

Předmět: MA4

Dnešní látka

Variačně formulované okrajové úlohy:

- ▶ zúplnění prostoru funkcí
- ▶ přibližné řešení minim. úlohy – metoda konečných prvků
- ▶ jiný pohled na zobecněné řešení – stejný způsob numerické aproximace
- ▶ Doplněk: lineární zobrazení

Literatura:

- ▶ Kapitola 4 a 3 ze skript *Karel Rektorys: Matematika 43, ČVUT, Praha, 2001.*
- ▶ Text přednášky na webové stránce přednášejícího.
- ▶ Typové příklady (viz webové stránky přednášejícího).

Připomeňme: Bud' A symetrický operátor s hustým definičním oborem $\mathcal{D}(A)$ a bud' F funkcionál energie příslušný rovnici $Au = f$, $u \in \mathcal{D}(A)$.

- Je-li A slabě pozitivní, pak F má v $u \in \mathcal{D}(A)$ minimum právě tehdy, když $Au = f$, $u \in \mathcal{D}(A)$.
- Je-li A pozitivní, pak F má v $u \in \mathcal{D}(A)$ ostré minimum právě tehdy, když $Au = f$, $u \in \mathcal{D}(A)$.

(Poznámka: V MA 43 je věta formulována trochu odlišně.)

Připomeňme: **Velký nedostatek**

Věta o vztahu mezi řešením operátorové rovnice a minimem funkcionálu energie **není existenční**.

Neříká nic o tom, zda řešení $u \in \mathcal{D}(A)$ existuje. Netvrdí, že minimum F na $\mathcal{D}(A)$ existuje, tj. že se ho nabývá v nějakém prvku $u \in \mathcal{D}(A)$.

Zúplnění $\mathcal{D}(A)$

Variační formulace (tj. minimalizace F) nám umožňuje předpokládat méně než formulace $Au = f$, která má "značné" nároky na vlastnosti $\mathcal{D}(A)$ a f .

Problém existence minima.

Východisko z potíží: Přidat k $\mathcal{D}(A)$ ještě další funkce tak šikovně, aby výsledná množina byla vektorovým prostorem funkcí, na němž bude funkcionál energie jednak dobře definován, jednak bude nabývat minima pro funkci, která má "dobrý" vztah k výchozí okrajové úloze.

To vše lze udělat, jestliže operátor A je **pozitivně definitní a symetrický**.

Minimalizace funkcionálu energie na **Sobolevově prostoru funkcí** H_A místo na $\mathcal{D}(A)$. Obsahuje funkce a jejich první derivace v jistém slabém smyslu.

Prostor $L_2(a, b)$

Z dřívějších známe:

Skalární součin $(u, v) = \int_a^b uv \, dx$.

Normu $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

Vzdálenost $\rho(u, v) = \|u - v\|$.

Dosud jsme předpokládali, že $u, v \in C([a, b])$.

Stačí však předpokládat, že $u, v \in M$, kde M je množina funkcí w takových, pro něž platí, že integrály

$$\int_a^b w(x) \, dx \quad \text{a} \quad \int_a^b w^2(x) \, dx$$

existují a jsou konečné.

Množinu M opatřenou (u, v) , $\|u\|$ a $\rho(u, v)$ značíme $L_2(a, b)$ a říkáme jí (vektorový) prostor funkcí integrovatelných v intervalu (a, b) s kvadrátem (v Lebesgueově smyslu, ale Leb. integrálem se nebudeme zabývat).

Zásadní výsledek pro $Au = f$ se sym. poz. def. operátorem A
(variační princip, zobecněné řešení)

Def. obor $\mathcal{D}(A)$ je rozšířen na prostor H_A s normou
 $\|w\|_A = \sqrt{(w, w)_A}$: k $\mathcal{D}(A)$ jsou přidány funkce, které jsou
spojité, mají derivaci v $L_2(a, b)$ a splňují OP (v původním nebo
v jistém zobecněném smyslu).

Energetický funkcionál je rozšířen z $\mathcal{D}(A)$ na prostor H_A :

$$F(u) = (u, u)_A - 2(f, u), \quad f \in L_2(a, b), \quad u \in H_A.$$

Platí, že pro každou funkci $f \in L_2(a, b)$ funkcionál F nabývá
svého minima v jediné funkci $u_f \in H_A$.

Funkci u_f nazýváme zobecněným řešením rovnice $Au = f$ s
danými okrajovými podmínkami.

Je-li $f \in C([a, b])$ a $u_f \in \mathcal{D}(A)$, pak u_f je klasickým řešením
okrajové úlohy, tedy takovým, jaké známe z dřívějšího výkladu
(před zavedením operátorů).

Čeho jsme dosáhli?

- Místo operátorové rovnice $Au = f$ řešíme na prostoru H_A minimalizační problém pro $F(u) = (u, u)_A - 2(f, u)$.
- Minimalizační problém má slabší požadavky na hladkost funkcí (řešení, pravá strana) a je-li výchozí operátor pozitivně definitní, má vždy právě jedno řešení.

Poznámka: Variační formulace zaručuje existenci zobecněného řešení i u těch okrajových úloh, pro něž existence klasického řešení není známa nebo klasické řešení ani neexistuje (typicky úlohy lin. pružnosti nebo ustáleného vedení tepla ve 2D a 3D).

Najít přesné minimum je obtížné (nemožné). Naštěstí **minimalizační problém je vhodný pro hledání přibližného řešení.**

Pozorování: Pro funkci $u^* \in H_A$, v níž se nabývá minima, platí

$$(u^*, v)_A = (f, v) \quad \forall v \in H_A$$

(Ukáže se minimalizací $\varphi(t) = F(u^* + tv)$.)

Ritzova metoda

Funkcionál $F(u) = (u, u)_A - 2(f, u)$
minimalizujeme nikoliv na H_A , nýbrž jen na $V_n \subset H_A$,
podprostoru V_n konečné dimenze sestávajícím z lineárních
kombinací lin. nezávislých funkcí $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Tedy mezi
všemi n -tici hledáme takovou n -tici $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, aby pro
funkci $u_n^* = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ nabýval funkcionál F minima na V_n .

Jde vlastně o hledání minima reálné funkce více proměnných.

Vztah k řešení původní úlohy: Jestliže je $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}_{n \rightarrow \infty}$
bází prostoru H_A , pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^* - u^*\|_A = 0,$$

kde $u^* \in H_A$ minimalizuje F na H_A .

Tj. přibližné řešení konverguje k přesnému řešení v normě
 $\|\cdot\|_A$.

Hledáme-li například přibližné řešení ve tvaru

$$u_c = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + c_5 v_5,$$

kde

$$v_1 = \sin x, v_2 = \sin 2x, v_3 = \sin 3x, v_4 = \sin 4x, v_5 = \sin 5x$$

nebo

$$v_1 = x(\pi - x), v_2 = x^2(\pi - x), v_3 = x^3(\pi - x), v_4 = x^4(\pi - x), v_5 = x^5(\pi - x)$$

nebo

$$v_1 = x \sin x, v_2 = x^2 \sin x, v_3 = x^3 \sin x, v_4 = x^4 \sin x, v_5 = x^5 \sin x,$$

hledáme minimum funkce

$$g(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \equiv F(u_c) \equiv (Au_c, u_c) - 2(f, u_c)$$

pěti proměnných, tj. $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^T$.

Podmínky minima: nulové parciální derivace, z nich dostáváme soustavu

$$(v_1, v_1)_A c_1 + (v_1, v_2)_A c_2 + (v_1, v_3)_A c_3 + (v_1, v_4)_A c_4 + (v_1, v_5)_A c_5 = (f, v_1),$$

$$(v_2, v_1)_A c_1 + (v_2, v_2)_A c_2 + (v_2, v_3)_A c_3 + (v_2, v_4)_A c_4 + (v_2, v_5)_A c_5 = (f, v_2),$$

$$(v_3, v_1)_A c_1 + (v_3, v_2)_A c_2 + (v_3, v_3)_A c_3 + (v_3, v_4)_A c_4 + (v_3, v_5)_A c_5 = (f, v_3),$$

$$(v_4, v_1)_A c_1 + (v_4, v_2)_A c_2 + (v_4, v_3)_A c_3 + (v_4, v_4)_A c_4 + (v_4, v_5)_A c_5 = (f, v_4),$$

$$(v_5, v_1)_A c_1 + (v_5, v_2)_A c_2 + (v_5, v_3)_A c_3 + (v_5, v_4)_A c_4 + (v_5, v_5)_A c_5 = (f, v_5).$$

Matrice \tilde{A} soustavy je symetrická (protože $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$),
pozitivně definitní (protože $(\tilde{A}c, c) = (u_c, u_c)_A > 0$) a **plná**.

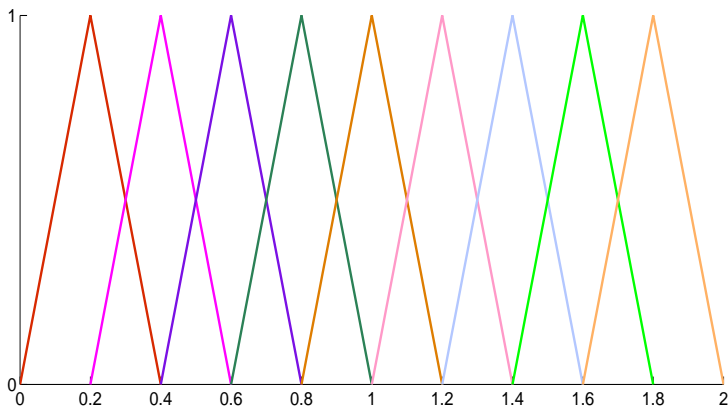
Ještě jiný systém báзовých funkcí

Metoda konečných prvků (MKP)

Báze sestává ze spojitých funkcí, jež jsou po částech polynomiální a jsou nenulové jen na malé části intervalu (mají malý nosič).

Nejjednodušší jsou spojitě, po částech lineární funkce.

Bázové funkce našeho aproximačního podprostoru konečné dimenze budou spojitě, po částech lineární, definované na rovnoměrném dělení intervalu $[a, b]$, s hodnotou 1 pouze v jediném uzlu dělení a v ostatních uzlech nulové. Bázové funkce splňují okrajové podmínky.



MKP: Devět bázových funkcí s nosičem délky 0,4. Funkce nejsou 2x spojitě diferencovatelné, neleží tedy v $\mathcal{D}(A)$, patří však do prostoru H_A .

Nechť v_1, \dots, v_m jsou takové bázové funkce. Přibližné řešení opět hledáme ve tvaru lineární kombinace s neznámými koeficienty c_1, \dots, c_m

$$u_c = \sum_{i=1}^m c_i v_i.$$

Opět se minimalizuje funkcionál energie

$$g(c) = F(u_c) = (u_c, u_c)_A - 2(f, u_c).$$

Tentokrát je g funkcí m proměnných tvořících vektor $c = (c_1, \dots, c_m)^T$.

Podmínka nulových parciálních derivací vede na soustavu m lin. alg. rovnic pro neznámý vektor $c = (c_1, \dots, c_m)^T$

$$(v_i, v_1)_A c_1 + (v_i, v_2)_A c_2 + \dots + (v_i, v_m)_A c_m = (f, v_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Soustavu lze psát $Mc = \tilde{f}$, kde matice M je symetrická, pozitivně definitní, pásová a řídká, vektor \tilde{f} má m složek.

Opět lze dokázat, že přibližná řešení konvergují k přesnému řešení, pokud $m \rightarrow \infty$, tj. $h \rightarrow 0$, kde $h = (b - a)/(m + 1)$.
Řád konvergence.

MKP řešme problém

$$-u'' + (1 + \sin^2 x)u = 4, \quad u(0) = 0 = u(\pi).$$

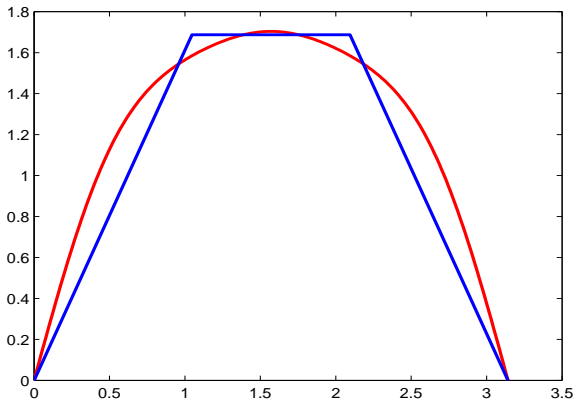
Operátor $A = -u'' + (1 + \sin^2 x)u$ je symetrický a pozitivně definitní na svém $\mathcal{D}(A)$ i H_A .

Prvky matice soustavy a pravé strany:

$$(v_i, v_j)_A = \int_0^\pi \left(v_i' v_j' + (1 + \sin^2 x) v_i v_j \right) dx,$$

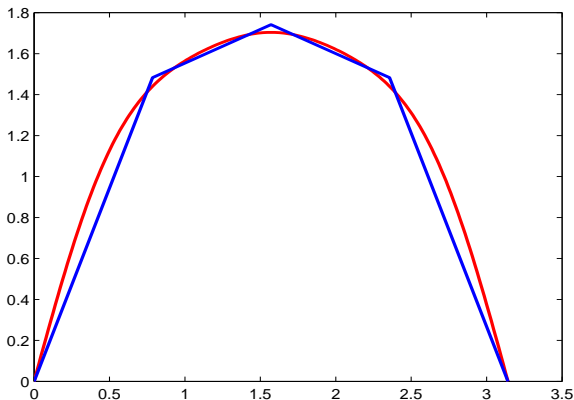
$$(f, v_i) = 4 \int_0^\pi v_i dx.$$

Řešení pro $m = 2$



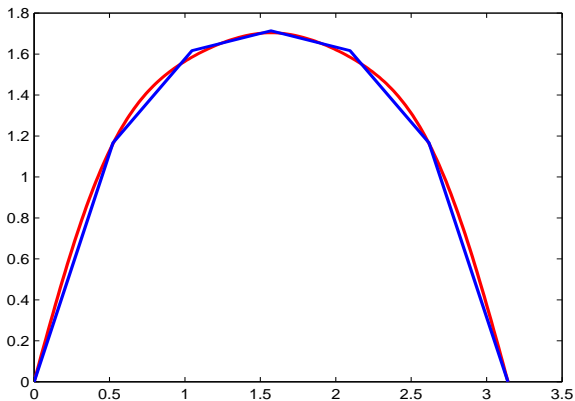
Přesné řešení červeně, přibližné se 2 bázovými funkcemi modře ($u_c = 1,688v_1 + 1,688v_2$).

Řešení pro $m = 3$



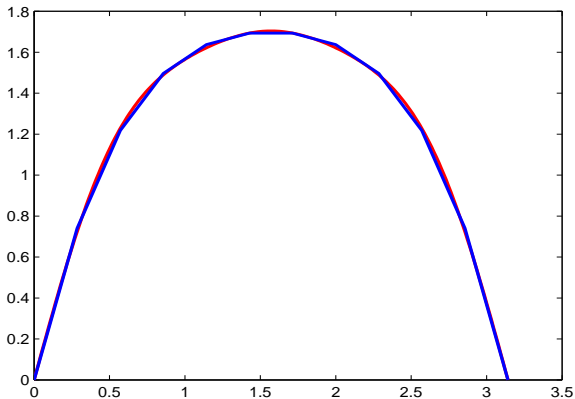
Přesné řešení červeně, přibližné se 3 bázovými funkcemi modře ($u_c = 1,483v_1 + 1,742v_2 + 1,483v_3$).

Řešení pro $m = 5$



Přesné řešení červeně, přibližné s 5 bázovými funkcemi modře.

Řešení pro $m = 10$



Přesné řešení červeně, přibližné s 10 bázovými funkcemi modře.

Vetknutý nosník modelovaný ODR s okrajovými podmínkami

$$(E(x)I(x)u'')'' = f(x),$$
$$u(0) = u'(0) = u(L) = u'(L) = 0,$$

kde $E(x)$ je (nekonstantní) Youngův modul pružnosti, $I(x)$ je (nekonstantní) moment setrvačnosti průřezu nosníku a f je zatížení kolmé na podélnou osu nosníku.

Diferenciální operátor $Au = (Elu'')''$,
 $\mathcal{D}(A) = \{u \in C^4([0, L]) : u(0) = u'(0) = u(L) = u'(L) = 0\}$
operátorová rovnice: najít $u \in \mathcal{D}(A)$, aby $Au = f$.

Funkcionál energie

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \int_0^L Elu''^2 dx - 2 \int_0^L fu dx.$$

Operátor je symetrický a pozitivně definitní.

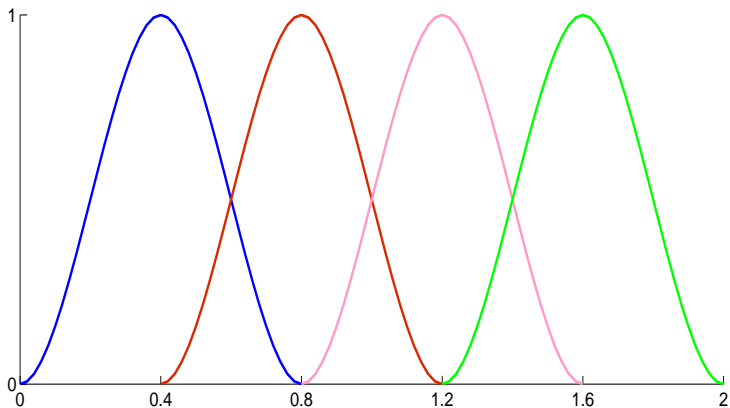
Pozit. def.: Víme, že pokud $u(0) = 0$, pak $\|u'\|^2 \geq \|u\|^2/L^2$.

Z $u'(0) = 0$ ovšem plyne $\|u''\|^2 \geq \|u'\|^2/L^2 \geq \|u\|^2/L^4$. Tudíž

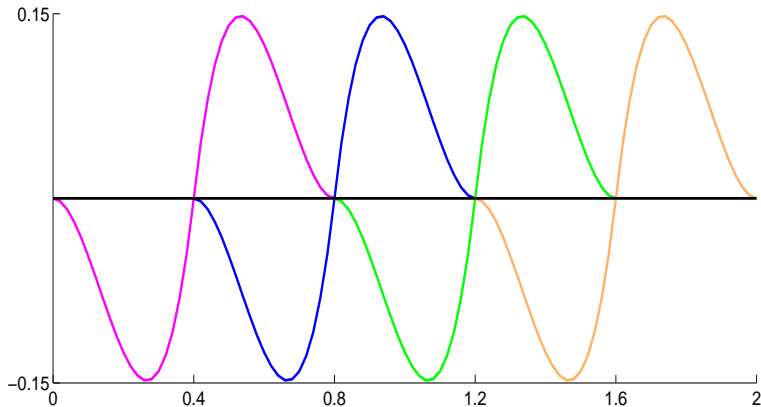
$$\begin{aligned}(Au, u) &= \int_0^L E I u''^2 dx \\ &\geq \min_{x \in [0, L]} (E(x) I(x)) \int_0^L u''^2 dx \\ &\geq \min_{x \in [0, L]} (E(x) I(x)) \frac{\|u\|^2}{L^4}.\end{aligned}$$

Zúplnění: prostor H_A – funkce integrovatelné s kvadrátem do 2. derivace včetně, splňující okrajové podmínky, spojitě do první derivace včetně.

Metoda konečných prvků vhodná pro úlohy s rovnicí 4. řádu: bázi tvoří dva typy funkcí se spojitou první derivací.



MKP: Síť s vnitřními uzly v bodech 0,4, 0,8, 1,2 a 1,6. Čtyři „jednohrbé“ bázové funkce s nosičem délky 0.8 a další ...



... čtyři „dvouhrbé“ bázové funkce také s nosičem délky 0.8.
 Celkem 8 bázových funkcí, tj. každému vnitřnímu uzlu sítě jsou
 přiřazeny dvě bázové funkce, jedna má v uzlu nenulovou
 hodnotu, druhá má v uzlu nenulovou derivaci.

Jiná cesta k zobecněnému řešení

Ukažme si ji na příkladu.

Mějme okrajovou úlohu

$$-u''(x) + (3 - \sin x)u(x) = \exp(x), \quad u(0) = 0 = u(\pi) \quad (1)$$

Rovnici (1) vynásobme funkcí v a integrujme s využitím metody integrace p. p.

$$\int_0^\pi (u'v' + (3 - \sin x)uv) dx = \int_0^\pi v \exp(x) dx. \quad (2)$$

Pozorování: Platí-li (1), pak platí i (2).

Myšlenka: Jestliže bude (2) platit pro “hodně” funkcí v , pak by mohlo platit i (1).

Hledáme takovou funkci u z prostoru V , aby platilo

$$\int_0^\pi (u'v' + (3 - \sin x)uv) dx = \int_0^\pi v \exp(x) dx \quad \forall v \in V, \quad (3)$$

kde V je vhodný, dostatečně bohatý prostor funkcí, které splňují okrajové podmínky (ale nemusejí ležet v $C^2([0, \pi])$).

Ukáže se, že $V \equiv H_A$, kde H_A je nám již známý prostor, který vznikl zúplněním $\mathcal{D}(A)$ pomocí symetrického a pozitivně definitního operátoru $Au = -u'' + (3 - \sin x)u$.

(3) je speciálním případem (pro $f(x) \equiv \exp(x)$) rovnice

$$(u, v)_A = (f, v) \quad \forall v \in V, \quad (4)$$

s níž jsme se už setkali u minimalizace funkcionálu energie. Tato minimalizace a formulace (4) jsou shodné, jestliže A je sym. poz. def. operátor. Formulaci (4) se říká slabá formulace (A nemusí být symetrický), jejímu řešení se říká slabé řešení.

Jiná cesta k zobecněnému řešení – stejný způsob přibližného řešení

Úlohu najít takovou funkci $u \in V$, aby platilo

$$(u, v)_A = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (5)$$

aspoň přibližně vyřešíme tím, že místo prostoru V uvažujeme prostor $V_n \subset V$ konečné dimenze s bází $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Mějme například $V_1 = \{c v_1 : c \in \mathbb{R}\}$, kde $v_1(x) \equiv \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$.

Hledáme u ve tvaru $u = \eta v_1$, kde $\eta \in \mathbb{R}$ neznáme.

Funkce v (viz (5)) bude mít obecný tvar $v = \beta v_1$, kde β je libovolné reálné číslo.

Dosadíme do (5).

$$\begin{aligned}
 (u, v)_A &= (f, v) \quad \forall v \in V_1 \\
 (\eta v_1, \beta v_1)_A &= (f, \beta v_1) \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \\
 \eta \beta (v_1, v_1)_A &= \beta (f, v_1) \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \\
 \eta (v_1, v_1)_A &= (f, v_1) \tag{6}
 \end{aligned}$$

$$\eta = \frac{(f, v_1)}{(v_1, v_1)_A} \tag{7}$$

Vztahy (6) a (7) známe z přibližného řešení založeného na minimalizaci funkcionálu energie!

Obdobně pro prostor V_n s více bázovými funkcemi.

Při aproximaci (5) na V_n stačí za v vzít jen bázové funkce!!

Dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic. Její řešení dává n -tici koeficientů lineární kombinace bázových funkcí. Tato lineární kombinace je přibližným řešením úlohy (5).

Shrnutí numerických metod

- ▶ Řešení OÚ převedeno na řešení soustavy lin. alg. rovnic.
- ▶ Je-li operátor symetrický, je i matice soustavy symetrická.
- ▶ Je-li operátor pozit. def., je i matice soustavy pozit. def.
- ▶ U MKP je matice soustavy řídká a pásová.

Lineární zobrazení

Mějme zobrazení F z vektorového prostoru U do vektorového prostoru V . Řekneme o něm, že je lineární, pokud platí, že

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \forall u_1, u_2 \in U \quad F(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 F(u_1) + c_2 F(u_2).$$

Příklady lineárních zobrazení:

- ▶ derivace funkce
- ▶ určitý integrál
- ▶ primitivní funkce (s nulovou integrační konstantou)
- ▶ násobení vektoru maticí
- ▶ násobení matic
- ▶ zobrazení, které pravé straně jednoznačně řešitelné lineární OÚ s homogenními OP přiřadí řešení (vzpomeňte si na superpozici řešení)