

# Vícebodové okrajové úlohy s asymetrickými nelinearitami a tlumením

Iveta Looseová<sup>1</sup>

## Abstrakt

Příspěvek je zaměřen na vícebodové okrajové úlohy, zejména na tvar vlastních čísel příslušných diferenciálních operátorů a Fučíkovo spektrum. Nejdříve se stručně zabýváme Neumannovu a periodickou okrajovou úlohou, poté se zabýváme třibodovou okrajovou úlohou, která obě předchozí úlohy propojuje. Hlavní výsledky práce se týkají třibodové okrajové úlohy s tlumením, pro niž jsou analyticky odvozeny hodnoty parametrů, pro které má tato úloha pouze triviální řešení. Dále je provedena numerická konstrukce Fučíkova spektra a konstrukce jeho nepřipustných oblastí, tj. množiny bodů, které do Fučíkova spektra nepatří.

## 1 Úvod

Zaměříme se na studium třibodové úlohy, která propojuje dvě známé okrajové úlohy, a to Neumannovu a periodickou okrajovou úlohou.

Nechť  $\eta \in (0, 1)$  je dáno. Mějme úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + by'(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = y(\eta), \\ y'(0) = y'(1), \end{cases} \quad (1)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$  a  $b \geq 0$ . Řešením úlohy (1) budeme rozumět funkci z prostoru  $C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1)$ , která splňuje ve všech bodech  $x \in (0, 1)$  diferenciální rovnici v (1) a splňuje okrajové podmínky v (1). Pro volbu  $\eta = 1$  podmínky v (1) představují periodické okrajové podmínky. Pro  $\eta \rightarrow 0^+$  získáme limitním přechodem s využitím Rolleovy věty Neumannovy okrajové podmínky.

Definujme operátor  $L_b^\eta$

$$\begin{aligned} (L_b^\eta y)(x) &:= -y''(x) - by'(x), \\ D(L_b^\eta) &:= \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1) : y'(0) = y'(1) = 0\} && \text{pro } \eta = 0, \\ D(L_b^\eta) &:= \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1) : y'(0) = y'(1), y(0) = y(\eta)\} && \text{pro } \eta \in (0, 1), \end{aligned}$$

kde  $b \geq 0$ . Pro  $\eta = 1$  operátor  $L_b^\eta$  představuje diferenciální operátor s periodickými okrajovými podmínkami a pro  $\eta = 0$  představuje operátor  $L_b^\eta$  diferenciální operátor s Neumannovými okrajovými podmínkami.

## 2 Vlastní čísla operátoru $L_b^\eta$

Pro operátor  $L_b^\eta$  uveďme dvě následující tvrzení, která popisují známé výsledky týkající se vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  pro některé hodnoty parametrů  $\eta$  a  $b$ .

---

<sup>1</sup>Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, looseova@students.zcu.cz

**Věta 2.1.** *Nechť  $b = 0$ . Potom všechna vlastní čísla operátoru  $L_b^\eta$  mají tvar*

$$\lambda_k = \begin{cases} (k\pi)^2 & \text{pro } \eta = 0, \\ (2k\pi)^2 & \text{pro } \eta = 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

kde  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  a pro  $\eta \in (0, 1)$  mají tvar

$$\begin{cases} \lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2, & k \in \mathbb{N}_0, \\ \lambda_m = \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2, & m \in \mathbb{N}, \\ \lambda_n = (2n\pi)^2, & n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Důkaz věty 2.1 lze nalézt v [5]. Všimněme si, že pro  $\eta \rightarrow 1^-$  máme  $\lambda_k \rightarrow +\infty$  a vlastní čísla  $\lambda_m$  a  $\lambda_n$  jsou vlastní čísla diferenciálního operátoru s periodickými okrajovými podmínkami. Pro  $\eta \rightarrow 0^+$  máme  $\lambda_m \rightarrow +\infty$  a vlastní čísla  $\lambda_k$  a  $\lambda_n$  jsou vlastní čísla diferenciálního operátoru s Neumannovými okrajovými podmínkami. Popis vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  je úplný pro všechny hodnoty  $\eta \in (0, 1)$  pro  $b = 0$  a pro  $\eta \in \{0, 1\}$  pro  $b > 0$ . Úplný popis chybí pro  $\eta \in (0, 1)$  a kladné tlumení  $b$ .

**Věta 2.2.** *Nechť  $b > 0$ . Pro  $\eta = 0$  mají všechna vlastní čísla operátoru  $L_b^\eta$  tvar  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_k = (k\pi)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$  a pro  $\eta = 1$  má operátor  $L_b^\eta$  právě jedno vlastní číslo  $\lambda = 0$ . Pro  $\eta \in (0, 1)$  a  $\lambda \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2$  je  $\lambda = 0$  jediným vlastním číslem.*

Důkaz věty 2.2 lze nalézt v [5]. Pro  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$  a  $b > 0$  popis vlastních čísel neznáme a tímto případem se budeme zabývat v další části.

## 2.1 Tříbodová úloha pro $b > 0$ a $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

V této části se zaměříme na studium vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  pro  $\eta \in (0, 1)$ ,  $b > 0$  a  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ . Z důvodu přehlednosti a jednodušších výpočtů zavedme novou proměnnou  $\mu = \sqrt{\lambda - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ , tedy  $\mu > 0$ . Řešení diferenciální rovnice v (1) je tvaru

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}bx} \sin(\mu x) + C_2 e^{-\frac{1}{2}bx} \cos(\mu x),$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$  a  $\mu > 0$ . Tříbodové okrajové podmínky  $y(0) = y(\eta)$ ,  $y'(0) = y'(\eta)$  lze zapsat jako soustavu dvou homogenních rovnic, jejíž matice má tvar

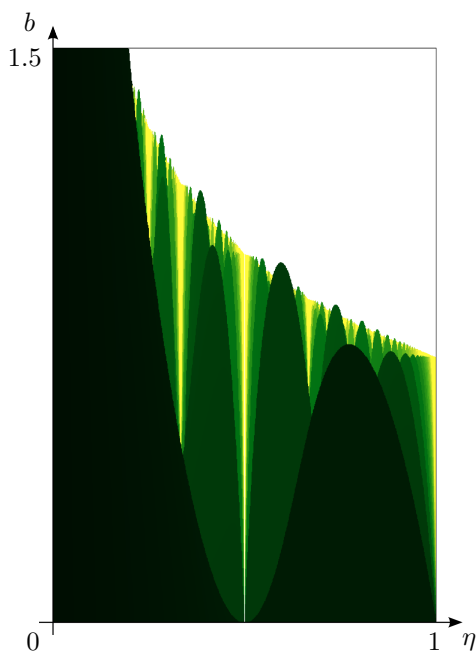
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -e^{-\frac{b\eta}{2}} \sin(\mu\eta) & 1 - e^{-\frac{b\eta}{2}} \cos(\mu\eta) \\ \mu + \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu) - \mu e^{-\frac{b}{2}} \cos(\mu) & -\frac{b}{2} + \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}} \cos(\mu) + \mu e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu) \end{bmatrix}.$$

Soustava rovnic má vždy triviální řešení. Proto aby měla i netriviální řešení, musí mít soustava více než jedno řešení. Matice soustavy tedy musí být singularní a singularita matice je ekvivalentní nulovému determinantu. Proto determinant matice soustavy  $\mathbf{A}$  položíme roven nule. Tím získáme pro pevně dané  $\eta$  a  $b$  funkci  $\phi = \phi(\mu)$ ,

$$\begin{aligned} \phi(\mu) = & \frac{b}{2}e^{-\frac{b\eta}{2}} \sin(\mu\eta) - \frac{b}{2}e^{-\frac{b\eta}{2}}e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu\eta) \cos(\mu) - e^{-\frac{b\eta}{2}}e^{-\frac{b}{2}}\mu \sin(\mu) \sin(\mu\eta) - \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu) \\ & - \mu + e^{-\frac{b}{2}}\mu \cos(\mu) + e^{-\frac{b\eta}{2}}\mu \cos(\mu\eta) + \frac{b}{2}e^{-\frac{b\eta}{2}}e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu) \cos(\mu\eta) - e^{-\frac{b\eta}{2}}e^{-\frac{b}{2}}\mu \cos(\mu) \cos(\mu\eta), \end{aligned} \quad (2)$$

u níž hledáme nulové body. Nulové body funkce  $\phi$  pro pevné hodnoty  $\eta$  a  $b$  určují vlastní čísla  $\lambda = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \mu^2$  operátoru  $L_b^\eta$ . Tím jsme převedli úlohu nalezení vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  na ekvivalentní úlohu hledání nulových bodů nelineární spojité funkce  $\phi$ . Vzhledem ke komplikovanému tvaru funkce  $\phi$  nejsme schopni pro pevně dané  $\eta$  a  $b$  najít analytický předpis pro nulové body funkce  $\phi$  a explicitně tak analyticky popsat vlastní čísla operátoru  $L_b^\eta$ . Dále se proto zaměříme na některé důležité otázky týkající se existence vlastních čísel a seznámíme se s výsledky několika numerických experimentů.

### 2.1.1 Numerické experimenty



Obrázek 1: Diagram velikosti prvního nulového bodu funkce  $\phi$ .

kladné vlastní číslo. Naopak, čím blíže jsme periodické okrajové úloze ( $\eta \rightarrow 1^-$ ), tím menší je maximální tlumení, pro které ještě nalezneme alespoň jedno kladné vlastní číslo. Navíc podle diagramu na obrázku 1 pravděpodobně v polopásmu  $M$  existuje oblast, kde žádné kladné vlastní číslo nenajdeme a zajímavé jsou body na polopřímce  $\eta = \frac{1}{2}$  a  $b > 0$ .

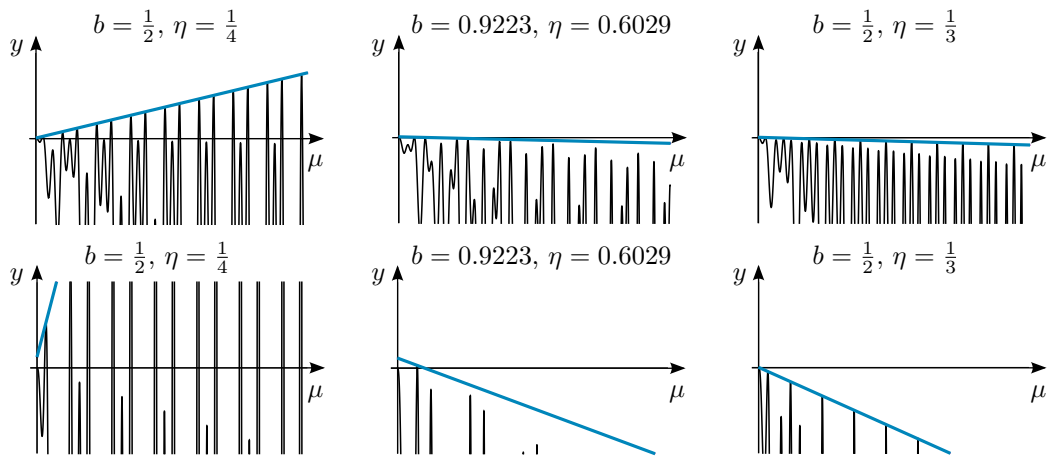
V dalším numerickém experimentu se budeme zabývat počtem nulových bodů funkce  $\phi$  pro pevné  $\eta$  a  $b$ , tedy počtem kladných vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$ . Definujme následující množiny

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(\eta, b) \in M : \text{operátor } L_b^\eta \text{ má nekonečně mnoho kladných vlastních čísel}\}, \\ M_2 &= \{(\eta, b) \in M : \text{operátor } L_b^\eta \text{ má nenulový konečný počet kladných vlastních čísel}\}, \\ M_3 &= \{(\eta, b) \in M : \text{operátor } L_b^\eta \text{ nemá žádné kladné vlastní číslo}\}. \end{aligned}$$

Abychom rozlišili, zda funkce  $\phi$  pro pevně zvolené  $b, \eta$  má konečně mnoho, nekonečně mnoho nebo žádný nulový bod, provedeme numerickou konstrukci přímky, kterou graf funkce  $\phi$  shora omezíme. Konstrukce bude vypadat následujícím způsobem. Ve dvou intervalech (např.  $\mu \in (0, 600)$  a  $\mu \in (4000, 8000)$ ) najdeme maxima funkce  $\phi$ . Body odpovídající funkčním hodnotám v bodech maxim spojíme přímkou. Tato přímka funkci  $\phi$  pravděpodobně omezuje shora. Pokud je druhé maximum větší než to první, tedy směrnice omezující přímky je kladná, funkce  $\phi$  má pravděpodobně nekonečně mnoho nulových

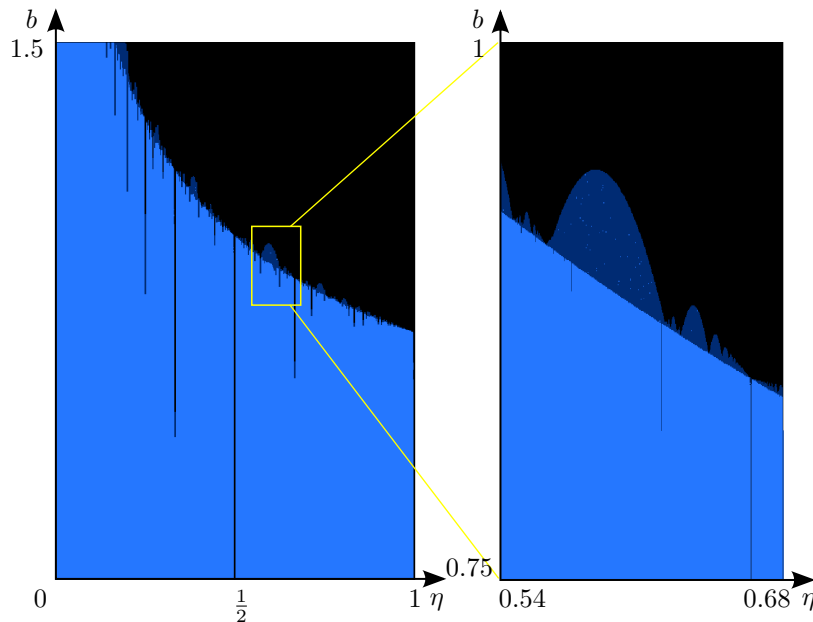
Výsledky numerických experimentů budeme zobrazovat v polopásmu  $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle$  roviny  $\eta b$ . Vyjdeme z analytického předpisu (2) funkce  $\phi$ . Funkce  $\phi$  je spojitá, umožňuje nám tedy velmi dobře hledat nulové body numericky. Numerický experiment provedeme následovně. Postupně volíme body  $(\eta, b)$  a pro tuto dvojici numericky hledáme první nulový bod funkce  $\phi$ , označme jej  $\mu_0$ . Pokud jej najdeme, v polopásmu  $M$  bod  $(\eta, b)$  obarvíme (viz obrázek 1) a to podle hodnoty  $\mu_0$ . Barevná škála je zvolena následovně. Tmavě zelená barva odpovídá velmi nízké hodnotě  $\mu_0$  a naopak žlutá barva odpovídá velmi vysoké hodnotě  $\mu_0$ . Bílá barva znamená, že pro danou dvojici  $(\eta, b)$  jsme žádný nulový bod  $\mu_0$  nenašli.

Diagram můžeme globálně popsat následovně. Čím více se blížíme Neumannově okrajové úloze (tedy  $\eta \rightarrow 0^+$ ), tím vyšší je maximální tlumení, pro které ještě nalezneme alespoň jedno



Obrázek 2: Graf funkce  $\phi$  (černě) pro pevné  $b, \eta$  a omezení přímkou (modře).

bodů (viz graf funkce  $\phi$  a omezení přímkou shora na obrázku 2). Pokud je naopak první maximum větší než druhé maximum (tomu odpovídá záporná směrnice omezující přímky), mohou nastat dva případy. Buď funkce  $\phi$  nemá žádný nulový bod (tj. obě maxima jsou záporná) nebo funkce  $\phi$  má konečný počet nulových bodů (tj. první maximum je kladné). Na obrázku 2 vidíme zleva nekonečně mnoho nulových bodů, konečně mnoho nulových bodů a žádný nulový bod. Tohoto postupu určení počtů nulových bodů využijeme v numerickém experimentu. Podobně jako v předchozím experimentu, i zde bodu  $(\eta, b)$  přiřadíme barvu (viz obrázek 3). A to podle toho, kolik řešení jsme pro danou volbu  $b$  a  $\eta$  našli. Světle modrá reprezentuje nekonečně mnoho nulových bodů, tmavě modrá konečně mnoho nulových bodů a černá žádný nulový bod funkce  $\phi$ .

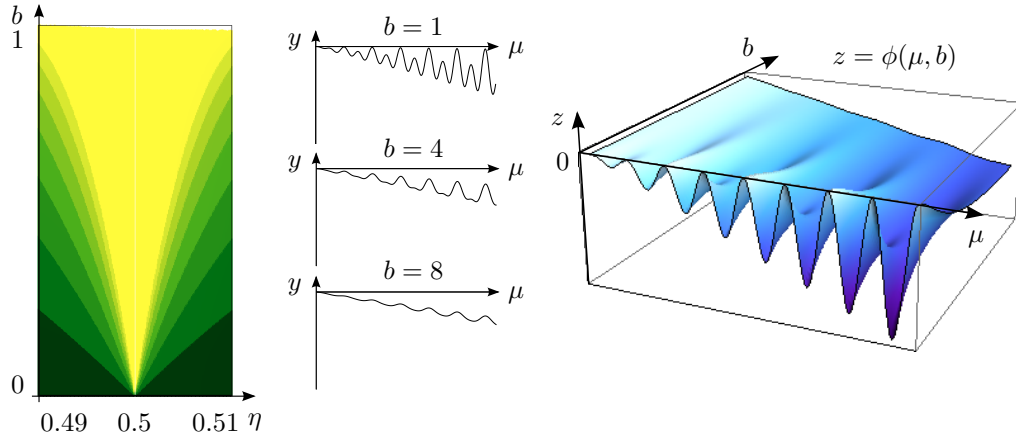


Obrázek 3: Numericky určené rozmístění počtů vlastních čísel.

### 2.1.2 Oblasti bez vlastních čísel

V numerických experimentech jsme pozorovali, že pro hodnotu  $\eta = \frac{1}{2}$  se děje něco zajímavého. Nepodařilo se najít žádný nulový bod funkce  $\phi$  a numerickou metodou střelby jsme

řešení pro  $b$  v řádu  $10^{-6}$  sice našli, ale rozsahem maximálních a minimálních hodnot na intervalu  $(0, 1)$  odpovídalo téměř triviálnímu řešení.



Obrázek 4: Vlevo je diagram velikosti prvního vlastního čísla pro  $\eta$  v blízkosti  $\frac{1}{2}$ . Uprostřed jsou grafy funkce  $\phi$  pro pevné  $b$  a  $\eta = \frac{1}{2}$ . Vpravo je graf funkce dvou proměnných  $\phi = \phi(\mu, b)$  pro  $\eta = \frac{1}{2}$ .

Na obrázku 4 vidíme vlevo diagram velikosti prvního vlastního čísla kolem bodu  $\eta = \frac{1}{2}$ . Z diagramu je patrné, že čím blíže jsme bodu  $\eta = \frac{1}{2}$ , tím vyšší je první nalezené kladné vlastní číslo při pevné volbě  $b$ . Až přesně v bodě  $\eta = \frac{1}{2}$  podle diagramu žádné kladné vlastní číslo nenajdeme.

Lze dokázat následující větu (viz [5]).

**Věta 2.3.** Operátor  $L_b^\eta$  má pro  $\eta = \frac{1}{2}$  a  $b > 0$  právě jedno vlastní číslo  $\lambda = 0$ .

Všimněme si, že pro kladné tlumení  $b$  a pro  $\eta = 1$  i  $\eta = \frac{1}{2}$  má operátor  $L_b^\eta$  pouze jediné vlastní číslo.

**Věta 2.4.** Operátor  $L_b^\eta$  má nejvýše konečný počet vlastních čísel, pokud  $(\eta, b) \in \Omega_1$ , kde  $\Omega_1 := \{(\eta, b) \in M : -1 + e^{-\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b\eta} + 2e^{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b\eta} < 0\}$ .

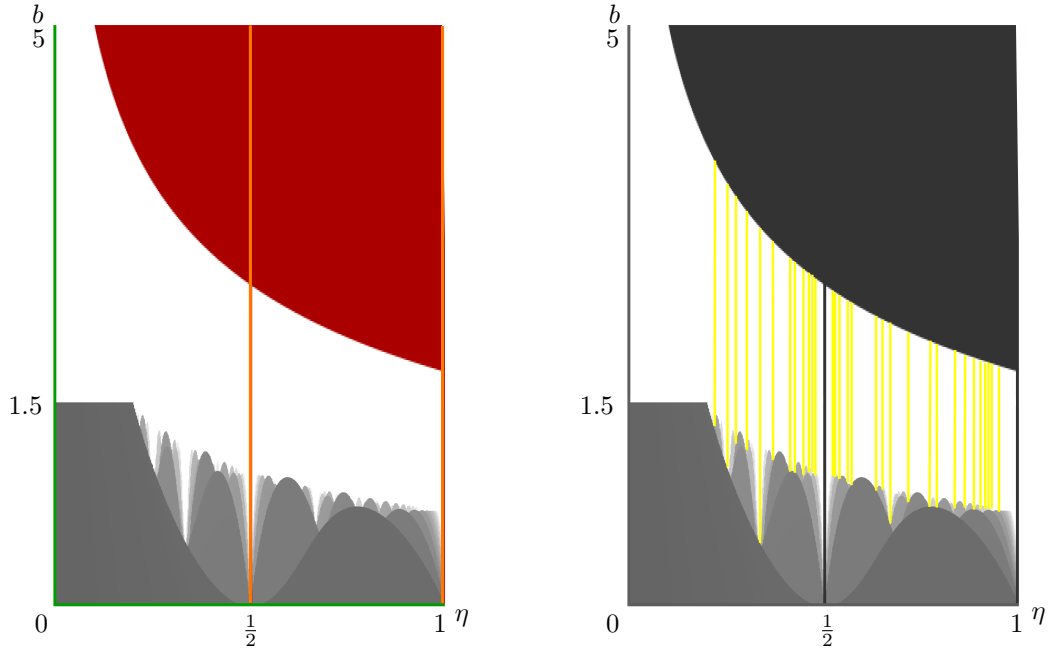
Důkaz věty 2.4 lze nalézt v [5]. Tedy pro  $b > 0$  existuje v polopásmu  $M$  neomezená oblast  $\Omega_1$ , jejíž hranice  $\partial\Omega_1$  je dána jako  $-1 + e^{-\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b\eta} + 2e^{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b\eta} = 0$ . Označme

$$\Omega_2 = \Omega_1 \cap M_3.$$

Hranici této oblasti  $\partial\Omega_2$  zkonstruujeme numericky. Obě hranice ( $\partial\Omega_1$  i  $\partial\Omega_2$ ) vizuálně splývají a začnou se podle numerických výpočtů lišit až v blízkosti Neumannovy okrajové úlohy pro velmi vysoké tlumení  $b$ . Oblast  $\Omega_1$  vidíme na obrázku 5 (červeně).

## 2.2 Shrnutí

Chování vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  můžeme shrnout následovně. V polopásmu  $M$  existuje oblast  $\Omega_1$ , kde najdeme nejvýše konečný počet vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$ . Numericky jsme zkonstruovali oblast  $\Omega_2$ , kde existuje pouze vlastní číslo  $\lambda = 0$ . Pro hodnoty  $\eta = 1$  a  $\eta = \frac{1}{2}$  víme, že pro  $b > 0$  existuje jediné vlastní číslo  $\lambda = 0$ , tj. body  $(1, b)$  a  $(\frac{1}{2}, b)$  s  $b > 0$  patří do množiny  $M_3$ . Numericky jsme našli oblast, kde vlastní čísla zřejmě existují (viz obrázek 1).



Obrázek 5: Prozkoumané rozložení počtů vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  (vlevo) a očekávané rozložení počtů vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  (vpravo).

Na obrázku 5 vlevo vidíme prozkoumané rozložení počtů vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  v polopásmu  $M$ . Zeleně jsou zobrazeny body  $(\eta, b)$ , které patří do množiny  $M_1$ . Jedná se o hodnoty parametrů  $\eta = 0$  pro libovolné  $b$  a o hodnoty  $\eta \in (0, 1)$  a  $b = 0$ . Červeně je zobrazena oblast  $\Omega_1$ . Oranžově jsou zobrazeny body  $(\eta, b)$ , které patří do množiny  $M_3$ . Jedná se o  $\eta = \frac{1}{2}$  a  $\eta = 1$  pro  $b > 0$ . Části těchto polopřímek patří do množiny  $\Omega_1$ . Barvami šedi je zobrazen výsledek numerického experimentu. Bílé jsou oblasti, u kterých neumíme rozhodnout.

Žlutě jsou na obrázku 5 vpravo zobrazeny body, u kterých předpokládáme, že také patří do množiny  $M_3$ , což se zatím nepodařilo prozkoumat. Ověřit tuto hypotézu bude cílem dalšího zkoumání.

### 3 Fučíkovo spektrum

Uvažujme diferenciální rovnici

$$y''(x) + by'(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3)$$

kde  $b \geq 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $y^+ = \max\{y, 0\}$ ,  $y^- = \max\{-y, 0\}$ . Všimněme si, že pro volbu  $\alpha = \beta$  získáme diferenciální rovnici v (1). Množina

$$\Sigma(L_b^\eta) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : L_b^\eta y = \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) \text{ má netriviální řešení}\}$$

se nazývá Fučíkovo spektrum (viz [2]) operátoru  $L_b^\eta$ . Protože vlastní čísla  $\lambda_k$  patří do spektra  $\sigma(L_b^\eta)$  operátoru  $L_b^\eta$ , patří dvojice  $(\lambda_k, \lambda_k)$  do Fučíkova spektra operátoru  $L_b^\eta$ . Uveďme následující tvrzení popisující strukturu  $\Sigma(L_b^\eta)$  v případě nulového tlumení  $b$ .

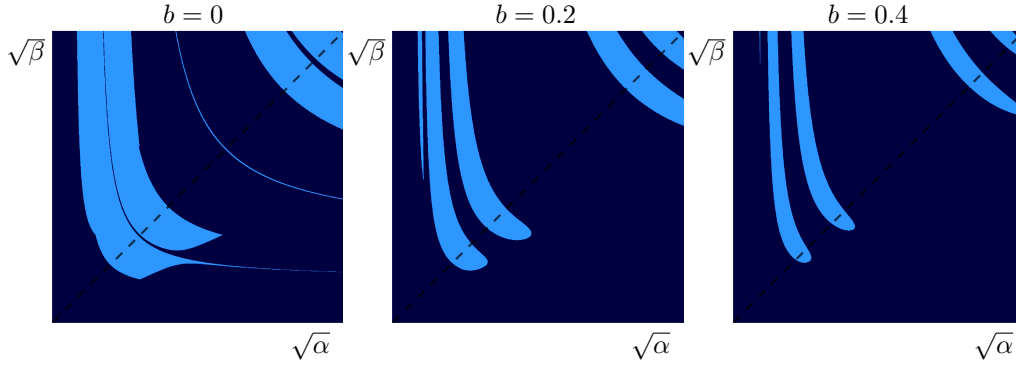
**Věta 3.1.** *Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^\eta$  pro  $b = 0$  je dáno jako*

$$\Sigma(L_b^\eta) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} K_m,$$

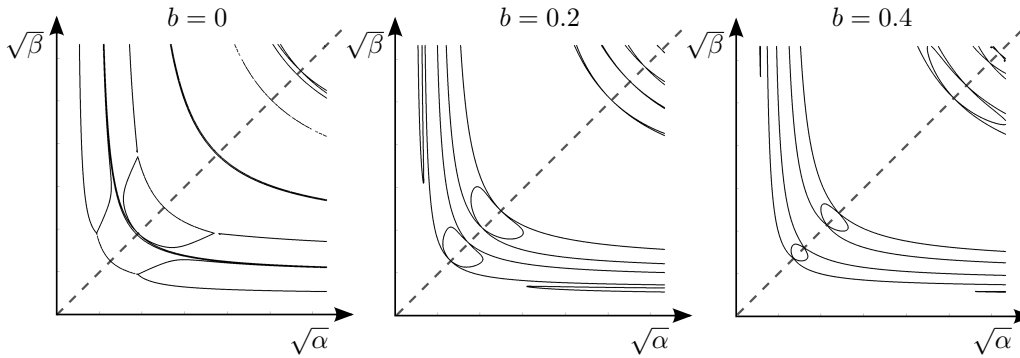
kde  $K_0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha\beta = 0\}$ ,  $K_m = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{m\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{m\pi}{2\sqrt{\beta}} = 1\}$  pro  $\eta = 0$  a  $K_m = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{m\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{m\pi}{\sqrt{\beta}} = 1\}$  pro  $\eta = 1$ .

Důkazy tvrzení z věty 3.1 můžeme najít v [5]. Popis Fučíkova spektra operátoru  $L_b^\eta$  pro  $\eta \in (0, 1)$  a  $b = 0$  můžeme najít v [4].

Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^\eta$  pro  $b > 0$  hledáme numericky. Na obrázku 6 vidíme části Fučíkova spektra  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro  $\eta = 0.67$  a mění se tlumení  $b$  získané metodou Top-View. Body Fučíkova spektra vidíme na hranici změny barev. Na obrázku 7 vidíme ukázkou numerických aproximací Fučíkova spektra  $\Sigma(L_b^\eta)$  získané numerickou metodou střelby (porovnej s obrázkem 6).



Obrázek 6: Náhled na část Fučíkova spektra  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro  $\eta = 0.67$  (metoda TopView).



Obrázek 7: Aproximace Fučíkova spektra  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro  $\eta = 0.67$  (metoda střelby).

Množina

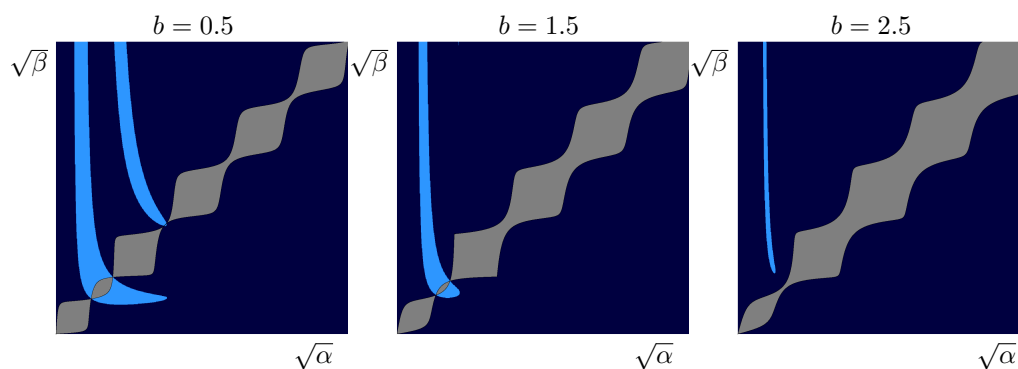
$$\Pi(L_b^\eta) = \left\{ (\varepsilon - td(\varepsilon), \varepsilon + td(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^2 : d(\varepsilon) = \frac{1}{\|(L_b^\eta - \varepsilon I)^{-1}\|}, t \in (-1, 1), \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \sigma(L_b^\eta) \right\}$$

je nepřípustnou oblastí Fučíkova spektra  $\Sigma(L_b^\eta)$  (viz [3]). Nepřípustnou oblastí rozumíme takovou oblast, jejíž průnik s Fučíkovým spektrem je prázdný.

Abychom byli schopni nepřípustnou oblast zkonstruovat, operátor  $L_b^\eta$  nahradíme dostatečně velkou maticí  $\mathbf{A}$  a tím přejdeme k diskrétní úloze. Protože matice  $\mathbf{A}$  je diskretizací  $L_b^\eta$ , zkonstruujeme pouze přibližnou oblast. Na obrázku 8 vidíme zkonstruovanou nepřípustnou oblast (šedě) Fučíkova spektra  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro některé hodnoty tlumení.

## Poděkování

V první řadě bych chtěla velmi poděkovat svému vedoucímu práce Ing. Petru Nečasovi, Ph.D. za odborné vedení a vstřícný přístup při zpracování celé práce. Dále bych ráda po-



Obrázek 8: Náhled na Fučíkovo spektrum  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro  $\eta = 0.15$  (metoda TopView) a nepřístupné oblasti Fučíkova spektra (šedě).

děkovala Doc. RNDr. Milanu Tvrđému, CSc. z Matematického ústavu Akademie věd ČR za jeho cenné konzultace k bakalářské práci, které proběhly v rámci týdenní stáže v Matematickém ústavu Akademie věd ČR. Tato stáž byla podpořena z projektu A-Math-Net - síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (č. projektu CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

## Reference

- [1] Coddington, E. A.; Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations. New York, Toronto, London: McGill-Hill Book Company, Inc. XII, 429 p. (1955).
- [2] Fučík, S.: Solvability of nonlinear equations and boundary value problems. Mathematics and its Applications, 4. Dordrecht - Boston - London: D. Reidel Publishing Company. X, 390 p. (1980).
- [3] Holubová, G.; Nečesal, P.: Fučík spectrum in general: principal eigenvalues and inadmissible sets. Zasláno do tisku.
- [4] Holubová, G.; Nečesal, P.: Nontrivial Fučík spectrum of one non-selfadjoint operator. Nonlinear Anal. 69 (2008), no. 9, 2930-2941.
- [5] Looseová, I.: Vícebodové okrajové úlohy s asymetrickými nelinearitami a tlumením. Bakalářská práce, Západočeská univerzita, Plzeň, 2012.