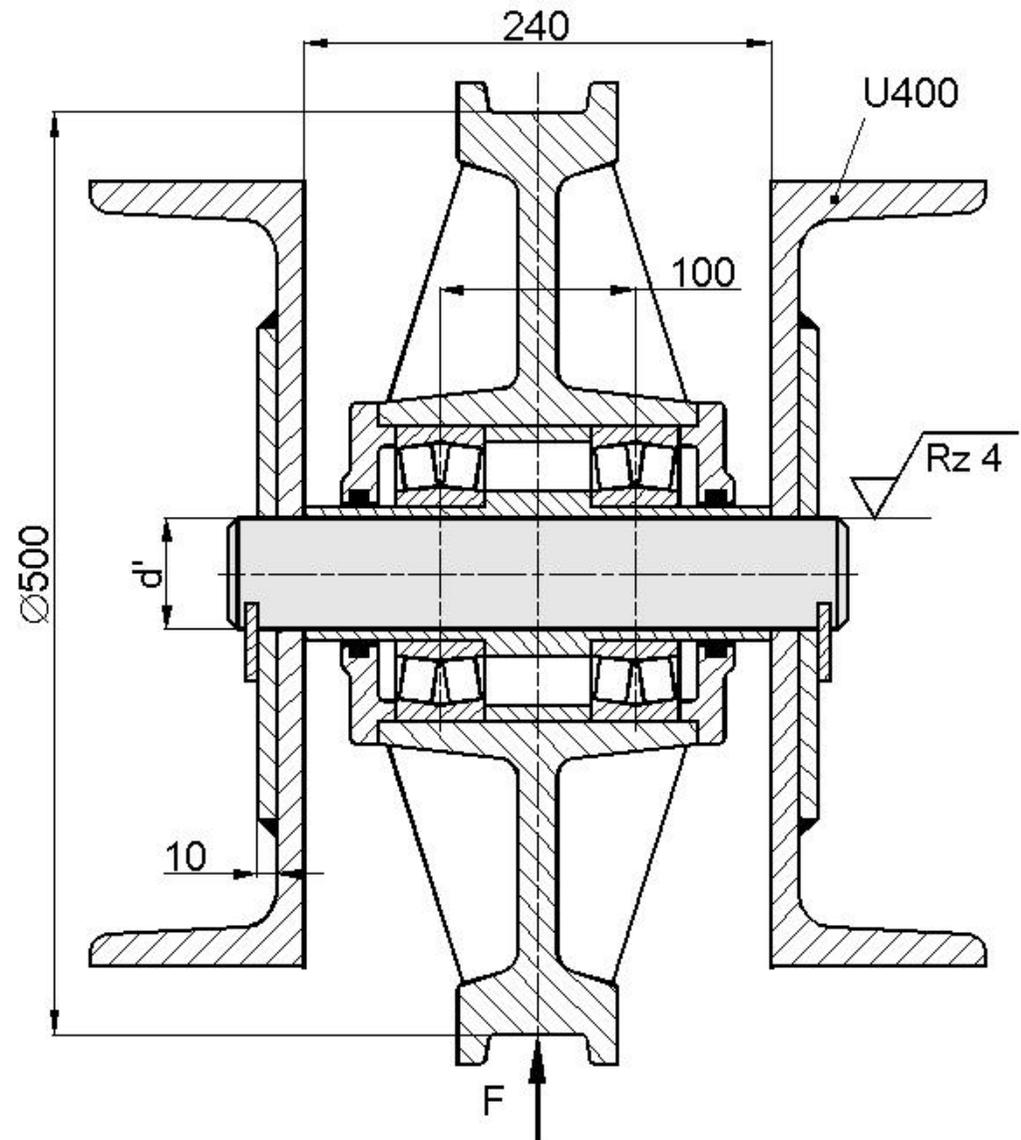
Für einen Laufkran von 75kN Tragkraft und 80 m/min Fahrgeschwindigkeit ergibt sich bei ungünstiger Stellung der Laufkatze und unter Berücksichtigung der Betriebsbedingungen eine maximale Radkraft von $F = 70\text{kN}$.

Die wichtigsten konstruktiven Abmessungen wurden bereits festgelegt (Maße siehe Zeichnung).

Skizzieren Sie die Achse mit allen wirkenden Kräften. Berechnen Sie die Kräfte und zeichnen Sie das Diagramm mit dem Biegemomentenverlauf. In welchem Bereich der Achse wirkt das maximale Biegemoment M_{bmax} ?

Welcher Durchmesser d' der Laufradachse, für die Rundstahl aus E295 vorgesehen wird, ist überschlägig zu wählen?

Die verstärkende Wirkung der auf der Achse sitzenden Buchse bleibt unberücksichtigt.

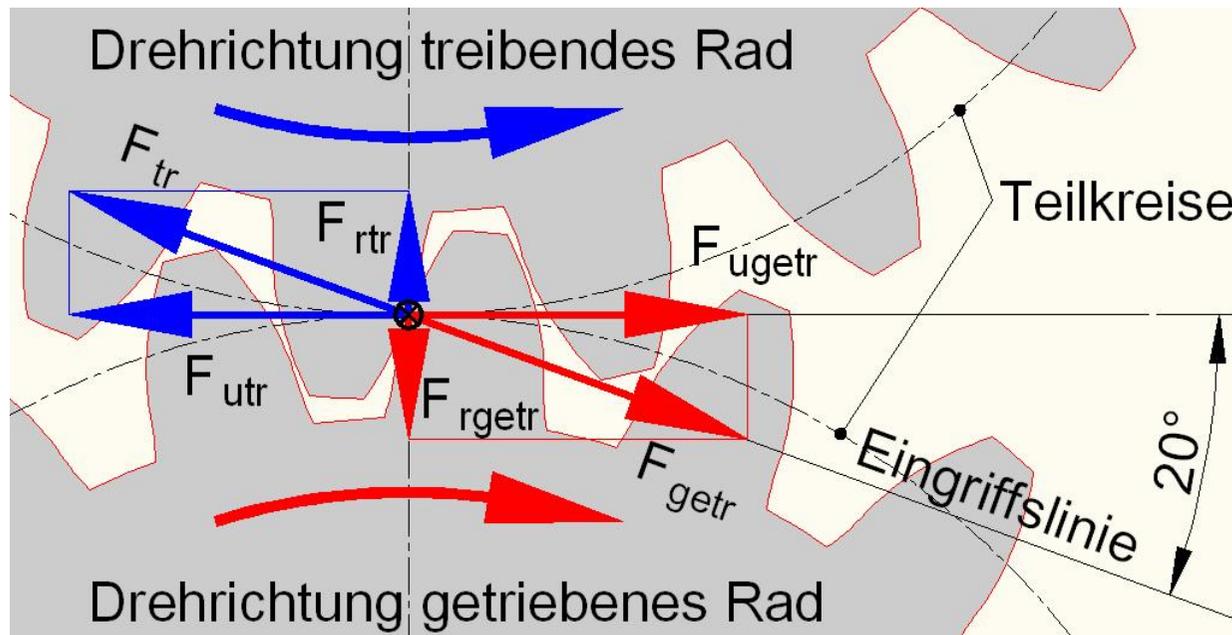


Berechnung von Querkräften bei Wellen mit Zahnrädern

Bedingt durch die Krümmung der Zahnflanke eines Geradstirnrades wird die Querkraft nicht horizontal oder vertikal auf das Zahnrad und die dazugehörige Getriebewelle übertragen. Bei einer Standardverzahnung mit sogenannten Nullrädern wirkt die Zahnkraft in einen Winkel von 20° zur Umfangskraft.

Für die folgenden Rechenschritte wird die Zahnkraft in zwei senkrecht zueinander stehende Komponenten zerlegt, die Radial- und die Umfangskraft. Die Wirklinie der Radialkraft F_r verläuft vom Angriffspunkt der Zahnkraft auf der Zahnflanke zur Wellenmitte. Die Wirkrichtung zeigt immer zur Wellenmitte.

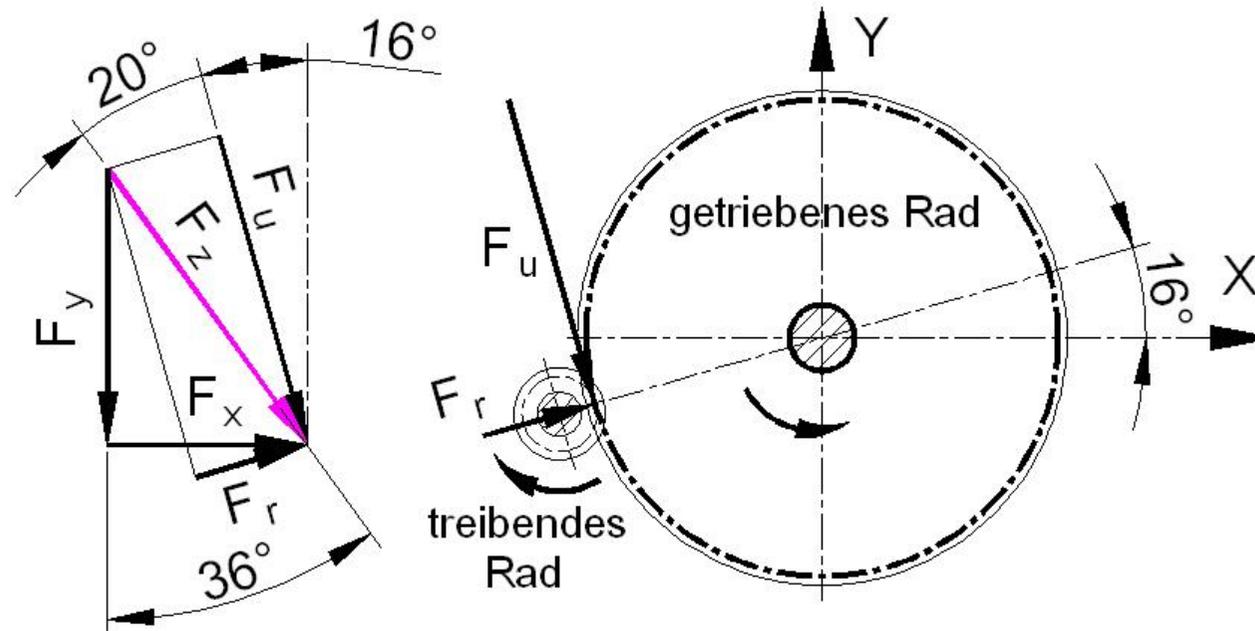
Die Wirklinie der Umfangskraft F_u verläuft ebenfalls durch den Angriffspunkt der Zahnkraft, sie steht rechtwinklig zur Wirklinie der Radialkraft. Die Wirkrichtung der Umfangskraft hängt von der Drehrichtung des Zahnrades ab. Bei einem treibenden Rad wirkt sie entgegen, bei einem getriebenen Rad in Drehrichtung.



Wirkrichtung von Querkräften bei Wellen mit Zahnrädern

F_u , F_r oder F_z können mit Hilfe der Winkelfunktionen berechnet werden, wenn eine der drei Kräfte und der Eingriffswinkel (bei Nullrädern 20°) bekannt sind. Bei Verzahnungen mit Profilverschiebung variiert der Eingriffswinkel. Der Wert muss für die Berechnung der Querkräfte vorher ermittelt werden oder bekannt sein.

Wenn die Mittelpunkte beider Zahnräder auf der X- oder der Y-Achse liegen (siehe obere Skizze), sind F_r und F_u gleich F_x bzw. F_y . Trifft dieser Umstand nicht zu, müssen F_x und F_y mit Hilfe von Winkelfunktionen zusätzlich zu F_r und F_u ermittelt werden.

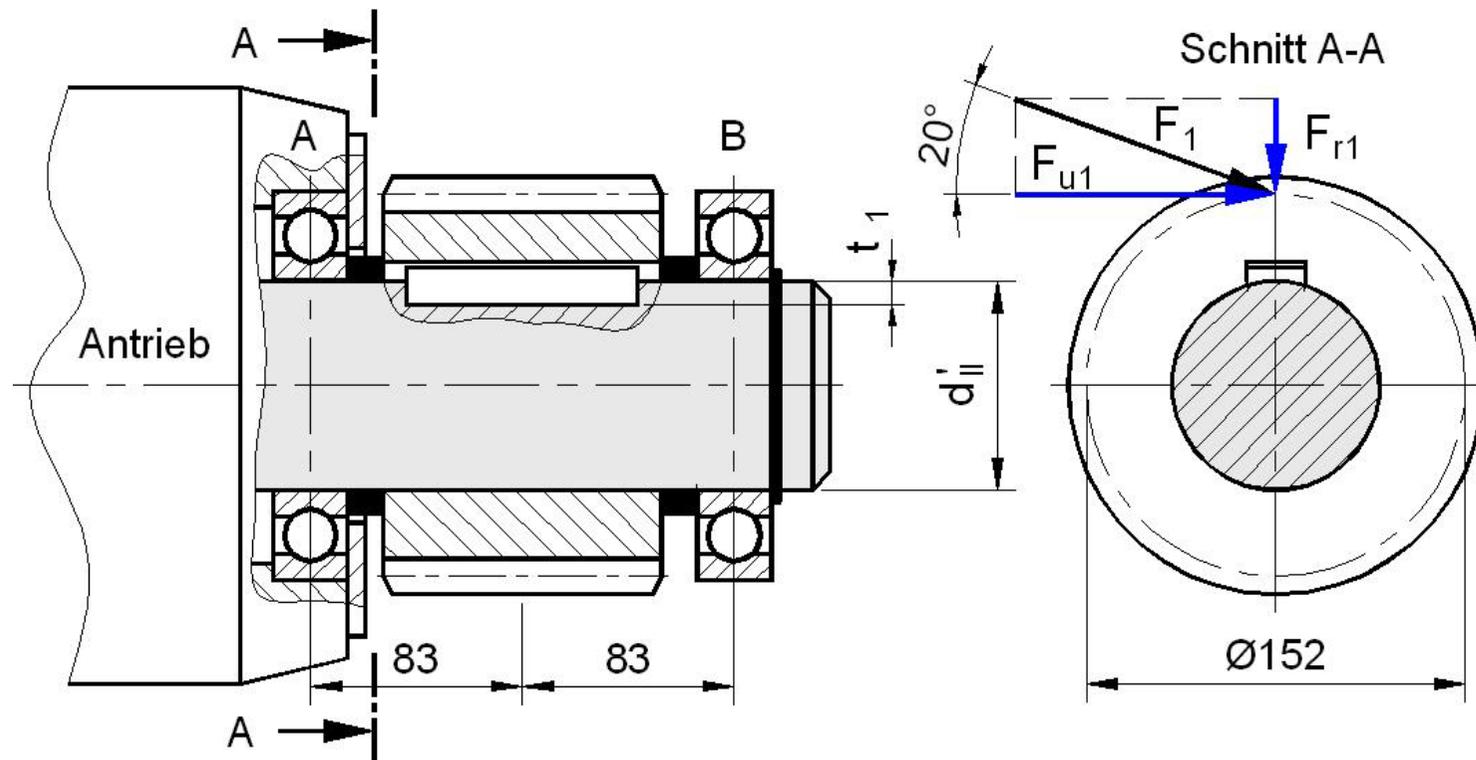


Die Zahnkräfte beziehen sich auf das getriebene Rad

Aufgabe 7 - Ermittlung des Richtdurchmessers einer Getriebewelle.

Aufgabenstellung:

Der Antrieb der Verholwinde erzeugt an der Ausgangswelle des Planetengetriebes (Welle II) ein Drehmoment von $1706,3 \text{ Nm}$ bei $255,2 \text{ min}^{-1}$. Die Positionen der Wälzlager wurden festgelegt. Das Ritzel wurde berechnet. Da es sich um ein Nullrad handelt, beträgt der Eingriffswinkel der Zahnkraft $\alpha = 20^\circ$. Als Betriebsfaktor wird ein Wert von $K_A = 1,5$ gewählt (gleichmäßig umlaufende Antriebsmaschine – Hubwerk als getriebene Maschine). Die Welle wird aus E335 gefertigt.



- Berechnen Sie die Umfangskraft F_{u1} und die Radialkraft F_{r1} . Ermitteln Sie im Anschluss die Zahnkraft F_1 .
- Berechnen Sie die Lagerkräfte F_A und F_B .
- Bestimmen Sie das maximale Biegemoment der Welle. Zeichnen Sie das Biege- und das Torsionsmomentenschaubild.
- Berechnen Sie das Vergleichsmoment und prüfen Sie, ob der in Aufgabe 1 überschlägig ermittelte Richtdurchmesser $d_{II}' = 75 \text{ mm}$ ausreicht. Berücksichtigen Sie dabei die Verringerung des Wellenquerschnitts durch die Passfedernut.

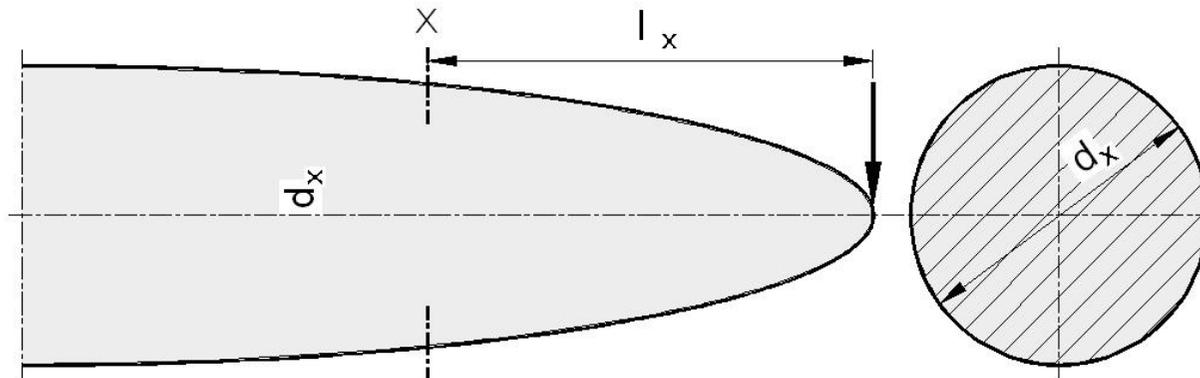
Anformung von Achsen und Wellen

Die Belastbarkeit eines Biegeträgers mit konstantem Querschnitt wird im Normalfall nur an der am stärksten belasteten Stelle ausgenutzt. In den übrigen Bereichen besitzt er eine ungenutzte Reserve. Um Material und Gewicht einzusparen kann es vor allem bei großen Achsen und Wellen sinnvoll sein, das Bauteil so zu gestalten, dass die Materialspannungen in allen Querschnitten etwa gleich groß sind.

Für einen beliebigen Querschnitt x im Abstand l_x von der Wirklinie der Querkraft F gilt bei einem Kreisquerschnitt:

$$d_x = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot F \cdot x}{\pi \cdot \sigma_{bzul}}}$$

Werden die Werte für die Wellendurchmesser verschiedener Querschnitte berechnet und über die Länge der Welle aufgetragen, ergibt sich eine kubische Parabel als Körper gleicher Biegebeanspruchung mit Kreisquerschnitt.

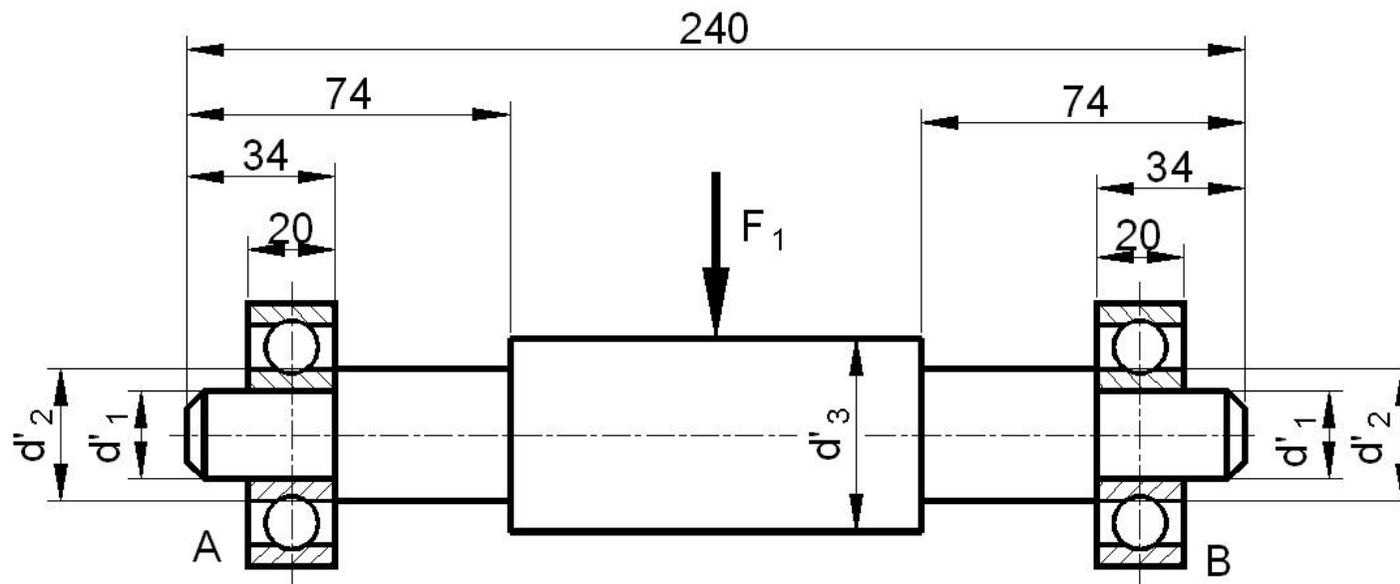


Mit der oben dargestellten Gleichung lassen sich Achsen anformen, die ausschließlich auf Biegung beansprucht werden. Bei Wellen kommt es in einigen Abschnitten zu einer Überlagerung von Biege- und Torsionsbeanspruchung. Dann ist zu beachten, dass die Belastung der Welle durch die Torsion sprunghaft und nicht wie die Biegebeanspruchung kontinuierlich ansteigt oder abfällt.

Aufgabe 8 - Anformung einer umlaufenden Achse

Aufgabenstellung:

Eine umlaufende, symmetrische Achse wird mittig mit der Querkraft $F_1 = 12\text{kN}$ belastet. Die Längenmaße der einzelnen Wellenabschnitte sind bedingt durch die Baumaße der Anbauteile vorgegeben. Die Achse wird aus Baustahl E295 gefertigt. Der Anwendungsfaktor wird mit $K_A = 1,3$ angenommen.



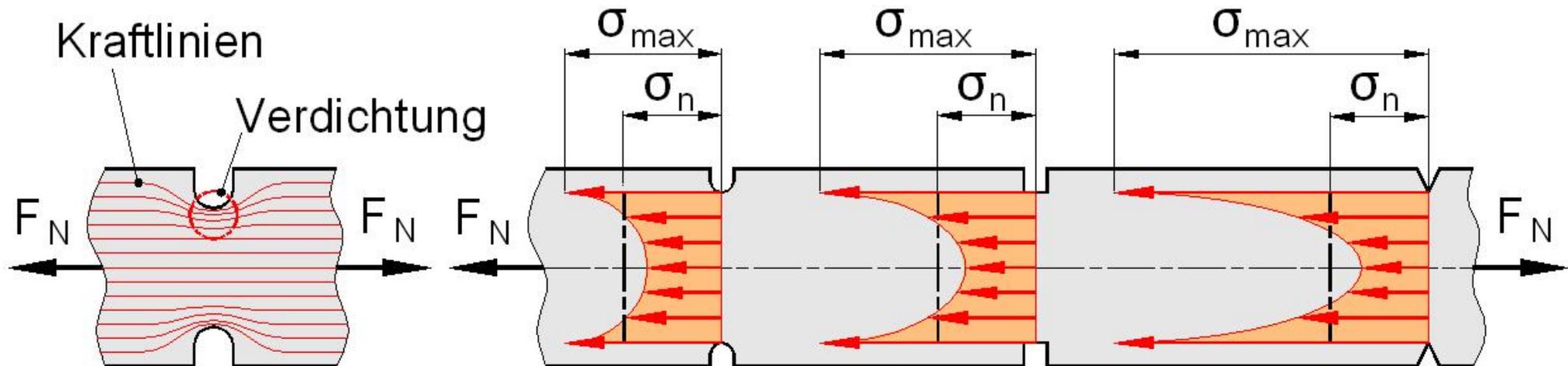
- Bestimmen Sie die Auflagerkräfte und die zulässige Spannung des Werkstoffs.
- Berechnen Sie die erforderlichen Richtdurchmesser d'_1 , d'_2 und d'_3 der einzelnen Wellenabschnitte.

Gestalt- und Dauerfestigkeit

Die Dauerfestigkeitswerte der Werkstoffe aus Metall (z.B. σ_{bW} und τ_{tW} bei Wechselbelastung, siehe RM TB 1-1) werden an polierten Probestäben mit 15-20mm Durchmesser gemessen. Diese weichen in Größe, Oberflächenrauigkeit und Form von den tatsächlichen Bauteilen ab. Alle drei Parameter reduzieren die Festigkeit des Bauteils, die dann als Gestaltdauerfestigkeit σ_G bzw. τ_G bezeichnet wird. Die Gestaltdauerfestigkeit ist maßgebend bei der Berechnung von Bauteilen mit dynamischer Beanspruchung. Es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

Die Größe:	Die zulässige Dauerfestigkeitsspannung nimmt mit wachsendem Durchmesser ab.
Die Oberflächenrauheit:	Eine raue Oberfläche reduziert die Festigkeitswerte eines Bauteils
Die Form:	Kerben jeder Form verringern die Festigkeit des Bauteils. Jede schroffe Querschnittsänderung gilt dabei als Kerbe.

Kerben erzeugen im Querschnitt Spannungsspitzen, die ein Vielfaches der Nennspannung erreichen können. Je spitzer die Kerbe, umso größer die Kerbwirkung und umso stärker wird die Festigkeit des Bauteils herabgesetzt. Harte und spröde Werkstoffe sind kerbempfindlicher als weiche und zähe.



Der Konstruktionsfaktor

Um die Dauerfestigkeitswerte auf reale Bauteile übertragen zu können, werden Faktoren verwendet:

$$\text{Gestaltdauerfestigkeit} = \frac{\text{Dauerfestigkeit} \cdot \text{Oberflächenbeiwert} \cdot \text{Größenbeiwert}}{\text{Kerbwirkungszahl}}$$

Der **technologische Größeneinflussfaktor** K_t berücksichtigt die Auswirkungen von Wärmebehandlungen bei der Herstellung. Die unterschiedlichen Abkühlbedingungen am Rand und im Kern führen zu Unterschieden im Gefüge und daraus resultierend bei der Festigkeit (TB 3-11a und b).

Zu beachten ist, dass bei Baustahl, Stahlguss und Grauguss mit Lamellengraphit für die Berechnung von $R_{p0,2}$ bzw R_e ein anderer K_t Wert verwendet wird als für die Berechnung von R_m , σ_D und τ_D .

Der **geometrische Größeneinflussfaktor** K_g resultiert aus dem unterschiedlichen Spannungsverlauf bei Biegung und Torsion. Bei Biegung und Torsion ändert sich das Gefälle zwischen der zug- und der druckbeanspruchten Bauteilseite mit zunehmender Bauteildicke bei gleicher Maximalspannung in den Randzonen. Dieser Effekt ist bei Zug- und Druckbelastung kaum vorhanden und bei Abscherspannungen sehr klein (TB 3-11c).

Der **formzahlabhängige Größeneinflussfaktor** K_α ist werkstoffunabhängig und berücksichtigt die Abhängigkeit der Kerbwirkung vom Bauteildurchmesser. K_α ist nur zu verwenden, wenn experimentell ermittelte Kerbwirkungszahlen verwendet werden, deren Probendurchmesser vom Bauteildurchmesser abweicht (TB 3-11d)

Der **Oberflächeneinflussfaktor** $K_{O\sigma}$ bzw $K_{O\tau}$ berücksichtigt die Oberflächenrauheit, da Kratzer und Riefen in der Oberfläche wie kleine Kerben wirken (TB 3-10).

Alle festigkeitsmindernden Parameter werden zum **Konstruktionsfaktor** K_D zusammengefasst:

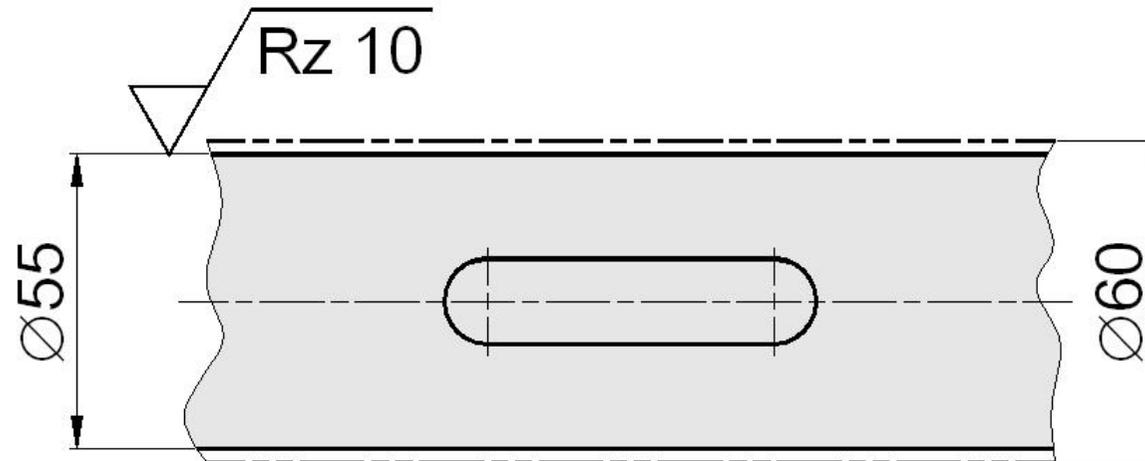
$$K_D = \left(\frac{\beta_k}{K_g} + \frac{1}{K_0} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_v} \quad \text{dann gelten} \quad \boxed{\sigma_{bGW} = \frac{\sigma_{bW}}{K_{Db}}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\tau_{tGW} = \frac{\tau_{tW}}{K_{Dt}}} \quad (\text{Gl. 3.17})$$

Beiwerte und Kerbwirkungszahlen TB 3-8 bis TB 3-12. Ablaufschema zur Ermittlung des Konstruktionsfaktors K_D Bild 3-27.

Aufgabe 9 – Die Gestaltwechselfestigkeit einer Welle mit Passfedernut (RM Aufgabe 3.8)

Aufgabenstellung:

Für eine mit einer Passfedernut Form N1 versehene Getriebewelle aus Vergütungsstahl 50CrMo4 ist die Gestaltausschlagfestigkeit bei Biegewechselbelastung zu ermitteln. Die Welle mit dem Rohteildurchmesser $d=60$ soll mit $Rz \approx 10\mu\text{m}$ auf $d=55\text{mm}$ abgedreht werden.



Statischer Festigkeitsnachweis

Im ersten Schritt wird für die Welle oder die Achse der Richtdurchmesser bestimmt. Für kerbempfindliche Querschnitte im Bereich von Passfedern, Wellenabsätzen, Freistichen oder umlaufenden Nuten sollte im Anschluss ein Festigkeitsnachweis geführt werden. Dabei sollte neben der dynamischen auch die statische Belastbarkeit des Bauteils überprüft werden.

Der statische Festigkeitsnachweis

Beim Betrieb von Maschinen oder Geräten können Belastungsspitzen auftreten, die kurzzeitig deutlich oberhalb der Dauerbelastung liegen. Sie können zu bleibenden Verformungen, Anrissen oder sogar zum Gewaltbruch führen. Der statische Festigkeitsnachweis soll belegen, dass das Bauteil ausreichend dimensioniert ist, um bei diesen Belastungen nicht zu versagen.

Es muss bekannt sein, um welchen Faktor die Belastungsspitzen ($M_{b\max}$ bzw. $M_{t\max}$) über der Dauerbelastung liegen. Nur wenn diese Angaben fehlen, kann stellvertretend mit dem Betriebsfaktor K_A gerechnet werden. Dann gelten $M_{beq} = M_{b\max}$ bzw. $M_{teq} = M_{t\max}$.

Im nächsten Schritt sind die bei den maximalen Belastungen $M_{b\max}$ und $M_{t\max}$ auftretenden Spannungen $\sigma_{b\max} = M_{b\max} / W_b$ und $\tau_{t\max} = M_{t\max} / W_p$ zu ermitteln. Die Gestalt des Bauteils bleibt beim statischen Nachweis unberücksichtigt

Als Vergleichswert dienen die Fließgrenzen σ_{bF} bzw. τ_{tF} des Werkstoffs. Sie errechnen sich bei Bauteilen aus Stahl nach folgenden Gleichungen:

$$\sigma_{bF} = 1,2 \cdot R_e = 1,2 \cdot R_{eN} \cdot K_t$$

und

$$\tau_{tF} = 1,2 \cdot \frac{R_e}{\sqrt{3}} = 1,2 \cdot \frac{R_{eN}}{\sqrt{3}} \cdot K_t$$

Der Sicherheitsfaktor bei statischer Belastung ergibt sich aus dem Verhältnis von maximaler Spannung zu Fließgrenze:

$$S_F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{b\max}}{\sigma_{bF}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{t\max}}{\tau_{tF}}\right)^2}}$$

Dynamischer Festigkeitsnachweis

Mit ihm soll geprüft werden, ob das Bauteil einer Dauerbelastung und der damit verbundenen Materialermüdung standhält. Beim dynamischen Nachweis ist bei der Festlegung der Belastung der Betriebsfaktor K_A mit zu berücksichtigen.

Bei rein schwellend auftretender Torsion gilt: $M_{taeq} = K_A \cdot M_{tenn} / 2$

Bei wechselnder Torsion oder Biegung: $M_{taeq} = K_A \cdot M_{tenn}$ bzw. $M_{baeq} = K_A \cdot M_{benn}$

Basierend auf diesen Momenten wird die Ausschlagspannung ermittelt: $\sigma_{ba} = M_{baeq} / W_{axial}$ und $\tau_{ta} = M_{taeq} / W_p$

Beim dynamischen Nachweis wird das Bauteil in seiner tatsächlichen Größe mit allen Kerben und Formabweichungen vom idealen Probestab untersucht. Der Konstruktionsfaktor K_D ist dabei der Wert, der die Größe aller Unregelmäßigkeiten und Abweichungen angibt. Er setzt sich aus mehreren Einzelfaktoren zusammen:

Die Kerbwirkungszahl β_k

Der geometrischer Größeneinflussfaktor K_g (RM TB 3-11c)

Der Oberflächeneinflussfaktor K_0

(RM TB 3-10a)

Oberflächenverfestigungsfaktor K_v

(RM-TB 3-12)

Der Konstruktionsfaktor:

$$K_D = \left(\frac{\beta_k}{K_g} + \frac{1}{K_0} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_v}$$

Aus Konstruktionsfaktor und Dauerfestigkeit errechnet sich die Gestaltdauerfestigkeit:

$$\sigma_{bGW} = \frac{\sigma_{bW}}{K_{Db}}$$

bzw.

$$\tau_{tGW} = \frac{\tau_{tW}}{K_{Dt}}$$

Der Sicherheitsfaktor ist ein Maß für das Verhältnis von Ausschlagspannung zur Gestaltdauerfestigkeit:

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bGW}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{ta}}{\tau_{tGW}} \right)^2}}$$

Ablaufplan zur Durchführung der Festigkeitsnachweise und weitere Informationen FB RM Bild 11-23 sowie Kap. 3.7 u. 11.3.

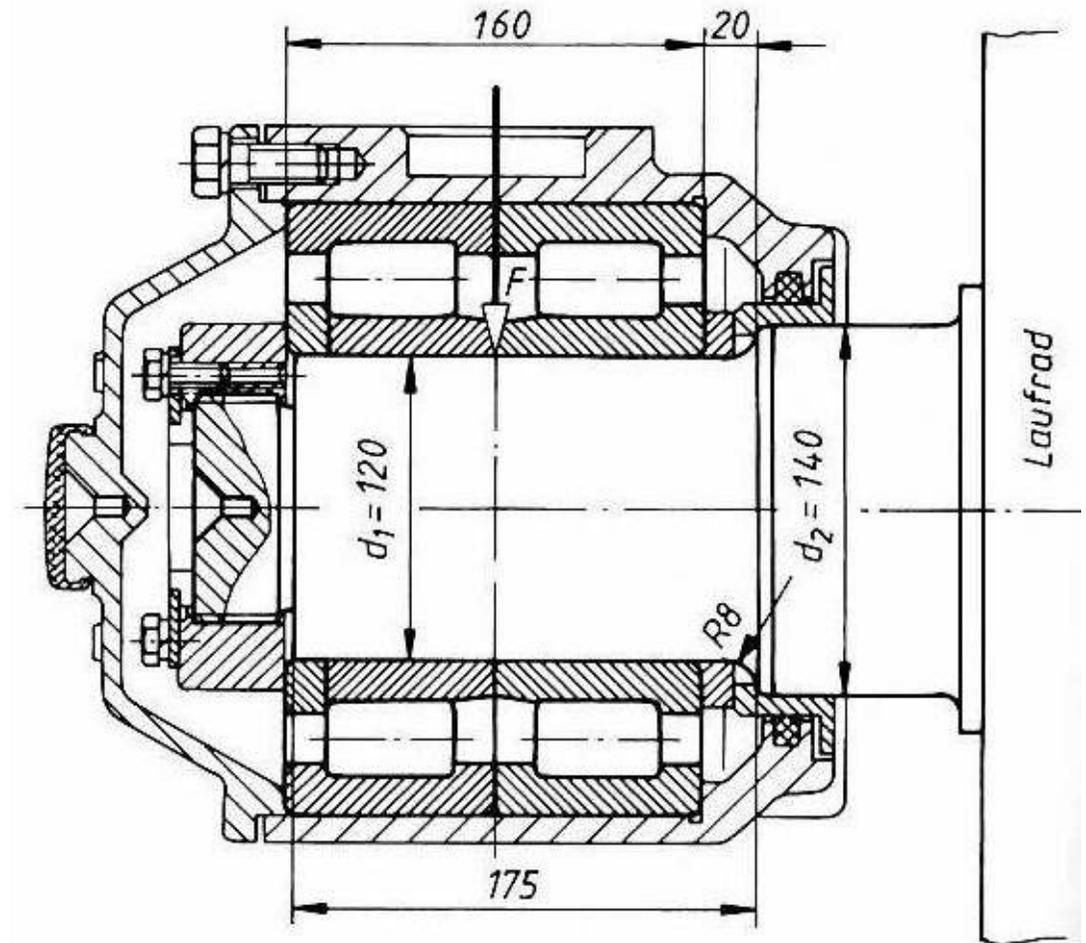
Aufgabe 10 - Statischer und dynamischer Festigkeitsnachweis eines Lagerzapfens (RM Aufgabe 11.15)

Aufgabenstellung:

Für den dargestellten Lagerzapfen einer Laufradachse aus E295 mit dem vorgewählten Durchmesser $d_1 = 120\text{mm}$ sind die Sicherheiten gegen Fließen S_F und Dauerbruch S_D zu bestimmen.

Der Zapfen wird aus einer Rundstange mit einem Durchmesser von $D = 160\text{mm}$ gefertigt. Die Nennbelastung der Lager beträgt $F \approx 60\text{kN}$. Die Betriebsverhältnisse werden durch den Faktor $K_A = 1,2$ berücksichtigt. Einzelne hohe Stöße führen zu $F_{\max} = 2 \bullet F$. Die Oberflächenrauheit beträgt $Rz = 6,3\mu\text{m}$.

Die Innenringe der Zylinderrollenlager werden warm auf den Zapfen mit der Toleranzklasse m6 aufgezogen, so dass am Lagerende mit einer Kerbwirkungszahl von $\beta_k \approx 1,8$ zu rechnen ist.



Aufgabe 11 - Statischer und dynamischer Festigkeitsnachweis einer Wellenstufe (siehe RM Fachbuch Kap. 3.7.2)

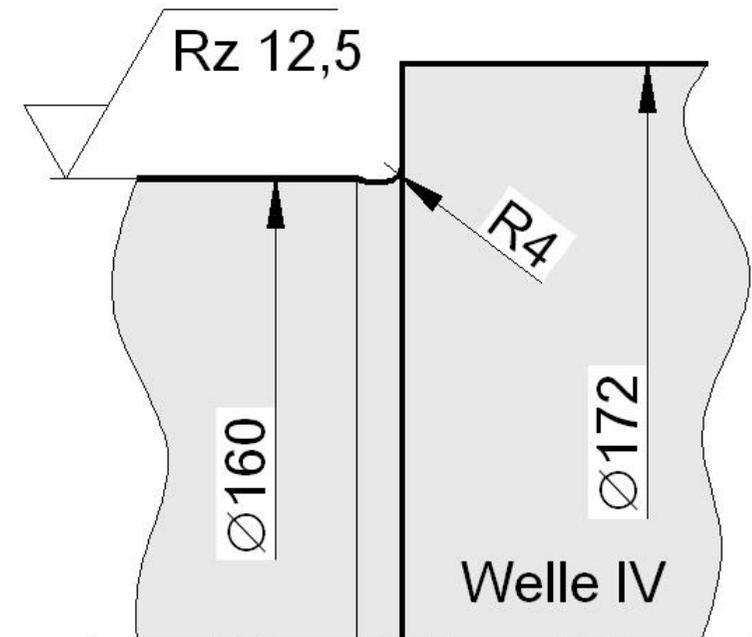
Aufgabenstellung:

Die Richtdurchmesser für die Abtriebswelle (Welle IV) des Stirnradgetriebes der Verholwinde sind bestimmt worden. Die Welle wird aus dem Vergütungsstahl 41CrMo4 gefertigt und wechselnd auf Biegung und schwellend auf Torsion beansprucht. Im Querschnitt wirken ein Biegemoment von 2120 Nm und ein Torsionsmoment von 47900 Nm. Die Oberflächenrauheit beträgt $R_z = 12,5\mu\text{m}$. Der Betriebsfaktor wird mit $K_A = 1,5$ angenommen. Der Durchmesser des Wellenrohlings beträgt 180mm. Beim ruckartigen Anspannen des Seils können hohe Belastungen auf die Trommel und den Antrieb einwirken. Dadurch können die auf die Wellen wirkenden Momente kurzzeitig den 2,5 fachen Wert der Nennmomente annehmen.

Führen Sie einen statischen und einen dynamischen Festigkeitsnachweis für den skizzierten Wellenabsatz durch. Für den statischen Nachweis wird ein Sicherheitsfaktor $S_F > 1,5$, für den dynamischen Nachweis ein Faktor von $S_D > 1,5$ gefordert.

Lösungshinweise:

- Nutzen Sie den Ablaufplan für einen vereinfachten statischen und dynamischen Sicherheitsnachweis aus dem Fachbuch Roloff Matek, Bild 11-23.
- Der Größeneinflussfaktor K_t bezieht sich auf den Durchmesser des Rohteils.
- Bei dem dynamischen Festigkeitsnachweis werden Getriebewellen dem Überlastungsfall 2 zugeordnet und mit der Gestaltausschlagsfestigkeit berechnet.



Berechnung der Lagerkräfte bei einer Welle mit mehreren Zahnrädern

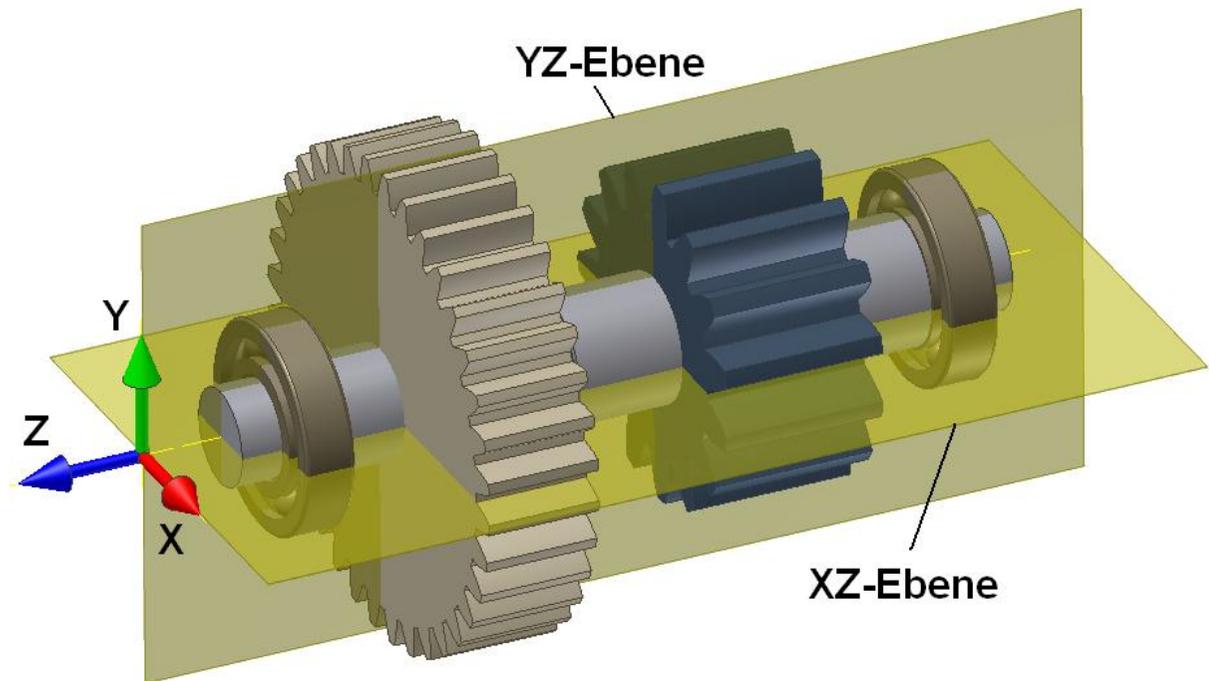
Die über die Zahnräder eingebrachten Querkräfte werden als Produkt aus dem Torsionsmoment und dem Abstand zwischen dem Teilkreisdurchmesser und der Wellenmitte berechnet.

$$F_u = 2 \cdot M_t / d \quad F_r = F_u \cdot \tan \alpha \quad (\text{bei Nullräder gilt } \alpha = 20^\circ) \quad F_z = \sqrt{F_u^2 + F_r^2}$$

Da die Querkräfte bei der Anordnung mehrerer Zahnräder auf einer Welle oft in mehreren Ebenen wirken, ist eine räumliche Betrachtung der Baugruppe notwendig. Es empfiehlt sich ein Koordinatensystem zu definieren, dessen Z-Achse auf der Längsachse der Welle liegt.

Die Berechnung der Lagerkräfte erfolgt getrennt nach Ebenen. Zunächst werden die in der XZ-Ebene liegenden Komponenten der Lagerkräfte F_{Ax} und F_{Bx} mit den aus der Statik bekannten Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Bei dieser Rechenoperation werden nur die ebenfalls in der XZ-Ebene liegende Komponenten der Zahnkräfte berücksichtigt.

Der Vorgang wird mit den in der YZ-Ebene liegenden Komponenten wiederholt um F_{Ay} und F_{By} zu ermitteln. Aus F_{Ay} und F_{Ax} kann jetzt die resultierende Lagerkraft F_A bestimmt werden ($F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$), F_B entsprechend aus F_{Bx} und F_{By} .



Berechnung der Biegemomente bei einer Welle mit mehreren Zahnrädern

Ähnlich verhält es sich bei der Bestimmung des Biegemomentenverlaufs. Er wird getrennt für die XZ- und die YZ-Ebene ermittelt. Dabei werden die Biegemomente für die Querschnitte der Welle berechnet, an denen eine Querkraft eingeleitet wird. In dem dargestellten Fall wären das die Mitten der Sitze von Lagern und Zahnrädern. In der grafischen Darstellung werden die so ermittelten Werte als Punkte eingetragen und mit Linien zu einer Kurve verbunden.

Abschließend wird für jeden der oben bezeichneten Querschnitte das resultierende Biegemoment auf der Grundlage der in der XZ- und in der YZ-Ebene ermittelten Werte berechnet $(M_{b1res} = \sqrt{M_{b1XZ}^2 + M_{b1YZ}^2})$. Auch diese Werte werden grafisch dargestellt.

Ermittlung des Richtdurchmessers

Für die Ermittlung des Richtdurchmessers kann der Ablaufplan aus dem Fachbuch Roloff Matek Kap. 11.2.2 Bild 11-21 zugrunde gelegt werden. Als maximales Biegemoment wird das größte resultierende Biegemoment angesetzt. In den Abschnitten der Welle, die zusätzlich auf Torsion belastet werden muss mit dem Vergleichsmoment gearbeitet werden um die gesamte Belastung zu erfassen. Mit Hilfe der Belastungsdiagramme wird dann der am stärksten belastete Wellenquerschnitt bestimmt, für den der Richtdurchmesser d' berechnet wird.

Aufgabe 13 - Ermittlung der Zahnkräfte an einer Getriebewelle und Berechnung des Richtdurchmessers

Aufgabenstellung:

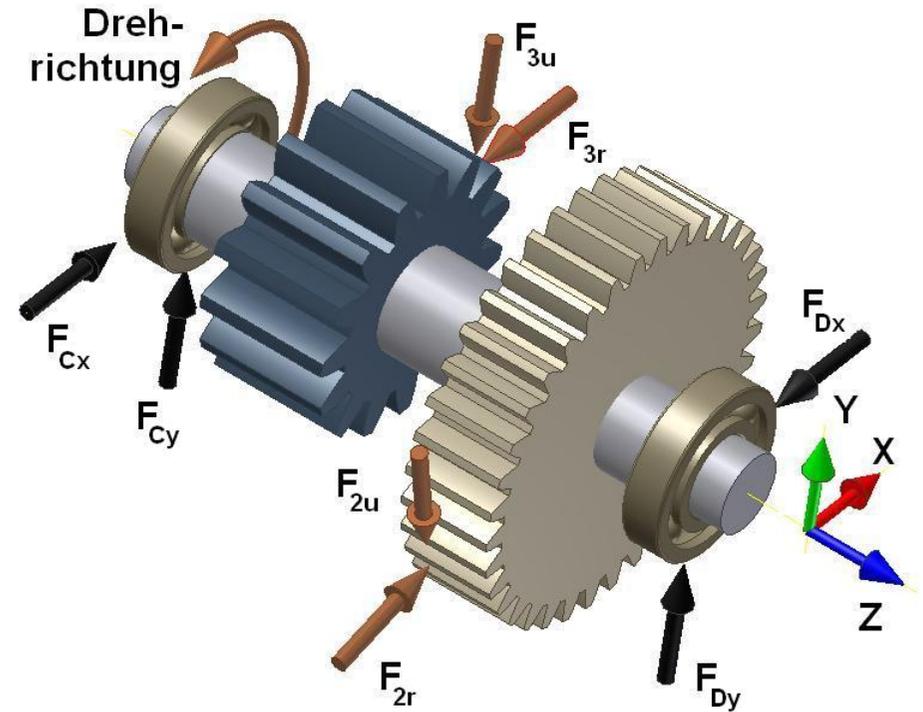
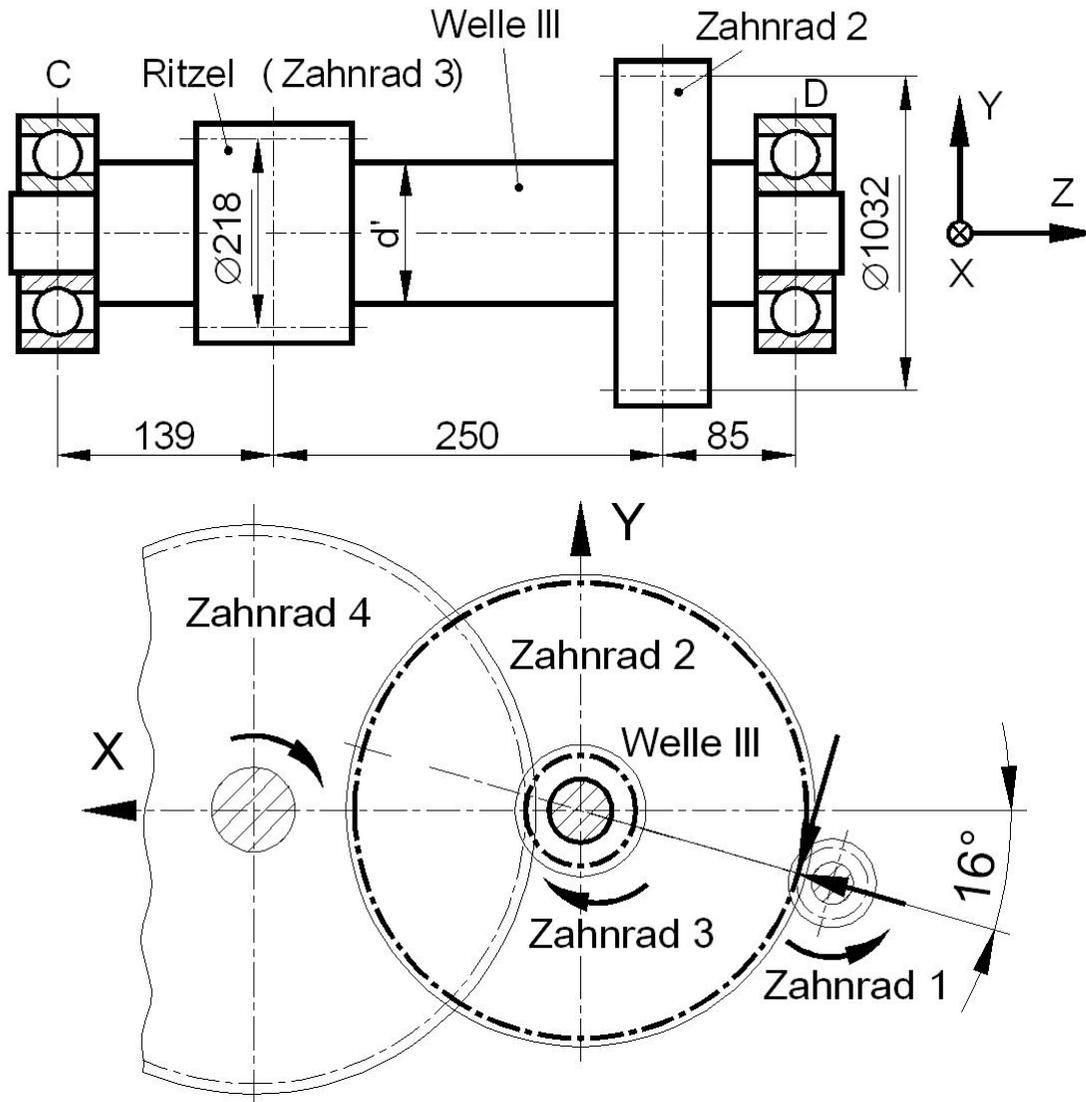
Die Seiltrommel der Verholwinde wird über ein zweistufiges Geradstirnradgetriebe angetrieben. Auf die Zwischenwelle dieses Getriebes (Welle III) sollen zwei Geradstirnräder und zwei Wälzlager montiert werden (Abmessungen siehe Skizze). Als Wellenwerkstoff wurde der Vergütungsstahl 41CrMo4 gewählt. Das Drehmoment an der Zwischenwelle III beträgt $M_{\text{III}} = 10690 \text{ Nm}$ bei $n_{\text{III}} = 39,105 \text{ min}^{-1}$. Der Anwendungsfaktor wird mit $K_A = 1,5$ angenommen.

Abmessungen Zahnrad 2: Eingriffswinkel $\alpha_1 = 20^\circ$, Teilkreisdurchmesser $d_2 = 992 \text{ mm}$.

Abmessungen Zahnrad 3: Eingriffswinkel $\alpha_2 = 21,9412^\circ$, Wälzkreisdurchmesser $d_{w3} = 218,823 \text{ mm}$.

- Berechnen Sie die an den Zahnrädern 2 und 3 wirkenden Umfangs- und Radialkräfte.
- Ermitteln Sie die Beträge der Lagerkräfte F_C und F_D . Berechnen Sie die maximalen Biegemomente für die XZ- und die YZ-Ebene sowie das maximale resultierende Biegemoment. Zeichnen Sie Diagramme für die folgenden Belastungen der Welle: Biegemomente in der XZ- und in der YZ-Ebene, resultierendes Biegemoment und Torsionsmoment. Benennen Sie den am stärksten belasteten Querschnitt.
- Berechnen Sie das Vergleichsmoment für den am stärksten gefährdeten Querschnitt und bestimmen Sie den Richtdurchmesser d' .

Aufgabe 13 - Ermittlung der Zahnkräfte an einer Getriebewelle und Berechnung des Richtdurchmessers



Aufgabe 14 – Ermitteln der Richtdurchmesser einzelner Wellenabschnitte

Aufgabenstellung:

Die Längenmaße und der Werkstoff (41CrMo4) der Zwischenwelle (Welle III) des Getriebes der Verholwinde sind bekannt. Der Betriebsfaktor wird mit $K_A = 1,5$ angenommen. Biege- und Torsionsmomente, Quer- und Lagerkräfte wurden berechnet:

$$M_{bmaxIII} = 10663 \text{ Nm (Mitte Zahnrad 3)}$$

$$F_{Cx} = 25400 \text{ N}$$

$$F_{Cy} = 72380 \text{ N}$$

$$F_{Dx} = -478 \text{ N}$$

$$F_{Dy} = 43880 \text{ N}$$

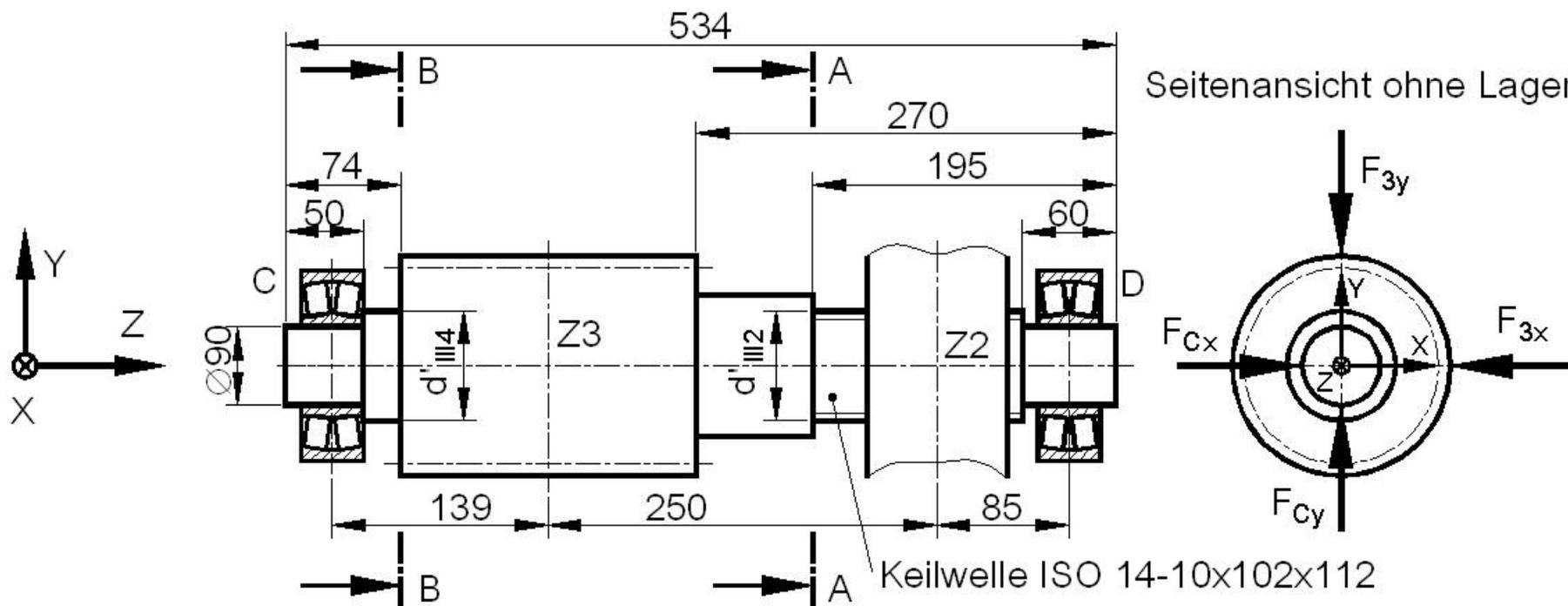
$$M_{tIII} = 10690 \text{ Nm}$$

$$F_{2x} = 13481 \text{ N}$$

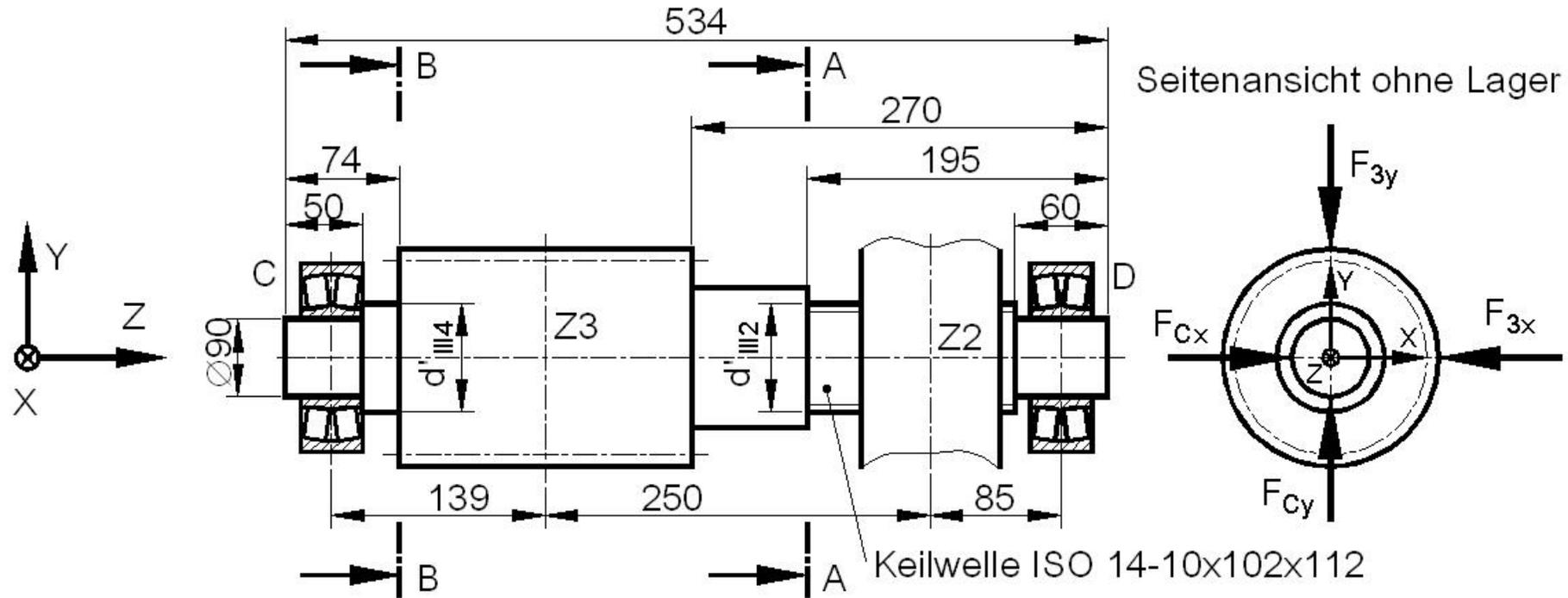
$$F_{2y} = 18555 \text{ N}$$

$$F_{3x} = 39359 \text{ N}$$

$$F_{3y} = 97705 \text{ N}$$



Aufgabe 14 - Ermitteln der Richtdurchmesser einzelner Wellenabschnitte



Für die Lagerung der Welle wurden beidseitig Pendelrollenlager DIN 635 T2 22218E ausgewählt. Im Bereich des Zahnrades 2 ist eine Verbindung Keilwelle – Keilnabe (mittlere Ausführung ISO 14-10x102x112) vorgesehen.

- Die Welle soll zwischen den Zahnrädern gestuft werden. Prüfen Sie, ob der Durchmesser der Keilwelle im Schnitt A-A ausreichend dimensioniert ist.
- Lager D soll Festlager werden, das Zahnrad 2 gegen axiales Verschieben auf der Keilwelle gesichert werden. Welche konstruktiven Varianten bieten sich an um beide Auflagen zu realisieren?
- Wie groß muss der Richtdurchmesser d'_{III4} gewählt werden? Berücksichtigen Sie die im Querschnitt B-B auftretenden Spannungen und die vom Lagerhersteller vorgeschriebenen Anschlussmaße.