Předmět: MA4

Dnešní látka:

- Od okrajových úloh v 1D k o. ú. ve 2D
- Laplaceův diferenciální operátor
- Variačně formulované okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice a metody jejich přibližného řešení
- Zobecněná derivace
- Obecná Dirichletova okrajová podmínka

Literatura:

- Kapitoly 3 a 4 ze skript *Karel Rektorys: Matematika 43, ČVUT, Praha, 2001*.
- Text přednášky na webové stránce přednášejícího.

Co jsme udělali:

$$-\left(p(x)u'\right)' + q(x)u = f, \quad u(a) = 0 = u(b)$$

$$\Updownarrow$$

$$Au = f, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

$$\Downarrow \quad \Uparrow$$

$$\min_{v \in H_A} F(v),$$

kde $\quad Au = -(p(x)u')' + q(x)u \quad$ a $\quad F(v) = (Av, v) - 2(f, v)$.
A je symetrický a pozitivně definitní operátor ($p(x) > 0$ pro $a \leq x \leq b$; s $q(x)$ je to složitější, ale $q(x) \geq 0$ stačí).
H_A je zúplnění $\mathcal{D}(A)$ (doplnění $\mathcal{D}(A)$ o další funkce - limity).

Zobecnění do 2D a 3D?

Variačně formulované okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice.

Laplaceův operátor

v $\mathbb{R}^2$ (E_2)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

v $\mathbb{R}^3$ (E_3)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

Laplaceova rovnice v $\mathbb{R}^2$

$$\Delta u = 0.$$

Řešení např. $u = 5x_1 + 9x_2$, $u = 8x_1^2 - 8x_2^2$.

Poissonova rovnice v $\mathbb{R}^2$

$$\Delta u = f,$$

kde $f \in C(\mathbb{R}^2)$ je zadaná funkce.

Pro $f = -2 \sin x_1 \cos x_2$, řešení např. $u = \sin x_1 \cos x_2$.

Obdobně Poissonova rovnice v $\mathbb{R}^3$: $\Delta u = f$.

Laplaceův operátor se hojně vyskytuje ve fyzice (rovnice pro elektrický nebo gravitační potenciál, vedení tepla, šíření vln).

Okrajové úlohy pro Poissonovu (Laplaceovu) rovnici

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: otevřená, omezená a souvislá množina v $\mathbb{R}^n$.

Předpoklady: Ω je omezená oblast a její hranice Γ (často též značeno $\partial\Omega$) je lipschitzovská.

Okrajová úloha: $\Delta u = f$ v Ω a na Γ okrajová podmínka

- Dirichletova: $u = g$ na Γ, kde funkce g je na hranici Γ předepsána;
- Neumannova: $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h$ na Γ, kde funkce h je zadaná na hranici Γ (derivace řešení podle jednotkové vnější normály ν);
- Newtonova: $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = h$ na Γ, kde funkce α a h jsou zadané na hranici Γ.

Dirichletův (Neumannův, Newtonův) problém pro Poissonovu rovnici.

Poznámka: Harmonické funkce

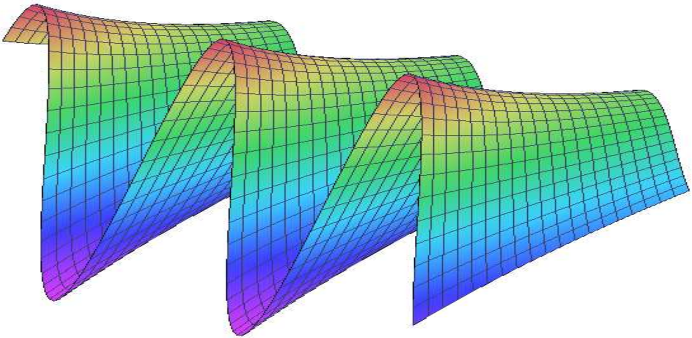
Funkce $u(x_1, \dots, x_n)$, která je v oblasti Ω spojitá včetně derivací

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

a splňuje v Ω rovnici $\Delta u = 0$, se nazývá harmonická v Ω.

Věta o maximu harmonické funkce. Nechť u je funkce spojitá v $\overline{\Omega}$ a harmonická v Ω. Pak pro každý bod $y \in \overline{\Omega}$ platí

$$\min_{x \in \Gamma} u(x) \leq u(y) \leq \max_{x \in \Gamma} u(x).$$



Harmonická funkce $e^x(\sin y + \cos y)$, $\quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 5\pi]$.

Konec poznámky.

Dirichletův problém pro Poissonovu rovnici podrobněji

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\Gamma)$
Hledáme funkci u, která splňuje

- je spojitá v uzavřené oblasti $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$;
- má v Ω spojité parciální derivace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$

  a splňuje v Ω rovnici $\Delta u = f$;
- v každém bodě hranice Γ platí $u = g$.

Stručně $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \ \text{ v } \ \Omega, \\ u &= g \ \text{ na } \ \Gamma. \end{aligned}$$

Každou funkci s těmito vlastnostmi nazýváme (klasickým) řešením Dirichletova problému pro Poissonovu rovnici.

Obdobně pro $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a pro $f = 0$ (Dirichletův problém pro Laplaceovu rovnici).

Existuje (klasické) řešení?

Ano – pro speciální Ω, f a g. Obecně ale existence klasického řešení není zaručena.

Je možné úlohu formulovat pomocí operátoru a přejít k variačním metodám?

Pro jednoduchost předpokládejme $g = 0$.
Pak operátor $A : \mathcal{D}(A) \to C(\Omega)$ je dán předpisem $Au = \Delta u$ a definičním oborem

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : \; u|_\Gamma = 0\}.$$

V 1D byla pro přechod k zobecněnému řešení klíčová symetrie operátoru a pozitivní definitnost operátoru (pak bylo možné zúplnit/rozšířit $\mathcal{D}(A)$ na H_A a v H_A existovalo minimum funkcionálu energie).

Lze podobně postupovat i u Dirichletovy úlohy?

Co je obdobou integrace po částech, kterou známe z 1D úloh?

Greenova věta

Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť funkce $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ a $g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$ jsou spojité v $\Omega \cup \Gamma$ včetně parciálních derivací $\partial f/\partial x_i$, $\partial g/\partial x_i$ pro některý index i. Pak platí

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma f g \nu_i \,\mathrm{d}S - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x,$$

kde ν_i je i-tá souřadnice jednotkového vektoru vnější normály.

Poznámka: Greenova věta z MA3 pro vektorovou funkci f, tj. $\int_\Gamma f \cdot \nu \,\mathrm{d}s = \int_\Omega \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x$, plyne z nynější verze Gr. věty při volbě $g = 1$.

Připomeňme, že i pro funkce $u, v \in C(\overline{\Omega})$ je skalární součin definován analogicky jako v případě 1D, tj.

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

jde tedy o dvojný (případně trojný, vícerozměrný) integrál.

Operátor daný předpisem $Au = -\Delta u$ je na $\mathcal{D}(A) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : \ u|_{\Gamma} = 0\}$ symetrický.

Díky Greenově větě totiž pro $u, v \in \mathcal{D}(A)$ platí

$$(Au, v) = (u, Av) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x,$$

neboť integrály přes hranici Γ jsou nulové.

Operátor A je pozitivní:

$$u \in \mathcal{D}(A),\ u \neq 0 \Rightarrow (Au, u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x > 0.$$

Je pozitivně definitní?

Friedrichsova nerovnost [K. Rektorys:Variační metody ..., SNTL, Praha, 1974 (upraveno)]

Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí; uvažujme funkce z prostoru $C^1(\Omega \cup \Gamma)$. Pak existuje kladná konstanta c, závislá na Ω, ale nezávislá na funkcích z $C^1(\Omega \cup \Gamma)$ a taková, že pro každou funkci $u \in C^1(\Omega \cup \Gamma)$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \mathrm{d}x + \int_\Gamma u^2(S) \, \mathrm{d}S \geq c \int_\Omega u^2(x) \, \mathrm{d}x = c \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Díky Friedrichsově nerovnosti pro $u \in \mathcal{D}(A)$ (je tedy $u = 0$ na Γ) platí

$$(Au, u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\geq c \int_\Omega u^2(x) \, \mathrm{d}x = c \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Operátor A je tudíž pozitivně definitní.

Můžeme tedy (vyšedše z operátorové rovnice $Au = f$)

- definovat energetický skalární součin $(u, v)_A = (Au, v)$ a energetickou normu $\|u\|_A = \sqrt{(Au, u)}$;
- definovat prostor H_A jako zúplnění prostoru $\mathcal{D}(A)$;
- definovat na H_A funkcionál energie $F(u) = (u, u)_A - 2(f, u)$;
- definovat zobecněné řešení rovnice $Au = f$ jako funkci $u \in H_A$, v níž F nabývá svého minima na H_A (minimum existuje);
- hledat přibližné řešení u_k Ritzovou metodou, tj. hledat koeficienty $a_1, \dots, a_k$ v lineární kombinaci $u_k = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$, kde funkce $v_1, \dots, v_k$ jsou pevně dány a u_k minimalizuje hodnotu funkcionálu energie na prostoru všech lineárních kombinací funkcí $v_1, \dots, v_k$.

Několik obrázků bázových funkcí

$\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ (obdélník)

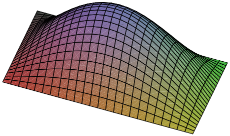
Trigonometrická báze

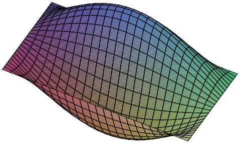
$$v_1 = \sin \frac{\pi x_1}{L_1} \sin \frac{\pi x_2}{L_2},$$

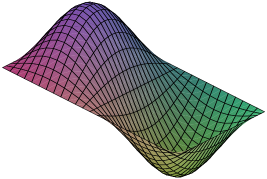
$$v_2 = \sin \frac{2\pi x_1}{L_1} \sin \frac{\pi x_2}{L_2}, \quad v_3 = \sin \frac{\pi x_1}{L_1} \sin \frac{2\pi x_2}{L_2},$$

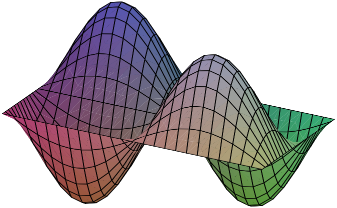
$$v_4 = \sin \frac{3\pi x_1}{L_1} \sin \frac{\pi x_2}{L_2}, \quad v_5 = \sin \frac{2\pi x_1}{L_1} \sin \frac{2\pi x_2}{L_2}, \quad v_6 = \sin \frac{\pi x_1}{L_1} \sin \frac{3\pi x_2}{L_2},$$

....

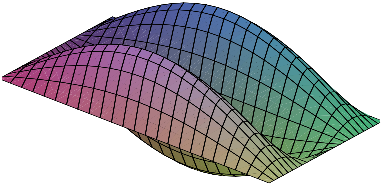


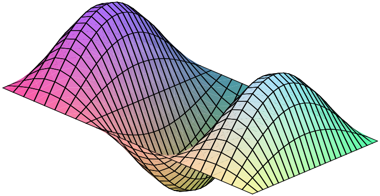






$\sin\frac{2\pi x_1}{L_1}\sin\frac{2\pi x_2}{L_2}$



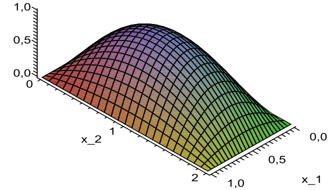


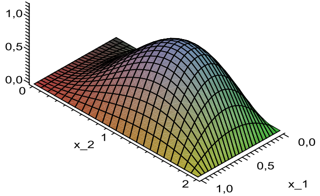
$\sin\frac{3\pi x_1}{L_1}\sin\frac{\pi x_2}{L_2}$

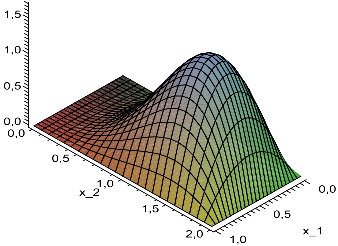
$\sin\frac{\pi x_1}{L_1}\sin\frac{3\pi x_2}{L_2}$

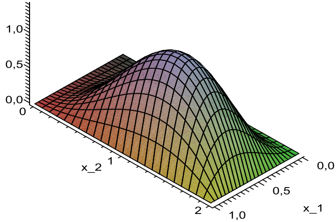
Polynomiální báze $\quad g = x_1 x_2 (L_1 - x_1)(L_2 - x_2)$

$$v_1 = g, \quad v_2 = x_1 g, \quad v_3 = x_2 g, \quad v_4 = x_1^2 g, \quad v_5 = x_1 x_2 g, \quad v_6 = x_2^2 g, \ \ldots$$



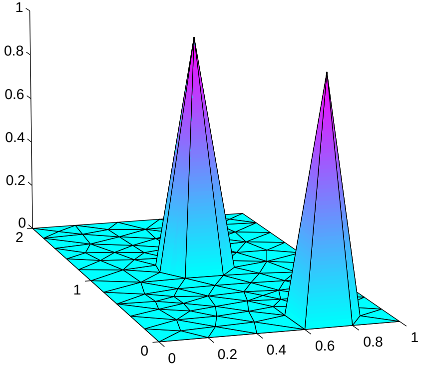






Metoda konečných prvků (MKP)

různé typy spojitých bázových funkcí s malým nosičem.
Nejjednodušší – po částech lineární.
Na rozdíl od předchozí báze (Ritzova metoda), tato báze zajistí, že výsledná soustava lineárních algebraických rovnic bude mít řídkou matici.



Obě metody (Ritzova, MKP) opět vedou k řešení soustavy lineárních algebraických rovnic přímou nebo iterační metodou.

Sestavení soustavy (její matice a pravé strany) je pracné kvůli integraci, používá se integrace numerická.

Vraťme se ještě k původní úloze a minimalizaci funkcionálu energie.

Nechť $u \in H_A$ je bodem minima energetického funkcionálu a $v \in H_A$. Definujme $\phi(t) = F(u + tv)$ a upravme

$$\begin{aligned}\phi(t) = F(u+tv) &= (u+tv, u+tv)_A - 2(f, u+tv) \\ &= (u,u)_A + 2t(u,v)_A + t^2(v,v)_A - 2(f,u) - 2t(f,v).\end{aligned}$$

Z podmínky minima $\phi'(0) = 0$ (čárka značí derivaci dle t). Tedy

$$(u, v)_A = (f, v)$$

musí platit pro $\forall v \in H_A$.
Opět se tedy setkáváme s ekvivalentní úlohou: Najdi $u \in H_A$ takové, že platí

$$(u, v)_A = (f, v) \quad \forall v \in H_A,$$

která má totéž zobecněné řešení u jako minimalizace funkcionálu energie. Tuto formulaci můžeme odvodit i bez minimalizace funkcionálu energie.

Jiná cesta k zobecněnému řešení

Jestliže $-\Delta u = f$ v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pak

$$-\int_\Omega \Delta u v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x$$

pro každou funkci v z vhodného “velkého" prostoru **?**.
S užitím Greenovy věty a $u = 0$ na Γ odvodíme slabě formulovanou úlohu: Najdi funkci $u \in$ **?** takovou, aby platilo

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \qquad \forall v \in \textbf{?}.$$

Potřebujeme, aby takto formulovaná úloha měla řešení u, které sice nemusí ležet v $C^2(\overline{\Omega})$, avšak v případě, že náhodou $u \in C^2(\overline{\Omega})$, aby platilo $-\Delta u = f$ v Ω a $u = 0$ na Γ.
Ukáže se (netriviálně), že na místě **?** potřebujeme prostor H_A, který známe z úvah o minimu funkcionálu energie (zúplnění $\mathcal{D}(A)$).

Jak si představit funkce z prostoru H_A?

$H_A = \{u \in L^2(\Omega) : \partial u/\partial x_1,\, \partial u/\partial x_2 \in L^2(\Omega),\ \ u|_\Gamma = 0\}$, kde však derivace jsou zobecněné:

Řekneme, že funkce $v_{,i} \in L^2(\Omega)$ je zobecněnou první parciální derivací podle proměnné x_i funkce $u \in L^2(\Omega)$, platí-li pro každou funkci $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega v_{,i}\phi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x, \qquad (1)$$

kde $C_0^\infty(\Omega)$ je prostor všech funkcí nekonečně spojitě diferencovatelných v Ω a nulových v nějakém okolí hranice oblasti Ω. Jestliže $u \in C^1(\Omega)$, pak $v_{,i} \equiv \partial u/\partial x_i$ a $v_{,i}$ je parciální derivace funkce u v klasickém smyslu. V pozadí (1) stojí Greenova věta.

Platnost $u|_\Gamma = 0$ též v jistém zobecněném smyslu (nulová stopa funkce).

Příklad v 1D: Nechť $u \in C([0,2])$, $u|_{[0,1]} = x$, $u|_{[1,2]} = 2 - x$. Najděte zobecněnou derivaci funkce u.

Označme $\phi' \equiv \dfrac{d\phi(x)}{dx}$ a $u' \equiv \dfrac{du(x)}{dx}$. Pak

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 u\phi' \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 u\phi' \, \mathrm{d}x + \int_1^2 u\phi' \, \mathrm{d}x \\
&= [u\phi]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u'\phi \, \mathrm{d}x + [u\phi]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 u'\phi \, \mathrm{d}x \\
&= u(1)\phi(1) - u(1)\phi(1) - \int_0^1 1\phi \, \mathrm{d}x - \int_1^2 (-1)\phi \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^2 \hat{u}'\phi \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

kde $\hat{u}' \in L^2([0,2])$, $\hat{u}'|_{[0,1)} = 1$, $\hat{u}'|_{(1,2]} = -1$, a $\phi \in C_0^\infty(0,2)$.

Pozor

$$\int_0^2 \hat{u}'\phi' \,\mathrm{d}x = 2\phi(1).$$

Souvislost s Diracovou delta funkcí.

Prostor H_A byl sice původně definován pomocí operátoru A, ale lze jej definovat přímo, bez operátoru A. Značí se $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$; pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathring{W}^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial u/\partial x_1,\, \partial u/\partial x_2 \in L^2(\Omega),\;\, u|_\Gamma = 0\}.$$

Ještě obecnější (bez podmínky nulovosti na hranici) je prostor $W^{1,2}(\Omega)$ (Sobolevův prostor)

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial u/\partial x_1,\, \partial u/\partial x_2 \in L^2(\Omega)\}.$$

Jest $\mathring{W}^{1,2}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$.
Na obou prostorech je definován speciální skalární součin funkcí (užívá i derivace!)

$$\begin{aligned}(u,v)_{W^{1,2}(\Omega)} &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\, \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2},\, \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Norma $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{W^{1,2}(\Omega)}}$.

Prostor $W^{1,2}(\Omega)$ (i $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$) je úplný (každá posloupnost cauchyovská v normě $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ má limitu z $W^{1,2}(\Omega)$).

Shrnutí

Klasické řešení úlohy: najít $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, aby

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$
$$u = 0 \text{ na } \Gamma.$$

Slabé řešení úlohy: najít $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, aby

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \quad \forall v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega). \tag{2}$$

(Odpovídá nulové derivaci funkcionálu energie v každém směru $v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$.)

Díky symetrii operátoru je (2) ekvivalentní minimalizaci funkcionálu energie na $H_A \equiv \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, řešení u je v obou případech stejné.

Přibližné řešení rovnice

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \qquad \forall v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$$

na podprostoru $V_m \subset \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ konečné dimenze opět ve tvaru lineární kombinace bázových funkcí v_i, tj. $u_m = \sum_{i=1}^m c_i v_i$,

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \sum_{i=1}^m c_i v_i}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial \sum_{i=1}^m c_i v_i}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x ,$$

$$\sum_{i=1}^m c_i \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v_i}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \quad \forall v \in V_m .$$

Místo testování funkcemi $v \in V_m$ stačí užít jen $v_1, \dots, v_m$.
Dostaneme soustavu m lin. alg. rovnic pro neznámý vektor $c = (c_1, \dots, c_m)^T$,

$$(v_i, v_1)_A c_1 + (v_i, v_2)_A c_2 + \cdots + (v_i, v_m)_A c_m = (f, v_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Tuto soustavu známe z Ritzovy metody a z MKP!!!

Obecná Dirichletova okrajová podmínka

Klasické řešení úlohy: najít $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, aby

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$
$$u = g \text{ na } \Gamma.$$

Slabé řešení úlohy: Vezměme takovou funkci $w \in W^{1,2}(\Omega)$, aby splňovala $w = g$ na Γ, pak hledáme $u \in W^{1,2}(\Omega)$, pro niž

$$u - w \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega),$$
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega).$$

Lze řešit např. užitím $u = w + u_0$, kde $u_0 \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx - \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega).$$

Příklad v 1D: Okrajová úloha

$$-u'' + e^x u = \cos x \quad \text{v } (0,3),$$
$$u(0) = 1, \quad u(3) = -5.$$

Zvolíme například $w(x) = 1 - 2x$, tj. $u = u_0 + w$, navíc dokonce $u'' = u_0''$. Pak OÚ pro neznámou funkci u_0:

$$-u_0'' + e^x(u_0 + w) = \cos x \quad \text{v } (0,3),$$
$$u_0(0) = 0, \quad u_0(3) = 0.$$

Slabá formulace: Najít $u_0 \in \mathring{W}^{1,2}([0,3])$, aby $\forall v \in \mathring{W}^{1,2}([0,3])$

$$\int_0^3 \left(u_0'(x)v'(x) + e^x u_0(x)v(x)\right)\,dx = \int_0^3 (\cos x - e^x(1-2x))v(x)\,dx.$$

Řešení původní úlohy je $u = u_0 + 1 - 2x \in W^{1,2}([0,3])$.