## Předmět: MA4

## Dnešní látka:

- Od okrajových úloh v 1D k o. ú. ve 2D
- Laplaceův diferenciální operátor
- Variačně formulované okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice a metody jejich přibližného řešení
- Zobecněná derivace
- Obecná Dirichletova, Neumanova a Newtonova okrajová podmínka

## Literatura:

- Kapitoly 3 a 4 ze skript *Karel Rektorys: Matematika 43, ČVUT, Praha, 2001*.
- Kapitola IV z knihy *Karel Rektorys: Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky, SNTL, Praha, 1974*.
- Text přednášky na webové stránce přednášejícího.

## Co jsme udělali:

$$-\left(p(x)u'\right)' + q(x)u = f, \quad u(a) = 0 = u(b)$$

$$\Updownarrow$$

$$Au = f, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

$$\Downarrow \quad \Uparrow$$

$$\min_{v \in H_A} F(v),$$

kde $\quad Au = -(p(x)u')' + q(x)u \quad$ a $\quad F(v) = (v, v)_A - 2(f, v)$.

$A$ je symetrický a pozitivně definitní operátor ($p(x) > 0$ pro $a \le x \le b$; s $q(x)$ je to složitější, ale $q(x) \ge 0$ stačí).
$H_A$ je zúplnění $\mathcal{D}(A)$ (doplnění $\mathcal{D}(A)$ o další funkce - limity).
$(Av, w)$ & int. po částech $= (v, w)_A$

**Zobecnění do 2D a 3D?**

## Variačně formulované okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice.

### Laplaceův operátor

v $\mathbb{R}^2$ ($E_2$)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

v $\mathbb{R}^3$ ($E_3$)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

### Laplaceova rovnice v $\mathbb{R}^2$

$$\Delta u = 0.$$

Řešení např. $u = 5x_1 + 9x_2$, $u = 8x_1^2 - 8x_2^2$.

Poissonova rovnice v $\mathbb{R}^2$

$$-\Delta u = f,$$

kde $f \in C(\mathbb{R}^2)$ je zadaná funkce.

Pro $f = 2\sin x_1 \cos x_2$, řešení např. $u = \sin x_1 \cos x_2$.

Obdobně Poissonova rovnice v $\mathbb{R}^3$: $-\Delta u = f$.

Laplaceův operátor se hojně vyskytuje ve fyzice (rovnice pro elektrický nebo gravitační potenciál, vedení tepla, šíření vln).

Poznámka: Znaménko minus z důvodů, kterým porozumíme později. Formulace se znaménkem plus je matematicky také správná, jen by pak ve fázi zobecnění problému bylo nutné rovnici vynásobit číslem $-1$.

## Okrajové úlohy pro Poissonovu (Laplaceovu) rovnici

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: otevřená, omezená a souvislá množina v $\mathbb{R}^n$.

Předpoklady: $\Omega$ je omezená oblast a její hranice $\Gamma$ (často též značeno $\partial\Omega$) je lipschitzovská.

Okrajová úloha: $-\Delta u = f$ v $\Omega$   a na $\Gamma$ okrajová podmínka

- Dirichletova: $u = g$ na $\Gamma$, kde funkce $g$ je na hranici $\Gamma$ předepsána;
- Neumannova: $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h$ na $\Gamma$, kde funkce $h$ je zadaná na hranici $\Gamma$ (derivace řešení podle jednotkové vnější normály $\nu$);
- Newtonova: $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = h$ na $\Gamma$, kde funkce $\alpha$ a $h$ jsou zadané na hranici $\Gamma$.

Dirichletův (Neumannův, Newtonův) problém pro Poissonovu rovnici.

## Dirichletův problém pro Poissonovu rovnici podrobněji

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\Gamma)$
Hledáme funkci $u$, která splňuje

- je spojitá v uzavřené oblasti $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$;
- má v $\Omega$ spojité parciální derivace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$
  a splňuje v $\Omega$ rovnici $-\Delta u = f$;
- v každém bodě hranice $\Gamma$ platí $u = g$.

Stručně $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f \ \text{ v } \ \Omega, \\
u &= g \ \text{ na } \ \Gamma.
\end{aligned}
$$

Každou funkci s těmito vlastnostmi nazýváme (klasickým) řešením Dirichletova problému pro Poissonovu rovnici.

Obdobně pro $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a pro $f = 0$ (Dirichletův problém pro Laplaceovu rovnici).

Existuje (klasické) řešení?

Ano – pro speciální $\Omega$, $f$ a $g$. Obecně ale existence klasického řešení není zaručena.

Je možné úlohu formulovat pomocí operátoru a přejít k variačním metodám?

Pro jednoduchost předpokládejme $g = 0$.
Pak operátor $A : \mathcal{D}(A) \to C(\Omega)$ je dán předpisem $Au = -\Delta u$ a definičním oborem

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : \; u|_\Gamma = 0\}.$$

V 1D byla pro přechod k zobecněnému řešení klíčová symetrie operátoru a pozitivní definitnost operátoru (pak bylo možné zúplnit/rozšířit $\mathcal{D}(A)$ na $H_A$ a v $H_A$ existovalo minimum funkcionálu energie).

Lze podobně postupovat i u Dirichletovy úlohy?

Co je obdobou integrace po částech, kterou známe z 1D úloh?

Greenova věta

Nechť $\Omega$ je oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť funkce $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ a $g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$ jsou spojité v $\Omega \cup \Gamma$ včetně parciálních derivací $\partial f / \partial x_i$, $\partial g / \partial x_i$ pro některý index $i$. Pak platí

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, \mathrm{d}x = \int_\Gamma f g \nu_i \, \mathrm{d}S - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x,$$

kde $\nu_i$ je $i$-tá souřadnice jednotkového vektoru vnější normály.

Poznámka: Greenova věta z MA3 pro vektorovou funkci $f$, tj. $\int_\Gamma f \cdot \nu \, \mathrm{d}s = \int_\Omega \operatorname{div} f \, \mathrm{d}x$, plyne z nynější verze Gr. věty při volbě $g = 1$.

Připomeňme, že i pro funkce $u, v \in C(\overline{\Omega})$ je skalární součin definován analogicky jako v případě 1D, tj.

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

jde tedy o dvojný (případně trojný, vícerozměrný) integrál.

Operátor daný předpisem $Au = -\Delta u$ je na $\mathcal{D}(A) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : \ u|_\Gamma = 0\}$ symetrický.

Díky Greenově větě totiž pro $u, v \in \mathcal{D}(A)$ platí

$$(Au, v) = (u, Av) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x,$$

neboť integrály přes hranici $\Gamma$ jsou nulové.

Operátor $A$ je pozitivní:

$$u \in \mathcal{D}(A),\ u \neq 0 \Rightarrow (Au, u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x > 0.$$

Je pozitivně definitní?

Friedrichsova nerovnost [K. Rektorys:Variační metody . . . , SNTL, Praha, 1974 (upraveno)]

Nechť $\Omega$ je oblast s lipschitzovskou hranicí; uvažujme funkce z prostoru $C^1(\Omega \cup \Gamma)$. Pak existuje kladná konstanta $c$, závislá na $\Omega$, ale nezávislá na funkcích z $C^1(\Omega \cup \Gamma)$ a taková, že pro každou funkci $u \in C^1(\Omega \cup \Gamma)$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \mathrm{d}x + \int_\Gamma u^2(S)\,\mathrm{d}S \geq c \int_\Omega u^2(x)\,\mathrm{d}x = c\|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Díky Friedrichsově nerovnosti pro $u \in \mathcal{D}(A)$ (je tedy $u = 0$ na $\Gamma$) platí

$$
\begin{aligned}
(Au, u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \, \mathrm{d}x \\
&\geq c \int_\Omega u^2(x) \, \mathrm{d}x = c \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Operátor $A$ je tudíž pozitivně definitní.

Můžeme tedy (vyšedše z operátorové rovnice $Au = f$)

- definovat energetický skalární součin $(u, v)_A = (Au, v)$ a energetickou normu $\|u\|_A = \sqrt{(Au, u)}$;
- definovat prostor $H_A$ jako zúplnění prostoru $\mathcal{D}(A)$;
- definovat na $H_A$ funkcionál energie $F(u) = (u, u)_A - 2(f, u)$;
- definovat zobecněné řešení rovnice $Au = f$ jako funkci $u \in H_A$, v níž $F$ nabývá svého minima na $H_A$ (minimum existuje);
- hledat přibližné řešení $u_k$ Ritzovou metodou, tj. hledat koeficienty $a_1, \ldots, a_k$ v lineární kombinaci $u_k = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$, kde funkce $v_1, \ldots, v_k$ jsou pevně dány a $u_k$ minimalizuje hodnotu funkcionálu energie na prostoru všech lineárních kombinací funkcí $v_1, \ldots, v_k$.

## Několik obrázků bázových funkcí pro Ritzovu metodu

$\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ (obdélník)

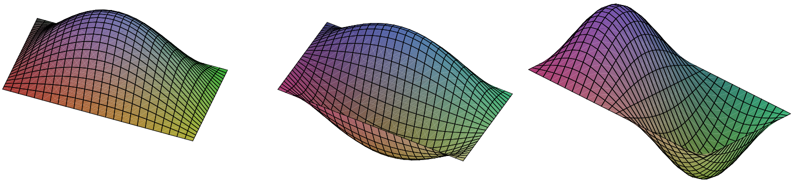
### Trigonometrická báze

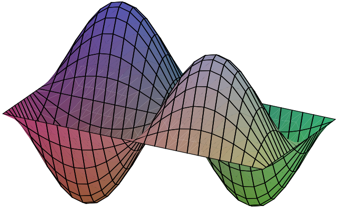
$$v_1 = \sin\frac{\pi x_1}{L_1}\sin\frac{\pi x_2}{L_2},$$

$$v_2 = \sin\frac{2\pi x_1}{L_1}\sin\frac{\pi x_2}{L_2}, \quad v_3 = \sin\frac{\pi x_1}{L_1}\sin\frac{2\pi x_2}{L_2},$$

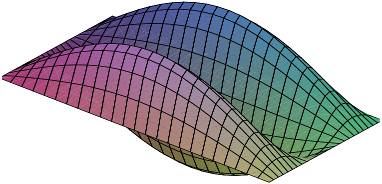
$$v_4 = \sin\frac{3\pi x_1}{L_1}\sin\frac{\pi x_2}{L_2}, \quad v_5 = \sin\frac{2\pi x_1}{L_1}\sin\frac{2\pi x_2}{L_2}, \quad v_6 = \sin\frac{\pi x_1}{L_1}\sin\frac{3\pi x_2}{L_2},$$

..................................................

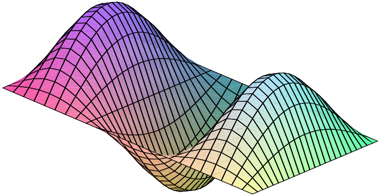




$\sin \frac{2\pi x_1}{L_1} \sin \frac{2\pi x_2}{L_2}$



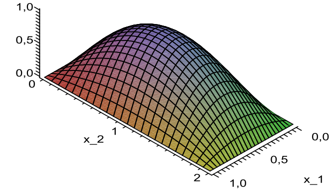
$\sin \frac{3\pi x_1}{L_1} \sin \frac{\pi x_2}{L_2}$

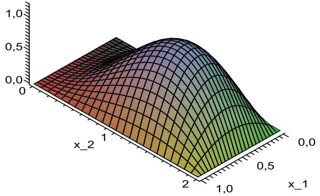


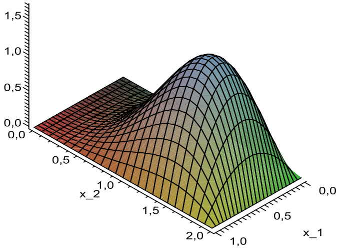
$\sin \frac{\pi x_1}{L_1} \sin \frac{3\pi x_2}{L_2}$

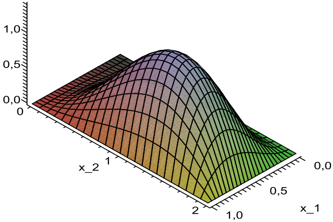
## Polynomiální báze $\quad g = x_1 x_2 (L_1 - x_1)(L_2 - x_2)$

$$v_1 = g, \quad v_2 = x_1 g, \quad v_3 = x_2 g, \quad v_4 = x_1^2 g, \quad v_5 = x_1 x_2 g, \quad v_6 = x_2^2 g, \; \dots$$



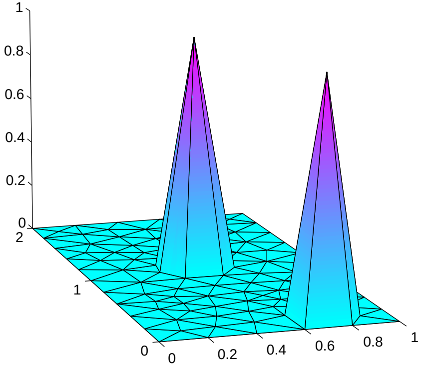



## Metoda konečných prvků (MKP)

různé typy spojitých bázových funkcí s malým nosičem.
Nejjednodušší – po částech lineární.
Na rozdíl od předchozí báze (Ritzova metoda), tato báze zajistí, že výsledná soustava lineárních algebraických rovnic bude mít řídkou matici.



Obě metody (Ritzova, MKP) opět vedou k řešení soustavy lineárních algebraických rovnic přímou nebo iterační metodou.

Sestavení soustavy (její matice a pravé strany) je pracné kvůli integraci, používá se integrace numerická.

Vraťme se ještě k původní úloze a minimalizaci funkcionálu energie.

Nechť $u \in H_A$ je bodem minima energetického funkcionálu a $v \in H_A$. Definujme $\phi(t) = F(u + tv)$ a upravme

$$\begin{aligned}\phi(t) &= F(u+tv) = (u+tv, u+tv)_A - 2(f, u+tv) \\ &= (u,u)_A + 2t(u,v)_A + t^2(v,v)_A - 2(f,u) - 2t(f,v).\end{aligned}$$

Z podmínky minima $\phi'(0) = 0$ (čárka značí derivaci dle $t$). Tedy

$$(u,v)_A = (f,v)$$

musí platit pro $\forall v \in H_A$.
Opět se tedy setkáváme s ekvivalentní úlohou: Najdi $u \in H_A$ takové, že platí

$$(u,v)_A = (f,v) \quad \forall v \in H_A,$$

která má totéž zobecněné řešení $u$ jako minimalizace funkcionálu energie. Tuto formulaci můžeme odvodit i bez minimalizace funkcionálu energie.

## Jiná cesta k zobecněnému řešení

Jestliže $-\Delta u = f$ v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pak

$$-\int_\Omega \Delta u v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

pro každou funkci $v$ z vhodného “velkého" prostoru **?**.
S užitím Greenovy věty a $u = 0$ na $\Gamma$ odvodíme slabě formulovanou úlohu: Najdi funkci $u \in$ **?** takovou, aby platilo

$$\int_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in \mathbf{?}. \qquad (2)$$

Potřebujeme, aby takto formulovaná úloha měla jednoznačné řešení $u$, které sice nemusí ležet v $C^2(\overline{\Omega})$, avšak v případě, že náhodou $u \in C^2(\overline{\Omega})$, aby platilo $-\Delta u = f$ v $\Omega$ a $u = 0$ na $\Gamma$.
Ukáže se (netriviálně), že na místě **?** potřebujeme prostor (Sobolevův), jenž splývá s prostorem $H_A$ známým z úvah o minimu funkcionálu energie (zúplnění $\mathcal{D}(A)$).

Jak si představit funkce z $H_A$ = Sobolevova prostoru $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$?

$\mathring{W}^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial u/\partial x_1,\, \partial u/\partial x_2 \in L^2(\Omega),\; u|_\Gamma = 0\}$, kde však derivace jsou zobecněné:

Řekneme, že funkce $v_{,i} \in L^2(\Omega)$ je zobecněnou první parciální derivací podle proměnné $x_i$ funkce $u \in L^2(\Omega)$, platí-li pro každou funkci $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega v_{,i}\phi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

kde $C_0^\infty(\Omega)$ je prostor všech funkcí nekonečně spojitě diferencovatelných v $\Omega$ a nulových v nějakém okolí hranice oblasti $\Omega$. Jestliže $u \in C^1(\Omega)$, pak $v_{,i} \equiv \partial u/\partial x_i$ a $v_{,i}$ je parciální derivace funkce $u$ v klasickém smyslu. V pozadí (3) stojí Greenova věta.

Platnost $u|_\Gamma = 0$ též v jistém zobecněném smyslu (nulová stopa funkce).

Prostor $H_A$ byl sice původně definován pomocí operátoru $A$, ale lze jej definovat přímo, bez operátoru $A$. Značí se $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$; pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathring{W}^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial u/\partial x_1,\, \partial u/\partial x_2 \in L^2(\Omega),\ \ u|_\Gamma = 0\}.$$

Ještě obecnější (bez podmínky nulovosti na hranici) je prostor $W^{1,2}(\Omega)$ (Sobolevův prostor)

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial u/\partial x_1,\, \partial u/\partial x_2 \in L^2(\Omega)\}.$$

Jest $\mathring{W}^{1,2}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$.
Na obou prostorech je definován speciální skalární součin funkcí (užívá i derivace!)

$$\begin{aligned}(u,v)_{W^{1,2}(\Omega)} &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\, \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2},\, \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Norma $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{W^{1,2}(\Omega)}}$.

Prostor $W^{1,2}(\Omega)$ (i $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$) je úplný (každá posloupnost cauchyovská v normě $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ má limitu z $W^{1,2}(\Omega)$).

## Shrnutí

Klasické řešení úlohy: najít $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, aby

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$
$$u = 0 \text{ na } \Gamma.$$

Slabé řešení úlohy: najít $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, aby

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \quad \forall v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega). \tag{4}$$

(Odpovídá nulové derivaci funkcionálu energie v každém směru $v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$.)

Díky symetrii operátoru je (4) ekvivalentní minimalizaci funkcionálu energie na $H_A \equiv \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, řešení $u$ je v obou případech stejné.

## Přibližné řešení rovnice

$$\int_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \, \mathrm{d}x \qquad \forall v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$$

na podprostoru $V_m \subset \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ konečné dimenze opět ve tvaru lineární kombinace bázových funkcí $v_i$, tj. $u_m = \sum_{i=1}^m c_i v_i$,

$$\int_\Omega \left( \frac{\partial \sum_{i=1}^m c_i v_i}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial \sum_{i=1}^m c_i v_i}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \, \mathrm{d}x,$$

$$\sum_{i=1}^m c_i \int_\Omega \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v_i}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \, \mathrm{d}x \quad \forall v \in V_m.$$

Místo testování funkcemi $v \in V_m$ stačí užít jen $v_1, \dots, v_m$.
Dostaneme soustavu $m$ lin. alg. rovnic pro neznámý vektor $c = (c_1, \dots, c_m)^T$,

$$(v_i, v_1)_A c_1 + (v_i, v_2)_A c_2 + \cdots + (v_i, v_m)_A c_m = (f, v_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Tuto soustavu známe z Ritzovy metody a z MKP!!!

Obecná Dirichletova okrajová podmínka, říká se jí stabilní a ovlivňuje prostor funkcí.[1]

Klasické řešení úlohy: najít $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, aby

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$
$$u = g \text{ na } \Gamma.$$

Slabé řešení úlohy: Vezměme takovou funkci $w \in W^{1,2}(\Omega)$, aby splňovala $w = g$ na $\Gamma$, pak hledáme funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$, pro niž

$$u - w \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega),$$
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \quad \forall v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega).$$

Lze řešit např. užitím $u = w + u_0$, kde $u_0 \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \quad \forall v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega).$$

[1] Obsahuje jen funkce s nulovou stopou na $\Gamma$.

Obecná Neumannova okrajová podmínka, říká se jí nestabilní a neovlivňuje prostor funkcí,[2] objevuje se ve slabé formulaci.

Klasické řešení úlohy: najít $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, aby

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ na } \Gamma.$$

Při aplikaci Greenovy věty na cestě od (1) k (2) zjistíme, že $-\int_\Gamma (\partial u/\partial \nu) v \, \mathrm{d}S = \int_\Gamma h v \, \mathrm{d}S$.

Slabé řešení úlohy: Hledáme funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$, pro niž

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x + \int_\Gamma h v \, \mathrm{d}S \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega). \tag{5}$$

Poznámka: Povšimněte si, že $v =$ konstanta $\in W^{1,2}(\Omega)$.
Z (5) pak plyne nutná podmínka pro existenci řešení:
$0 = \int_\Omega f \, \mathrm{d}x + \int_\Gamma h \, \mathrm{d}S$

[2] Není omezení na nulovou stopu na hranici $\Gamma$.

Obecná Newtonova okrajová podmínka, říká se jí nestabilní a neovlivňuje prostor funkcí,[3] objevuje se ve slabé formulaci.
Klasické řešení úlohy: najít $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, aby

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = h \text{ na } \Gamma.$$

Při aplikaci Greenovy věty na cestě od (1) k (2) zjistíme, že $-\int_\Gamma (\partial u/\partial \nu) v \, \mathrm{d}S = \int_\Gamma \alpha u v \, \mathrm{d}S - \int_\Gamma h v \, \mathrm{d}S$.
Slabé řešení úlohy: Najít $u \in W^{1,2}(\Omega)$, aby $\forall v \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Gamma \alpha u v \, \mathrm{d}S = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x + \int_\Gamma h v \, \mathrm{d}S.$$

[3] Není omezení na nulovou stopu na hranici $\Gamma$.

Příklad v 1D (obecná Dirichletova OP): Okrajová úloha

$$-u'' + e^x u = \cos x \quad \text{v } (0,3),$$
$$u(0) = 1, \quad u(3) = -5.$$

Zvolíme například $w(x) = 1 - 2x$, tj. $u = u_0 + w$, navíc dokonce $u'' = u_0''$. Pak OÚ pro neznámou funkci $u_0$:

$$-u_0'' + e^x(u_0 + w) = \cos x \quad \text{v } (0,3),$$
$$u_0(0) = 0, \quad u_0(3) = 0.$$

Slabá formulace: Najít $u_0 \in \mathring{W}^{1,2}(0,3)$, aby $\forall v \in \mathring{W}^{1,2}(0,3)$

$$\int_0^3 \left(u_0'(x)v'(x) + e^x u_0(x)v(x)\right) \, dx = \int_0^3 (\cos x - e^x(1-2x))v(x)\, dx.$$

Řešení původní úlohy je $u = u_0 + 1 - 2x \in W^{1,2}(0,3)$.