Předmět: MA4

Dnešní látka

Variačně formulované okrajové úlohy:

- zúplnění prostoru funkcí
- přibližné řešení minim. úlohy – metoda konečných prvků
- jiný pohled na zobecněné řešení – stejný způsob numerické aproximace
- Doplněk: lineární zobrazení

Literatura:

- Kapitola 4 a 3 ze skript *Karel Rektorys: Matematika 43, ČVUT, Praha, 2001*
- Text přednášky na webové stránce přednášejícího
- Sbírka příkladů (viz webové stránky přednášejícího)
- K. Rektorys a kol.: Přehled užité matematiky, kap. 18.8-9

Připomeňme: Buď A symetrický operátor s hustým definičním oborem $\mathcal{D}(A)$ a buď F funkcionál energie příslušný rovnici $Au = f$, $u \in \mathcal{D}(A)$.

• Je-li A slabě pozitivní, pak F má v $u \in \mathcal{D}(A)$ minimum právě tehdy, když $Au = f$, $u \in \mathcal{D}(A)$.

• Je-li A pozitivní, pak F má v $u \in \mathcal{D}(A)$ ostré minimum právě tehdy, když $Au = f$, $u \in \mathcal{D}(A)$.

(Poznámka: V MA 43 je věta formulována trochu odlišně.)

Připomeňme: Velký nedostatek

Věta o vztahu mezi řešením operátorové rovnice a minimem funkcionálu energie není existenční.
Neříká nic o tom, zda řešení $u \in \mathcal{D}(A)$ existuje. Netvrdí, že minimum F na $\mathcal{D}(A)$ existuje, tj. že se ho nabývá v nějakém prvku $u \in \mathcal{D}(A)$.

Zúplnění $\mathcal{D}(A)$

Variační formulace (tj. minimalizace F) nám umožňuje předpokládat méně než formulace $Au = f$, která má "značné" nároky na vlastnosti $\mathcal{D}(A)$ a f.
Problém existence minima.

Východisko z potíží: Přidat k $\mathcal{D}(A)$ ještě další funkce tak šikovně, aby výsledná množina byla vektorovým prostorem funkcí, na němž bude funkcionál energie jednak dobře definován, jednak bude nabývat minima pro funkci, která má “dobrý" vztah k výchozí okrajové úloze.
To vše lze udělat, jestliže operátor A je pozitivně definitní a symetrický.

Minimalizace funkcionálu energie na **prostoru funkcí H_A** místo na $\mathcal{D}(A)$. Obsahuje funkce a jejich první derivace v jistém zobecněném smyslu.

Prostor $L^2(a, b)$

Z dřívějška známe:

Skalární součin $(u, v) = \int_a^b uv \, \mathrm{d}x$.

Normu $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

Vzdálenost $\rho(u, v) = \|u - v\|$.

Dosud jsme předpokládali, že $u, v \in C([a, b])$.
Stačí však předpokládat, že $u, v \in M$, kde M je množina funkcí w takových, pro něž platí, že integrály

$$\int_a^b w(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_a^b w^2(x) \, \mathrm{d}x$$

existují a jsou konečné.

Množinu M opatřenou (u, v), $\|u\|$ a $\rho(u, v)$ značíme $L^2(a, b)$ a říkáme jí (vektorový) prostor funkcí integrovatelných v intervalu (a, b) s kvadrátem (v Lebesgueově smyslu, ale Leb. integrálem se nebudeme zabývat).

Zásadní výsledek pro $Au = f$ se sym. poz. def. operátorem A (variační princip, zobecněné řešení)

Def. obor $\mathcal{D}(A)$ je rozšířen na prostor H_A s normou $\|w\|_A = \sqrt{(w, w)_A}$: k $\mathcal{D}(A)$ jsou přidány funkce, které jsou spojité, mají derivaci v $L^2(a, b)$ a splňují OP dané hodnotou funkce (ne derivace).

Energetický funkcionál je rozšířen z $\mathcal{D}(A)$ na prostor H_A:

$$F(u) = (u, u)_A - 2(f, u), \quad f \in L^2(a, b),\ u \in H_A.$$

Platí, že pro každou funkci $f \in L^2(a, b)$ funkcionál F nabývá svého minima v jediné funkci $u_f \in H_A$.
(**Laxovo-Milgramovo lemma**)

Funkci u_f nazýváme zobecněným řešením rovnice $Au = f$ s danými okrajovými podmínkami.

Je-li $f \in C([a, b])$ a $u_f \in \mathcal{D}(A)$, pak u_f je klasickým řešením okrajové úlohy, tedy takovým, jaké známe z dřívějšího výkladu (před zavedením operátorů).

Čeho jsme dosáhli?

• Místo operátorové rovnice $Au = f$ řešíme na prostoru H_A minimalizační problém pro $F(u) = (u, u)_A - 2(f, u)$.

• Minimalizační problém má slabší požadavky na hladkost funkcí (řešení, pravá strana) a je-li výchozí operátor pozitivně definitní, má vždy právě jedno řešení.

Poznámky: Variační formulace zaručuje existenci zobecněného řešení i u těch okrajových úloh, pro něž existence klasického řešení není známa nebo klasické řešení ani neexistuje (typicky úlohy lin. pružnosti nebo ustáleného vedení tepla ve 2D a 3D).

H_A je podprostorem vhodného Sobolevova prostoru definovaného nezávisle na operátoru A.

Najít přesné minimum je obtížné (nemožné). Naštěstí minimalizační problém je vhodný pro hledání přibližného řešení.

Pozorování I: Pro funkci $u^* \in H_A$, v níž se nabývá minima, platí

$$(u^*, v)_A = (f, v) \quad \forall v \in H_A \tag{1}$$

Ukážeme to snadno. Napišme funkcionál energie ve tvaru po aplikaci integrace po částech, tj. $F(u) = (u, u)_A - 2(f, u)$, kde $u \in H_A$.
Definujme funkci $\varphi(t) = F(u^* + tv)$, kde $v \in H_A$ a $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (u^* + tv, u^* + tv)_A - 2(f, u^* + tv)\\ &= (u^*, u^*)_A + 2t(u^*, v)_A + t^2(v, v)_A - 2(f, u^*) - 2t(f, v)\end{aligned}$$

je kvadratická funkce. Jelikož minima se nabývá v u^*, tj. pro $t = 0$, platí $\varphi'(0) = 0$. Tedy

$$\begin{aligned}0 &= \varphi'(0) = 2(u^*, v)_A + 2t(v, v)_A|_{t=0} - 2(f, v),\\ 0 &= (u^*, v)_A - (f, v).\end{aligned}$$

Protože funkce $v \in H_A$ byla libovolná, platí (1).

Pozorování II: Pokud pro funkci $u^* \in H_A$ platí (1), pak u^* minimalizuje $F(u) = (u,u)_A - 2(f,u)$ na H_A.

Vezměme opět funkci $\varphi(t) = F(u^* + tv)$. Z předchozího víme, že

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (u^*,u^*)_A - 2(f,u^*) + 2t\big((u^*,v)_A - (f,v)\big) + t^2(v,v)_A \\ &\overset{(1)}{=} F(u^*) + t^2(v,v)_A.\end{aligned}$$

Operátor A je pozitivně definitní, tudíž $\varphi(t) > \varphi(0) = F(u^*)$ pro každé $t \neq 0$ a F nabývá minima v u^*.

Ritzova metoda

Funkcionál $\quad F(u) = (u,u)_A - 2(f,u)$
minimalizujeme nikoliv na H_A, nýbrž jen na $V_n \subset H_A$, podprostoru V_n konečné dimenze sestávajícím z lineárních kombinací lin. nezávislých funkcí $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Tedy mezi všemi n-ticemi hledáme takovou n-tici $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, aby pro funkci $u_n^* = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ nabýval funkcionál F minima na V_n.

Jde vlastně o hledání minima reálné funkce více proměnných.

Vztah k řešení původní úlohy: Jestliže je $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}_{n\to\infty}$ bází prostoru H_A, pak

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^* - u^*\|_A = 0,$$

kde $u^* \in H_A$ minimalizuje F na H_A.
Tj. přibližné řešení konverguje k přesnému řešení v normě $\|\cdot\|_A$.

Hledáme-li například přibližné řešení ve tvaru

$$u_c = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + c_5 v_5,$$

kde
$v_1 = \sin x,\ v_2 = \sin 2x,\ v_3 = \sin 3x,\ v_4 = \sin 4x,\ v_5 = \sin 5x$
nebo
$v_1 = x(\pi - x),\ v_2 = x^2(\pi - x),\ v_3 = x^3(\pi - x),\ v_4 = x^4(\pi - x),\ v_5 = x^5(\pi - x)$
nebo
$v_1 = x \sin x,\ v_2 = x^2 \sin x,\ v_3 = x^3 \sin x,\ v_4 = x^4 \sin x,\ v_5 = x^5 \sin x,$

hledáme minimum funkce

$$g(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \equiv F(u_c) \equiv (Au_c, u_c) - 2(f, u_c)$$

pěti proměnných, tj. $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^\mathrm{T}$.
Podmínky minima: nulové parciální derivace, z nich dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}
(v_1, v_1)_A c_1 + (v_1, v_2)_A c_2 + (v_1, v_3)_A c_3 + (v_1, v_4)_A c_4 + (v_1, v_5)_A c_5 &= (f, v_1),\\
(v_2, v_1)_A c_1 + (v_2, v_2)_A c_2 + (v_2, v_3)_A c_3 + (v_2, v_4)_A c_4 + (v_2, v_5)_A c_5 &= (f, v_2),\\
(v_3, v_1)_A c_1 + (v_3, v_2)_A c_2 + (v_3, v_3)_A c_3 + (v_3, v_4)_A c_4 + (v_3, v_5)_A c_5 &= (f, v_3),\\
(v_4, v_1)_A c_1 + (v_4, v_2)_A c_2 + (v_4, v_3)_A c_3 + (v_4, v_4)_A c_4 + (v_4, v_5)_A c_5 &= (f, v_4),\\
(v_5, v_1)_A c_1 + (v_5, v_2)_A c_2 + (v_5, v_3)_A c_3 + (v_5, v_4)_A c_4 + (v_5, v_5)_A c_5 &= (f, v_5).
\end{aligned}$$

Matice $\tilde{A}$ soustavy je symetrická (protože $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$), pozitivně definitní (protože $(\tilde{A}c, c) = (u_c, u_c)_A > 0$) a plná.

Konkrétní příklady v minulé přednášce.

Ritzova metoda – odhad chyby Nechť $u^* \in \mathcal{D}(A)$ je přesné řešení operátorové rovnice $Au = f$ a $u_{\text{Ritz}} \in \mathcal{D}(A)$ její přibližné řešení získané Ritzovou metodou. Nechť dále perátor A je s.p.d. a $c > 0$ je konstanta z pozitivní definitnosti. Platí

$$
\begin{aligned}
Au^* &= f, \\
Au^* - Au_{\text{Ritz}} &= f - Au_{\text{Ritz}}, \\
A(u^* - u_{\text{Ritz}}) &= f - Au_{\text{Ritz}}, \\
(A(u^* - u_{\text{Ritz}}), u^* - u_{\text{Ritz}}) &= (f - Au_{\text{Ritz}}, u^* - u_{\text{Ritz}}).
\end{aligned}
$$

Levou stranu odhadneme zdola pomocí pozitivní definitnosti operátoru A, pravou stranu odhadneme shora Cauchyovou-Schwarzovou nerovností

$$
\begin{aligned}
c\|u^* - u_{\text{Ritz}}\|^2_{L^2(a,b)} &\le (A(u^* - u_{\text{Ritz}}), u^* - u_{\text{Ritz}}) = (f - Au_{\text{Ritz}}, u^* - u_{\text{Ritz}}) \\
&\le \|f - Au_{\text{Ritz}}\|_{L^2(a,b)} \|u^* - u_{\text{Ritz}}\|_{L^2(a,b)}.
\end{aligned}
$$

Po úpravě $\|u^* - u_{\text{Ritz}}\|_{L^2(a,b)} \le \frac{1}{c}\|f - Au_{\text{Ritz}}\|_{L^2(a,b)}$.

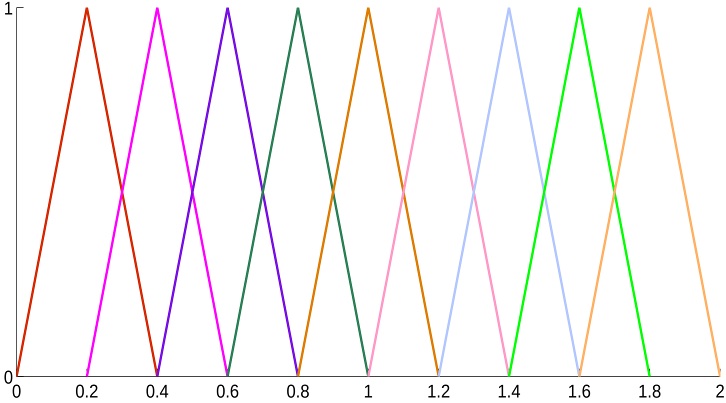
[Příklady ve sbírce.]

Ještě jiný systém bázových funkcí

Metoda konečných prvků (MKP)

Báze sestává ze spojitých funkcí, jež jsou po částech polynomiální a jsou nenulové jen na malé části intervalu (mají malý nosič).
Nejjednodušší jsou spojité, po částech lineární funkce.

Bázové funkce našeho aproximačního podprostoru konečné dimenze budou spojité, po částech lineární, definované na rovnoměrném dělení intervalu $[a, b]$, s hodnotou 1 pouze v jediném uzlu dělení a v ostatních uzlech nulové. Bázové funkce splňují okrajové podmínky.



MKP: Devět bázových funkcí s nosičem délky 0,4. Funkce nejsou 2x spojitě diferencovatelné, neleží tedy v $\mathcal{D}(A)$, patří však do prostoru H_A.

Nechť $v_1, \dots, v_m$ jsou takové bázové funkce. Přibližné řešení opět hledáme ve tvaru lineární kombinace s neznámými koeficienty $c_1, \dots, c_m$

$$u_c = \sum_{i=1}^{m} c_i v_i .$$

Opět se minimalizuje funkcionál energie

$$g(c) = F(u_c) = (u_c, u_c)_A - 2(f, u_c).$$

Tentokrát je g funkcí m proměnných tvořících vektor $c = (c_1, \dots, c_m)^\mathsf{T}$.

Podmínka nulových parciálních derivací vede na soustavu m lin. alg. rovnic pro neznámý vektor $c = (c_1, \dots, c_m)^{\mathrm{T}}$

$$(v_i, v_1)_A c_1 + (v_i, v_2)_A c_2 + \cdots + (v_i, v_m)_A c_m = (f, v_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Soustavu lze psát $\quad Mc = \tilde{f}, \quad$ kde matice M je symetrická, pozitivně definitní, pásová a řídká, vektor $\tilde{f}$ má m složek.

Opět lze dokázat, že přibližná řešení konvergují k přesnému řešení, pokud $m \to \infty$, tj. $h \to 0$, kde $h = (b - a)/(m + 1)$.
Řád konvergence.

MKP řešme problém

$$-u'' + (1 + \sin^2 x)u = 4, \quad u(0) = 0 = u(\pi).$$

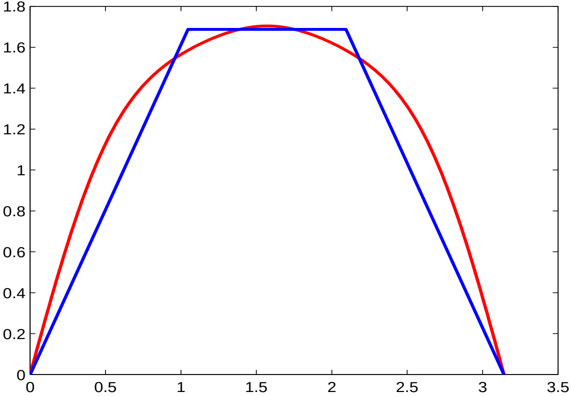
Operátor $A = -u'' + (1 + \sin^2 x)u$ je symetrický a pozitivně definitní na svém $\mathcal{D}(A)$ i H_A.

Prvky matice soustavy a pravé strany:

$$(v_i, v_j)_A = \int_0^\pi \left(v_i' v_j' + (1 + \sin^2 x) v_i v_j \right) \, \mathrm{d}x,$$

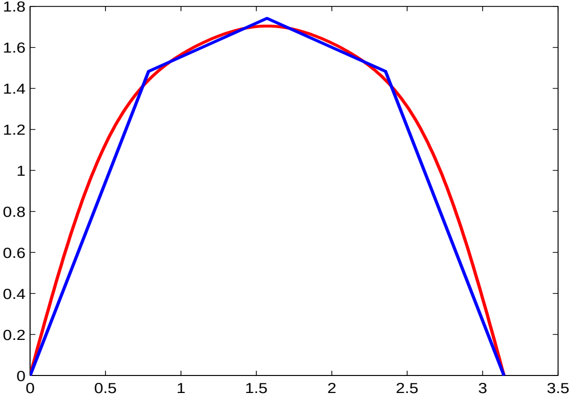
$$(f, v_i) = 4 \int_0^\pi v_i \, \mathrm{d}x.$$

Řešení pro $m = 2$



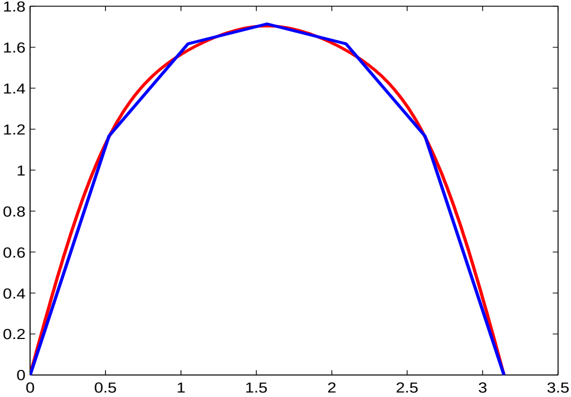
Přesné řešení červeně, přibližné se 2 bázovými funkcemi modře ($u_c = 1,688 v_1 + 1,688 v_2$).

Řešení pro $m = 3$



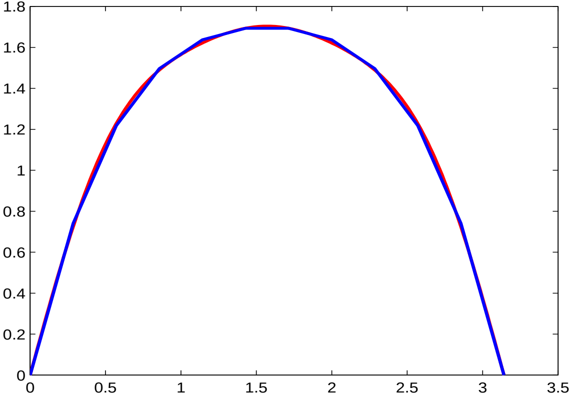
Přesné řešení červeně, přibližné se 3 bázovými funkcemi modře ($u_c = 1,483v_1 + 1,742v_2 + 1,483v_3$).

Řešení pro $m = 5$



Přesné řešení červeně, přibližné s 5 bázovými funkcemi modře.

Řešení pro $m = 10$



Přesné řešení červeně, přibližné s 10 bázovými funkcemi modře.

Vetknutý nosník modelovaný ODR s okrajovými podmínkami

$$\big(E(x)I(x)u''\big)'' = f(x),$$
$$u(0) = u'(0) = u(L) = u'(L) = 0,$$

kde $E(x)$ je (nekonstantní) Youngův modul pružnosti, $I(x)$ je (nekonstantní) moment setrvačnosti průřezu nosníku a f je zatížení kolmé na podélnou osu nosníku.

Diferenciální operátor $\quad Au = \big(EIu''\big)''$,
$\mathcal{D}(A) = \{u \in C^4([0, L]) : \; u(0) = u'(0) = u(L) = u'(L) = 0\}$
operátorová rovnice: najít $u \in \mathcal{D}(A)$, aby $Au = f$.

Funkcionál energie

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \int_0^L EIu''^2 \, \mathrm{d}x - 2\int_0^L fu \, \mathrm{d}x.$$

.

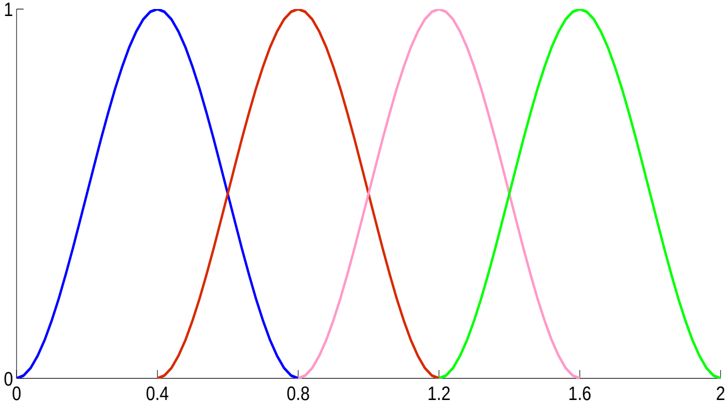
Operátor je symetrický a pozitivně definitní.

Pozit. def.: Víme, že pokud $u(0) = 0$, pak $\|u'\|^2 \geq \|u\|^2/L^2$.
Z $u'(0) = 0$ ovšem plyne $\|u''\|^2 \geq \|u'\|^2/L^2 \geq \|u\|^2/L^4$. Tudíž

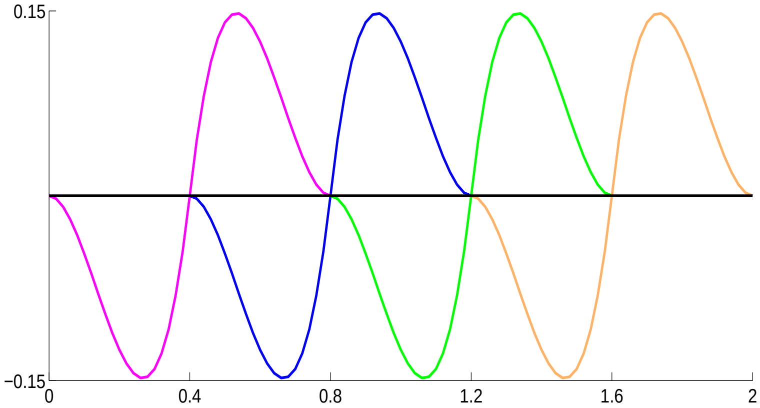
$$
\begin{aligned}
(Au, u) &= \int_0^L EIu''^2 \, \mathrm{d}x \\
&\geq \min_{x \in [0,L]} \big(E(x)I(x)\big) \int_0^L u''^2 \, \mathrm{d}x \\
&\geq \min_{x \in [0,L]} \big(E(x)I(x)\big) \frac{\|u\|^2}{L^4}.
\end{aligned}
$$

Zúplnění: prostor H_A – funkce integrovatelné s kvadrátem do 2. derivace včetně, splňující okrajové podmínky, spojité do první derivace včetně.

Metoda konečných prvků vhodná pro úlohy s rovnicí 4. řádu: bázi tvoří dva typy funkcí se spojitou první derivací.



MKP: Síť s vnitřními uzly v bodech 0,4, 0,8, 1,2 a 1,6. Čtyři „jednohrbé“ bázové funkce s nosičem délky 0.8 a další . . .



. . . čtyři „dvouhrbé“ bázové funkce také s nosičem délky 0.8. Celkem 8 bázových funkcí, tj. každému vnitřnímu uzlu sítě jsou přiřazeny dvě bázové funkce, jedna má v uzlu nenulovou hodnotu, druhá má v uzlu nenulovou derivaci.

Proč bázové funkce v MKP mohou mít body, v nichž neexistuje (klasická) derivace?

Řekneme, že funkce $v \in L^2(a,b)$ je zobecněnou první derivací podle proměnné x funkce $u \in L^2(a,b)$, platí-li pro každou funkci $\phi \in C_0^\infty(a,b)$

$$\int_a^b v\phi \,\mathrm{d}x = -\int_a^b u\phi' \,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

kde $C_0^\infty(a,b)$ je prostor všech funkcí nekonečně spojitě diferencovatelných v (a,b) a nulových v nějakém okolí bodů a, b. Jestliže $u \in C^1(a,b)$, pak $v \equiv u'$ a v je derivace funkce u v klasickém smyslu.

Příklad: Nechť $u \in C([0,2])$, $u|_{[0,1]} = x$, $u|_{[1,2]} = 2 - x$. Najděte zobecněnou derivaci funkce u.

Označme $\phi' \equiv \dfrac{d\phi}{dx}(x)$ a $u' \equiv \dfrac{du}{dx}(x)$. Pak

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 u\phi' \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 u\phi' \, \mathrm{d}x + \int_1^2 u\phi' \, \mathrm{d}x \\
&= [u\phi]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u'\phi \, \mathrm{d}x + [u\phi]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 u'\phi \, \mathrm{d}x \\
&= u(1)\phi(1) - u(1)\phi(1) - \int_0^1 1\phi \, \mathrm{d}x - \int_1^2 (-1)\phi \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^2 v\phi \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

kde $v \in L^2(0,2)$, $v|_{(0,1)} = 1$, $v|_{(1,2)} = -1$, a $\phi \in C_0^\infty(0,2)$.

Tedy $\hat{u}' \stackrel{\text{def}}{=} v$ je derivací u v zobecněném smyslu.

Pozor: $\int_0^2 \hat{u}'\phi' \, \mathrm{d}x = 2\phi(1)$. Souvislost s Diracovou delta funkcí.

Jiná cesta k zobecněnému řešení

Ukažme si ji na příkladu.

Mějme okrajovou úlohu

$$-u''(x) + (3 - \sin x)u(x) = \exp(x), \quad u(0) = 0 = u(\pi) \tag{3}$$

Rovnici (3) vynásobme funkcí v a integrujme s využitím metody integrace p. p.

$$\int_0^\pi \left(u'v' + (3 - \sin x)uv\right) \, \mathrm{d}x = \int_0^\pi v \exp(x) \, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Pozorování: Platí-li (3), pak platí i (4).
Myšlenka: Jestliže bude (4) platit pro “hodně” funkcí v, pak by mohlo platit i (3).

Hledáme takovou funkci u z prostoru V, aby platilo

$$\int_0^{\pi} \left(u'v' + (3 - \sin x)uv\right)\, dx = \int_0^{\pi} v \exp(x)\, dx \quad \forall v \in V, \qquad (5)$$

kde V je vhodný, dostatečně bohatý prostor funkcí, které splňují okrajové podmínky (ale nemusejí ležet v $C^2([0,\pi])$).

Ukáže se, že $V \equiv H_A$, kde H_A je nám již známý prostor, který vznikl zúplněním $\mathcal{D}(A)$ pomocí symetrického a pozitivně definitního operátoru $Au = -u'' + (3 - \sin x)u$.

(5) je speciálním případem (pro $f(x) \equiv \exp(x)$) rovnice

$$a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V, \qquad (6)$$

kde $a(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi} (u'v' + (3 - \sin x)uv)\, dx$. Minimalizace funkcionálu energie a formulace (6) jsou shodné, jestliže A je sym. poz. def. operátor. Formulaci (6) se říká slabá formulace s bilineární formou $a(u,v)$ (A nemusí být symetrický), jejímu řešení se říká slabé řešení. Prostor V definován přímo jako podprostor Sobolevova prost.

Jak vypadá prostor V?

$$V = \{u \in L^2(0,\pi) : u' \in L^2(0,\pi), u(0) = 0 = u(\pi)\} \subset C([0,\pi]).$$

Existenci a jednoznačnost řešení úlohy (6) se spojitým a poz. def. operátorem [nemusí být symetrický; se spojitou a koercivní (též V-eliptickou) bilineární formou $a(\cdot,\cdot)$] dokazuje **Laxovo-Milgramovo lemma**.

Jiná cesta ke slabému řešení – stejný způsob přibližného řešení

Úlohu najít takovou funkci $u \in V$, aby platilo

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \tag{7}$$

aspoň přibližně vyřešíme tím, že místo prostoru V uvažujeme prostor $V_n \subset V$ konečné dimenze s bází $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Mějme například $V_1 = \{cv_1 : c \in \mathbb{R}\}$, kde
$v_1(x) \equiv \sin(x), \; x \in [0, \pi]$.

Hledáme u ve tvaru $u = \eta v_1$, kde $\eta \in \mathbb{R}$ neznáme.
Funkce v (viz (7)) bude mít obecný tvar $v = \beta v_1$, kde β je libovolné reálné číslo.
Dosadíme do (7).

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= (f,v) \quad \forall v \in V_1 \\
a(\eta v_1, \beta v_1) &= (f, \beta v_1) \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \\
\eta\beta a(v_1,v_1) &= \beta(f,v_1) \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \\
\eta a(v_1,v_1) &= (f,v_1) \qquad (8) \\
\eta &= \frac{(f,v_1)}{a(v_1,v_1)} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Vztahy (8) a (9) známe z přibližného řešení založeného na minimalizaci funkcionálu energie!

Obdobně pro prostor V_n s více bázovými funkcemi.

Při aproximaci (7) na V_n stačí za v vzít jen bázové funkce!!

Dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic. Její řešení dává n-tici koeficientů lineární kombinace bázových funkcí. Tato lineární kombinace je přibližným řešením úlohy (7).

Shrnutí

- Je-li operátor s.p.d., minimalizací funkcionálu energie na rozšířeném prostoru H_A získáme zobecněné řešení.
- Operátor není symetrický, ale definuje koercivní[1] bilineární formu, získáme[2] slabé řešení v rozšířeném prostoru.
- Řešení OÚ je v obou případech převedeno na řešení soustavy lin. alg. rovnic.
- Je-li operátor symetrický, je i matice soustavy symetrická.
- Je-li operátor pozit. def., je i matice soustavy pozit. def.
- Na rozdíl od Ritzovy metody s bázovými funkcemi definovanými na celém intervalu, u MKP je matice soustavy řídká a pásová.

[1] Též se říká V-eliptickou formu, tj. $a(u,u) \geq c\|u\|^2$, kde $c > 0$.

[2] Za dalších, v běžných úlohách splněných předpokladů.

Lineární zobrazení

Mějme zobrazení F z vektorového prostoru U do vektorového prostoru V. Řekneme o něm, že je lineární, pokud platí, že

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \forall u_1, u_2 \in U \qquad F(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 F(u_1) + c_2 F(u_2).$$

Příklady lineárních zobrazení:

- derivace funkce
- určitý integrál
- primitivní funkce (s nulovou integrační konstantou)
- násobení vektoru maticí
- násobení matic
- zobrazení, které pravé straně jednoznačně řešitelné lineární OÚ s homogenními OP přiřadí řešení (vzpomeňte si na superpozici řešení)