IV. Křivkový integrál

IV.1. Parametrizace křivek

Nechť $P(t) = \Big[x(t), y(t), z(t)\Big]$ *je zobrazení intervalu* $\langle a, b\rangle$ *do* $\mathbb{E}_3$. *Platí-li :*

1) $P(t)$ *je spojité a je prosté na* $\langle a, b\rangle$
(k prostosti stačí, aby aspoň jedna ze složek $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *byla ryze monotónní na* $\langle a, b\rangle$*),*

2) derivace $\dot{\mathbf{P}}\,(t) = \Big(\dot{x}\,(t), \dot{y}\,(t), \dot{z}\,(t)\Big)$ *je omezené a spojité zobrazení na* (a, b),

3) $\dot{\mathbf{P}}\,(t) \neq \vec{0}$ *pro všechna* $t \in (a, b)$,

potom množinu $c = \{X \in \mathbb{E}_3;\ X = P(t),\ t \in \langle a, b\rangle\}$ *nazveme* ***jednoduchou hladkou křivkou*** *v* $\mathbb{E}_3$ *a zobrazení* P *její* ***parametrizací.***

Analogicky definujeme i parametrizaci křivky v E_2.

Řekneme, že křivka c *je* ***orientována souhlasně****, resp.* ***nesouhlasně****, s parametrizací* P*, jestliže počáteční bod této křivky je* $P(a)$*, resp.* $P(b)$.

Křivku c *v* $\mathbb{E}_3$ *(též v* $\mathbb{E}_2$ *) lze orientovat pomocí jednotkového tečného vektoru* $\vec{\tau}$ *v bodě* $P(t)$. *Je-li* $\vec{\tau} = \dfrac{\dot{\mathbf{P}}(t)}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|}$ *pak říkáme, že křivka* c *je souhlasně orientována s parametrizací* P. *Je-li* $\vec{\tau} = -\dfrac{\dot{\mathbf{P}}(t)}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|}$ *pak říkáme, že křivka* c *je nesouhlasně orientována s parametrizací* P.

Poznámka : Jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka c se nazývá kladně, resp. záporně, orientovaná, jestliže pohyb v předepsaném směru je "proti směru pohybu hodinových ručiček ", resp. "ve směru pohybu hodinových ručiček."

***Příklad* 424**. Je dána křivka $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x^2, x \in \langle -4, 4\rangle\}$ s počátečním bodem $A = [-4, 16]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t) = \Big[x(t), y(t)\Big]$ je parametrizací jednoduché a hladké křivky c, jestliže

a) $P(t) = [t, t^2]$, $\quad t \in \langle -4, 4\rangle$, $\quad$ b) $P(t) = [t^2, t^4]$, $\quad t \in \langle -2, 2\rangle$,
c) $P(t) = [\sqrt{t}, t]$, $\quad t \in \langle 0, 16\rangle$.

Řešení:

a) $P(t) = [t, t^2], t \in \langle -4, 4\rangle$ splňuje všechny požadované podmínky definice, a proto $P(t)$ je parametrizací křivky c. Orientace křivky je souhlasná s parametrizací, jelikož $P(-4) = [-4, 16] = A$.

b) $P(t) = [t^2, t^4], t \in \langle -2, 2\rangle$ není prosté zobrazení. Např. $P(-1) = P(1) = [1, 1]$, takže $P(t)$ není parametrizací křivky c. Kromě toho $x = t^2 \geq 0$, kdežto bod A má x-ovou souřadnici $-4 < 0$.

c) $P(t) = [\sqrt{t}, t], t \in \langle 0, 16\rangle$ není parametrizací dané křivky, protože opět $x = \sqrt{t} \geq 0$. Kromě toho $\dot{\mathbf{P}}(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}}, 1\right)$ není omezená na $(0, 16)$.

■

***Příklad* 425**. Je dána půlkružnice $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}$ s počátečním bodem $A = [-a, 0]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t)$ je její parametrizací, jestliže a) $P(t) = [a\cos t, a\sin t],\ t \in \langle 0, \pi\rangle$,
b) $P(t) = [t, \sqrt{a^2 - t^2}], t \in \langle -a, a\rangle$, c) $P(t) = \left[\dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}\right], t \in \mathbb{R}$.

Řešení:

a) Ano, $P(t)$ je parametrizací , protože $P(t)$ vyhovuje podmínkám definice. Orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací, protože $A = P(\pi) = [-a, 0]$.

b) Není parametrizací, protože $\dot{\mathbf{P}}\,(t) = \left(1, \dfrac{-t}{\sqrt{a^2 - t^2}}\right)$ není omezená na $(-a, a)$.

c) Ano, je parametrizací. Ověříme, že platí $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\left(\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{a^2(t^2+1)}{1+t^2} = a^2,$$

$\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}} = \pm a, \quad \lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{a}{1+t^2} = 0 \Longrightarrow$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací. Zde se snadno ověří spojitost pro $P(t)$ a $\dot{\mathbf{P}}\,(t)$.

Protože je $\dot{x}\,(t) = \dfrac{a}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} > 0$ pro všechna t, je funkce $x(t)$ monotónní a zobrazení $P(t)$ je prosté. $\dot{\mathbf{P}}\,(t) = \left(\dot{x}\,(t), \dot{y}\,(t)\right) \neq (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow$

$$\frac{a^2}{(1+t^2)^3} + \frac{a^2t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{a^2}{(1+t^2)^2} \neq 0.$$

■

• Najděte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A a rozhodněte o její orientaci vzhledem k parametrizaci :

***Příklad* 426**. Křivka c je úsečka s počátečním bodem $A = [4, -1, 3]$ a koncovým $B = [3, 1, 5]$.

Řešení: Napíšeme rovnice přímky AB tak, že použijeme bod A a směrový vektor

$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 2), \quad c: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Úsečku AB obdržíme pro $t \in \langle 0, 1\rangle$,

bod A odpovídá parametru $t = 0$, takže orientace křivky je souhlasná s parametrizací.

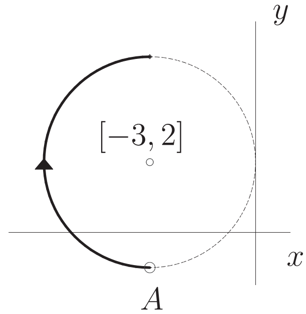
■

***Příklad* 427**. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9,\ x \leq -3\}, \quad A = [-3, -1]$

Řešení:

$P(t): \quad \begin{cases} x = -3 + 3\cos t \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases}, \quad t \in \langle \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\rangle,$

orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací, protože $P(\pi/2) \neq A$



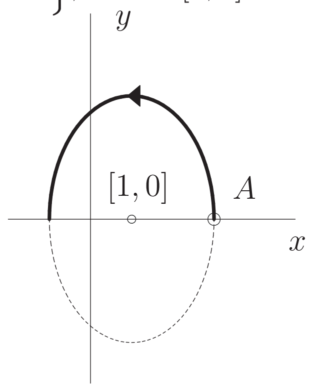
■

***Příklad* 428**. $c = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ y \geq 0\right\}, \quad A = [3,0]$

Řešení:

$$P(t): \quad \begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, \quad t \in \langle 0, \pi\rangle,$$

orientace křivky je souhlasná s parametrizací, protože $P(0) = A$.



■

***Příklad* 429**. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+y^2 = 4x,\ y+z=0,\ z \geq 0\}, \quad A = [0,0,0]$

Řešení: Křivka c je řezem válcové plochy $x^2+y^2=4x$ rovinou $y+z=0$.

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Longrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4, z = -y, z \geq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$P(t): \quad \begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = -2\sin t \quad \Longrightarrow -2\sin t \geq 0 \Longrightarrow \sin t \leq 0 \Longrightarrow t \in \langle \pi, 2\pi\rangle \end{cases}$$

$$A = [0,0,0] \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} 2 + 2\cos t = 0 & \Longrightarrow & \cos t = -1 \\ \sin t = 0 & \Longrightarrow & \sin t = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad t = \pi$$

$P(\pi) = A \quad \Longrightarrow \quad$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací. ■

***Příklad* 430**. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x = y,\ x \geq 0\},\ A = [0,0,-a]$

Řešení: Jde o řez kulové plochy rovinou procházející středem kulové plochy . Použijeme sférické souřadnice , v nichž $\quad r = a, \varphi = \dfrac{\pi}{4}; \quad \vartheta$ označíme jako parametr t .

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\frac{\pi}{4}\cos t = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y &= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos t = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ z &= a\sin t \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Longrightarrow x \geq 0 \Longrightarrow \cos t \geq 0 \Longrightarrow \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ &t = -\frac{\pi}{2} : A = [0,0,-a] \Longrightarrow \text{orientace křivky je} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{souhlasná s parametrizací.} \end{aligned}$$

■

• Rovinná křivka c je dána v parametrickém tvaru. Najděte její implicitní rovnici a pojmenujte ji :

***Příklad* 431**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = 2t+1,\ y = 3-t, \quad t \in \langle 1,4\rangle\},$ orientace je souhlasná s parametrizací.

Řešení: Jde o úsečku s počátečním bodem $A = P(1) = [3,2]$ a koncovým bodem $B = P(4) = [9,-1]$. Vyloučením parametru t obdržíme :

$$t = 3 - y \Longrightarrow \quad x = 2(3-y) + 1 \Longrightarrow \quad x + 2y = 7$$

■

***Příklad* 432**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = t^2 - 2t + 3,\ y = t^2 - 2t + 1, \quad t \in \langle 0,3\rangle\},$ orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací.

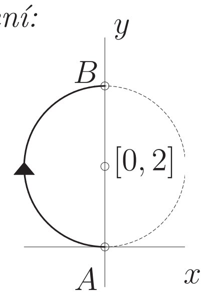
Řešení: Po odečtení dostáváme $x - y = 2$. Opět máme úsečku s počátečním bodem $A = P(3) = [6,4]$ a koncovým $B = P(0) = [3,1]$. ■

***Příklad* 433**. $c = \Big\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = 2\sin^2 t,\ y = 4\cos^2 t, \quad t \in \big\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\big\rangle\Big\}$,
orientace c je souhlasná s parametrizací.

Řešení: Sečteme $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4} = \sin^2 t + \cos^2 t \Longrightarrow 2x+y=4$. Znovu máme úsečku s počátečním bodem $A = P(0) = [0,4]$ a koncovým $B = P\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = [2,0]$. ■

***Příklad* 434**.* Křivka c je daná polární rovnicí $r(\varphi) = 4\sin\varphi, \quad \varphi \in \big\langle \dfrac{\pi}{2}, \pi\big\rangle$,
orientace křivky c je nesouhlasná s parametrizací.

Řešení:



$$c : \begin{cases} x = r\cos\varphi = 4\sin\varphi\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = 4\sin^2\varphi \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \text{poč.bod } A = [0,0], (\varphi = \pi) \\ \text{konc.bod } B = [0,4], (\varphi = \pi/2) \end{array}$$

$$x^2+y^2 = (4\sin\varphi\cos\varphi)^2 + (4\sin^2\varphi)^2 = 16\sin^2\varphi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = 4\cdot 4\sin^2\varphi = 4y,$$

$$x^2+y^2 = 4y \quad \Longrightarrow x^2+(y-2)^2 = 4 \quad \text{(kružnice)}$$

Tutéž část kružnice jsme mohli parametrizovat i jinak :
$P(t) = [2\cos t, 2+2\sin t],\ t \in \big\langle \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\big\rangle$, orientace je nesouhlasná s parametrizací.
■

• Ověřte, že $c = c_1 \cup c_2$ je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka. Najdětete parametrizace křivek c_1, c_2, nakreslete je a rozhodněte o jejich orientaci, jestliže A je počátečním bodem c_1 a též koncovým bodem c_2 :

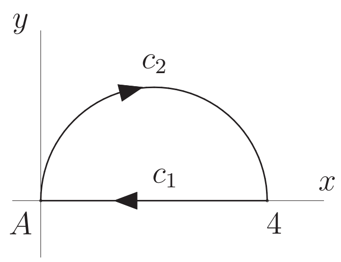
***Příklad* 435**. $c_1, c_2 \subset \mathbb{E}_2,\ A = [0,0]; \quad c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = 4x,\ y \geq 0\}$;
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 0,\ x \in \langle 0,4\rangle\}$

Řešení:

$c_1 : (x-2)^2+y^2 = 4 \Longrightarrow P_1 : \begin{cases} x = 2+2\cos t_1 \\ y = 2\sin t_1 \end{cases}$

$t_1 \in \langle 0, \pi\rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací,

$P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 0 \end{cases},$ $t_2 \in \langle 0,4\rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací.



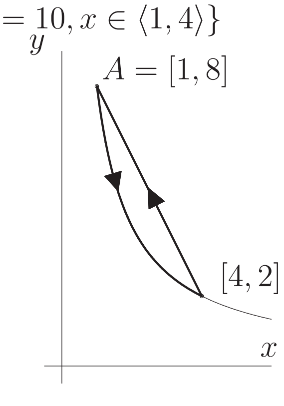
■

***Příklad* 436**. $c_1, c_2 \subset \mathbb{E}_2,\ A = [1,8]; \quad c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ xy = 8,\ x \in \langle 1,4\rangle\}$;
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y+2x = 10, x \in \langle 1,4\rangle\}$

Řešení:

$P_1 : \begin{cases} x = t_1 \\ y = \dfrac{8}{t_1} \end{cases},$ $t_1 \in \langle 1,4\rangle$, orientace c je souhlasná s parametrizací,

$P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 10-2t_2 \end{cases},$ $t_2 \in \langle 1,4\rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací.



■

437. $c_1,\ c_2 \subset \mathbb{E}_2,\ A = [1,1];\quad c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \sqrt{x}, x \in \langle 0,1\rangle\};$
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = x^2, x \in \langle 0,1\rangle\}$

$$\left[\ P_1 : \begin{cases} x = t_1^1 \\ y = t_1 \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t_1 \in \langle 0,1\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix} \quad \Big| \quad P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = t_2^2 \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t_2 \in \langle 0,1\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

438. $c_1,\ c_2 \subset \mathbb{E}_3,\ A = [3,0,2];\ c_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 9,\ x - z = 1,\ y \ge 0\};$
$c_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x - z = 1,\ y = 0\}$

$$\left[\ P_1 : \begin{cases} x = 3\cos t_1 \\ y = 3\sin t_1 \\ z = 3\cos t_1 - 1 \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t_1 \in \langle 0,\pi\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix} \quad \Big| \quad P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 0 \\ z = t_2 - 1 \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t_2 \in \langle -3,3\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

- Navrhněte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A :

439. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ 3x + y = 1,\ x \in \langle -1,2\rangle\};\quad A = [-1,4]$

$$\left[\ c : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t \in \langle -1,2\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

440. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ 2x - y = 2,\ x + z = 3,\ y \in \langle 0,2\rangle;\quad A = [2,2,1]$

$$\left[\ c : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t \in \langle 1,2\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesouhlasná} \\ \text{s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

441. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ 4x^2 + z^2 = 4,\ y + z = 0,\ y \le 0;\quad A = [-1,0,0]$

$$\left[\ c : \begin{cases} x = \cos t \\ y = -2\sin t \\ z = 2\sin t \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t \in \langle 0,\pi\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesouhlasná} \\ \text{s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

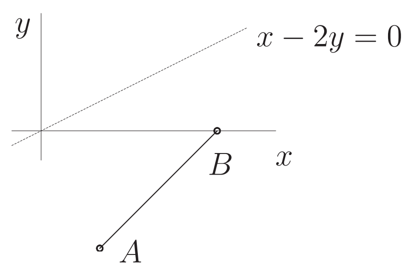
IV.2. Křivkový integrál skalární funkce

- Vyšetřete existenci křivkového integrálu $\displaystyle\int_c f\,ds$ a v kladném případě jej vypočítejte :

***Příklad* 442**. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x - 2y}\,ds,\quad$ c je úsečka s krajními body $A,\ B$, kde
a) $A = [1,-2], B = [3,0]$, b) $A = [1,-2], B = [3,4]$.

Řešení: Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_2$ s výjimkou přímky $x - 2y = 0$. V okolí této přímky není funkce f omezená.

a)

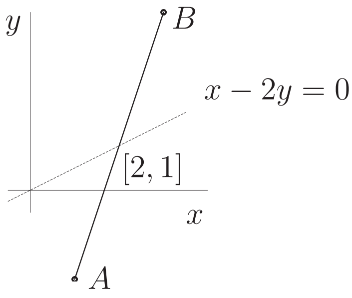


Integrál existuje, protože funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{x - 2y}$ je na úsečce AB spojitá.

$$\int_c \frac{1}{x - 2y}\,ds = \left| \begin{matrix} P(t): & x = 1 + 2t \\ & y = -2 + 2t \\ & t \in \langle 0,1\rangle \end{matrix} \ \Big|\ \begin{matrix} ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = \\ = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \\ = \sqrt{4+4}\,dt = 2\sqrt{2}\,dt \end{matrix} \right| = \int_0^1 \frac{2\sqrt{2}\,dt}{1 + 2t - 2(-2 + 2t)} =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{5-2t}\,dt = -\sqrt{2}\int_0^1 \frac{-2dt}{5-2t} = -\sqrt{2}\Big[\ln|5-2t|\Big]_0^1 = -\sqrt{2}\cdot(\ln 3 - \ln 5) =$$
$$= \sqrt{2}\cdot \ln\frac{5}{3}.$$

b)



Integrál neexistuje, protože úsečka AB protíná přímku $x - 2y = 0$ v bodě $[2,1]$ a funkce f není v okolí bodu $[2,1]$ omezená.

Např.: $\lim \dfrac{1}{x-2y} = +\infty$ je pro $y = 1$, $x \to 2^+$.

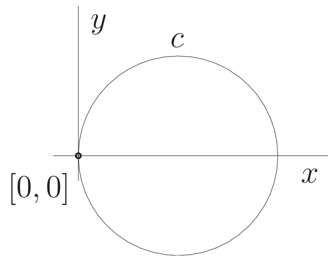
■

***Příklad* 443**. $\displaystyle\int_c \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, a) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = 4x\}$,

b) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = 4\}$

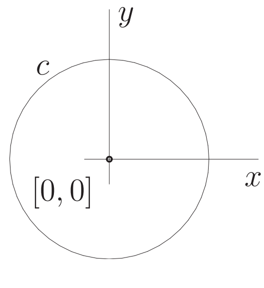
Řešení: Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_2 \setminus \{[0,0]\}$.

a)



Bod $[0,0] \in c$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \infty$,
takže integrál neexistuje;

b)



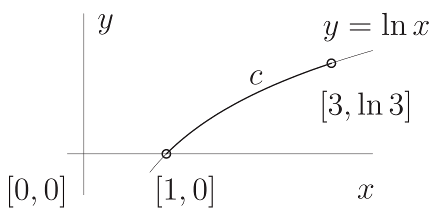
Daná funkce je spojitá na c, takže integrál existuje.

$$\int_c \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds =$$
$$= \left| \begin{array}{l} P(t) = [2\cos t, 2\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = \sqrt{(4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt = 2\,dt \end{array} \right| =$$
$$= \int_0^1 \frac{2\cos t + 2}{2}\cdot 2\,dt = 2\Big[\sin t + t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

■

***Příklad* 444**. $\displaystyle\int_c x^2\,ds$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \ln x,\ x \in \langle 1, 3\rangle\}$

Řešení: Je zřejmé, že integrál existuje :



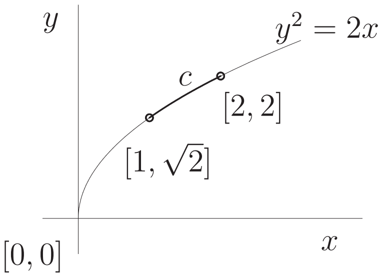
$$\left| \begin{array}{ll} P(t): & x = t \\ & y = \ln t \\ & t \in \langle 1, 3\rangle \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \\ = \sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt = \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt \end{array} \right. \right|$$

$$\int_c x^2\,ds = \int_1^3 t^2 \cdot \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt = \int_1^3 \sqrt{t^2+1}\cdot t\,dt = \left| \begin{array}{l|l} t^2+1=u & u \in \langle 2,10\rangle \\ 2t\,dt = du & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^{10} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\Big[\frac{2u^{3/2}}{3}\Big]_2^{10} = \frac{1}{3}(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 445.** $\displaystyle\int_c \frac{x^2}{y}\,ds, \quad c = \big\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y^2 = 2x,\ y \in \langle \sqrt{2}, 2\rangle\big\}$

Řešení: Integrál existuje :



$$\int_c \frac{x^2}{y}\,ds =$$

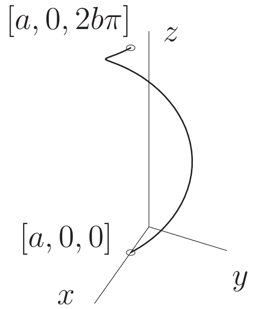
$$= \left| \begin{array}{ll|l} P(t): & y = t & \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{t^2+1} = \\ & x = \dfrac{t^2}{2} & = \sqrt{1+t^2} \\ & t \in \langle \sqrt{2}, 2\rangle & ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = \sqrt{1+t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^4}{4t}\cdot\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}}^2 t^2\cdot\sqrt{1+t^2}\cdot t\,dt = \left| \begin{array}{l|l} \sqrt{1+t^2} = u & 2t\,dt = 2u\,du \\ 1+t^2 = u^2 & u \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{5}\rangle \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} (u^2-1)\cdot u\cdot u\,du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{30}\,(25\sqrt{5} - 6\sqrt{3}). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 446.** $\displaystyle\int_c (x^2+y^2+z^2)\,ds$, c je první závit *šroubovice* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

Řešení:



Integrál existuje :

$$\int_c (x^2+y^2+z^2)\,ds =$$

$$= \left| \begin{array}{l} P(t) = [a\cos t, a\sin t, bt], \quad t \in \langle 0, 2\pi) \\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} \\ ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\,dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left[a^2t + \frac{b^2t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\Big(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\,b^2\pi^3\Big). \qquad \blacksquare$$

• Zdůvodněte, na které z křivek c existuje integrál $\int_c f\,ds$. Příslušný integrál vypočítejte.

447. $\displaystyle\int_c \frac{3-y}{y-x+2}\,ds$, a) c je kružnice $x^2 - 2x + y^2 = 0$;

[neexistuje, daná funkce není na křivce C omezená]

b) c je úsečka AB, kde $A = [2,3]$, $B = [0,1]$.

[existuje,daná funkce je na úsečce AB spojitá, $\sqrt{8}/3$]

448. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x^2+y^2}\,ds,$ a) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = t-3,\ y = 3-t,\ t \in \langle 1,4\rangle\}$ [neexistuje]

b) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = a^2\}$ $\left[\text{existuje, } \frac{2\pi}{a}\right]$

449. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x^2-y}\,ds,$ a) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 2x,\ x \in \langle 1,3\rangle\}$ [neexistuje]

b) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 9,\ x \in \langle 0,2\rangle\}$ $\left[\text{existuje, } -\frac{\ln 5}{6}\right]$

450. $\displaystyle\int_c xy\,ds,$ $cc = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = a^2,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$ $\left[-\frac{a^3}{2}\right]$

451. $\displaystyle\int_c \sqrt{2y}\,ds,$ $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ t \in \langle 0,2\pi\rangle\}$

(oblouk cykloidy) $\left[4\pi a\sqrt{a}\right]$

452. $\displaystyle\int_c \sqrt{x}\,ds,$ $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \sqrt{x},\ x \in \langle 1,2\rangle\}$ $\left[\frac{27-5\sqrt{5}}{12}\right]$

453. $\displaystyle\int_c (xy+2)\,ds,$ $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = \cos t,\ y = 3\sin t,\ z = \sqrt{8}\cos t,\ t \in \langle 0,2\pi\rangle\}$

$[12\,\pi]$

454. $\displaystyle\int_c z\,ds,$ $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in \langle 0,\pi\rangle\}$

(kuželová šroubovice) $\left[\frac{1}{3}\left((2+\pi^2)\sqrt{2+\pi^2}-2\sqrt{2}\right)\right]$

455. $\displaystyle\int_c (x+y)\,ds,$ $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2+z^2 = a^2,\ y = x,\ x \ge 0,\ y \ge 0, z \ge 0\}$

(Použijte parametrizaci z příkladu 430.) $\left[t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,\ a^2\sqrt{2}\right]$

456. $\displaystyle\int_c xyz\,ds,$ $c = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2 = \frac{a^2}{4},\ \text{v 1. oktantu}\right\}$

(c leží v rovině $z = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pak $x = \frac{a}{2}\cos t,\ y = \frac{a}{2}\sin t$) $\left[\frac{a^4\sqrt{3}}{32}\right]$

- Je dána skalární funkce f, křivka c je průnikem daných dvou ploch.
  a) Navrhněte parametrizaci této křivky.
  b) Napište vektor $\dot{P}(t)$ a vypočítejte jeho délku $\|\dot{P}(t)\|$.
  c) Vypočítejte křivkový integrál dané skalární funkce f.

457. $f(x,y,z) = y^2+2z^2$, křivka c je průsečnicí rovin $x+y+2z = 5,\ 2x+5y-2z = 4$ v prvním oktantu.

$\left[\begin{array}{l} a)\ \text{např.}:\ x = 7-4t, y = 2t-2, z = t, t \in \langle 1, 7/4\rangle \\ b)\ \dot{\mathbf{P}}(t) = (-4,2,1),\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{21} \\ c)\ 111\sqrt{21}/32 \end{array}\right]$

458. $f(x,y,z) = z^2$, křivka c je řez válcové plochy $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25} = 1$ a rovinou $4x-3z = 0$.

$\left[\begin{array}{l} a)\ \text{např.}:\ x = 3\cos t, y = 5\sin t, z = 4\cos t, t \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ b)\ \dot{\mathbf{P}}(t) = (-3\sin t, 4\sin t),\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = 5 \\ c)\ 80\pi \end{array}\right]$

IV.3. Aplikace křivkového integrálu skalární funkce

• Vypočítejte délku ℓ křivky c, jestliže :

***Příklad* 459**. $c = \Big\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 2 - \ln(\cos x),\quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle\Big\}$

Řešení:

$$\ell = \int_c 1\,ds = \left| \begin{array}{ll} P(t): & x = t \\ & y = 2 - \ln(\cos x), \\ & t \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \dot{\mathbf{P}}(t) = \Big(1, -\frac{1}{\cos t}\cdot(-\sin t)\Big) \\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{1 + \Big(\frac{\sin t}{\cos t}\Big)^2} = \Big|\frac{1}{\cos t}\Big| \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 t}\,dt = \left| \begin{array}{c} \sin t = s \\ \cos t\,dt = ds \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{ds}{1 - s^2} = \frac{1}{2}\Big[\ln\Big|\frac{1+s}{1-s}\Big|\Big]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\Big(\ln\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} - \ln 1\Big) =$$

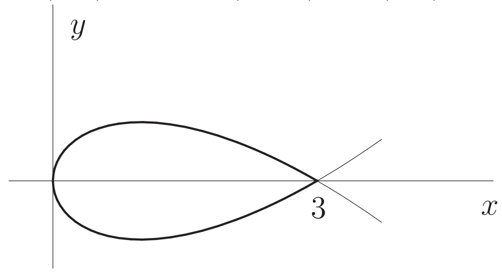
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\ln(3 + 2\sqrt{2})\ .$$ ■

***Příklad* 460**. $c = \Big\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3},\quad t \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle\Big\}$

Řešení: Jde o délku smyčky, jelikož $x(-\sqrt{3}) = x(\sqrt{3}) = 3$ a $y(-\sqrt{3}) = y(\sqrt{3}) = 0$.

$$\ell = \int_c 1\,ds = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1 - t^2)^2}\,dt =$$

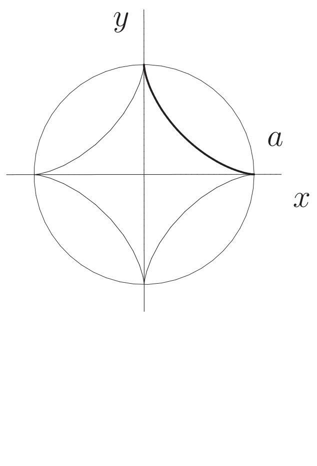


$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1 + t^2)\,dt =$$

$$= 2\cdot\int_0^{\sqrt{3}} (1 + t^2)\,dt = 2\Big[t + \frac{t^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}.$$ ■

***Příklad* 461**.* $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$

Řešení: Jde o asteroidu, skládající se ze čtyř stejně dlouhých oblouků. Proto



$$\ell = \int_c 1\,ds = 4\cdot\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\,dt = 12a\Big[\frac{\sin^2 t}{2}\Big]_0^{\pi/2} = 6a$$

■

Příklad* 462. c je část logaritmické spirály $r = a\mathrm{e}^{k\varphi}$, ležící uvnitř kruhu o poloměru $r = a,\ k > 0,\ a > 0$.

Řešení: Křivka c je zadána v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$. V kartézských souřadnicích bude vyjádřena :

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \dot{y} = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{cases}.$$

Potom $ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, d\varphi = \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\, d\varphi =$

$= \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi$, kde $r' = \dfrac{d\,r}{d\,\varphi}$.

Z podmínky $|a\mathrm{e}^{k\varphi}| \le a$ plyne $\varphi \le 0$. Tedy

$$\ell = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{(ak\mathrm{e}^{k\varphi})^2 + (a\mathrm{e}^{k\varphi})^2}\, d\varphi = \int_{-\infty}^{0} a\mathrm{e}^{k\varphi}\sqrt{k^2+1}\, d\,\varphi = \lim_{\beta\to-\infty} a\sqrt{k^2+1}\int_{\beta}^{0} \mathrm{e}^{k\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\sqrt{k^2+1}\lim_{\beta\to-\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{k\varphi}}{k}\right]_{\beta}^{0} = a\sqrt{k^2+1}\lim_{\beta\to-\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{\mathrm{e}^{k\beta}}{k}\right) = \frac{a\sqrt{k^2+1}}{k}. \qquad \blacksquare$$

Příklad* 463. $c = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos z}{z}\, dz,\ y = \int_1^t \frac{\sin z}{z}\, dz,\ t \in \mathbb{R}\right\}$. Stanovte vzdálenost od počátku souřadnic do nejbližšího bodu, v němž je tečna rovnoběžná s osou y.

Řešení: Tečna je rovnoběžná s osou y, když $\dot{x} = 0 \Longrightarrow \dot{x} = \dfrac{\cos t}{t} \Longrightarrow t_2 = \dfrac{\pi}{2}, t_1 = 1$.

$$\dot{y} = \frac{\sin t}{t} \quad \Longrightarrow \ell = \int_c 1\, ds = \int_1^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt = \int_1^{\pi/2} \frac{1}{t}\, dt = \Big[\ln|t|\Big]_1^{\pi/2} = \ln\frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

• Vypočítejte obsahy daných částí válcových ploch omezených souřadnou rovinou (xy) a zadanými plochami :

Příklad* 464. $y^2 = 4x,\ z = 2\sqrt{x - x^2}$

Řešení: Parabolická válcová plocha rovnoběžná s osou z je shora omezená plochou $z = f(x,y) = 2\sqrt{x-x^2}$. Obecně $P = \displaystyle\int_c f(x,y)\, ds =$

$$\left| \begin{array}{l} c: y^2 = 4x, c = c_1 \cup c_2, \quad c_1: y = 2\sqrt{x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_2: y = -2\sqrt{x} \\ ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = \sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx \\ z = 2\sqrt{x-x^2} \Longrightarrow x(1-x) \ge 0 \Longrightarrow x \in \langle 0, 1\rangle, \quad \int_{c_1} f\, ds = \int_{c_2} f\, ds \end{array} \right|$$

$$= 2\int_0^1 2\sqrt{x-x^2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx = 4\cdot\int_0^1 \sqrt{(1-x)(x+1)}\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = 2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi\ . \qquad \blacksquare$$

Příklad* 465. $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}, \quad z = xy, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$

Řešení: $P = \displaystyle\int_c xy\,ds = \left| \; c\,: x^2+y^2=\frac{1}{4} \Longrightarrow \begin{cases} P(t) = \left[\frac{1}{2}\cos t, y=\frac{1}{2}\sin t\right], & t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \\ \dot{\mathbf{P}}(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t\right), & ds = \frac{1}{2}\,dt \end{cases} \right|$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}\,d\varphi = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{16}\ .$$ ■

• Vypočtěte hmotnost m křivky c při délkové hustotě $\varrho = \varrho(x,y)$, resp. $\varrho(x,y,z)$:

***Příklad* 466**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2=a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}, \quad \varrho(x,y) = x$

Řešení: $m = \displaystyle\int_c \varrho\,ds = \int_c x\,ds = \left| \begin{array}{c} c: P(t) = \left[a\cos t, y = a\sin t\right],\ \ t\in\langle 0,\pi/2\rangle \\ \dot{\mathbf{P}}(t) = \left(-a\sin t, a\cos t\right),\quad \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = a \end{array} \right| =$

$$= \int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\,dt = a^2\cdot\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = a^2.$$ ■

***Příklad* 467**. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = at,\ y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\,t^2,\ z = \dfrac{a}{3}\,t^3,\ t\in\langle 0,1\rangle\},$

$\varrho(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{2y}{a}}$

Řešení: $m = \displaystyle\int_c \varrho\,ds = \int_c \sqrt{\frac{2y}{a}}\,ds =$

$$= \left| \begin{array}{lll} P(t): & x = at & \Longrightarrow \dot{x} = a \\ & y = \frac{a}{\sqrt{2}}\,t^2 & \Longrightarrow \dot{y} = \sqrt{2}at \\ & z = \frac{a}{3}t^3 & \Longrightarrow \dot{z} = at^2 \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2} = \\ = a\sqrt{1+2t^2+t^4} \\ ds = a(1+t^2)\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{2at^2}{a\sqrt{2}}}\cdot a\cdot(1+t^2)\,dt = \sqrt[4]{2}\cdot\int_0^1 at(1+t^2)\,dt = a\sqrt[4]{2}\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}\,a\ .$$ ■

***Příklad* 468**. Křivka c je první závit šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at$ a hustota se rovná čtverci vzdálenosti od osy z .

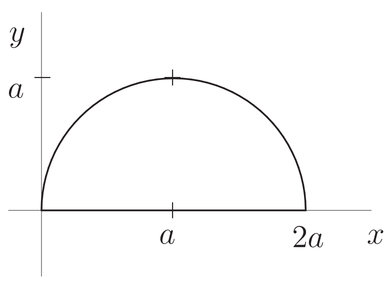
Řešení: $m = \displaystyle\int_c \varrho\,ds = \int_c (x^2+y^2)\,ds = \left| \begin{array}{ll} P(t): & x = a\cos t \\ & y = a\sin t \\ & z = a\,t \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} t\in\langle 0,2\pi\rangle \\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2} \\ ds = a\sqrt{2}\,dt \end{array} \right| =$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\cdot a\sqrt{2}\,dt = a^3\cdot 2\sqrt{2}\pi.$$ ■

***Příklad* 469**. $c = c_1 \cup c_2;\quad c_1 = \{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = 2ax,\ y\geq 0\};$
$c_2 = \{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y = 0,\ x\in\langle 0,2a\rangle, a > 0\}, \quad \varrho(x,y) = x^2+y^2$

Řešení:

$$m = \int_c \varrho\,ds = \int_{c_1}\varrho\,ds + \int_{c_2}\varrho\,ds =$$
$$= \int_{c_1}(x^2+y^2)\,ds + \int_{c_2}(x^2+y^2)\,ds =$$



$$= \left| \begin{array}{llll} c_1 : \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2-2ax=0 \Longrightarrow (x-a)^2+y^2=a^2 \Longrightarrow \\ y \geq 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} x = a + a\cos t \\ y = a \sin t \end{array} & \mid & \begin{array}{l} ds = a\,dt \\ t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array} \\ c_2 : y = 0 \Longrightarrow ds = dx, x \in \langle 0, 2a \rangle & & & \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi} \Big(a^2(1+\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t \Big) \cdot a\,dt + \int_0^{2a} x^2\,dx = a^3 \int_0^{\pi} (2 + 2\cos t)\,dt + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2a} =$$

$$= 2a^3 \Big[t + \sin t \Big]_0^{\pi} + \frac{8a^3}{3} = 2a^3\pi + \frac{8a^3}{3}\;. \qquad \blacksquare$$

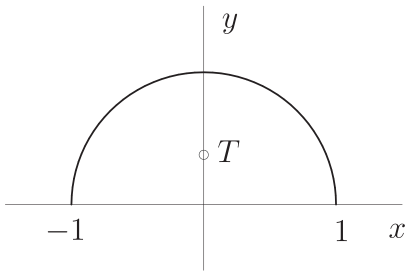
- Určete těžiště T křivky c při hustotě $\varrho(x,y)$, resp. $\varrho(x,y,z)$:

***Příklad* 470**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2=1,\ y \geq 0\}, \quad \varrho(x,y) = a(1-y),\ a > 0$

Řešení:

$T = [0, y_T]$, kde $y_T = \dfrac{M_x}{m}$.

(Všimněte si, že hustota nezáleží na x čili hmotnost levé a pravé čtvrtkružnice je stejná.)



$$\left| \; P(t) : \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right. \quad \mid \quad \dot{\mathbf{P}}(t) : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -\sin t \\ \dot{y} = \cos t \end{array} \right. \quad \mid \quad \begin{array}{l} ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = dt \\ t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array} \; \right|$$

$$m = \int_c \varrho\,ds = \int_c a(1-y)\,ds = \int_0^{\pi} a(1-\sin t)\,dt = a\Big[t + \cos t\Big]_0^{\pi} = a(\pi - 2)$$

$$M_x = \int_c y\varrho\,ds = a\int_0^{\pi} (1-\sin t)\sin t\,dt = a\int_0^{\pi} \Big(\sin t - \frac{1-\cos 2t}{2} \Big)\,dt =$$

$$= a\left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{\pi} = a\,(2 - \frac{\pi}{2})$$

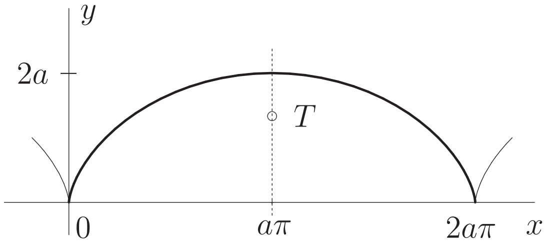
$$y_T = \frac{a\,(2-\frac{\pi}{2})}{a\,(\pi-2)} = \frac{4-\pi}{2\,(\pi-2)} \qquad \boxed{T = \left[0, \frac{4-\pi}{2\,(\pi-2)} \right]}\,. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 471**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = a\,(t - \sin t),\ y = a\,(1-\cos t),\ a > 0,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,
$\varrho(x,y) = 1$

Řešení:

c je první oblouk cykloidy, $\quad T = [\pi a, y_T]$,

$y_T = \dfrac{M_x}{m}; \qquad m = \displaystyle\int_c \varrho(x,y)\,ds$



$$\left| \; \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t) \\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} \quad \mid \quad \begin{array}{l} \dot{x} = a(1-\cos t) \\ \dot{y} = a\sin t \end{array} \quad \mid \quad \begin{array}{l} \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \\ ds = a\sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt \end{array} \; \right|$$

$$m = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\Big[-2\cos\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi} = 8a;$$

$$M_x = \int_c y\varrho(x,y)\,ds = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt = a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt =$$

$$= a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\cdot\sin^3\frac{t}{2}\,dt = 4a^2\int_0^{2\pi}\Big(1-\cos^2\frac{t}{2}\Big)\sin\frac{t}{2}\,dt = \left[\begin{array}{r} \cos\frac{t}{2} = z \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = dz \end{array}\right] =$$

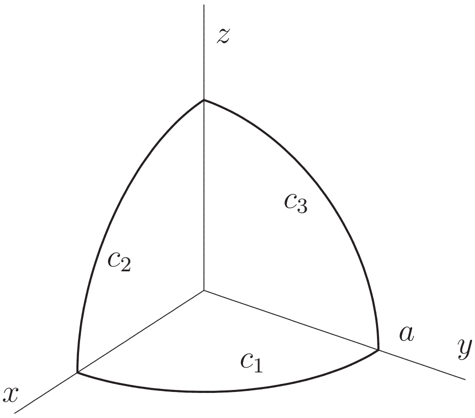
$$= -4\,a^2\cdot 2\cdot\int_1^{-1}(1-z^2)\,dz = 8a^2\int_{-1}^{1}(1-z^2)\,dz = 16a^2\Big[z-\frac{z^3}{3}\Big]_0^1 = 16\,a^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{32a^2}{3};$$

$$y_T = \frac{32a^2}{3\cdot 8a} = \frac{4}{3}\,a, \qquad \boxed{T = \Big[\pi a, \frac{4}{3}\,a\Big]} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 472**. $c = c_1\cup c_2\cup c_3,\ c_1 = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ x^2+y^2=a^2,\ z=0, x\geq 0,\ y\geq 0\}$,
$c_2 = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ x^2+z^2=a^2, y=0,\ x\geq 0,\ z\geq 0\}$,
$c_3 = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ y^2+z^2=a^2,\ x=0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ a>0\}, \quad \varrho(x,y)=1$

Řešení: Křivka c je je symetrická vzhledem k osám x, y, z tedy $x_T = y_T = z_T$. Omezíme se na $x_T = \dfrac{M_{yz}}{m}$. $\quad m = 3\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 1 = \dfrac{3}{2}\,\pi\,a$,

$$M_{yz} = \int_c x\varrho(x,y)\,ds = \int_{c_1} x\,ds + \int_{c_2} x\,ds + \int_{c_3} x\,ds =$$



$$\left|\begin{array}{ll} c_1: & \begin{array}{l} P_1(t) = [a\cos t, a\sin t, 0] \\ t\in\langle 0,\pi/2\rangle, \quad \|\dot{\mathbf{P}}_1(t)\| = a \end{array} \\ c_2: & \begin{array}{l} P_2(t) = [a\cos t, 0, a\sin t] \\ t\in\langle 0,\pi/2\rangle, \quad \|\dot{\mathbf{P}}_2(t)\| = a \end{array} \\ c_3: & \begin{array}{l} P_3(t) = [0, a\cos t, a\sin t] \\ t\in\langle 0,\pi/2\rangle, \quad \|\dot{\mathbf{P}}_3(t)\| = a \end{array} \end{array}\right|$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^2\cos t\,dt + \int_0^{\pi/2} a^2\cos t\,dt + \int_0^{\pi/2} 0\,dt = 2a^2\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = 2a^2$$

$$x_T = y_T = z_T = \frac{2a^2}{\frac{3}{2}\pi a} = \frac{4\,a}{3\pi} \qquad \boxed{T = \left[\frac{4\,a}{3\pi}, \frac{4\,a}{3\pi}, \frac{4\,a}{3\pi}\right]} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 473**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k souřadnicové rovině (yz) prostorové křivky $c = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt \quad t\in\langle 0, 2\pi\rangle\}$, je-li $\varrho(x,y,z) = x^2+y^2$.

Řešení:

$$I_{yz} = \int_c \varrho\cdot x^2\,ds = \int_c (x^2+y^2)x^2\,ds = \left|\begin{array}{c} ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \\ = \sqrt{a^2+b^2}\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\cdot a^2\cos^2 t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^4\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^4\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Big[t+\frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{2\pi} = a^4\sqrt{a^2+b^2}\,\pi\ . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 474**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z křivky $c \subset \mathbb{E}_3$:
$$c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ 2x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1\}, \quad \text{je-li} \quad \varrho(x,y,z) = z\ .$$

Řešení: c je řez eliptické válcové plochy rovinou $x + z = 1$.

$$I_z = \int_c (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)\,ds = \int_c (x^2+y^2)z\,ds =$$

$$= \left| \begin{array}{lllll} & x = \cos t & \Longrightarrow & \dot x = -\sin t & \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + 2\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2} \\ P(t): & y = \sqrt{2}\sin t & \Longrightarrow & \dot y = \sqrt{2}\cos t \quad | & \\ & z = 1 - \cos t & \Longrightarrow & \dot z = \sin t & t \in \langle 0, 2\pi\rangle \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 2\sin^2 t)(1 - \cos t)\cdot\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t)(1-\cos t)\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{1-\cos 2t}{2} - \cos t - \sin^2 t\cos t\right)dt = \sqrt{2}\Big[t + \frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4} - \sin t -$$

$$- \frac{\sin^3 t}{3}\Big]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi = 3\sqrt{2}\,\pi\ .$$ ∎

- Je dána křivka c a délková hustota ϱ.
  a) Navrhněte parametrizaci $X = P(t),\ t \in \langle a,b\rangle$ dané křivky c a určete délku vektoru $\dot P(t)$.
  b) Vypočítejte hmotnost křivky c, je-li na ní rozložena hmota s délkovou hustotou ϱ.
  c) Napište, co by příslušný integrál ještě mohl vyjadřovat. Uveďte, zda se jedná o statický moment či moment setrvačnosti, při jaké hustotě a vzhledem k jakému útvaru (bod, přímka, resp. rovina).

475. Křivka c je úsečka AB, kde $A = [1,0]$, $B = [2,3]$, $\varrho(x,y) = x^2 + y^2$.

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [1+t, 3t],\ t \in \langle 0,1\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{10} \\ b)\ m = 6\sqrt{10}/3 \\ c)\ J_0,\ \varrho = 1 \end{array}\right]$$

476. Křivka c je úsečka AB, kde $A = [0,1]$, $B = [1,2]$, $\varrho(x,y) = x^2 y$.

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [t,t],\ t \in \langle 0,1\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{2} \\ b)\ m = \sqrt{2}/4 \\ c)\ M_x,\ \varrho = x^2;\ M_y,\ \varrho = xy;\ J_y,\ \ \varrho = y \end{array}\right]$$

477. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 9,\ x \ge 0\}$, $\varrho(x,y) = x$.

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [3\cos t, 3\sin t],\ t \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = 3 \\ b)\ m = 18 \\ c)\ M_y,\ \varrho = 1 \end{array}\right]$$

478. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = t/3,\ t \in \langle 0,3\rangle\}$,
$\varrho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [3\cos t, 3\sin t, t/3],\ t \in \langle 0,3\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{82}/3 \\ b)\ m = 28\sqrt{82}/3 \\ c)\ J_0,\ \varrho = 1 \end{array}\right]$$

479. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t/4;\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$,
$\varrho(x,y,z) = z^2/(x^2+y^2)$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [2\cos t, 2\sin t, t/4],\ t \in \langle 0,2\pi\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{17}/2 \\ b)\ m = \sqrt{65}\,\pi^3/96 \\ c)\ M_{xy},\ \varrho = z/(x^2+y^2);\ J_{xy},\ \varrho = 1/(x^2+y^2) \end{array}\right]$$

480. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \dfrac{x^2}{2} + 2 \text{ mezi body } A = [0,2],\ B = [2,4]\}$, $\varrho(x,y) = x$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [t, t^2/2 + 2],\ t \in \langle 0,2\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{1+t^2} \\ b)\ m = (5\sqrt{5}-1)/3 \\ c)\ M_y,\ \varrho = 1 \end{array}\right]$$

481. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x = t\,\cos t, y = t\,\sin t, z = t;\ t \in \langle 0, 1\rangle\},\quad \varrho(x, y, z) = z$

$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [t\cos t, t\sin t, t],\ t \in \langle 0,1\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{2+t^2}/2 \\ b)\ m = (\sqrt{27} - \sqrt{8})/3 \\ c)\ M_{xy},\ \varrho = 1 \end{array}\right]$

• Vypočítejte délku ℓ dané křivky c :

482. $c = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \dfrac{1}{3}\, x\sqrt{x},\quad x \in \langle 0, 5\rangle\right\}$ $\left[\dfrac{19}{3}\right]$

483. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3,\quad t \in \langle 0, 1\rangle\}$ $[5]$

484. $c = \{[\varphi, r] \in \mathbb{E}_2;\ r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi),\ \varphi \in \langle 0, \pi\rangle,\ a > 0\}$ (horní polovina kardioidy) $[4a]$

485. $c = \left\{[\varphi, r] \in \mathbb{E}_2;\ r(\varphi) = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3},\quad \varphi \in \langle 0, 3\pi\rangle\right\}$ $\left[\dfrac{3}{2}\pi\right]$

486. $c = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\ dx\right\}$ $\left[4;\ \text{použijte} \cos x \geq 0 \Longrightarrow x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle\right]$

487. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t/2,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$ $[\pi\sqrt{17}]$

488. $c = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \dfrac{1}{3}x\sqrt{x}, x \in \langle 0; 5\rangle\right\}$ $[19/3]$

489. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = at,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$ $[2\pi\sqrt{R^2 + a^2}]$

• Určete hmotnost m křivky c při délkové hustotě $\varrho(x, y)$:

490. $\varrho = x(y^2 + z^2),\quad c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ y^2 + 2z^2 = 4,\ x = z,\ x \geq 0\}$ $\left[\dfrac{32\sqrt{2}}{3}\right]$

491. $\varrho = x(y + 2),\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0\}$ $[16]$

492. $\varrho = x^{4/3} + y^{4/3},\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0, \pi/2\rangle\}$ $\left[a^{\frac{7}{3}}\right]$

493. $\varrho = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}},\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ $\left[\mathrm{e}^a \cdot a \cdot \dfrac{\pi}{2}\right]$

494. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose souměrnosti homogenní půlkružnice o poloměru a. $\left[\dfrac{a^3\pi}{2}\right]$

495. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose x části asteriody ležící v prvním kvadrantu (tj. křivky $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0, \pi/2\rangle$), při hustotě $\varrho = 1$. $\left[\dfrac{3a^3}{8}\right]$

• Určete těžiště T křivky c při délkové hustotě $\varrho(x, y, z)$:

496. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at,\ a > 0,\quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$,
$\varrho = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$ $\left[m = \dfrac{8\sqrt{2}a\pi^3}{3},\ M_{xy} = 4\sqrt{2}a^2\pi^4,\ T = \left[0, 0, \dfrac{3}{2}a\pi\right]\right]$

497. $c = c_1 \cup c_2,\ c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 6\sqrt{x},\ x \in \langle 1, 6\rangle\}$;
$c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = -6\sqrt{x},\ x \in \langle 1, 6\rangle\},\ \varrho = 1$ $\left[m = 10,\ M_y = 35,\ T = \left[\dfrac{7}{2}, 0\right]\right]$

IV.4. Křivkový integrál vektorové funkce

Předpokládejme, že c je jednoduchá hladká křivka s parametrizací $P(t)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\int_c \vec{f}(X) \cdot d\vec{s} = \pm \int_a^b \vec{f}\Big(P(t)\Big) \cdot \dot{P}(t)\, dt.$$

Znaménko plus (resp. mínus) použijeme, když křivka c je orientována souhlasně (resp. nesouhlasně) s parametrizací $P(t)$.

Poznámka: Křivkový integrál vektorové funkce $\vec{f} = (U, V, W)$ lze zapsat v diferenciálech, tj. ve tvaru

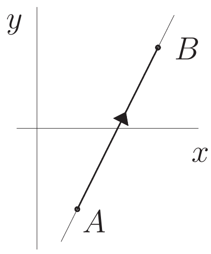
$$\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_c \big(U, V, W\big) \cdot (dx,\, dy,\, dz) = \int_c (U\, dx + V\, dy + W\, dz).$$

Analogicky pro křivku $c \in \mathbb{E}_2$.

- Vypočítejte dané křivkové integrály po orientované křivce c s počátečním bodem A.

***Příklad* 498**. $\displaystyle\int_c (x, -y^2) \cdot d\vec{s}$, c je úsečka z bodu $A = [1, -2]$ do bodu $B = [3, 2]$.

Řešení:



Parametrické rovnice úsečky:

$$c : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 4t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1\rangle$$

Parametrizace křivky c:

$P(t) = \big[1 + 2t, -2 + 4t\big]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$,
$\dot{P}(t) = (2, 4)$
$P(0) = [1, -2] = A \Rightarrow$ orientace křivky je souhlasná se zvolenou parametrizací

$$\int_c (x, -y^2) \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \Big(\underbrace{(1 + 2t), -(-2 + 4t)^2}_{\vec{f}(P(t))}\Big) \cdot \underbrace{(2, 4)}_{\dot{P}(t)}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \Big((1 + 2t) \cdot 2 - (4t - 2)^2 \cdot 4\Big)\, dt = 2\int_0^1 \Big(1 + 2t - 2(16t^2 - 16t + 4)\Big)\, dt =$$

$$= 2\int_0^1 (-7 + 34t - 32t^2)\, dt = 2\Big[-7t + 17t^2 - \frac{32}{3}\, t^3\Big]_0^1 = -\frac{4}{3} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 499**. $\displaystyle\int_c (x^2 - y^2, 1) \cdot d\vec{s}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x^3\}$ z bodu $A = [0, 0]$ do bodu $B = [3, 27]$.

Řešení:

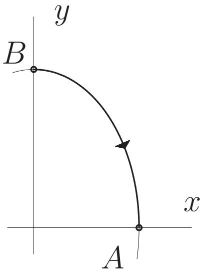
$$c : \begin{cases} x = t, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 3\rangle$$

$P(t) = [t, t^3]$, $t \in \langle 0, 3\rangle$
$\dot{P}(t) = (1, 3t^2)$, $P(0) = A \Rightarrow$ souhlasná parametrizace

$$\int_c (x^2-y^2,1)\cdot d\vec{s} = \int_c (t^2-t^6,1)\cdot(1,3t^2)\,dt = \int_0^3 \Big((t^2-t^6)\cdot 1 + 1\cdot 3t^2\Big)\,dt =$$
$$= \left[\frac{4}{3}\,t^3 - \frac{t^7}{7}\right]_0^3 = -\frac{1935}{7} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 500.** $\displaystyle\int_c (-y,x)\cdot d\vec{s}, \quad c = \Big\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\Big\}, \quad A=[a,0].$

Řešení:



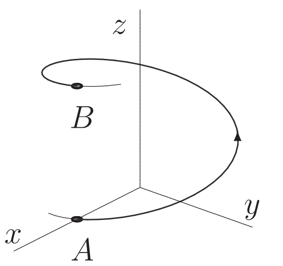
$$c: \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t\in\langle 0,\pi/2\rangle$$

$P(t) = [a\cos t, b\sin t], \quad t\in\langle 0,\pi/2\rangle$
$\dot{P}(t) = (-a\sin t, b\cos t), \quad P(0) = [a,0] = A$
orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací

$$\int_c (-y,x)\cdot d\vec{s} = -\int_0^{\pi/2} (-b\sin t, a\cos t)\cdot(-a\sin t, b\cos t)\,dt =$$
$$= -\int_0^{\pi/2} (b\sin t\cdot a\sin t + a\cos t\cdot b\cos t)\,dt = -ab\int_0^{\pi/2} 1\,dt = -\frac{ab\pi}{2} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 501.** $\displaystyle\int_c (y,-x,z)\cdot d\vec{s}$, c je část křivky $k = \Big\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3; x = R\cos t,$ $y = R\sin t, z = \dfrac{at}{2\pi},\ R>0\Big\}$, od průsečíku s rovinou $z=0$ do průsečíku s rovinou $z=a$, $a>0$.

Řešení: Jedná se o šroubovici s poloměrem vinutí R a stoupáním a.



$$z=0 \implies t_1 = 0$$
$$z=a \implies t_2 = 2\pi$$

$P(t) = \Big[R\cos t, R\sin t, \dfrac{at}{2\pi}\Big], \quad t\in\langle 0,2\pi\rangle$
$\dot{P}(t) = \Big(-R\sin t, R\cos t, \dfrac{a}{2\pi}\Big), \quad P(0) = [a,0,0] = A$
orientace je souhlasná

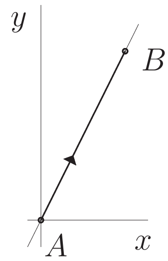
$$\int_c (y,-x,z)\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \Big(R\sin t, -R\cos t, \frac{at}{2\pi}\Big)\cdot\Big(-R\sin t, R\cos t, \frac{a}{2\pi}\Big)\,dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(-R^2\sin^2 t - R^2\cos^2 t + \frac{a^2 t}{4\pi^2}\Big)\,dt = \int_0^{2\pi}\Big(-R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\,t\Big)\,dt =$$
$$= \Big[-R^2 t + \frac{a^2}{8\pi^2}\,t^2\Big]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} - 2\pi R^2 \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 502.** $\displaystyle\int_c -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$, c je úsečka z bodu $A=[0,0]$ do bodu $B=[\pi,2\pi]$.

Řešení: Daný integrál můžeme počítat dvojím způsobem:

1) Použijeme přímo zadání křivkového integrálu v diferenciálním tvaru.

Při parametrickém vyjádření dané křivky c dostaneme pro $t=0$ počáteční bod A,



$$c: \quad x = t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \qquad \text{vypočítáme diferenciály,} \quad dx = dt,$$
$$y = 2t, \qquad dy = 2\,dt,$$

$$\int_C -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy = \int_0^\pi (-t\cos 2t + 2\cdot 2t\sin t)\,dt =$$
$$= \int_0^\pi t(4\sin t - \cos 2t)\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t, & v' = 4\sin t - \cos 2t \\ u' = 1, & v = -4\cos t - \dfrac{\sin 2t}{2} \end{array} \right| =$$
$$= -\left[4t\cos t + \frac{t}{2}\sin 2t\right]_0^\pi + \int_0^\pi \left(4\cos t + \frac{\sin 2t}{2}\right)dt = 4\pi + \left[4\sin t - \frac{\cos 2t}{4}\right]_0^\pi = 4\pi.$$

Poznámka: Protože úsečka c je grafem explicitně zadané funkce $y = 2x,\ x\in\langle 0,\ \pi\rangle$, můžeme ponechat proměnnou x jako parametr. Po výpočtu diferenciálu $dy = 2\,dx$ dostáváme

$$\int_c -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy = \int_0^\pi (-x\cos 2x + 2\cdot 2x\sin x)\,dx = \cdots,$$

což je stejný Riemannův integrál.

2) Daný integrál v diferenciálním tvaru přepíšeme do tvaru vektorového

$$\int_c -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy = \int_c (-x\cos y,\ y\sin x)\cdot d\vec{s}.$$

Použijeme parametrizaci

$$c: \left\{ \begin{array}{l} x = t, \\ y = 2t, \end{array} \right. \quad t\in\langle 0,\pi\rangle;$$

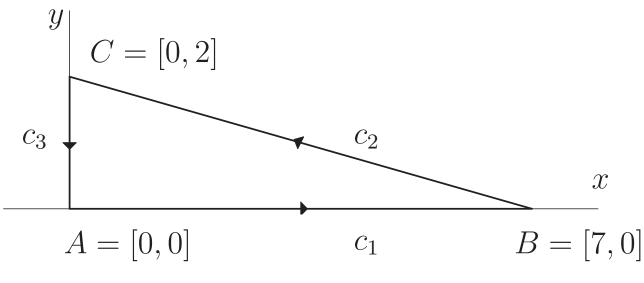
$$\left| \begin{array}{ll} P(t) = [t, 2t], \quad t\in\langle 0,\pi\rangle; & \dot{P} = (1,2) \\ P(0) = A \Rightarrow & \text{orientace křivky je souhlasná s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\int_0^\pi (-t\cos 2t,\ 2t\sin t)\cdot(1,\ 2)\,dt = \int_0^\pi (-t\cos 2t + 4t\sin t)\,dt = \cdots$$

a dostaneme zase stejný Riemannův integrál. ■

***Příklad* 503**. $\oint_c x\,dy$, c je obvod trojúhelníka vytvořeného přímkami $x=0,\ y=0$ a $2x+7y=14$, c je orientována kladně.

Řešení:



$$c = c_1 \cup c_2 \cup c_3$$

$$\oint_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$$

Podle poznámky z předchozího příkladu:

$$c_1 : y = 0,\ dy = 0 \cdot dx,\ x \in \langle 0, 7\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_{c_1} x\,dy = \int_0^7 0\,dx = 0$$

$$c_2 : x = \frac{14-7y}{2},\ y \in \langle 0, 2\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_{c_2} x\,dy = \int_0^2 \frac{14-7y}{2}\,dy$$

$$c_3 : x = 0,\ y \in \langle 2, 0\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_{c_3} x\,dy = \int_2^0 0 \cdot dy$$

$$\oint_c x\,dy = 0 + \int_0^2 \frac{14-7y}{2}\,dy + 0 = \frac{1}{2}\Big[14y - \frac{7y^2}{2}\Big]_0^2 = 7 \qquad \blacksquare$$

504. $\displaystyle\int_c (x\cos y, 0) \cdot d\vec{s}$, $\quad c$ je orientovaná úsečka z bodu $A = [0, 1]$ do bodu $B = [1, 2]$.
$[\sin 2 + \cos 2 - \cos 1]$

505. $\displaystyle\int_c (x^2 + y^2,\ x^2 - y^2) \cdot d\vec{s}$, $\quad c$ je orientovaná křivka $y = 1 - |1 - x|$, $x \in \langle 0, 2\rangle$, počáteční bod je $A = [0, 0]$.
$\left[\frac{4}{3}\right]$

506. $\displaystyle\int_c (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, $\quad c$ je oblouk paraboly $y = x^2$ z bodu $A = [-1, 1]$ do bodu $B = [1, 1]$.
$\left[-\frac{14}{15}\right]$

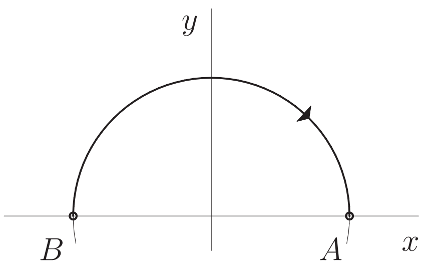
507. $\displaystyle\int_c (y, x) \cdot d\vec{s}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ a > 0\}$ a počáteční bod je $A = [a, 0]$.
$[0]$

IV.5. Práce síly podél křivky

• Vypočtěte práci W síly $\vec{f}$ podél orientované křivky c :

***Příklad* 508**. $\vec{f} = (x + y, 2x)$, $\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = R^2,\ y \geq 0\}$, počáteční bod $B = [-R, 0]$.

Řešení: Práce W síly $\vec{f}$ podél orientované křivky c je rovna integrálu $\displaystyle\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$.



$$c : \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi/2\rangle$$

$$\left|\begin{array}{l} P(t) = [R\cos t, R\sin t], \quad t \in \langle 0, \pi\rangle \\ \dot{P}(t) = (-R\sin t, R\cos t), \quad P(0) = [R, 0] = A \Rightarrow \\ \text{orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací} \end{array}\right| =$$

$$W = \int_c (x + y, 2x) \cdot d\vec{s} = -\int_0^\pi (R\cos t + R\sin t, 2R\cos t) \cdot (-R\sin t, R\cos t)\,dt =$$

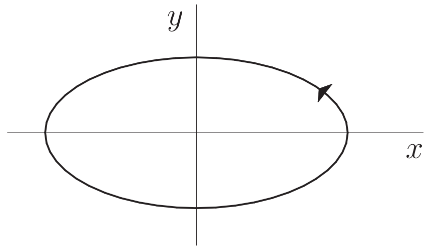
$$= -\int_0^\pi \Big(-R^2(\sin t + \cos t)\sin t + 2R^2\cos^2 t\Big)\,dt =$$

$$= -R^2 \int_0^\pi (-\sin^2 t - \sin t \cos t + 2\cos^2 t)\, dt =$$
$$= -R^2 \int_0^\pi \Big(-\frac{1-\cos 2t}{2} - \sin t \cos t + 1 + \cos 2t\Big)\, dt =$$
$$= -R^2 \Big[-\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin^2 t}{2} + t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^\pi = -\frac{\pi R^2}{2}$$

■

***Příklad* 509**. $\vec{f} = \Big(\dfrac{2y}{x^2+4y^2}, \dfrac{-2x}{x^2+4y^2}\Big)$, $\quad c = \Big\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\Big\}$, křivka c je orientovaná kladně.

Řešení:



$$c: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

| $P(t) = [2\cos t, y = \sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
| $\dot{P}(t) = (-2\sin t, \cos t)$
| orientace křivky je souhlasná s parametrizací |

$$W = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c \Big(\frac{2y}{x^2+4y^2}, -\frac{2x}{x^2+4y^2}\Big) \cdot d\vec{s} =$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{2\sin t}{4}, -\frac{4\cos t}{4}\Big) \cdot (-2\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{4\sin^2 t}{4} - \frac{4\cos^2 t}{4}\Big)\, dt =$$
$$= -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$$

■

***Příklad* 510**. $\vec{f} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + a\,\vec{k}$, $\quad c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0,\ z = 2\}$, orientace křivky c je dána tečným vektorem $\vec{\tau}([2,1,2]) = -\vec{i}$.

Řešení:

$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \implies$ rovnice válcové plochy

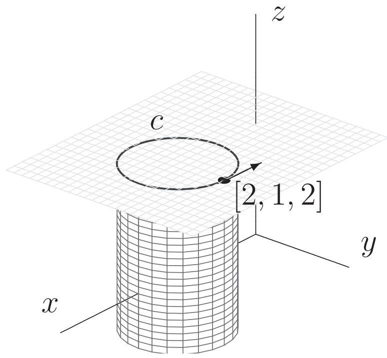
$z = 2 \implies$ rovnice roviny

Křivka c vznikne rovinným řezem válcové plochy.

Rovina je kolmá na osu rotační válcové plochy, křivka c je tedy kružnice

$$c: \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases} \implies$$

$$c: \begin{cases} x = 2 + 1\cdot\cos t, \\ y = 1 \cdot \sin t, \\ z = 2, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



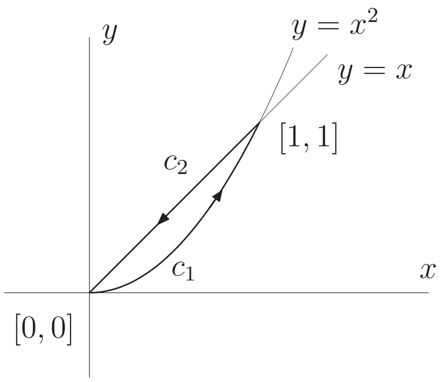
| $P(t) = [2 + \cos t, \sin t, 2]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $\quad P\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = [2,1,2]$; $\quad \dot{P}\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = (-1,0,0) = -\vec{i}$
| $\dot{P}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ $\quad$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací |

$$W = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c (-y, x, a) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 2 + \cos t, a) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\sin^2 t + (2+\cos t)\cos t + a\cdot 0\Big)\,dt = \int_0^{2\pi} (1+2\cos t)\,dt = 2\pi \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 511**. $\vec{f} = (xy, x+y)$, $c = c_1 \cup c_2$, c je uzavřená křivka, kde c_1 je část paraboly $y = x^2$ a c_2 je část přímky $y = x$, c je kladně orientovaná.

Řešení:



$c_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in \langle 0,1\rangle; \quad \Rightarrow$

$P_1(t) = [t, t^2]$, $t \in \langle 0,1\rangle$
$\dot{P}_2(t) = (1, 2t)$, $P(0) = [0,0]$
orientace křivky je souhlasná s parametrizací

$c_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in \langle 0,1\rangle; \quad \Rightarrow$

$P_2(t) = [t, t]$, $t \in \langle 0,1\rangle$
$\dot{P}_2(t) = (1, 1)$, $P(0) = [0,0]$
orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací

$$W = \oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{c_1} (xy, x+y)\cdot d\vec{s} + \int_{c_2} (xy, x+y)\cdot d\vec{s} =$$
$$= \int_0^1 (t^3, t+t^2)(1,2t)\,dt - \int_0^1 (t^2, 2t)(1,1)\,dt = \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 2t^3)\,dt -$$
$$- \int_0^1 (t^2 + 2t)\,dt = \left[\frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{t^3}{3} + t^2\right]_0^1 = \frac{1}{12} \qquad \blacksquare$$

• Vypočtěte práci síly $\vec{f}$ podél orientované křivky c :

512. $\vec{f} = \dfrac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2+y^2 = 4\}$, křivka c je orientovaná záporně.

$[-2\pi]$

513. $\vec{f} = \dfrac{2}{x^2+y^2}(y, -x)$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2+y^2 = 16\}$, křivka c je kladně orientovaná.

$[-4\pi]$

514. $\vec{f} = \left(\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{x}\right)$, $\quad c$ je obvod $\triangle ABC$, kde $A = [1,1]$, $B = [2,1]$, $C = [2,2]$, křivka c je kladně orientovaná.

$\left[\frac{1}{2}\right]$

515. $\vec{f} = \dfrac{(y^2, -x^2)}{x^2+y^2}$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2+y^2 = a^2,\ a > 0,\ y \geq 0\}$ z bodu $[a, 0]$ do bodu $[-a, 0]$.

$\left[-\frac{4}{3}\,a\right]$

516. $\vec{f} = (y, 2)$, $\quad c$ je uzavřená křivka tvořená poloosami a čtvrtinou elipsy $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, nacházející se v prvním kvadrantu. Orientace je záporná.

$[2\pi]$

517. $\vec{f} = (x+y, 2x)$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, orientace je kladná.

$[\pi a^2]$

518. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je úsečka s počátečním bodem $[a, 0, 0]$ a koncovým bodem $[a, a, a]$.
$\left[\frac{3}{2}\, a^2\right]$

519. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ z bodu $[1, 0, 0]$ do bodu $[0, 1, 0]$.
$\left[\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}\right]$

520. $\vec{f} = (yz, z\sqrt{R^2 - y^2}, xy)$, $c = \Big\{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t);\ P(t) = \Big(R\cos t, R\sin t, \dfrac{at}{2\pi}\Big),$ $a > 0,\ R > 0, t \in \langle 0, 2\pi\rangle\Big\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací.
$[0]$

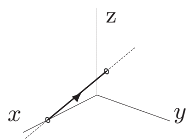
521. $\vec{f} = (x, y, xz - y)$, $c = \{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t);\ P(t) = (t^2, 2t, 4t^3),\ t \in \langle 0, 1\rangle\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací.
$\left[\frac{5}{2}\right]$

522. $\vec{f} = (x, y, z)$, c je čtvrtina elipsy $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = 4,\ x + z = 2\}$ z bodu $[2, 0, 0]$ do bodu $[0, 2, 2]$. $[2]$

523. $\vec{f} = (y^2, z^2, x^2)$, $c = \{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t);\ P(t) = (5, 2 + 4\sin t, -3 + 4\cos t),$ $t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací.
$[96\pi]$

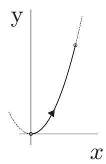
- Je dáno vektorové pole $\vec{f}$ a orientovaná křivka c.
  a) Načrtněte danou křivku $c \subset \mathbb{E}_2$.
  b) Navrhněte její parametrizaci $P(t)$ a zdůvodněte, zda je křivka c orientována souhlasně s touto parametrizací.
  c) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ působením po dané orientované křivce c.

524. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je úsečka s počátečním bodem $[a, 0, 0]$ a koncovým bodem $[a, a, a]$.



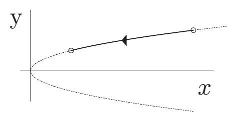
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [a + at, at, at],\ t \in \langle 0, 1\rangle \\ c)\ \dfrac{3}{2}\, a^2 \end{array}\right]$

525. $\vec{f} = (xy, y - 1)$, c je část křivky $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [2, 4]$



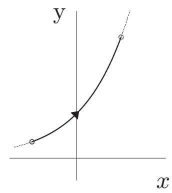
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [t, t^2],\ t \in \langle 0, 1\rangle \\ c)\ 8 \end{array}\right]$

526. $\vec{f} = (\sqrt{x} + y, x + \sqrt{y})$, c je část křivky $x = 2y^2$ od bodu $A = [8, 2]$ do bodu $B = [2, 1]$



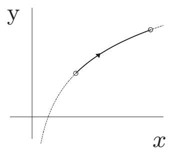
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [2t^2, t],\ t \in \langle 2, 1\rangle \\ c)\ -\dfrac{1}{3}(40 + 32\sqrt{2}) \end{array}\right]$

527. $\vec{f} = \left(x^3,\ \dfrac{1}{y}\ln y\right)$, křivka c je daná rovnicí $y = \mathrm{e}^x$, kde $|x| \le 1$ a počáteční bod má $x = -1$



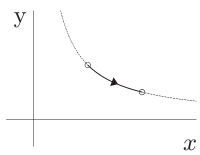
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [t, \mathrm{e}^t],\ t \in \langle -1, 1\rangle \\ c)\ 0 \end{array}\right]$

528. $\vec{f} = (2, xy)$; $\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y = \ln x + 1,\ x \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle\}$,



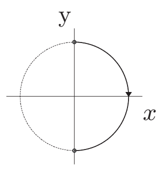
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [t, \ln t + 1],\ t \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle \\ c)\ 3\mathrm{e} - 2 \end{array}\right]$

529. $\vec{f} = (0, x)$; $\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : xy = 1,\ x \in \langle 2, 1\rangle\}$



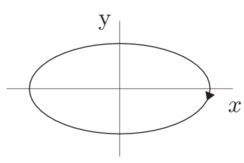
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = \left[t, \dfrac{1}{t}\right],\ t \in \langle 2, 1\rangle \\ c)\ -\ln 2 \end{array}\right]$

530. $\vec{f} = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$, $\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = 4, x \ge 0\}$ orientovaná od bodu $[0, 2]$ k bodu $[0, -2]$



$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [2\cos t, 2\sin t],\ t \in \langle \pi, -\pi\rangle \\ c)\ -\pi \end{array}\right]$

531. $\vec{f} = \left(\dfrac{2y}{x^2+4y^2}, -\dfrac{2x}{x^2+4y^2}\right)$; $\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$, která je záporně orientovaná



$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [2\cos t, \sin t],\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ c)\ 2\pi \end{array}\right]$

- Je dána úsečka AB, vektorová funkce $\vec{f}$ a skalární funkce ϱ.
  a) Navrhněte parametrizaci $P(t)$ úsečky k a vypočítejte tečný vektor $\dot{P}(t)$.
  b) Užitím křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ působením podél úsečky AB od bodu A do bodu B.
  c) Vypočítejte hmotnost křivky k, je-li délková hustota $\varrho(x, y)$.

532. $A = [1, 0]$, $B = [2, 3]$, $\vec{f} = (x, y) = (x^2,\ xy)$, $\varrho(x, y) = x^2 + y^2$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [1 + t, 3t],\ t \in \langle 0, 1\rangle \\ b)\ \dfrac{232}{15} \\ c)\ m = \dfrac{16}{3}\sqrt{10} \end{array}\right]$$

533. $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$ $\vec{f}(x, y) = (x\sqrt{y^2 - 2x},\ 0)$, $\varrho(x, y) = xy$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [t, 1 + t],\ t \in \langle 0, 1\rangle \\ b)\ \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right) \\ c)\ m = \dfrac{5}{6}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

IV.6. Greenova věta

Křivkový integrál vektorového pole po uzavřené křivce c nazýváme ***cirkulací vektorového pole*** $\vec{f}$ *po křivce c a zapisujeme* $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

Nechť : 1) vektorová funkce $\vec{f} = \big(U(x,y),\, V(x,y)\big)$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $G \subset \mathbb{E}_2$,
2) křivka $c \subset G$ *je kladně orientovaná, uzavřená, jednoduchá, po částech hladká,*
3) $int\, c \subset G$.

Potom

$$\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{int\ c} \Big(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\Big)\, dx\, dy.$$

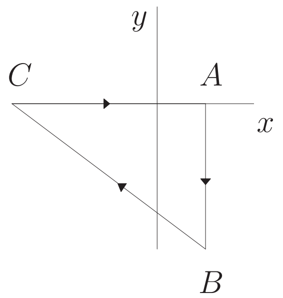
POZNÁMKA: *Je-li křivka c orientovaná záporně, pak má integrál napravo znaménko mínus.*

POZNÁMKA: *Vyjádřením křivkového integrálu v diferenciálech má tvrzení Greenovy věty tvar:*

$$\oint_c U\, dx + V\, dy = \iint_{int\ c} \Big(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\Big)\, dx\, dy.$$

***Příklad* 534**. Pomocí Greenovy věty spočtěte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (2x+3y, 5x-y-4)$ po obvodu $\triangle ABC$ ve směru $A \longrightarrow B \longrightarrow C$, kde $A = [1,0], B = [1,-3], C = [-3,0]$.

Řešení:



Cirkulace, tj. $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c (2x+3y, 5x-y-4)\, d\vec{s} \overset{\text{Gr.v.}}{=\!=}$

$= -\iint_{int\ c} (5-3)\, dx\, dy = -2 \iint_{\triangle ABC} 1\, dx\, dy =$

$= -2 \cdot P_\triangle = -2\,\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = -12$

(orientace křivky c je záporná, proto před dvojným integrálem je znaménko minus) .

■

***Příklad* 535**. Vyšetřete existenci integrálu $\oint_c \Big(\ln(x^2+y^2), -2\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\Big) \cdot d\vec{s}$ a rozhodněte o možnosti užití Greenovy věty k jeho výpočtu, jestliže $c \subset \mathbb{E}_2$ je kladně orientovaná křivka daná rovnicí a) $x^2+y^2=1$, b) $(x-1)^2+y^2 = 1$, c) $(x-2)^2+y^2 = 1$, d) c je obvod čtverce s vrcholy $A=[1,0], B=[0,1], C=[-1,0], D=[0,-1]$. Jestliže integrál existuje, vypočtěte jej pomocí Greenovy věty.

Řešení: Definiční obor vektorové funkce $\vec{f} = \Big(\ln(x^2+y^2), -2\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\Big)$ je $D(\vec{f}) = D_1 \cup D_2$,

$D_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x>0\}, \qquad D_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x<0\}$.

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}, \qquad \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2},$

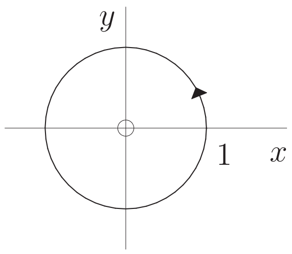
$\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial\big(-2\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\big)}{\partial x} = \dfrac{2}{1+(y/x)^2}\cdot\dfrac{y}{x^2}, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial\big(-2\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\big)}{\partial y} = \dfrac{-2}{1+(y/x)^2}\cdot\dfrac{1}{x}.$

V oblasti D_1 i v oblasti D_2 je daná funkce spojitá a má spojité parciální derivace 1. řádu.

Pro libovolnou uzavřenou křivku v D_1 tedy existuje $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ a pro výpočet lze použít

Greenovu větu. Totéž platí i pro oblast D_2.

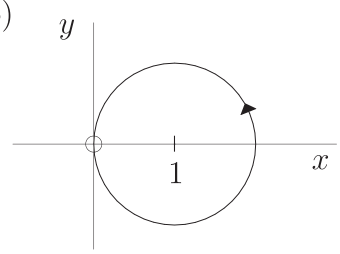
a)



Funkce $\vec{f}$ je spojitá na množině $C \setminus M$, kde $M = \{[0,1],[0,-1]\}$ (M je dvouprvková množina). Na množině $C \setminus M$ je však funkce $\vec{f}$ omezená, neboť pro každý bod $[x, y]$ ležící mimo osu y je $\left|\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right| < \dfrac{\pi}{2}$.
Křivkový integrál tedy existuje.

Pro výpočet ale nelze použít Greenovu větu, neboť v bodech množiny M, která je částí křivky c není funkce $\vec{f}$ definovaná.

b)



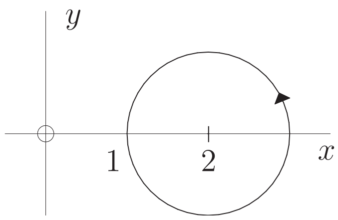
V okolí bodu $[0,0]$ není funkce $\vec{f}$ omezená, neboť

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \ln\left(x^2+y^2\right) = -\infty.$$

Daný integrál tedy neexistuje.

To platí pro libovolnou křivku, která obsahuje bod $[0,0]$.

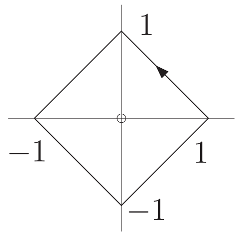
c)



Integrál existuje a lze použít Greenovu větu, neboť křivka c leží v oblasti D_1.
Proveďme tedy výpočet.

$$\oint_c (U,\,V)\cdot d\vec{s} = \iint_{int\,c} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{int\,c} \left(\frac{2}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{y}{x^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\right) dx\,dy =$$
$$= \iint_{int\,c} 0\,dx\,dy = 0.$$

d)

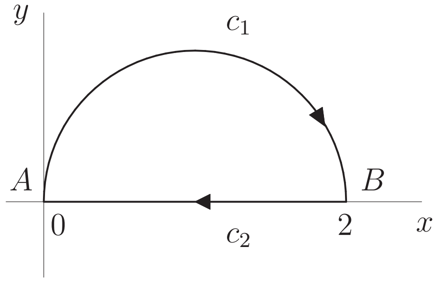


Integrál existuje, ale nelze použít Greenovu větu.
Důvod je stejný jako v úloze a).

■

***Příklad* 536**. Určete cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (-y, x)$ po záporně orientované křivce $c = c_1 \cup c_2$, kde $c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 - 2x + y^2 = 0,\ y \geq 0\}$;
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 0,\ x \in \langle 0, 2\rangle\}$,
a) přímým výpočtem, b) pomocí Greenovy věty.

Řešení:



$c_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0,$
počáteční bod je $A = [0,0]$

$c_2 : y = 0, x \in \langle 0, 2\rangle$
počáteční bod je $B = [2,0]$

$$c_1 : \begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi\rangle \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P_1(t) = [1 + \cos t, \sin t], \quad t \in \langle 0, \pi\rangle \\ \dot{P}_1(t) = (-\sin t, \cos t) \\ P_1(0) = [2, 0] \Rightarrow \text{nesouhlasná orientace} \end{array} \right|$$

$$c_2 : \begin{cases} y = 0, \\ x \in \langle 0, 2\rangle \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P_2(t) = [t, 0], \quad t \in \langle 0, 2\rangle \\ \dot{P}_2(t) = (1, 0) \\ P_2(0) = [0, 0] \Rightarrow \text{nesouhlasná orientace} \end{array} \right|$$

a) $$\oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{c_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} + \int_{c_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\int_0^{\pi} (-\sin t,\ 1+\cos t)\cdot(-\sin t,\ \cos t)\, dt - \int_0^2 0\, dt =$$

$$= -\int_0^{\pi} \Big(\sin^2 t + (1+\cos t)\cos t\Big)\, dt = -\int_0^{\pi} (1+\cos t)\, dt = -\Big[t + \sin t\Big]_0^{\pi} = -\pi$$

b) Souřadnicové funkce U, V daného vektorového pole $\vec{f}$ mají spojité parciální derivace v $\mathbb{E}_2$. Daná křivka c je uzavřená, po částech hladká. Lze tedy použít Greenovu větu.

$$\oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s} \overset{\text{Gr.v.}}{=\!=} -\iint_{int\ c} (1+1)\, dx\, dy = -2\cdot(\text{obsah půlkruhu}) = -2\cdot\frac{1}{2}\,\pi\cdot 1^2 = -\pi$$

■

***Příklad* 537**.* Vypočítejte pomocí křivkového integrálu plošný obsah vnitřku asteriody

$$c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\, x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ a > 0\}.$$

Řešení: Použijeme parametrizaci asteriody :

$$c : \begin{cases} x = a^3\cos^3 t, \\ y = a^3\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P(t) = [a^3\cos^3 t, a^3\sin^3 t] \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ \dot{P}(t) = \big(-3a^3\cos^2 t\sin t, 3a^3\sin^2 t\cos t\big) \end{array} \right|$$

Pro výpočet použijeme důsledku Greenovy věty, podle kterého lze obsah vnitřku křivky c vypočítat pomocí křivkového integrálu:

$$P = \iint_{int\ c} 1\, dx\, dy = \frac{1}{2}\oint_c -y\, dx + x\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(-a^3\sin^3 t\cdot\big(-3a^3\cos^2 t\sin t\big) + a^3\cos^3 t\cdot 3a^3\sin^2 t\cos t\Big)\, dt =$$

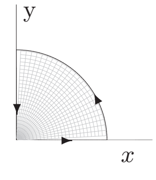
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3a^2\cos^2 t\sin^4 t + 3a^2\sin^2 t\cos^4 t)\, dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2t}{4}\, dt = \frac{3}{8}\,a^2\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\, dt = \frac{3}{16}\,a^2\Big[t - \frac{\sin 4t}{4}\Big]_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\,a^2\pi$$

■

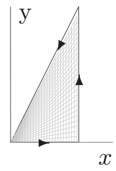
- Je dána množina D a vektorové pole $\vec{f}$.
  a) Napište Greenovu větu (předpoklady a tvrzení).
  b) Načrtněte množinu D a vyznačte křivku c, která je kladně orientovanou hranicí této množiny D.
  c) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f}$ podél křivky c.

538. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ $\quad \vec{f} = (xy,\ x^2 + 2x)$



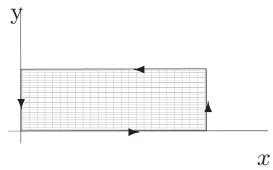
$\left[\frac{8}{3} + 2\pi\right]$

539. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2x\}, \quad \vec{f} = (y^2 - 3y,\ xy)$



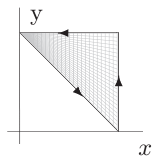
$\left[\frac{14}{3}\right]$

540. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1\}, \quad \vec{f} = \left(\frac{1}{3}\,y^3,\ x^2 + y^2\right).$



[8]

541. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ 0 \le x \le 4,\ 4 - 4x \le y \le 4\}, \quad \vec{f} = \left(y^2,\ (x+y)^2\right)$



$\left[\frac{128}{3}\right]$

542. Vyšetřete existenci integrálu $\displaystyle\oint_c \left(-\frac{1}{x^2}, 2x\right) \cdot d\vec{s}$ a rozhodněte o možnosti užití Greenovy věty, jestliže $c \subset \mathbb{E}_2$ je záporně orientovaná křivka :
a) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 1\}$,
b) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + (y-2)^2 = 1\}$,
c) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ (x-2)^2 + y^2 = 1\}$.
V kladném případě vypočtěte integrál pomocí Greenovy věty.

[a) neexistuje, nelze
b) neexistuje, nelze
c) existuje, lze; -2π]

- Je dáno vektorové pole $\vec{f}$ a křivka c.
  a) Napište Greenovu větu a ověřte, zda jsou splněny její předpoklady pro výpočet daného integrálu $\displaystyle\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$.
  b) Hodnotu tohoto křivkového integrálu vypočítejte pomocí Greenovy věty.
  c) Stejný křivkový integrál vypočítejte bez užití Greenovy věty.

543. $\vec{f} = (-y,\ x), \quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 16\}$, která je orientovaná záporně.

$[-32\pi]$

544. $\vec{f} = \left(1 - x^2, x(1 + y^2)\right), \quad c = \partial\, D$ je hranice množiny $D = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\rangle\}$, která je orientovaná záporně. $\left[\frac{32}{3}\right]$

545.* $\vec{f} = \left(\dfrac{2y^3}{3} + g(x),\ xy^2 + h(y)\right)$, kde g, h jsou libovolné funkce jedné proměnné se spojitou derivací v $\mathbb{R}$, $\quad c \quad$ je záporně orientovaná hranice množiny

$D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \geq 0,\ y \leq 2 - x,\ x \geq y^2\}$. $\left[\frac{13}{60}\right]$

546. Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x + 1\,,\ 2y)$ působením po dané orientované křivce:
a) c_1: úsečka AB, s počátečním bodem $A = [-1, 0]$ a koncovým bodem $B = [1, 0]$.
b) $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ s počátečním bodem $B = [1, 0]$.
c) Pomocí Greenovy věty určete práci po uzavřené orientované křivce $c = c_1 \cup c_2$.
[a) 2, b) -2, c) 0]

547. Vypočtěte cirkulaci $\vec{f} = \dfrac{2(y, -x)}{x^2 + y^2}$ po kladně orientované křivce $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;$ $x^2 + y^2 = 16\}$. Lze použít Greenovu větu ? Odpověď zdůvodněte! [-4π, nelze]

548. Pomocí Greenovy věty vypočtěte cirkulaci vektoru $\vec{f} = \Big(y, (x - y)^2\Big)$ po záporně orientované křivce $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$. [$-\pi$]

549.* Odvoďte pomocí křivkového integrálu vzorec pro plošný obsah obrazce, který je ohraničen elipsou $c = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$. [$\pi\, ab$]

550.* Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah obrazce omezeného obloukem cykloidy $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a úsečkou z bodu $[0, 0]$ do bodu $[2\pi a, 0]$. [$3\pi a^2$]

551.* Nechť c_1 je úsečka z bodu $[0, 0]$ do bodu $[1, 1]$, c_2 je část paraboly $y = x^2$ opět z $[0, 0]$ do $[1, 1]$ a $I_1 = \displaystyle\int_{c_1} (x+y)^2\, dx - (x-y)^2\, dy, I_2 = \int_{c_2} (x+y)^2\, dx - (x-y)^2\, dy$.
Užitím Greenovy věty vypočtěte $I_1 - I_2$.

$$\left[\pm\frac{1}{3}.\quad \begin{array}{l} \text{Návod: } \displaystyle\oint_{c_1\cup c_2} = \int_{c_1} - \int_{c_2} \text{ (záp.orient.)} \\ \text{nebo } \displaystyle\oint_{c_1\cup c_2} = \int_{c_2} - \int_{c_1} \text{ (klad.orient.)} \end{array}\right]$$

552.* Pomocí Greenovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_c \left(x\mathrm{e}^{-y^2},\ -x^2y\mathrm{e}^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) \cdot d\vec{s}$, kde c je kladně orientovaný obvod čtverce s vrcholy $[1, 0]$, $[2, 0]$, $[2, 1]$, $[1, 1]$.
$\left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$

553. Pomocí Greenovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_c (y^2\mathrm{e}^x - y^3, 2y\mathrm{e}^x - 3) \cdot d\vec{s}$, kde $c = c_1 \cup c_2$; $c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = 0,\ y \in \langle -2, 2\rangle\}$, $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 4x^2 + y^2 = 4,$ $x \geq 0\}$, přičemž $[0, 2]$ je počáteční bod křivky c_1. [3π]

IV.7. Potenciální vektorové pole

Vektorové pole $\vec{f} = (U, V, W)$ se nazývá **potenciální pole v oblasti** *$G \subset \mathbb{E}_3$, jestliže existuje skalární funkce φ taková, že $\vec{f} = grad\,\varphi$ v oblasti G. Podobně pro vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$.*
Skalární funkci φ nazýváme **potenciálem vektorového pole $\vec{f}$ v** *G.*

Platí následující tvrzení (podrobněji ve skriptu Matematika II od J. Neustupy):

Věta. *Nechť $\vec{f}$ je potenciální a spojité vektorové pole s potenciálem φ v oblasti $G \subset \mathbb{E}_3$ (resp. $\mathbb{E}_2$). Nechť c je orientovaná křivka v G s počátečním bodem A a s koncovým bodem B. Pak*

$$\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Poznámka.*Protože pro potenciální vektorové pole $\vec{f}$ závisí hodnota křivkového integrálu $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ pouze na počátečním a koncovém bodě, lze v tomto případě psát*

$$\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Věta. *Nechť $\vec{f}$ je spojité vektorové pole v oblasti $G \subset \mathbb{E}_3$ (resp. $\mathbb{E}_2$). Pak následující tři výroky jsou ekvivalentní:*

a) $\vec{f}$ je potenciální pole v G.
b) Křivkový integrál $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisí v oblasti G na integrační cestě.
c) Cirkulace pole $\vec{f}$ po libovolné uzavřené křivce v G je nulová.

V dalším textu se soustředíme především na **vektorové pole v $\mathbb{E}_2$**.

Věta. *(Postačující podmínka potenciálnosti v $\mathbb{E}_2$.)*
Nechť

a) G je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a
b) $\vec{f} = (U, V)$ je vektorové pole, jehož souřadnicové funkce $U(x, y), V(x, y)$ mají v oblasti G spojité parciální derivace a
c) funkce U, V splňují podmínku $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ v G.

Pak $\vec{f}$ je potenciální vektorové pole v G.

Při výpočtu potenciálu zpravidla nejprve ověříme podle postačující podmínky, že dané vektorové pole je potenciální v oblasti G. Pro **výpočet potenciálu v $\mathbb{E}_2$** pak máme několik možností.

1. metoda. Potenciál určíme z definice potenciálu, tzn. $\vec{f} = \mathrm{grad}\varphi$ v $\mathbb{E}_2$. Tak dostáváme rovnice

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U, \qquad (2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V$$

2. metoda. Potenciál určíme výpočtem křivkového integrálu. Z výše uvedené věty vyplývá, že potenciál $\varphi(x, y) = \int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde c je vhodně zvolená křivka v G se zvoleným počátečním bodem $[x_0, y_0]$ a koncovým bodem $[x, y]$.

***Příklad* 554**. Určete největší možnou oblast(i), na níž je dané vektorové pole potenciální. a) $\vec{f} = \left(\dfrac{y^2}{x^2} - \sin y, -\dfrac{2y}{x} + y^2\right)$, b) $\vec{f} = \left(\dfrac{y^2}{x^2}, -\dfrac{2y}{x} + y^2\right)$.

Řešení: a) Souřadnicové funkce U, V daného pole mají spojité parciální derivace v oblastech D_1 a D_2, kde $D_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x > 0\}$, $D_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x < 0\}$.

Vypočteme parciální derivace: $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{2y}{x^2}$, zatímco $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2} - \cos y$.

Není tedy splněna nutná podmínka, aby vektorové pole bylo potenciální, tj. podmínka $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

b) Dané vektorové pole má spojité parciální derivace v oblasti D_1 a v oblasti D_2 z úlohy a). Každá z těchto oblastí je jednoduše souvislá a platí $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{2y}{x^2}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2}$. Zadané vektorové pole tedy splňuje výše uvedenou postačující podmínku a proto je potenciální v každé z oblastí D_1, D_2. ■

***Příklad* 555**. a) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (3 + 2xy,\ x^2 - 3y^2)$ je potenciální v oblasti $\mathbb{E}_2$. b) Určete potenciál tohoto vektorového pole. c) Vypočítejte křivkový integrál $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde c je úsečka od bodu $A = [1,3]$ do bodu $B = [2,1]$.

Řešení: a) Souřadnicové funkce U, V jsou polynomy. Mají tedy spojité parciální derivace v množině $\mathbb{E}_2$, což je oblast jednoduše souvislá. Výpočtem $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 2x$ vidíme, že dané pole je potenciální v oblasti $\mathbb{E}_2$.

b) Při výpočtu potenciálu podle 1. metody vyjdeme ze dvou podmínek

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3 + 2xy, \qquad (2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - 3y^2$$

Integrováním podle x vypočítáme z podmínky (1):

$$\varphi(x,y) = \int (3 + 2xy)\, d\,x = 3x + x^2y + K(y).$$

Takto vypočtená funkce $\varphi(x,y)$ obsahuje neznámou funkci $K(y)$. Po dosazení za φ do podmínky (2) získáme rovnici (2'), ve které už nebude proměnná x .
To je "kontrolní místo" výpočtu. Derivaci funkce K zapíšeme ve tvaru $\dfrac{dK}{dy}$, neboť K je funkce jedné proměnné.

$$(2') \qquad x^2 + \frac{dK}{dy} = x^2 - 3y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dK}{dy} = -3y^2.$$

Funkci $K(y)$ pak získáme integrováním:

$$K(y) = \int -3y^2\, d\,y = -y^3 + C.$$

Po dosazení za $K(y)$ obdržíme výsledný tvar potenciálu

$$\varphi(x,y) = 3x + x^2y - y^3 + C, \ [x,y] \in \mathbb{E}_2, \ C \text{ je libovolné reálné číslo.}$$

c) Zadaný křivkový integrál lze vypočítat pomocí parametrizace dané úsečky. Protože však dané pole je potenciální v $\mathbb{E}_2$, lze křivkový integrál vypočítat pomocí potenciálu:

$$\int_c (3 + 2xy,\ x^2 - 3y^2) \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(2,1) - \varphi(1,3) = 30. \qquad ■$$

***Příklad* 556**. a) Ověřte, že jsou splněny postačující podmínky potenciálnosti pro dané vektorové pole $\vec{f}$ v oblasti $G = \mathbb{E}_2$.
b) Určete jeho potenciál výpočtem křivkového integrálu, tj. 2. metodou.
c) Vypočtěte $\displaystyle\int_A^B (3x^2y - 3y^2, x^3 - 6xy) \cdot d\vec{s}$, je-li $A = [1, 3], B = [2, 1]$.

Řešení: a) Funkce U a V jsou spojité a diferencovatelné v celém $\mathbb{E}_2$.
$G = \mathbb{E}_2$ je jednoduše souvislá oblast,

Pak k ověření, že $\vec{f}$ je potenciální v G, stačí zjistit, zda $\displaystyle\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 - 6y.$$ Ano, pole $\vec{f}$ je potenciální v $\mathbb{E}_2$.

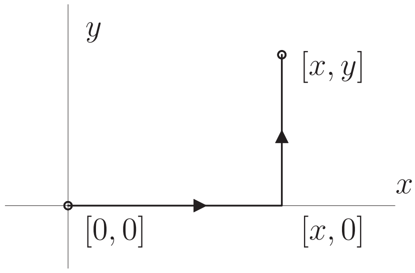
b) $\vec{f} = grad\,\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$

$$\int_{[x_0,y_0]}^{[x,y]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{[x_0,y_0]}^{[x,y]} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy = \int_{[x_0,y_0]}^{[x,y]} d\,\varphi = \varphi\big(x, y\big) - \varphi\big(x_0, y_0\big)\ .$$

Zvolíme $[x_0, y_0] = [0, 0]$: $\displaystyle\varphi(x, y) = \int_{[0,0]}^{[x,y]} (3x^2y - 3y^2)\,dx + (x^3 - 6xy)\,dy =$

$\Big($ víme, že integrál nezávisí na cestě, proto zvolíme lomenou čáru $[0, 0] \longrightarrow [x, 0] \longrightarrow [x, y]\Big)$:

$[0, 0] \longrightarrow [x, 0]$	:	$y = 0, dy = 0$
$[x, 0] \longrightarrow [x, y]$	:	$x =$ konst., $dx = 0$



$$= \int_{[0,0]}^{[x,0]} (3x^2y - 3y^2)\,dx + (x^3 - 6xy)\,dy + \int_{[x,0]}^{[x,y]} (3x^2y - 3y^2)\,dx + (x^3 - 6xy)\,dy =$$
$$= \int_0^x 0\,dx + \int_0^y (x^3 - 6xy)\,dy = x^3y - 3xy^2 \implies$$
$$\varphi(x, y) = x^3y - 3xy^2 + C,$$

c) $$\int_{[1,3]}^{[2,1]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(2, 1) - \varphi(1, 3) = (8 - 6) - (3 - 27) = 26.$$ ■

***Příklad* 557**. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (3x^2y,\, x^3 + \sqrt{y})$. Napište postačující podmínky pro to, aby křivkový integrál vektorové funkce $\displaystyle\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$ nezávisel v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$ na cestě. Určete potenciál φ a užijte jej k výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce $\vec{f}$ po dané křivce.
a) c_1 je úsečka z bodu $A = [2, 4]$ do bodu $B = [1, 1]$. b) c_2 je záporně orientovaná hranice množiny $M = \{[x, y] : x^2 + (y - 3)^2 \leq 8,\ x \geq 0\}$.

Řešení: $U(x, y) = 3x^2y$, $V(x, y) = x^3 + \sqrt{y}$. Ověřte si, že parciální derivace jsou spojité a v oblasti $D = \{\,[x, y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y > 0\}$, která je jednoduše souvislá platí rovnost $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

Výpočet potenciálu φ: Podmínky (1) a (2) mají tvar:

(1) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2y,$ (2) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x^3 + \sqrt{y}$

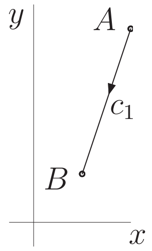
Z podmínky (1) vypočítáme $\varphi(x,y) = \displaystyle\int 3x^2y\,d\,x = x^3y + K(y)$.

Po dosazení do (2): $x^3 + \dfrac{dK}{dy} = x^3 + \sqrt{y}$. Po úpravě získáme rovnici $\dfrac{dK}{dy} = \sqrt{y}$,

ze které určíme $K(y) = \displaystyle\int \sqrt{y}\,d\,y = \frac{2}{3}\sqrt{y^3} + C$.

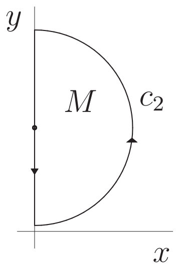
Hledaný potenciál v D je $\varphi(x,y) = x^3y + \dfrac{2}{3}\sqrt{y^3} + C$.

a)



$$\int_{c_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{c_1} (3x^2y,\ x^3 + \sqrt{y})\cdot d\vec{s} =$$
$$= \varphi([1,1]) - \varphi([2,4]) = -107/3.$$

b)



Daná křivka c_2 je uzavřená. Je to obvod půlkruhu M, který leží v oblasti D, v níž je dané vektorové pole $\vec{f}$ potenciální.
Z vlastnosti potenciálu pak vyplývá, že cirkulace daného vektorového pole $\vec{f}$ podél této křivky c_2 je rovna nule.

■

***Příklad* 558**. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (2x\cos y, -x^2\sin y)$. a) Ověřte, že je pole potenciální v $\mathbb{E}_2$. b) Určete jeho potenciál φ. c) Vypočtěte $\displaystyle\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$, kde c je křivka s počátečním bodem $A = [2,0]$ a koncovým bodem $B = [4,\pi/2]$.

Řešení: a) Oblast $\mathbb{E}_2$ je jednoduše souvislá oblast a platí

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2x\sin y,\quad \frac{\partial V}{\partial x} = -2x\sin y \quad\Longrightarrow\quad \vec{f} \text{ je potenciální v } \mathbb{E}_2\ .$$

$$\text{b)}\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x\cos y \quad\Rightarrow\quad \varphi(x,y) = \int 2x\cos y\,dx = x^2\cos y + K(y)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -x^2\sin y \quad\Rightarrow\quad x^2(-\sin y) + \frac{dK}{dy} = -x^2\sin y \quad\Rightarrow\quad \frac{dK}{dy} = 0 \quad\Rightarrow\quad K(y) = C$$

$$\varphi(x,y) = x^2\cos y + C.$$

$$\text{c)}\ \int_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \varphi(4,\pi/2) - \varphi(2,0) = 16\cos\frac{\pi}{2} - 4\cos 0 = -4\ .$$

■

***Příklad* 559**. Určete oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$, v nichž je pole $\vec{f} = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2} + 2y - 5,\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2} + 2x + 11\right)$ potenciální a stanovte jeho potenciál $\varphi(x,y)$, který splňuje podmínku $\varphi(-2,2) = 0$.

Řešení: $G_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x > 0,\ y > 0\}$, $G_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x < 0,\ y > 0\}$,
$G_3 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x > 0,\ y < 0\}$, $G_4 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x < 0,\ y < 0\}$.

Platí $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} + 2$, tedy je $\vec{f}$ potenciální v $G_i, i = 1,2,3,4$.

Výpočet potenciálu φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5 \Rightarrow \varphi(x,y) = \int \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5\,dx = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + K(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11 \Rightarrow -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 2x + \frac{dK}{dy} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11 \Rightarrow K(y) = 11y + C$$

$$\varphi(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + 11y + C;$$

Z podmínky $\varphi(-2,2) = 0$ vypočteme konstantu C:

$$-1 + 1 - 8 + 10 + 22 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -22$$

$$\varphi(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + 11y - 22 \quad \text{pro} \quad [x,y] \in G_2.$$

■

***Příklad* 560**. Určete největší možnou oblast $G \subset \mathbb{E}_2$, v níž je vektorová funkce $\vec{f} = \left(\dfrac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x}\right)$ spojitá a rozhodněte, zda $\displaystyle\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisí na integrační cestě v G. Pokud tato oblast existuje, vypočtěte $\displaystyle\int_{[1,2]}^{[4,-2]} \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

Řešení: $G = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2, x > 0\}$ je polorovina, a tedy je jednodušše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$.
$\displaystyle\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisí na cestě, protože parciální derivace souřadnicových funkcí U, V jsou spojité v G a platí $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{2y}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad$ existuje potenciál φ.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y^2}{\sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x,y) = \int \frac{y^2}{\sqrt{x}}\,dx = y^2 \cdot 2\sqrt{x} + K(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y\sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad 2y \cdot 2\sqrt{x} + \frac{dK}{dy} = 4y\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad K(y) = C$$

$$\varphi(x,y) = 2y^2\sqrt{x} + C$$

$$\int_{[1,2]}^{[4,-2]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{[1,2]}^{[4,-2]} \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x}\right) \cdot d\vec{s} = \varphi(4,-2) - \varphi(1,2) = 8$$

■

***Příklad* 561**. Je dána funkce $\varphi(x,y) = x^3y + x^2y^2$. Určete a) silové pole $\vec{f}$, jehož potenciálem je funkce $\varphi(x,y)$; b) práci síly $\vec{f}$ při pohybu z bodu $M = [1,1]$ do bodu $N = [-2,3]$; c) práci síly $\vec{f}$ podél křivky $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + 4y^2 = 4\}$, která je orientována kladně.

Řešení: a) $\vec{f} = \operatorname{grad} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \vec{f} = (3x^2y + 2xy^2, x^3 + 2x^2y)$;

b) $W = \int_M^N \vec{f} \cdot d\vec{s} = \big(\text{integrál nezávisí na cestě}\big) = \varphi(N) - \varphi(M) =$

$= (-24 + 36) - (1 + 1) = 10;$

c) $W = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0.$ ■

***Příklad* 562**. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \dfrac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$ v $G = \mathbb{E}_2 \setminus \{[0,0]\}$.

a) Ověřte, že platí $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x}$ v G. b) Výpočtem integrálu $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde c je záporně orientovaná kružnice $S = [0,0], r = 2$, se přesvědčte, že pole není potenciální v G.

Řešení: a) $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

b) Cirkulace $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c \dfrac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2} \cdot d\vec{s} =$

$$= \left| \begin{array}{l} P(t) = [2\cos t, 2\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \dot{P}(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \\ \text{křivka je nesouhlasně orientovaná s parametrizací} \end{array} \right| =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{2(\cos t - \sin t), 2(\cos t + \sin t)}{4} \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \Big(-4(\cos t - \sin t)\sin t + 4(\cos t + \sin t)\cos t \Big)\, dt = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$$

Pole $\vec{f}$ není potenciální, protože $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} \neq 0$.

Poznámka: K výpočtu tohoto integrálu nelze použít Greenovu větu, jelikož bod $[0,0] \in int\ c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 < 4\}$ nepatří do $D(\vec{f})$. ■

***Příklad* 563**. Vypočtěte $\int_M^N \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde $M = [1, 0, \mathrm{e}]$, $N = [2, -1, \mathrm{e}^2]$, víte-li, že pole $\vec{f}$ je potenciální v oblasti $\mathbb{E}_3$ a jeho potenciál je funkce $\varphi(x,y,z) = xy^2 \ln z$. Určete největší možnou oblast G, v níž je φ potenciálem pole $\vec{f}$.

Řešení: $G = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ z > 0\}$; $\int_M^N \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(N) - \varphi(M) = 2 \ln \mathrm{e}^2 - 0 = 4.$ ■

• Je dáno vektorové pole $\vec{f}$. Ověřte, že je pole potenciální v $G \subset \mathbb{E}_2$, resp. $\mathbb{E}_3$, stanovte jeho potenciál a vypočtěte $\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$:

***Příklad* 564**.* $\vec{f} = (3x^2y - z^2 + 2z, x^3 + 2yz - 3, y^2 - 2xz + 2x + 5)$, $A = [0,1,1]$, $B = [3,0,2]$, $G = \mathbb{E}_3$

Řešení: a) K ověření stačí:

1) spojitost parciálních derivací funkcí $U(x,y,z)$, $V(x,y,z)$, $W(x,y,z)$ v oblasti G, která je jednodušše souvislá v $\mathbb{E}_3$,

2) rot $\vec{f} = \vec{0}$ v G.

$$\text{rot } \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y - z^2 + 2z & x^3 + 2yz - 3 & y^2 - 2xz + 2x + 5 \end{vmatrix} =$$

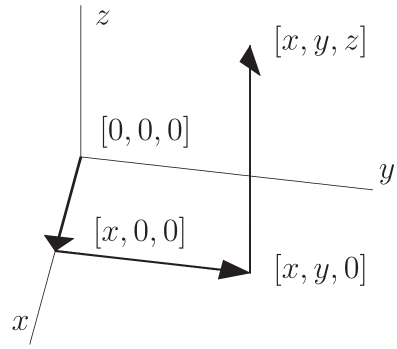
$$= (2y - 2y, -2z + 2 + 2z - 2, 3x^2 - 3x^2) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{f} \text{ je potenciální v } \mathbb{E}_3 \; .$$

b) $\varphi(x, y, z) =$

$$= \int_{[0,0,0]}^{[x,y,z]} (3x^2y - z^2 + 2z)\, dx + (x^3 + 2yz - 3)\, dy + (y^2 - 2xz + 2x + 5)\, dz =$$

$$= \int_{[0,0,0]}^{[x,0,0]} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{[x,0,0]}^{[x,y,0]} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{[x,y,0]}^{[x,y,z]} \vec{f} \cdot d\vec{s} =$$

$$\left| \begin{array}{l} [0,0,0] \Longrightarrow [x,0,0] : y = 0, dy = 0, z = 0, dz = 0 \\ [x,0,0] \Longrightarrow [x,y,0] : dx = 0, z = 0, dz = 0 \\ [x,y,0] \Longrightarrow [x,y,z] : dx = 0, dy = 0 \end{array} \right|$$



$$= \int_0^x 0\, dx + \int_0^y (x^3 - 3)\, dy + \int_0^z (y^2 - 2xz + 2x + 5)\, dz =$$

$$= x^3y - 3y + y^2z - xz^2 + 2xz + 5z + C \; ,$$

c) $\displaystyle\int_{[0,1,1]}^{[3,0,2]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(3, 0, 2) - \varphi(0, 1, 1) = 7$. ■

565. $\vec{f} = (xe^{2y}, (x^2 + 1)e^{2y}),\ A = [1, 0],\ B = [3, 1]$ $\quad\left[\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{2y} + C;\ 5e^2 - 1\right]$

566. $\vec{f} = (3x^2y - 2xy^2, x^3 - 2x^2y),\ A = [1, 1],\ B = [2, -1]$ $\quad[\varphi = x^3y - x^2y^2 + C;\ -12]$

567. $\vec{f} = (\cos 2y + y + x, y - 2x \sin 2y + x),\ A = [0, 7],\ B = [1, 0]$

$[\varphi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x \cos 2y + xy + C;\ -23]$

568.* $\vec{f} = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy),\ A = [0, 0, 3],\ B = [3, 3, 0]$

$\left[\varphi = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C;\ 9\right]$

569.* $\vec{f} = (2y + z^2, 2x + 1, 2xz + 2),\ A = [0, 1, 1\,], B = [3, 0, 2]$

$[\varphi = 2xy + y + xz^2 + 2z + C;\ 13]$

570.* $\vec{f} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 1}, 2z\right),\ A = [1, 0, 0],\ B = [0, 1, 1]$

$\left[\varphi = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + 1) + z^2 + C;\ 1\right]$

571. Ověřte, že pole $\vec{f} = (y^2, 2xy)$ je potenciální v $\mathbb{E}_2$. Stanovte potenciál $\varphi(x, y)$, splňující $\varphi(-4, 3) = -9$. $\quad[\varphi = xy^2 + 27]$

572.* Stanovte potenciál pole $\vec{f} = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}, \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}, 2z - \dfrac{xy}{z^2}\right)$ na $G \subset \mathbb{E}_3 : y > 0,\ z > 0$.

$\left[\varphi = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + z^2 + C\right]$

573. Najděte práci silového pole $\vec{f}$, jehož potenciálem je funkce $\varphi(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ při pohybu a) z bodu $M = [1, \sqrt{3}]$ do bodu $N = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; b) podél křivky $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ (x-2)^2 + y^2 = 1\}$ v kladném směru. $\left[\text{a)} -\frac{\pi}{12},\ \text{b)}\ 0\right]$

• Vypočtěte :

574. $\displaystyle\int_{[2,1]}^{[1,2]} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ $\left[-\frac{3}{2},\ \text{integrál nezávisí na cestě}\right]$

575. $\displaystyle\int_{[\pi/4,2]}^{[\pi/6,1]} 2y\sin 2x\,dx + (1-\cos 2x)\,dy$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

576. $\displaystyle\oint_c (2x+y)\,dx + (x+2y)\,dy, \quad c: x^2+y^2=a^2$ $[0]$

• Určete oblasti G, v nichž je vektorové pole $\vec{f}$ potenciální a stanovte potenciál :

577. $\vec{f} = (x^3y^2 + x, y^2 + yx^4)$ $[G = \emptyset,\ \vec{f}\ \text{není potenciální}]$

578. $\vec{f} = \left(\ln y - \dfrac{e^y}{x^2}, \dfrac{e^y}{x} + \dfrac{x}{y}\right)$ $\left[\begin{array}{c} G_1 \subset \mathbb{E}_2 : y>0, x>0 \\ G_2 \subset \mathbb{E}_2 : y>0, x<0 \\ \varphi = \frac{e^y}{x} + x\ln y + C \end{array}\right]$

579.* $\vec{f} = \left(\dfrac{z}{x-y}, \dfrac{z}{y-x}, \ln(x-y) + \dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ $\left[\begin{array}{c} G \subset \mathbb{E}_3 : x>y,\ z>0 \\ \varphi = z\ln(x-y) + 2\sqrt{z} + C \end{array}\right]$

• Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ a křivka c.
a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ působením po křivce c.
b) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (U,V)$ je potenciální v $\mathbb{E}_2$.
c) Určete potenciál φ tohoto pole a pomocí něho ověřte výsledek z úlohy a).

580. $\vec{f} = (x+3y\,,\ 3x)$, c je orientovaná úsečka s počátečním bodem $A = [0,1]$ a koncovým bodem $B = [1,3]$ $\left[\begin{array}{l} a)\ 19/2 \\ c)\ \varphi(x,y) = x^2/2 + 3xy + C \end{array}\right]$

581. $\vec{f} = (y^2\,,\ 2xy)$, c je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0,0]$ a koncovým bodem $B = [2,4]$ $\left[\begin{array}{l} a)\ 32 \\ c)\ \varphi(x,y) = xy^2 + C \end{array}\right]$

582. $\vec{f} = (2x - y^2, 3 - 2xy)$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x = -y^2 - 1\}$ od bodu $[-1;0]$ do bodu $[-5;-2]$ $\left[\begin{array}{l} a)\ 38 \\ c)\ \varphi(x,y) = x^2 - xy^2 + 3y + C \end{array}\right]$

583. $\vec{f} = (-x\,,\ y)$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2+y^2 = 4\}$ od bodu $A = [2,0]$ do bodu $B = [0,2]$ $\left[\begin{array}{l} a)\ 4 \\ c)\ \varphi(x,y) = -x^2/2 + y^2/2 + C \end{array}\right]$

584. a) Vysvětlete, co to znamená, že integrál $\displaystyle\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$ nezávisí v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$ na integrační cestě.
b) Zdůvodněte, zda $\int_c (y\ \sin x\ ,\ y - \cos x)\cdot d\vec{s}$ nezávisí v $\mathbb{E}_2$ na integrační cestě.
c) Existuje-li potenciál pole $\vec{f} = (y\ \sin x\ ,\ y - \cos x)$ v $\mathbb{E}_2$, najděte jej a vypočítejte

křivkový integrál tohoto pole po křivce c s počátečním bodem $A = [0,0]$ a koncovým bodem $B = [0,\pi]$.

$\left[\begin{array}{l} b) \text{ ověřte splnění postačující podmínky,} \\ c)\ \varphi(x,y) = y^2/2 - y\cos x + C,\ \pi^2/2 - \pi \end{array}\right]$

- Je dána skalární funkce $\varphi(x,y,z)$, která je potenciálem nějakého vektorového pole $\vec{f}$.
  a) Určete největší oblast v $\mathbb{E}_3$, ve které má φ spojité parciální derivace a vyjádřete v této oblasti pole $\vec{f}$.
  b) Je-li ještě nějaká jiná funkce potenciálem $\vec{f}$ v této oblasti, pak ji uveďte.
  c) Vypočítejte křivkový integrál $\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$ pro danou křivku c.

585. $\varphi(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + z^2$; c je křivka v G s počátečním bodem $[1,0,0]$ a koncovým bodem $[0,1,1]$.

$\left[\begin{array}{l} a)\ G = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3\,;\ x^2+y^2>0\} \\ b)\ \vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\,,\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\,,\ 2z\right) \\ c)\ 1 \end{array}\right]$

586. $\varphi(x,y,z) = xy+xz+yz$; $c = \left\{[x,y,z]:\ x=-1+t,\ y=2+\dfrac{t}{2},\ z=-\cos\left(\dfrac{t\pi}{4}\right),\right.$ pro $\left. t\in\langle 0,4\rangle\right\}$

$\left[\begin{array}{l} a)\ \mathbb{E}_3,\ \text{funkce}\ \varphi + C \\ b)\ \vec{f} = (y+z,\ x+z,\ x+y) \\ c)\ 22 \end{array}\right]$

- Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (U,V)$, oblast D a křivka c.
  a) Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole $\vec{f} = (U,V)$ bylo potenciální v oblasti $D\subset\mathbb{E}_2$.
  b) Ověřte, že postačující podmínky potenciálnosti jsou splněny pro dané vektorové pole $\vec{f}$ a danou oblast D (není-li oblast D dána, uveďte největší možnou).
  c) Určete potenciál a užijte jej k výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce $\vec{f}$ po dané křivce c.

587. $\vec{f} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$, $D = \{\,[x,y]\in\mathbb{E}_2\,;\ x>0,\ y>0\,\}$, c je úsečka AB s počátečním bodem $A=[2,4]$ a koncovým bodem $B=[1,2]$

$\left[\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C;\ -\ln 2\ \right]$

588. $\vec{f} = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$, $D = \{[x,y]\in\mathbb{E}_2\,;\ y>0\}$, c je kladně orientovaná kružnice $(x-1)^2+(y-1)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\left[\ \varphi(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C;\ 0\ \right]$

589. $\vec{f} = \left(y^2 - \dfrac{x}{\sqrt{y-x^2}},\ 2xy + \dfrac{1}{2\sqrt{y-x^2}}\right)$, $D = \{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y>x^2\}$, c je křivka s poč. bodem $A=[0,1]$ a konc. bodem $B=[1,2]$

$\left[\ \varphi(x,y) = xy^2 + \sqrt{y-x^2} + C;\ 0\ \right]$

590. $\vec{f} = \left(\dfrac{y^2}{x} + x^2,\ 2y\ln x - \cos 2y\right)$, c je křivka s počátečním bodem $A = [1,\pi/4]$ a koncovým bodem $B=[2;0]$

$\left[\ \varphi(x,y) = x^3/3 + y^2\ln x - \sin 2y/2 + C;\ 17/6\ \right]$