JMÉNO A PŘÍJMENÍ:

VARIANTA ZS/19-20/A

BODY:

K úspěšnému napsání testu je nutné získat alespoň 25 bodů z 50 možných. Na test máte 50 minut.

1. [15 bodů] Provedením dvou kroků Gaussovy-Seidelovy iterační metody s počátečním vektorem $\vec{x}^{(0)} = (1,2)^T$ řešte přibližně soustavu rovnic $\mathbb{C}\vec{x} = \vec{y}$, kde $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = (3,-2)^T$. Rozhodněte, zda pro tuto soustavu Gaussova-Seidelova metoda konverguje, spočtěte přesné řešení a $\left\|\vec{x} - \vec{x}^{(2)}\right\|_1$, $\left\|\vec{x} - \vec{x}^{(2)}\right\|_\infty$. Kolik iterací je nutné spočítat, abychom mohli zaručit, že $\left\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\right\|_\infty < 0{,}005$? Při výpočtu můžete využít: $\log_{10} 2 \approx 0{,}301 \approx \frac{1}{3{,}322}$, $\log_{10} 3 \approx 0{,}477 \approx \frac{1}{2{,}096}$, $\log_{10} 5 \approx 0{,}699 \approx \frac{1}{1{,}431}$ a $\log_{10} 7 \approx 0{,}845 \approx \frac{1}{1{,}183}$.

---

2. [10 bodů] K matici $\mathbb{C}$ z předchozí úlohy nalezněte vlastní čísla $\lambda_1 \le \lambda_2$ a jim příslušné vlastní vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Vlastní vektory zvolte tak, aby jejich první složka byla rovna 1. Dále spočtěte vektor $\vec{v} = \mathbb{B}\vec{w}$, kde $\mathbb{B} = \mathbb{C}^3 + 5\mathbb{C}^{-1}$ a $\vec{w} = 3\vec{u}_1 + \frac{1}{7}\vec{u}_2$. Jaká jsou vlastní čísla matice $\mathbb{B}$?

---

3. [15 bodů] Definujte funkci $\eta(x)$ tak, aby $\eta(1) = -14$ a aby okrajovou úlohu

$$\eta(x)u'' - (12x^2 - 30x + 12)u' - xe^{1-x}u \;=\; \operatorname{arctg} x, \qquad u(0) = 0, \quad u(3) = 0,$$

bylo možné napsat v divergentním tvaru. Pak stanovte operátor A (včetně definičního oboru $\mathcal{D}(A)$) příslušný této okrajové úloze a ukažte, že lze najít operátor symetrický a takový, že pro každou funkci u z $\mathcal{D}(A)$ platí $(Au, u) \ge c \cdot \|u\|^2_{L^2(0,3)}$, kde c je vhodná kladná konstanta. Určete velikost této konstanty.

---

4. [10 bodů] Ritzovou metodou nalezněte přibližné řešení okrajové úlohy

$$(x+1)u'' + u' \;=\; 4x$$

$$u(0) \;=\; 3, \quad u(1) \;=\; 2.$$

Při výpočtu přibližného řešení použijte podprostor generovaný bázovou funkcí $w(x) = x(1-x)$, kde $x \in [0,1]$. Zjistěte, zda se jedná o přesné řešení uvedené úlohy.

Řešení zápočtového testu - varianta ZS/19-20/A

1. [15 bodů] Provedením dvou kroků Gaussovy-Seidelovy iterační metody s počátečním vektorem $\vec{x}^{(0)} = (1,2)^T$ řešte přibližně soustavu rovnic $\mathbb{C}\vec{x} = \vec{y}$, kde $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = (3,-2)^T$. Rozhodněte, zda pro tuto soustavu Gaussova-Seidelova metoda konverguje, spočtěte přesné řešení a $\|\vec{x} - \vec{x}^{(2)}\|_1$, $\|\vec{x} - \vec{x}^{(2)}\|_\infty$. Kolik iterací je nutné spočítat, abychom mohli zaručit, že $\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\|_\infty < 0,005$? Při výpočtu můžete využít: $\log_{10} 2 \approx 0,301 \approx \frac{1}{3,322}$, $\log_{10} 3 \approx 0,477 \approx \frac{1}{2,096}$, $\log_{10} 5 \approx 0,699 \approx \frac{1}{1,431}$ a $\log_{10} 7 \approx 0,845 \approx \frac{1}{1,183}$.

Řešení: Vektory $\vec{x}^{(1)}$ a $\vec{x}^{(2)}$ spočtené pomocí Gaussovy-Seidelovy metody mají tvar

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3-(-1)\cdot 2) \\ \frac{1}{4}(-2-(-3)\cdot \frac{5}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3-(-1)\cdot \frac{11}{8}) \\ \frac{1}{4}(-2-(-3)\cdot \frac{35}{16}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{16} \\ \frac{73}{64} \end{pmatrix}.$$

Je také možné spočítat iterační matici $\mathbb{A} = -(\mathbb{L}+\mathbb{D})^{-1}\mathbb{U}$ a použít vztah $\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{A}\vec{x}^{(k)} + \vec{b}$, kde $\vec{b} = (\mathbb{L}+\mathbb{D})^{-1}\vec{y}$. K výpočtu inverzní matice využijeme vzorce:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Získáme tak

$$\mathbb{A} = -(\mathbb{L}+\mathbb{D})^{-1}\mathbb{U} = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

Pro jednotlivé iterace pak platí:

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{33}{64} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{16} \\ \frac{73}{64} \end{pmatrix}$$

Gaussova-Seidelova metoda konverguje, protože matice $\mathbb{C}$ je ostře diagonálně dominantní (tj. s převažující diagonálou). Můžeme rovněž spočítat normy iterační matice: $\|\mathbb{A}\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$ a $\|\mathbb{A}\|_1 = \frac{7}{8} < 1$. Přesné řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých lze spočítat např. opět pomocí inverzní matice

$$\vec{x} = \mathbb{C}^{-1}\vec{y} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Protože je dále $\vec{x} - \vec{x}^{(2)} = (2 - \frac{35}{16}, 1 - \frac{73}{64})^T = (-\frac{3}{16}, -\frac{9}{64})^T$, dostáváme $\|\vec{x} - \vec{x}^{(2)}\|_\infty = \max\{\frac{3}{16}, \frac{9}{64}\} = \frac{3}{16}$ a $\|\vec{x} - \vec{x}^{(2)}\|_1 = \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{21}{64}$. Jelikož je $\|\mathbb{A}\|_\infty = \frac{1}{2}$, $\|\vec{x}^{(0)}\|_\infty = 2$ a $\|\vec{b}\|_\infty = \frac{3}{2}$, platí

$$\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\|_\infty \leq \|\mathbb{A}\|_\infty^k \|\vec{x}^{(0)}\|_\infty + \frac{\|\mathbb{A}\|_\infty^k}{1 - \|\mathbb{A}\|_\infty}\|\vec{b}\|_\infty = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot (2+3) = 5 \cdot 2^{-k}.$$

Nerovnost $\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\|_\infty < 0,005$ tak bude splněna, pokud bude $5 \cdot 2^{-k} < 5 \cdot 10^{-3}$, tj. $2^{-k} < 10^{-3}$, neboli $-k\log_{10} 2 < -3$, a tedy $k > \frac{3}{\log_{10} 2} = 9,966$. Uvedenou nerovnost proto můžeme zaručit po $k = 10$ iteracích Gaussovy-Seidelovy metody.

---

2. [10 bodů] K matici $\mathbb{C}$ z předchozí úlohy nalezněte vlastní čísla $\lambda_1 \leq \lambda_2$ a jim příslušné vlastní vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Vlastní vektory zvolte tak, aby jejich první složka byla rovna 1. Dále spočtěte vektor $\vec{v} = \mathbb{B}\vec{w}$, kde $\mathbb{B} = \mathbb{C}^3 + 5\mathbb{C}^{-1}$ a $\vec{w} = 3\vec{u}_1 + \frac{1}{7}\vec{u}_2$. Jaká jsou vlastní čísla matice $\mathbb{B}$?

Řešení: Protože

$$\det(\mathbb{C} - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-1)(\lambda-5),$$

je $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 5$. Vlastní vektory $\vec{u}_i$ zjistíme řešením soustavy rovnic $(\mathbb{C} - \lambda_i\mathbb{I})\vec{u}_i = 0$, tj.

$$(\mathbb{C} - \lambda_1\mathbb{I})\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -3 & 4-1 \end{pmatrix}\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\vec{u}_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}_1 = p_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ p_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

$$(\mathbb{C}-\lambda_2\mathbb{I})\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2-5 & -1 \\ -3 & 4-5 \end{pmatrix}\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\vec{u}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}_2 = p_2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ p_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Jelikož máme zvolit vlastní vektory tak, aby jejich první složka byla rovna 1, je $p_1 = p_2 = 1$. Spočtených vlastních čísel a vlastních vektorů matice $\mathbb{C}$ použijeme k výpočtu vektoru $\vec{v}$, přičemž využijeme rovnosti $\mathbb{C}^k\vec{u}_i = \lambda_i^k\vec{u}_i$. Platí

$$\begin{aligned} \mathbb{B}\vec{u}_1 &= (\mathbb{C}^3+5\mathbb{C}^{-1})\vec{u}_1 = \mathbb{C}^3\vec{u}_1+5\mathbb{C}^{-1}\vec{u}_1 = \lambda_1^3\vec{u}_1+5\lambda_1^{-1}\vec{u}_1 = 1^3\vec{u}_1+5\cdot 1^{-1}\vec{u}_1 = 6\,\vec{u}_1, \\ \mathbb{B}\vec{u}_2 &= (\mathbb{C}^3+5\mathbb{C}^{-1})\vec{u}_2 = \mathbb{C}^3\vec{u}_2+5\mathbb{C}^{-1}\vec{u}_2 = \lambda_2^3\vec{u}_2+5\lambda_2^{-1}\vec{u}_2 = 5^3\vec{u}_2+5\cdot 5^{-1}\vec{u}_2 = 126\,\vec{u}_2, \end{aligned}$$

a proto

$$\vec{v} = \mathbb{B}\vec{w} = \mathbb{B}(3\vec{u}_1+\tfrac{1}{7}\vec{u}_2) = 3\mathbb{B}\vec{u}_1+\tfrac{1}{7}\mathbb{B}\vec{u}_2 = 3\cdot 6\,\vec{u}_1+\tfrac{126}{7}\vec{u}_2 = 18\,\vec{u}_1+18\,\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 36 \\ -36 \end{pmatrix}.$$

Z předchozího výpočtu zároveň vidíme, že vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ jsou 6 a 126.

---

3. [15 bodů] Definujte funkci $\eta(x)$ tak, aby $\eta(1) = -14$ a aby okrajovou úlohu

$$\eta(x)u''-(12x^2-30x+12)u'-x\mathrm{e}^{1-x}u = \operatorname{arctg} x, \qquad u(0)=0, \quad u(3)=0,$$

bylo možné napsat v divergentním tvaru. Pak stanovte operátor A (včetně definičního oboru $\mathcal{D}(A)$) příslušný této okrajové úloze a ukažte, že lze najít operátor symetrický a takový, že pro každou funkci u z $\mathcal{D}(A)$ platí $(Au,u) \geq c\cdot\|u\|^2_{L^2(0,3)}$, kde c je vhodná kladná konstanta. Určete velikost této konstanty.

Řešení: Integrováním zjistíme, že $\eta(x) = -4x^3+15x^2-12x+C$, a protože má platit $-14 = \eta(1) = -4+15-12+C$, je $C = -13$. Divergentní tvar rovnice je potom

$$-\Big(\overbrace{(4x^3-15x^2+12x+13)}^{p(x)}\,u'\Big)'-x\mathrm{e}^{1-x}u = \operatorname{arctg} x$$

Lokální extrémy funkce $p(x) = -\eta(x)$ zjistíme z rovnice $p'(x) = 0$, tj. $12x^2-30x+12 = 6(2x^2-5x+2) = 6(2x-1)(x-2) = 0$. V intervalu $[0,3]$ leží oba dva kořeny $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = 2$, a protože platí $p(0) = 13$, $p(\frac{1}{2}) = \frac{4}{8}-\frac{15}{4}+6+13 = \frac{63}{4}$, $p(2) = 32-60+24+13 = 9$ a $p(3) = 108-135+36+13 = 22$, je $p(x) \geq 9$ v intervalu $[0,3]$. Rovnici proto nemusíme přenásobit -1.

Definujeme-li operátor $Au \stackrel{\text{def}}{=} -\big((4x^3-15x^2+12x+13)u'\big)'-x\mathrm{e}^{1-x}u$ a definiční obor $\mathcal{D}(A) = \{v \in \mathcal{C}^2(0,3)\cap\mathcal{C}[0,3],\ v(0)=v(3)=0\}$, je operátorová formulace úlohy: Najdi $u \in \mathcal{D}(A)$ tak, že $Au = \operatorname{arctg} x$ v intervalu $(0,3)$. Označíme-li $q(x) = -x\mathrm{e}^{1-x}$, potom pro všechny funkce $u,v \in \mathcal{D}(A)$ platí

$$\begin{aligned} (Au,v) &= \textstyle\int_0^3(Au)v\,\mathrm{d}x = \int_0^3-\big(p(x)u'(x)\big)'v(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^3 q(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= [-p(x)u'(x)v(x)]_0^3+\textstyle\int_0^3 p(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^3 q(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -p(3)u'(3)\underbrace{v(3)}_{0}+p(0)u'(0)\underbrace{v(0)}_{0}+\textstyle\int_0^3 p(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^3 q(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \textstyle\int_0^3 p(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^3 q(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Záměnou u a v zjistíme, že $(u,Av) = (Au,v)$ pro všechna $u,v \in \mathcal{D}(A)$, tedy že je operátor A symetrický. Protože je dále $q'(x) = -\mathrm{e}^{1-x}-x(-\mathrm{e}^{1-x}) = (x-1)\mathrm{e}^{1-x}$, je minimum funkce q na intervalu $[0,3]$ rovno $\min\{q(0),q(1),q(3)\} = \min\{0,-1,-3/\mathrm{e}^2\} = -1$. S využitím nerovností $p(x) \geq 9$, $q(x) \geq -1$ v $[0,3]$ a Friedrichsovy nerovnosti získáme

$$\begin{aligned} (Au,u) &= \textstyle\int_0^3 p(x)\big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x+\int_0^3 q(x)u^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 9\cdot\int_0^3\big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x-1\cdot\int_0^3 u^2(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{F.N.}{\geq} \\ &\stackrel{F.N.}{\geq} 9\cdot\dfrac{2}{3^2}\textstyle\int_0^3 u^2(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^3 u^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 u^2(x)\,\mathrm{d}x = 1\cdot\|u\|^2_{L^2(0,3)}. \end{aligned}$$

Operátor A je tedy pozitivně definitní s konstantou pozitivní definitnosti $c = 1$.

---

4. [10 bodů] Ritzovou metodou nalezněte přibližné řešení okrajové úlohy

$$(x+1)u''+u' = 4x$$

$$u(0) = 3, \quad u(1) = 2.$$

Při výpočtu přibližného řešení použijte podprostor generovaný bázovou funkcí $w(x) = x(1-x)$, kde $x \in [0,1]$. Zjistěte, zda se jedná o přesné řešení uvedené úlohy.

Řešení: Funkci u hledáme ve tvaru $u = \widehat{u}+\phi$, kde $\phi(x) = -x+3$ (lineární funkce splňující okrajové podmínky). Je tedy $u' = \widehat{u}'-1$ a $u'' = \widehat{u}''$. Dosazením získáme okrajovou úlohu:

$$(x+1)\widehat{u}''+\widehat{u}' = 4x+1$$

$$\widehat{u}(0) \;=\; 0, \quad \widehat{u}(1) \;=\; 0.$$

Diferenciální rovnici přenásobíme -1 a získáme tak divergentní tvar rovnice s operátorem $A\widehat{u} = -\big((x+1)\widehat{u}'\big)'$ a pravou stranou $f(x) = -4x - 1$. Pro každé dvě funkce $u, v \in \mathcal{D}(A) = \{v \in \mathcal{C}^2(0,1) \cap \mathcal{C}[0,1], v(0) = v(1) = 0\}$ pak platí

$$(Au, v) \;=\; (u, Av) \;=\; \int_0^1 (x+1)u'(x)v'(x)\;\mathrm{d}x.$$

Přibližné řešení operátorové rovnice $A\widehat{u} = f$ hledáme ve tvaru $\widehat{u}_{\mathrm{Ritz}} = aw(x)$, kde $a \in \mathbb{R}$ je dáno vztahem $a = (f, w)/(Aw, w)$. Protože je však

$$(f, w) \;=\; \int_0^1 (-4x-1)(x-x^2)\;\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 4x^3 - 3x^2 - x\;\mathrm{d}x \;=\; \left[x^4 - x^3 - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \;=\; 1 - 1 - \frac{1}{2} \;=\; -\frac{1}{2},$$

$$(Aw, w) \;=\; \int_0^1 (x+1)(1-2x)^2\;\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 (x+1)(1-4x+4x^2)\;\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 4x^3 - 3x + 1\;\mathrm{d}x \;=\; 1 - \frac{3}{2} + 1 \;=\; \frac{1}{2},$$

je $a = -1$, a proto $\widehat{u}_{\mathrm{Ritz}} = -x(1-x) = x^2 - x$. Vrátíme-li se zpět k původní úloze, můžeme její přibližné řešení získané Ritzovou metodou vyjádřit ve tvaru $u_{\mathrm{Ritz}} = \widehat{u}_{\mathrm{Ritz}} + \phi(x) = x^2 - x - x + 3 = x^2 - 2x + 3$. Dosazením do původní diferenciální rovnice se přesvědčíme, že řešení získané Ritzovou metodou je zároveň přesným řešení úlohy:

$$(x+1)u''_{\mathrm{Ritz}} + u'_{\mathrm{Ritz}} \;=\; (x+1)\cdot 2 + (2x-2) \;=\; 4x$$

$$u_{\mathrm{Ritz}}(0) \;=\; 3, \quad u_{\mathrm{Ritz}}(1) \;=\; 1 - 2 + 3 \;=\; 2.$$