UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas

Generalización de Criterios de Univalencia a Funciones Armónicas Complejas

Tesis presentada por: **Jefferson Prada Márquez**.

Para optar al grado de Magíster en Matemáticas.

Prof. Guía: Dr. Rodrigo Castro.

Valparaíso, Chile.

Octubre, 2018.

Agradecimientos

A Dios Todo Poderoso por darme la salud y la inspiración para realizar este trabajo.

A mi querida madre, Rosa Angélica Márquez Vivas, padre, Jesús Onorio Prada Zerpa, hermana Jennifer Angélica Prada Márquez y mi pareja Carla Saavedra Lara por todo su amor y apoyo.

A la insigne Universidad de Valparaíso, mi segunda alma máter por recibirme y darme la oportunidad de continuar con mis estudios de postgrado.

Al cuerpo académico del Instituto de Matemáticas, en especial a los profesores Rodrigo Castro Marín y Rodrigo Hernández Reyes quienes me guiaron en esta etapa, por su constante motivación, amistad y apoyo en todo momento.

Al proyecto No. 1150284 del Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Fondecyt, bajo la dirección Prof. Rodrigo Hernández Reyes por el financiamiento otorgado durante mis estudios de Magíster.

Jefferson Anthony

"En las matemáticas es donde el espíritu encuentra los elementos que más ansía: la continuidad y la perseverancia."

Anatole France

Contenido

Lista de Figuras

Introducción

La teoría de funciones complejas es una campo de la investigación matemática que ha tenido un gran auge desde el siglo XX. Matemáticos como: Z. Nehari, V. Pokornyi, W. Kraus, J. Pfaltzgraff, Ch. Pommerenke, entre otros, se han interesado por el estudio de las funciones analíticas. Dentro de esta área destacan la teoría geométrica de funciones y, en particular, las funciones univalentes. En este sentido aparece como una herramienta importante la derivada Schwarziana Sf, [3, 5, 10].

El alemán Z. Nehari en 1949 inició con un criterio de univalencia, el cual establece que toda función analítica f, con $f' \neq 0$ y $|Sf(z)| \leq \pi^2/2$ es univalente para todo $|z| < 1$, [8]. Nehari, en ese mismo trabajo, enunció un segundo criterio de univalencia bajo las hipótesis análogas al criterio anterior salvo que, $|Sf(z)| \leq 2(1-|z|^2)^{-2}$. Dos años más tarde, el ruso V. Pokornyi en [9] demostró un criterio de univalencia donde se debe satisfacer la condición, $|Sf(z)| \leq 4(1-|z|^2)^{-1}$.

Una función armónica de variable real $u(x,y)$ es aquella que satisface $\Delta u = 0$, esta se extiende al caso de funciones armónicas complejas de la forma $f = u + iv$ donde se cumple que, $\Delta u = \Delta v = 0$, observándose que toda función analítica es armónica.

A finales del siglo XX, los matemáticos J. Clunie y T. Sheil-Small en [2] sentaron las bases de lo que hoy es conocido como un mapeo armónico complejo $f = h + \overline{g}$

siendo h y g analíticas en un dominio simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiendo en ellas ciertas propiedades. Por otro lado, R. Hernández y M.J. Martín en 2013 extendieron la definición de derivada Schwarziana de funciones analíticas al caso de mapeos armónicos.

El presente trabajo busca generalizar los criterios de univalencia presentados por Z. Nehari y V. Pokornyi usando la derivada Schwarziana al caso de mapeos armónicos.

Resumen

Este trabajo se engloba dentro de la teoría geométrica para mapeos armónicos complejos, el cual tiene como objetivo principal establecer la univalencia de mapeos armónicos a través del uso de la derivada Schwarziana. El estudio está desglozado en tres capítulos; a saber:

El capítulo 1 presenta los preliminares en el cual se muestran una serie de definiciones relacionadas al estudio de funciones analíticas, univalentes y funciones armónicas; además de teoremas y lemas relevantes como son: el lema de Schwarz, el lema de Schwarz-Pick, el teorema de Hurwitz, el teorema de Lewy, entre otros. Todos estos resultados serán utilizados en los posteriores capítulos.

En el capítulo 2 se inicia con la definición de derivada Schwarziana extendida a funciones armónicas. Luego, se enuncia un primer criterio hecho por Nehari para funciones analíticas además de algunas proposiciones. Seguidamente, este criterio se generaliza al caso de mapeos armónicos y se ilustra un ejemplo de mapeo armónico que cumpla con las hipótesis del criterio de univalencia generalizado. Posteriormente se menciona y demuestra un segundo criterio de univalencia de Nehari para funciones analíticas y se presenta la generalización del mismo a mapeos armónicos finalizando con una secuencia de ejemplos de este último criterio.

Por último, en el capítulo 3 se enuncia otro criterio de univalencia conocido como

el criterio de Pokornyi que también se generaliza a mapeos armónicos y se desarrolla un ejemplo que cumpla con las hipótesis pertinentes de la generalización.

La generalización de los criterios de univalencia presentados son aportes originales de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Funciones analíticas y univalentes

La teoría de funciones complejas es un área de la matemática ampliamente investigada durante los últimos 100 años, particularmente se estudian de las funciones analíticas. Recordemos que una función compleja f es analítica en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, si y sólo si, se satisfacen las famosas ecuaciones de Cauchy-Riemann, más precisamente, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica con $z = x + iy$, equivale a verificar las ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

para todo punto en Ω. En particular, nuestro estudio tendrá como dominio el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Un resultado del análisis complejo relacionado a las funciones analíticas que utilizaremos es el conocido lema descubierto por el polaco Hermann Amandus Schwarz el cual se expone en [3], p. 3 que enuncia lo siguiente:

Lema de Schwarz. *Sea f una función analítica en $\mathbb{D}$ con $f(0) = 0$ y $|f(z)| < 1$. Entonces, $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo z en $\mathbb{D}$. La desigualdad es estricta a no ser que f sea una rotación de la identidad, es decir, $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Posteriormente, como una consecuencia del Lema de Schwarz, el austriaco Georg Alexander Pick enunció el llamado Lema de Schwarz-Pick el cual estudiaremos a continuación:

Lema de Schwarz-Pick. *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función analítica, entonces para todo $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ se verifica que:*

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_0)}{1 - f(z_1)\overline{f(z_0)}} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - z_1 \overline{z_0}} \right|. \tag{1.1}$$

En particular,

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \tag{1.2}$$

Demostración: Consideremos $z_0 \in \mathbb{D}$, $w_0 = f(z_0)$ y Φ, Ψ los automorfismos en $\mathbb{D}$ definidos por:

$$\Phi^{-1}(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}} \quad \text{y} \quad \Psi(w) = \frac{w - w_0}{1 - w\overline{w_0}}.$$

Notemos que,

$$(\Psi \circ f \circ \Phi)(0) = (\Psi \circ f)(z_0) = \Psi(w_0) = 0$$

y

$$|\Psi \circ f \circ \Phi|(z) < 1, \ \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

Luego, aplicando el Lema de Schwarz a la función $\Psi \circ f \circ \Phi$ tenemos,

$$\begin{aligned} |(\Psi \circ f \circ \Phi)(z)| &\leq |z| \\ \left| \frac{f(\Phi(z)) - f(z_0)}{1 - f(\Phi(z))\overline{f(z_0)}} \right| &\leq |z|. \end{aligned}$$

Haciendo $\Phi(z) = z_1$ obtenemos,

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_0)}{1 - f(z_1)\overline{f(z_0)}}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_0}{1 - z_1\overline{z_0}}\right|.$$

Finalmente se obtiene (1.1). Por su parte, la expresión anterior puede ser expresada como,

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}\right| \leq \left|\frac{1 - f(z_1)\overline{f(z_0)}}{1 - z_1\overline{z_0}}\right|.$$

Haciendo $z_1 \to z_0$ en (1.1) obtenemos (1.2). $\square$

Nótese que el Lema de Schwarz-Pick es una concreción del Lema de Schwarz.

La definición de univalencia para funciones analíticas es similar a la de inyectividad en funciones de variable real. En este caso, consideremos Ω un dominio y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Se dice que f es univalente en Ω, si y sólo si, $f(z_1) \neq f(z_2)$ para todo $z_1 \neq z_2$ en Ω.

Por otro lado, un resultado fundacional del análisis complejo no menos importante es el teorema de Hurwitz, llamado así por el alemán Adolf Hurwitz el cual se puede ver detalladamente en [3], p. 4 y enuncia lo siguiente:

Teorema de Hurwitz. *Sea Ω un dominio, $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones analíticas y univalentes. Supongamos que $f_n(z) \to f(z)$ cuando $n \to \infty$, uniformemente en compactos de Ω. Entonces f es univalente o constante en Ω.*

1.2 Funciones armónicas

Íntimamente ligado al contexto de las funciones analíticas se encuentran las funciones armónicas. Recordemos que una función real $u(x, y)$ es armónica si satisface la ecuación de Laplace,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Extendiendo esta definición, una función continua $f = u + iv$ definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un mapeo o función armónica compleja en Ω si u y v son funciones armónicas reales en Ω. Además, si $f = u + iv$ es analítica entonces se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y así, es fácil ver que $\Delta u = \Delta v = 0$; en otras palabras, toda función analítica es armónica.

El Jacobiano de una función compleja $f = u+iv$ se define de la siguiente manera:

$$J_f = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nótese que si f es analítica entonces su Jacobiano es:

$$J_f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(z)\right)^2 = \left|f'(z)\right|^2.$$

Otra definición relevante es la univalencia local de una función analítica f la cual debe satisfacer que $J_f \neq 0$, resultado que también es cierto para funciones armónicas de acuerdo al matemático estadounidense Hans Lewy en [4], p. 20 con su teorema:

Teorema de Lewy. *Sea f una función armónica definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces, f es localmente univalente en Ω si y sólo si $J_f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.*

Además, las funciones armónicas preservan la orientación cuando $J_f(z) > 0$ con $z \in \Omega$ de acuerdo a [4], intuitivamente, significa que f envía curvas orientadas positivamente a curvas orientadas en sentido positivo.

En el análisis complejo, los operadores de Wirtinger, nombrados en honor al austriaco Wilhelm Wirtinger que los introdujo en 1927 en el curso de sus estudios sobre la teoría de funciones de varias variables complejas, son operadores parciales diferenciales de primer orden que se comportan de manera muy similar a las derivadas ordinarias con respecto a una variable real cuando se aplican a funciones analíticas. Estos operadores permiten la construcción de un cálculo diferencial para tales funciones que es completamente análogo al cálculo diferencial ordinario para funciones de variables reales.

Los operadores de Wirtinger están definidos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ y } \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

donde $z = x + iy$.

Un cálculo sencillo muestra que una función f es analítica, si y sólo si, $\partial f/\partial \overline{z} = 0$; en efecto, aplicando el operador de Wirtinger $\partial/\partial \overline{z}$ a f y sabiendo que f es analítica se tiene que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Además, podemos reescribir el laplaciano de f en términos del operador de Wirtinger, así:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) \\
&= 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}\partial z}.
\end{aligned}$$

Esta última ecuación implica que para una función f con segunda derivada parcial continua, se cumple que f es armónica, si y sólo si, $\partial f/\partial z$ es analítica.

Denotemos por f_z a $\partial f/\partial z$ y por $f_{\overline{z}}$ a $\partial f/\partial \overline{z}$, entonces el Jacobiano de $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $z = x + iy$ se escribe como: $J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$, en efecto, valiéndonos de los operadores de Wirtinger tenemos:

$$
\begin{aligned}
& |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \\
= \ & \left|\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\right|^2 \\
= \ & \left|\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\right|^2 \\
= \ & \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \\
= \ & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = J_f.
\end{aligned}
$$

A partir de esta igualdad se tiene que f preserva la orientación cuando $|f_z| > |f_{\overline{z}}|$ y, en este caso, $f_z \neq 0$. La función $\omega = f_{\overline{z}}/f_z$ es llamada dilatación compleja de f, de donde decir que f preserva la orientación es equivalente a que se satisfaga la condición $|\omega| < 1$.

En un dominio simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, una función armónica compleja f tiene la representación: $f = h + \overline{g}$, donde h y g son analíticas en Ω. Para una prueba recordemos que f es armónica si f_z es analítica, y sea $h' = f_z$. Ahora sea $g = \overline{f} - \overline{h}$ y observe que,

$$g_{\overline{z}} = \overline{f_z} - \overline{h_z} = 0,$$

por definición de h. Por lo tanto, g es analítica en $\mathbb{D}$.

La unicidad de la representación depende del hecho que una función analítica y antianalítica simultáneamente debe ser constante. Si f es una función de variable real, la representación se reduce a $f = h + \overline{h} = \mathrm{Re}\{2h\}$, única bajo una constante imaginaria aditiva.

Para un mapeo armónico f del disco unitario $\mathbb{D}$ es conveniente elegir la constante aditiva para asegurar la condición $g(0) = 0$. La representación $f = h + \overline{g}$ es única y es llamada representación canónica de f.

Capítulo 2

Criterios de univalencia de Nehari para mapeos armónicos

A mediados del siglo XX una rama de la teoría geométrica de funciones se empezó a estudiar, la cual fue llamada teoría de funciones univalentes. En virtud del Teorema del mapeo de Riemann el cual establece que dado un dominio del plano complejo simplemente conexo cuya frontera contiene al menos un punto entonces existe una aplicación analítica y biyectiva de dicho dominio sobre el disco unitario, se lograron estudiar muchos problemas que involucran univalencia sobre $\mathbb{D}$ y no en un dominio simplemente conexo general.

Si consideramos una función analítica $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente univalente podemos encontrar una serie de criterios que permiten la univalencia de estas funciones a través del siguiente operador:

$$Sf = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2,$$

denominado como la derivada Schwarziana de f, [1] y debe su nombre en honor al matemático polaco H. Schwarz.

La derivada Schwarziana ha jugado un papel relevante en el desarrollo de criterios de univalencia para funciones analíticas. Fue en el año 1949 cuando el alemán Zeev Nehari se interesó por el estudio de las funciones univalentes y decidió vincularlas con la derivada Schwarziana obteniendo un notable criterio de univalencia para funciones analíticas en [8] con el cual se establece lo siguiente:

1er Criterio de Nehari. *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y localmente univalente. Si para todo $z \in \mathbb{D}$,*

$$|Sf(z)| \leq \frac{\pi^2}{2},$$

entonces f es univalente. La constante $\pi^2/2$ es la mejor posible.

En ese mismo trabajo [8], Nehari desarrolló un segundo criterio de univalencia para funciones analíticas donde hizo uso de tres lemas precedentes al mismo, a saber:

Lema 1. *Si u_1 y u_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial,*

$$u'' + pu = 0, \tag{2.1}$$

entonces $Sf = 2p$, si y sólo si, $f = u_1/u_2$.

Demostración:

($\Leftarrow$) Nótese que el Wronskiano de u_1 y u_2 es constante. En efecto, como:

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = u_1 u_2' - u_1' u_2,$$

entonces,

$$\begin{aligned} W' &= u_1' u_2' + u_1 u_2'' - u_1'' u_2 - u_1' u_2' \\ &= u_1 u_2'' - u_1'' u_2 \\ &= -p u_1 u_2 + p u_1 u_2 = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que $W = c$, con c constante. Luego,

$$f' = \frac{u_1' u_2 - u_1 u_2'}{u_2^2} = -cu_2^{-2}, \qquad f'' = 2cu_2^{-3}u_2'.$$

Así,

$$\frac{f''}{f'} = \left(-\frac{2cu_2^{-3}u_2'}{cu_2^{-2}}\right) = -2u_2^{-1}u_2'.$$

Finalmente, sabiendo que u_2 satisface la ecuación diferencial (2.1),

$$\begin{aligned} Sf &= \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \\ &= (-2u_2^{-1}u_2')' - \frac{1}{2}(-2u_2^{-1}u_2')^2 \\ &= 2u_2^{-2}(u_2')^2 - 2u_2^{-1}u_2'' - 2u_2^{-2}(g_2')^2 \\ &= -2u_2^{-1}(-pu_2) \\ &= 2p. \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Sea f con $Sf = 2p$ se puede verificar que,

$$u_0 = (f')^{1/2} \quad \text{cuando} \;\; u'' + pu = 0.$$

En efecto,

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{2}\frac{f''}{f'} \quad \Rightarrow \quad \log u = -\frac{1}{2}\log f' \Rightarrow u = (f')^{-1/2}.$$

Por otro lado, si u_1 es solución de,

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

tomando $u_2 = c(x)u_1$ obtenemos que,

$$c''u_1 + 2c'u_1' + cu_1'' + p(c'u_1 + cu_1') + qcu_1 = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u_1c'' + (2u_1' + pu_1)c' = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{c''}{c'} = -2\frac{u_1'}{u_1} - p \\ &\Rightarrow \quad \log c' = -2\log u_1 - \int p(x)dx \\ &\Rightarrow \quad c' = \frac{1}{u_1^2}e^{-\int p(x)dx} \\ &\Rightarrow \quad u_2(x) = u_1(x)\int \frac{1}{u_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx. \end{aligned}$$

Así,

$$u_1 = (f')^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad u_2 = u_1\int \frac{1}{u_1^2}dz = u_1\int f'dz = u_1 f \Rightarrow f = \frac{u_1}{u_2}.$$

□

Lema 2. *Para cada par de puntos distintos* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ *existe un mapeo,*

$$\varphi(z) = e^{i\sigma}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \quad , \quad |\alpha| < 1, \tag{2.2}$$

del disco en sí mismo para el cual $0 < \varphi(z_1) = \varphi(z_2)$.

Demostración: Primero observemos que,

$$|\varphi(z_1)| = |\varphi(z_2)|.$$

para algún α.

Para ver esto, sea:

$$\Psi_j(\alpha) = \frac{z_j - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z_j} \quad , \quad j = 1, 2,$$

notemos que,

$$|\Psi_1(z_1)| - |\Psi_2(z_1)| < 0 \quad \text{y} \quad |\Psi_1(z_2)| - |\Psi_2(z_2)| > 0.$$

Luego, definiendo $\Phi(t) = |\Psi_1(z(t))| - |\Psi_2(z(t))| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces,

$$\Phi(0) < 0 \qquad y \qquad \Phi(1) > 0.$$

Por el Teorema de Valor Intermedio, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi(t_0) = 0$, es decir, $\Psi_1(z(t_0)) = \Psi_2(z(t_0))$. En otras palabras, por continuidad, $|\Psi_1(\alpha)| = |\Psi_2(\alpha)|$ para algún $\alpha = z(t_0)$ en cualquier curva dada uniendo z_1 y z_2.

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar z_1 y z_2 tales que $|z_1| = |z_2|$. Después de una rotación adecuada podemos suponer $z_1 = \overline{z_2} = r \cdot e^{i\theta}$ con $0 < \theta < 2\pi$ y $Re\{z_1\} > 0$. Por esta razón, sólo necesitamos probar que:

$$\varphi(z) = -\varphi(\overline{z}),$$

para algún α tal que $|\alpha| < 1$, donde $z = z_1 = re^{i\theta}$. En este caso,

$$\varphi(z) + \varphi(\overline{z}) = e^{i}\sigma\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right) + e^{i}\sigma\left(\frac{\overline{z}-\alpha}{1-\overline{z\alpha}}\right) = 0,$$

lo cual equivale a:

$$\begin{aligned}
(z-\alpha)(1-\overline{\alpha z}) + (\overline{z}-\alpha)(1-\overline{\alpha}z) &= 0, \qquad z = re^{i\theta}. \\
z - \overline{\alpha}|z|^2 - \alpha + |\alpha|^2\overline{z} + \overline{z} - \overline{\alpha}|z|^2 - \alpha + |\alpha|^2 z &= 0 \\
(z+\overline{z}) + (|\alpha|^2\overline{z} + |\alpha|^2 z &= 2(\alpha + \overline{\alpha}|z|^2) \\
rcos(\theta) + r|\alpha|^2 cos(\theta) &= \alpha + \overline{\alpha}|z|^2 \\
(1+|\alpha|^2) rcos(\theta) &= \alpha + \overline{\alpha}|z|^2.
\end{aligned}$$

Como $0 < cos(\theta) < 1$, esta última ecuación tiene una solución α con $0 < \alpha < 1$.

$\square$

Lema 3. *Sea u una función de valor real, continuamente diferenciable en el intervalo $[-1,1]$, $u \neq 0$. Supongamos que, $u(x) = O(1-x)$ cuando $x \to 1$ y $u(x) = O(1+x)$ cuando $x \to -1$. Entonces,*

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-2}[u(x)]^2 dx < \int_{-1}^{1} [u'(x)]^2 dx.$$

Demostración: Nótese que,

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{-1}^{1} \left((1-x^2)^{-1}xu + u'\right)^2 dx \\ &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-2}x^2u^2 dx + 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1}xuu' dx + \int_{-1}^{1} [u']^2 dx \\ &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-2}x^2u^2 dx + \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1}x[u^2]' dx + \int_{-1}^{1} [u']^2 dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Integrando el segundo término por partes tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1}x[u^2]' dx &= [(1-x^2)^{-1}xu^2] \mid_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (1+x^2)(1-x^2)^{-2}u^2 dx \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{xu^2}{1-x^2} - \lim_{x\to -1} \frac{xu^2}{1-x^2} \\ &\quad - \int_{-1}^{1} (1+x^2)(1-x^2)^{-2}u^2 dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como $u(x) = O(1-x)$ cuando $x \to 1$ entonces existe $M > 0$ tal que,

$$u(x) \leq M(1-x), \qquad x \to 1. \tag{2.5}$$

Análogamente, si $u(x) = O(1+x)$ cuando $x \to -1$ entonces existe $m > 0$ tal que,

$$u(x) \leq m(1+x), \qquad x \to -1. \tag{2.6}$$

Nótese que,

$$\begin{aligned}
0 &\leq u^2(x) \\
0 &\leq xu^2(x), \quad \text{cuando} \quad x \geq 0. \\
0 &\leq \frac{xu^2(x)}{1-x^2}, \quad \forall x \in [0,1).
\end{aligned}$$

Usando la condición (2.5) se tiene,

$$0 \leq \lim_{x\to 1} \frac{xu^2(x)}{1-x^2} \leq \lim_{x\to 1} \frac{Mx(1-x)^2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{Mx(1-x)}{1+x} = 0.$$

$$0 \leq \lim_{x\to 1} \frac{xu^2(x)}{1-x^2} \leq 0.$$

Ahora, usando el teorema de acotamiento para límites se cumple que,

$$\lim_{x\to 1} \frac{xu^2(x)}{1-x^2} = 0. \tag{2.7}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
0 &\leq u^2(x) \\
0 &\geq xu^2(x), \quad \text{cuando} \quad x \leq 0. \\
0 &\geq \frac{xu^2(x)}{1-x^2}, \quad \forall x \in (-1,0]. \\
0 &\leq -\frac{xu^2(x)}{1-x^2}, \quad \forall x \in (-1,0].
\end{aligned}$$

Por la condición (2.6) se sigue que,

$$0 \leq \lim_{x\to -1} -\frac{xu^2(x)}{1-x^2} \leq \lim_{x\to -1} -\frac{mx(1+x)^2}{1-x^2} = \lim_{x\to -1} -\frac{mx(1+x)}{1-x} = 0.$$

$$0 \leq \lim_{x\to -1} -\frac{xu^2(x)}{1-x^2} \leq 0.$$

Nuevamente valiéndonos del teorema de acotamiento de límites,

$$\lim_{x \to -1} \frac{xu^2(x)}{1-x^2} = 0. \tag{2.8}$$

Con los resultados (2.7) y (2.8) obtenemos de (2.4) que:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1} x [u^2]' dx \quad = \quad - \int_{-1}^{1} (1+x^2)(1-x^2)^{-2} u^2 dx. \tag{2.9}$$

Sustituyendo (2.9) en (2.3),

$$\begin{aligned}
0 &< \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-2} x^2 u^2 dx - \int_{-1}^{1} (1+x^2)(1-x^2)^{-2} u^2 dx + \int_{-1}^{1} [u']^2 dx \\
0 &< \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-2} u^2 [x^2 - (1+x^2)] dx + \int_{-1}^{1} [u']^2 dx \\
0 &< \int_{-1}^{1} [u']^2 dx - \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-2} u^2 dx.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-2} u^2 dx \quad < \quad \int_{-1}^{1} [u']^2 dx.$$

$\square$

Luego de haber expuesto los anteriores lemas, Z. Nehari los utiliza para su segundo criterio de univalencia el cual se presenta a continuación:

2do Criterio de Nehari. *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y localmente univalente. Si para todo $z \in \mathbb{D}$,*

$$|Sf(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}, \tag{2.10}$$

entonces f es univalente.

Demostración: Primero observemos que es suficiente probar que, $f(r) \neq f(-r)$ para $0 < r < 1$ usando (2.10). En efecto, si $f(z_1) = f(z_2)$ entonces por el Lema

2, algún automorfismo conforme T del disco produce una función, $F = f \circ T$ con $F(r) = F(-r)$ y de acuerdo a [6] con derivada Schwarziana,

$$(SF)(\xi) = S(f \circ T)(\xi)[T'(\xi)]^2.$$

De la desigualdad (2.10) tenemos que,

$$\begin{aligned} |SF(\xi)| &= |S(f \circ T)(\xi)| \cdot |(T'(\xi))^2| \\ &\leq 2(1 - |T(\xi)|^2)^{-2} \cdot |T'(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Luego, por Lema de Schwarz,

$$|SF(\xi)| \leq 2(1 - |\xi|^2)^{-2}.$$

En este sentido F también satisface (2.10), lo cual muestra que es suficiente demostrar que, $f(r) = f(-r)$.

En virtud del Lema 1, equivale a probar que si p es una función analítica que satisface,

$$|p(z)| \leq (1 - |z|^2)^{-2}, \qquad |z| < 1,$$

entonces la relación g_1/g_2 de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $g'' + pg = 0$ toma diferentes valores en $\pm r$ para cada r con $0 < r < 1$. Si por el contrario,

$$\frac{g_1(r)}{g_2(r)} = \frac{g_1(-r)}{g_2(-r)} = \alpha,$$

para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ y para algún r con $0 < r < 1$, entonces, $g = g_1 - \alpha g_2$ satisface $g(r) = g(-r) = 0$, lo cual implica que existe una solución no trivial de $g'' + pg = 0$ con al menos dos ceros.

Por lo tanto, el 2do Criterio de Nehari equivale a demostrar que si p satisface,

$$|p(z)| \leq (1 - |z|^2)^{-2} \quad , \quad |z| < 1,$$

entonces no existe solución no trivial de la ecuación diferencial $g''+pg=0$ que tenga a lo más dos ceros, $\pm r$, con $0<r<1$.

Usando reducción al absurdo, supongamos por el contrario que existe $g\neq 0$ que satisface:

$$g''+pg=0 \quad y \quad g(r)=g(-r)=0,$$

para algún r con $0<r<1$.

Multiplicando la E.D.O por $\overline{g}$ e integrando por partes,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-r}^{r} \overline{g(x)}[g''(x)+p(x)g(x)]dx \\
0 &= \int_{-r}^{r} g''(x)\overline{g(x)}dx + \int_{-r}^{r} p(x)|g(x)|^2 dx \\
0 &= g'(x)\overline{g(x)}\ |_{-r}^{r} - \int_{-r}^{r} g'(x)\overline{g(x)}' dx + \int_{-r}^{r} p(x)|g(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Como $g(\pm r)=0$, entonces $\overline{g(\pm r)}=0$. Luego,

$$\int_{-r}^{r} |g'(x)|^2 dx \;=\; \int_{-r}^{r} p(x)|g(x)|^2 dx. \tag{2.11}$$

Nótese que si $|p(x)|\leq (1-|x|^2)^{-2}$ entonces,

$$|p(x)|\cdot|g(x)|^2 \leq (1-|x|^2)^{-2}|g(x)|^2.$$

Integrando a ambos lados la expresión anterior,

$$\int_{-r}^{r} |p(x)||g(x)|^2 dx \;\leq\; \int_{-r}^{r} (1-|x|^2)^{-2}|g(x)|^2 dx. \tag{2.12}$$

Usando (2.11) en (2.12),

$$\int_{-r}^{r} |g'(x)|^2 dx \;\leq\; \int_{-r}^{r} (1-|x|^2)^{-2}|g(x)|^2 dx. \tag{2.13}$$

Sea $g(rt)=u(t)+iv(t)$ y usemos la siguiente desigualdad:

$$r^2(1-r^2t^2)^{-2} \;\leq\; (1-t^2)^{-2}, \qquad -1\leq t\leq 1.$$

Luego, haciendo el cambio de variable: $x = rt$,

$$\begin{aligned} r^2(1-|x|^2)^{-2}|g(x)|^2 &= (1-r^2t^2)^{-2}r^2(u^2+v^2) \\ &\leq (1-t^2)^{-2}(u^2+v^2). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$|g'(x)|^2 = r^2(u'^2+v'^2).$$

Volviendo a (2.13),

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r} |g'(x)|^2 dx &= \int_{-1}^{1} r^2(u'^2+v'^2)dt \\ &\leq \int_{-1}^{1} (1-r^2t^2)^{-2}r^2(u^2+v^2)dt \\ &\leq \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-2}(u^2+v^2)dt \\ &\leq \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-2}|g(x)|^2dx, \end{aligned}$$

lo cual contradice el Lema 3. □

Por su parte, en el año 2013 se realizó un estudio en conjunto por: R. Hernández y M.J. Martín en [6], donde se extendió la derivada Schwarziana de funciones analíticas a mapeos armónicos en su forma canónica que preservan la orientación la cual está definida por:

$$S_f = Sh + \frac{\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\left(\frac{h''}{h'}\omega' - \omega''\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\omega'\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\right)^2, \tag{2.14}$$

donde $f = h + \overline{g} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ siendo Ω un dominio simplemente conexo; h, g funciones analíticas y $\omega = g'/h'$ la dilatación de f.

Nótese que si $\omega = 0$ entonces $S_f = Sh$.

Además, f preserva la orientación, si y sólo si, h es localmente univalente y $|\omega| < 1$. En efecto, como $J_f = |h'|^2 - |g'|^2 > 0$ implica que,

$$|h'| > |g'| \quad \Leftrightarrow \quad h' \neq 0 \text{ y } \left|\frac{g'}{h'}\right| = |\omega| < 1.$$

Cabe resaltar que existe una importante relación entre la derivada Schwarziana de $f = h + \overline{g}$, un mapeo armónico que preserva la orientación y la derivada Schwarziana de la composición $A \circ f$ donde A es un mapeo armónico afín: $A(z) = az + b\overline{z} + c$ donde $a, b, c \in \mathbb{C}$, correspondencia que se muestra en la siguiente proposición:

Proposición 1 *Sea* $f = h + \overline{g}$ *una mapeo armónico en* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *que preserva la orientación con dilatación* ω*. Consideremos el mapeo armónico afín* $A(z) = az + b\overline{z} + c$ *con* $a, b, c \in \mathbb{C}$*, y* $|a| \neq |b|$*. Entonces,* $S_{(A \circ f)} \equiv S_f$ *en* Ω*.*

Demostración: Ver [6]. □

Otra proposición importante establece las condiciones bajo las que se satisface la univalencia entre un mapeo armónico $f_\lambda = h + \lambda\overline{g}$ que preserva la orientación y una función analítica $F_\lambda = h + \lambda g$. A saber:

Proposición 2 *Sea* $f_\lambda = h + \lambda\overline{g}$*, para* $|\lambda| = 1$ *un mapeo armónico que preserva la orientación y* $F_\lambda = h + \lambda g$*, una función analítica. Entonces,* F_λ *es univalente, para todo* $|\lambda| = 1$ *si, y sólo si,* f_λ *lo es.*

Demostración: Asumamos que $f_\lambda = h + \lambda\overline{g}$ es univalente para cada $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ y supongamos que existe $|\lambda_0| = 1$ tal que $F_{\lambda_0} = h + \lambda_0 g$ no es univalente en el disco unitario. Por lo tanto, existen dos puntos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ tales que $F_{\lambda_0}(z_1) = F_{\lambda_0}(z_2)$, de donde tenemos las siguientes posibilidades:

(i) $h(z_1) = h(z_2)$:

En este caso, se sigue que $g(z_1) = g(z_2)$, y así $f_{\lambda_0}(z_1) = f_{\lambda_0}(z_2)$ con $z_1 \neq z_2$, lo cual es una contradicción a la univalencia de f_{λ_0}.

(ii) $h(z_1) \neq h(z_2)$:

Denotemos por, $\theta = \arg\{h(z_1) - h(z_2)\} \in [0, 2\pi)$. Como, $F_{\lambda_0}(z_1) = F_{\lambda_0}(z_2)$ entonces,

$$h(z_1) - h(z_2) = \lambda_0(g(z_2) - g(z_1)).$$

Por lo tanto,

$$e^{-i\theta}(h(z_1) - h(z_2)) = e^{-i\theta}\lambda_0(g(z_2) - g(z_1)),$$

es un número real positivo. Luego, tomando conjugados a ambos lados de la ecuación anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{e^{-i\theta}(h(z_1) - h(z_2))} &= \overline{e^{-i\theta}\lambda_0(g(z_2) - g(z_1))} \\
e^{-i\theta}(h(z_1) - h(z_2)) &= e^{i\theta}\overline{\lambda_0(g(z_2) - g(z_1))} \\
h(z_1) + e^{2i\theta}\overline{\lambda_0 g(z_1)} &= h(z_2) + e^{2i\theta}\overline{\lambda_0 g(z_2)} \\
f_\mu(z_1) &= f_\mu(z_2), \qquad \mu = e^{2i\theta}\overline{\lambda_0} \in \partial\mathbb{D},
\end{aligned}$$

lo cual representa nuevamente una contradicción.

Con el mismo argumento se prueba que los mapeos armónicos f_λ son univalentes para todo $|\lambda| = 1$ cuando las funciones analíticas F_λ, son univalentes.

□

Motivado en las investigaciones realizadas por Z. Nehari y R. Hernández con M.J. Martín este capítulo generaliza los criterios de univalencia de Nehari de funciones analíticas al caso de mapeos armónicos con dilatación ω que preservan la orientación. El siguiente teorema establece un primer resultado:

Teorema 2.1 (Generalización del 1er Criterio de Nehari) *Sea $f = h + \overline{g}$ un mapeo armónico en $\mathbb{D}$ con dilatación ω que preserva la orientación. Si para todo $z \in \mathbb{D}$,*

$$|S_f(z)| + \frac{1}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2 + \frac{3}{1-|\omega(z)|}\frac{|\omega'(z)|^2}{1-|\omega(z)|^2} \leq \frac{\pi^2}{2}, \quad (2.15)$$

entonces f es univalente.

Demostración: Despejando Sh de la derivada Schwarziana para funciones armónicas (2.14),

$$Sh = S_f - \frac{\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\left(\frac{h''}{h'}\omega' - \omega''\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\omega'\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\right)^2. \quad (2.16)$$

Aplicando la desigualdad triangular a (2.16) tenemos,

$$|Sh| \leq |S_f| + \frac{|\overline{\omega}|}{1-|\omega|^2}\left|\frac{h''}{h'}\omega' - \omega''\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega'\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\right|^2.$$

Sabiendo que $|\omega| < 1$ y usando (2.15),

$$\begin{aligned}
|Sh(z)| &\leq |S_f(z)| + \frac{1}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2. \\
&\leq |S_f(z)| + \frac{1}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2 \\
&\quad + \frac{3}{1-|\omega(z)|}\frac{|\omega'(z)|^2}{1-|\omega(z)|^2}. \\
&\leq \frac{\pi^2}{2}, \qquad \forall z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Usando el 1er criterio de Nehari, h es univalente. Ahora dado $a \in \mathbb{D}$, definamos $f_a = f + \overline{af} = h_a + \overline{g_a}$ donde $h_a = h + \overline{a}g$ y $g_a = g + ah$. Además, notemos que la dilatación de f_a es:

$$\omega_a = \frac{g_a'}{h_a'} = \frac{g' + ah'}{h' + \overline{a}g'} = \frac{a + \omega}{1 + \overline{a}\omega} = \varphi_a \circ \omega,$$

donde $\varphi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es el automorfismo definido por: $\varphi_a(z) = (a+z)/(1+\overline{a}z)$.

Luego, usando la Proposición 1 en [6] y el Lema de Schwarz se tiene que:

$$S_{f_a} = S_f.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que,

$$\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2},$$

se puede observar que:

$$\begin{aligned}
\frac{|\omega_a'|}{1-|\omega_a|^2} &= \frac{|\varphi_a'(\omega)\,\omega'|}{1-|\varphi_a(\omega)|^2} \\
&= \frac{|\omega'|}{1-|\omega|^2}\frac{|\varphi_a'(\omega)|(1-|\omega|^2)}{(1-|\varphi_a(\omega)|^2)} \\
&= \frac{|\omega'|}{1-|\omega|^2}\frac{(1-|a|^2)(1-|\omega|^2)}{|1+\overline{a}\omega|^2-|a+\omega|^2} \\
&= \frac{|\omega'|}{1-|\omega|^2}\frac{1-|\omega|^2-|a|^2+|a\omega|^2}{1-|\omega|^2-|a|^2+|a\omega|^2} \\
&= \frac{|\omega'|}{1-|\omega|^2}.
\end{aligned}$$

Considerando la igualdad anterior tenemos,

$$\begin{aligned}
|Sh_a(z)| &= \left| S_{f_a}(z) - \frac{\overline{\omega_a}(z)}{1-|\omega_a(z)|^2}\left(\frac{h_a''(z)}{h_a'(z)}\omega_a'(z) - \omega_a''(z)\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\overline{\omega_a}(z)\omega_a'(z)}{1-|\omega_a(z)|^2}\right)^2 \right| \\
&\le |S_{f_a}(z)| + \frac{|\omega_a'(z)|}{1-|\omega_a(z)|^2}\left|\frac{h_a''(z)}{h_a'(z)} - \frac{\omega_a''(z)}{\omega_a'(z)}\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega_a'(z)}{1-|\omega_a(z)|^2}\right|^2 \\
&= |S_{f_a}(z)| + \frac{|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h_a''(z)}{h_a'(z)} - \frac{\omega_a''(z)}{\omega_a'(z)}\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2, \quad \forall z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Como, $h_a' = h' + \overline{a}g' = h'(1+\overline{a}\omega)$ entonces,

$$\frac{h_a''}{h_a'} = \frac{h''}{h'} + \frac{\overline{a}\omega'}{1+\overline{a}\omega}.$$

Por su parte, $\omega_a' = \varphi_a'(\omega)\omega'$ implica que,

$$\frac{\omega_a''}{\omega_a'} = \frac{\varphi_a''}{\varphi_a'}(\omega)\,\omega' + \frac{\omega''}{\omega'} = -\frac{2\overline{a}\left(1-|a|^2\right)}{(1+\overline{a}\omega)^3}\frac{(1+\overline{a}\omega)^2}{1-|a|^2}\omega' + \frac{\omega''}{\omega'} = -\frac{2\overline{a}\omega'}{1+\overline{a}\omega} + \frac{\omega''}{\omega'}.$$

Continuando con la desigualdad y usando el hecho que $S_{f_a} = S_f$ tenemos que,

$$\begin{aligned}
|Sh_a(z)| &\leq |S_f(z)| + \frac{|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)} + \frac{\overline{a}\omega'(z)}{1+\overline{a}\omega(z)} + \frac{2\overline{a}\omega'(z)}{1+\overline{a}\omega(z)} - \frac{\omega''(z)}{\omega'(z)}\right| \\
&\quad + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2. \\
&= |S_f(z)| + \frac{|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)} - \frac{\omega''(z)}{\omega'(z)} + \frac{3\overline{a}\omega'(z)}{1+\overline{a}\omega(z)}\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2. \\
&\leq |S_f(z)| + \frac{|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)} - \frac{\omega''(z)}{\omega'(z)}\right| + \frac{3\,|a|\,|\omega'(z)|^2}{|1+\overline{a}\omega(z)|\,(1-|\omega(z)|^2)} \\
&\quad + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2, \quad \forall z \in \mathbb{D}. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Como $a \in \mathbb{D}$ entonces $|a| < 1$ y además,

$$\frac{1}{|1+\overline{a}\omega|} \leq \frac{1}{1-|\omega|}.$$

Usando estas implicaciones en la desigualdad (2.17) obtenemos,

$$\begin{aligned}
|Sh_a(z)| &\leq |S_f(z)| + \frac{|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)} - \frac{\omega''(z)}{\omega'(z)}\right| \\
&\quad + \frac{3\,|\omega'(z)|^2}{(1-|\omega(z)|)(1-|\omega(z)|^2)} + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2, \quad \forall z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Finalmente, por la condición (2.15),

$$|Sh_a(z)| \leq \frac{\pi^2}{2}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Así, $h_a = h + \overline{a}g$ es univalente para todo $a \in \mathbb{D}$. Aplicando ahora el Teorema de Hurwitz a f_a se cumple que la función $h + \lambda g$ es univalente para todo $|\lambda| = 1$. Luego, por la Proposición 2, $h + \lambda\overline{g}$ es univalente, en particular, f es univalente. $\square$

A continuación se mostrará un ejemplo que satisface las hipótesis del Teorema antes expuesto y verificaremos computacionalmente la univalencia del mapeo en $\mathbb{D}$.

Ejemplo 1 *Consideremos la función* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *definida por:*

$$f(z) = z + (0.2)\overline{e^z}.$$

En este caso, $h(z) = z$ y $g(z) = (0.2)e^z$ son analíticas en $\mathbb{D}$. $h'(z) = 1 \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, es decir, que h es localmente univalente en $\mathbb{D}$.

Además, $|h'(z)| = 1$ y $|g'(z)| = 0.2\,|e^z|$. De donde,

$$\begin{aligned} |\omega(z)| = \left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right| &\leq \sup_{|z|<1}\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right| \\ &= \sup_{|z|<1}\left|0.2e^x e^{iy}\right|, \quad z = x+iy. \\ &= \sup_{|z|<1}\left|0.2e^x\right| \\ &= 0.2e \\ &\leq 0.5437 \\ &< 1, \quad \forall z \in \mathbb{D}, \end{aligned}$$

es decir, $|\omega| < 1$ y así, f preserva la orientación.

Por otro lado, la derivada Schwarziana de f es:

$$S_f(z) = \frac{0.04|e^z|\overline{e^z}}{1-0.04|e^z|^2} - \frac{3}{2}\frac{0.0016|e^z|^4}{|1-0.04|e^z|^2|^2}.$$

Veamos que f cumple con la desigualdad (2.15):

$$\begin{aligned} &|S_f(z)| + \frac{1}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2 + \frac{3}{1-|\omega(z)|}\frac{|\omega'(z)|^2}{1-|\omega(z)|^2} \\ = &\left|\frac{0.04|e^z|\overline{e^z}}{1-0.04|e^z|^2} - \frac{3}{2}\frac{0.0016|e^z|^4}{|1-0.04|e^z|^2|^2}\right| + \frac{3}{2}\frac{0.04|e^z|^2}{|1-0.04|e^z|^2|^2} + \frac{3}{1-0.2|e^z|}\frac{0.04|e^z|^2}{1-0.09|e^z|^2} \\ \leq &\frac{0.04|e^z||\overline{e^z}|}{|1-0.04|e^z|^2|} + \frac{0.0024|e^z|^4}{|1-0.04|e^z|^2|^2} + \frac{0.06|e^z|^2}{|1-0.04|e^z|^2|^2} + \frac{0.12|e^z|^2}{(1-0.2|e^z|)(1-0.04|e^z|^2)} \\ = &\frac{0.04|e^z|^2}{|1-0.04|e^z|^2|} + \frac{0.0024|e^z|^4}{|1-0.04|e^z|^2|^2} + \frac{0.06|e^z|^2}{|1-0.04|e^z|^2|^2} + \frac{0.12|e^z|^2}{(1-0.2|e^z|)(1-0.04|e^z|^2)} = (\star). \end{aligned}$$

Como $z \in \mathbb{D}$ entonces $|z| < 1$. Así, podemos acotar superiormente la expresión anterior,

$$\begin{aligned}
(\star) \quad &\leq \frac{0.04e^2}{|1-0.04e^2|} + \frac{0.0024e^4}{|1-0.04e^2|^2} + \frac{0.06e^2}{|1-0.04e^2|^2} + \frac{0.12e^2}{(1-0.2e)(1-0.04e^2)} \\
&= \frac{0.295}{0.704} + \frac{0.131}{0.496} + \frac{0.443}{0.496} + \frac{0.886}{0.321} \\
&= 0.419 + 0.264 + 0.893 + 2.76 \\
&= 4.336 \\
&< \frac{\pi^2}{2},
\end{aligned}$$

lo cual muestra, por Teorema 2.1, que f es univalente en $\mathbb{D}$. A continuación veamos la imagen del mapeo armónico f.

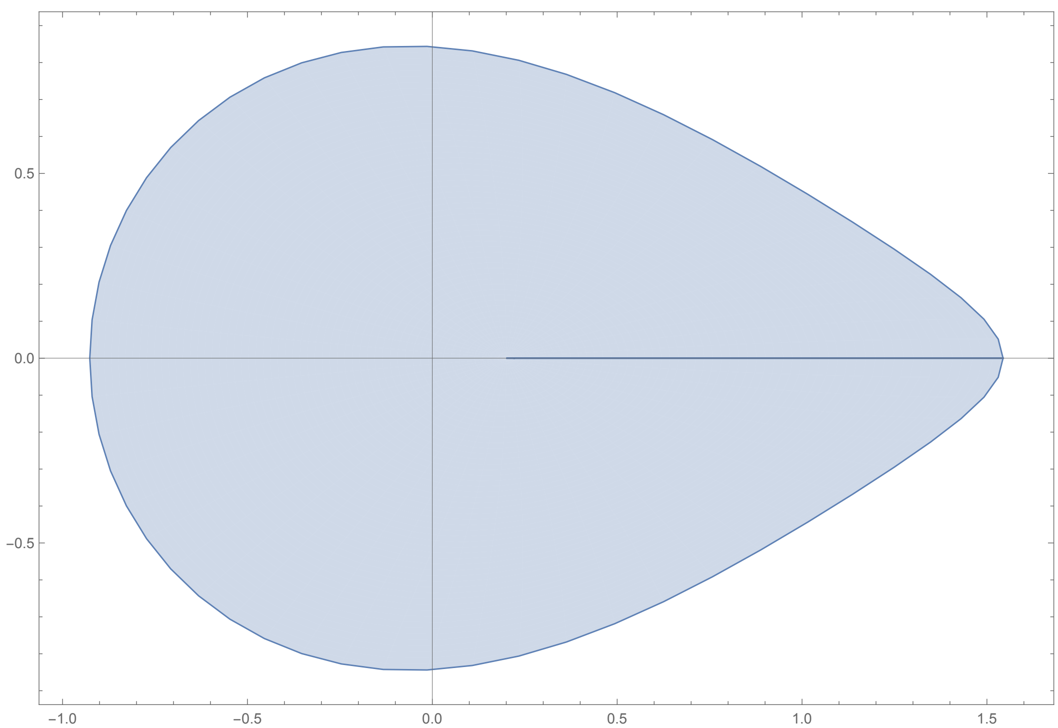


Figura 2.1: *Imagen del mapeo armónico* $f(z) = z + 0.2\overline{e^z}$.

El siguiente resultado demuestra la generalización del segundo criterio de univalencia de Nehari de funciones analíticas al caso de mapeos armónicos:

Teorema 2.2 (Generalización del 2do Criterio de Nehari) *Sea* $f = h + \overline{g}$ *un mapeo armónico en* $\mathbb{D}$ *con dilatación* ω*, que preserva la orientación. Si para todo* $z \in \mathbb{D}$,

$$|S_f(z)|(1-|z|^2)^2 + \frac{(1-|z|^2)^2}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{(1-|z|^2)\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2 + \frac{3(1-|z|^2)^2}{1-|\omega(z)|}\frac{|\omega'(z)|^2}{1-|\omega(z)|^2} \leq 2, \quad (2.18)$$

entonces f *es univalente.*

La demostración de esta generalización es análoga a la expuesta en el Teorema 2.1, salvo que se utiliza el 2do criterio de Nehari.

A continuación veamos una secuencia de ejemplos de este teorema:

Ejemplo 2 *Consideremos la función* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *definida por:*

$$f(z) = z + \varepsilon\overline{z^2},$$

con $-1/3 < \varepsilon < 1/3$.

Nótese que $h(z) = z$ y $g(z) = \varepsilon z^2$ son analíticas en $\mathbb{D}$. También, h es localmente univalente pues $h' = 1$. Además, para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} |\omega(z)| = \left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right| &\leq \sup_{|z|<1}\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right| \\ &= \sup_{|z|<1} |2\varepsilon z| \\ &= 2|\varepsilon| \\ &< 2\,|1/3| \\ &= 2/3 \\ &< 1. \end{aligned}$$

es decir, $|\omega| < 1$, de donde, f preserva la orientación. Luego, la derivada Schwarziana está dada por:

$$S_f(z) = -\frac{24\varepsilon^4\overline{z^2}}{(1-4\varepsilon|z|^2)^2}.$$

Por otro lado, veamos que f cumple con la desigualdad (2.18). En efecto,

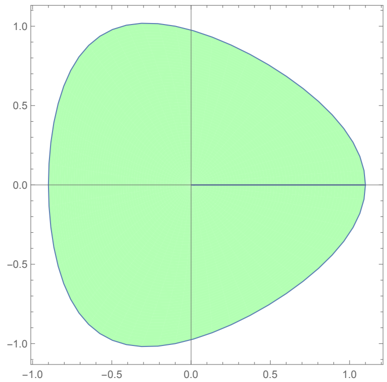
$$|S_f(z)|(1-|z|^2)^2 + \frac{(1-|z|^2)^2}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right|$$
$$+\frac{3}{2}\left|\frac{(1-|z|^2)\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2 + \frac{3(1-|z|^2)^2}{1-|\omega(z)|}\frac{|\omega'(z)|^2}{1-|\omega(z)|^2}.$$

$$= \frac{24\varepsilon^4|z|^2(1-|z|^2)^2}{(1-4\varepsilon^2|z|^2)^2} + \frac{3}{2}\left|\frac{2\varepsilon(1-|z|^2)}{1-4\varepsilon^2|z|^2}\right|^2 + \frac{3(1-|z|^2)^2}{1-2\varepsilon|z|}\frac{4\varepsilon^2}{1-4\varepsilon^2|z|^2} = (*).$$

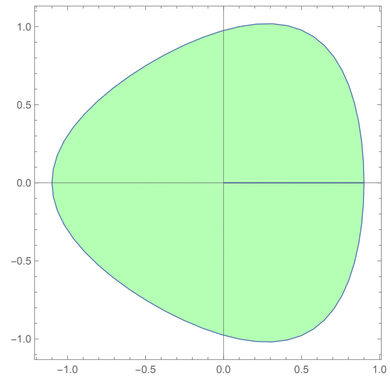
Como $z \in \mathbb{D}$ entonces $|z| < 1$. Así, podemos acotar superiormente la expresión anterior:

$$\begin{aligned} (*) &< 6\varepsilon^2 + 12\varepsilon^2 \\ &= 18\varepsilon^2 \\ &= 18\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= 2, \end{aligned}$$

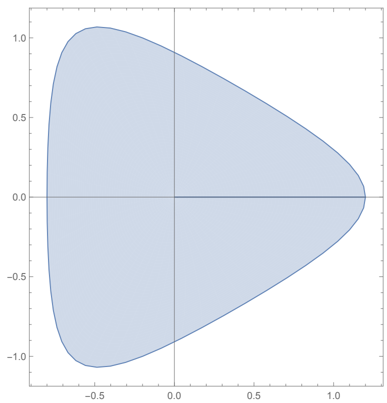
lo cual muestra, por el Teorema 2.2, que f es univalente en $\mathbb{D}$. A continuación se ilustra una secuencia de imágenes de f variando el valor ε entre $-1/3 < \varepsilon < 1/3$.



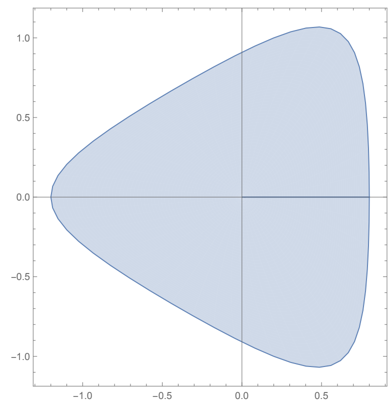
(a) $\varepsilon = 0.1$.



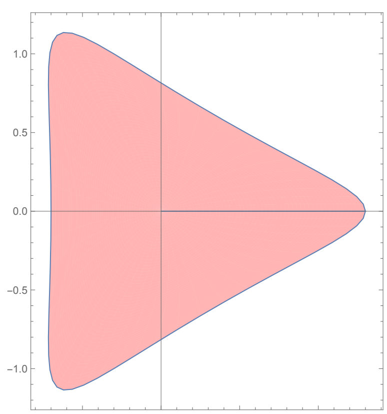
(b) $\varepsilon = -0.1$.



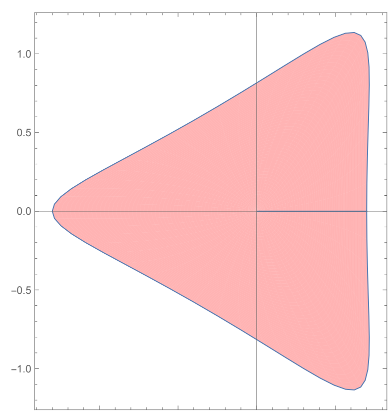
(c) $\varepsilon = 0.2$.



(d) $\varepsilon = -0.2$.



(e) $\varepsilon = 0.3$.



(f) $\varepsilon = -0.3$.

Figura 2.2: *Secuencia de ejemplos de la imagen de* $f(z) = z + \varepsilon\overline{z^2}$ *con* $|\varepsilon| < 1/3$ *y* $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Criterio de univalencia de Pokornyi para mapeos armónicos

Como los criterios de Nehari existen otros resultados que utilizan la derivada Schwarziana para establecer la univalencia de funciones analíticas. En 1951, dos años después de que Z. Nehari demostrara sus dos criterios de univalencia para funciones analíticas, el ruso V. Pokornyi en [9] establece un nuevo criterio:

Criterio de Pokornyi. *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y localmente univalente. Si*

$$|Sf(z)| \leq \frac{4}{1 - |z|^2}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Entonces f es univalente en $\mathbb{D}$.

Impulsado por el estudio que realiza Pokornyi se obtiene un tercer resultado en el cual se generaliza el criterio de univalencia de Pokornyi de funciones analíticas al caso de mapeos armónicos con dilatación ω que preservan la orientación.

La demostración empleará argumentos similares expuestos en el Teorema 2.1 del capítulo anterior, particularmente, las proposiciones 1 y 2. El próximo teorema consolida el resultado:

Teorema 3.1 (Generalización del Criterio de Pokornyi) *Sea* $f = h + \overline{g}$ *un mapeo armónico en* $\mathbb{D}$ *con dilatación* ω *que preserva la orientación. Si para todo* $z \in \mathbb{D}$,

$$|S_f(z)|(1-|z|^2) + \frac{1-|z|^2}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right| + \frac{3(1-|z|^2)}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2 + \frac{3(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|}\frac{|\omega'(z)|^2}{1-|\omega(z)|^2} \leq 4, \quad (3.1)$$

entonces f *es univalente.*

Demostración. Despejando Sh de la derivada Schwarziana S_f,

$$Sh = S_f - \frac{\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\left(\frac{h''}{h'}\omega' - \omega''\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\omega'\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\right)^2. \quad (3.2)$$

Usando la desigualdad triangular en (3.2) y multiplicando por $(1-|z|^2)$ obtenemos,

$$\begin{aligned} |Sh(z)|(1-|z|^2) \;\leq\; & |S_f(z)|(1-|z|^2) + \frac{|\overline{\omega}(z)|(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right| \\ & + \frac{3(1-|z|^2)}{2}\left|\frac{\omega'(z)\overline{\omega}(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2, \qquad \forall z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Como f preserva la orientación entonces $|\omega| < 1$ y usando la condición (3.1) tenemos,

$$\begin{aligned} |Sh(z)|(1-|z|^2) \;\leq\; & |S_f(z)|(1-|z|^2) + \frac{1-|z|^2}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right| \\ & + \frac{3(1-|z|^2)}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2. \\ \leq\; & |S_f(z)|(1-|z|^2) + \frac{1-|z|^2}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right| \\ & + \frac{3(1-|z|^2)}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2 + \frac{3(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|}\frac{|\omega'(z)|^2}{1-|\omega(z)|^2}. \\ |Sh(z)|(1-|z|^2) \;\leq\; & 4, \qquad \forall z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Usando el Criterio de Pokornyi, h es univalente. Ahora dado $a \in \mathbb{D}$, definamos $f_a = f + \overline{af} = h_a + \overline{g_a}$ donde $h_a = h + \overline{a}g$ y $g_a = g + ah$. Además, notemos que la dilatación de f_a es:

$$\omega_a = \frac{g_a'}{h_a'} = \frac{g' + ah'}{h' + \overline{a}g'} = \frac{a + \omega}{1 + \overline{a}\omega} = \varphi_a \circ \omega,$$

donde $\varphi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es el automorfismo definido por: $\varphi_a(z) = (a + z)/(1 + \overline{a}z)$. Usando la Proposición 1 tenemos que,

$$S_{f_a} = S_f.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que,

$$\varphi_a'(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 + \overline{a}z)^2},$$

obtenemos que:

$$\frac{|\omega_a'|}{1 - |\omega_a|^2} = \frac{|\omega'|}{1 - |\omega|^2}.$$

Considerando la igualdad anterior,

$$\begin{aligned}
|Sh_a(z)|\,(1 - |z|^2) \;\leq\;& (1 - |z|^2)\left|S_{f_a(z)} - \frac{\overline{\omega_a}(z)}{1 - |\omega_a(z)|^2}\left(\frac{h_a''(z)}{h_a'(z)}\omega_a'(z) - \omega_a''(z)\right)\right| \\
&+\frac{3(1 - |z|^2)}{2}\left|\left(\frac{\overline{\omega_a}(z)\omega_a'(z)}{1 - |\omega_a(z)|^2}\right)^2\right|. \\
\leq\;& |S_{f_a}(z)|\,(1 - |z|^2) + \frac{|\omega_a'(z)|\,(1 - |z|^2)}{1 - |\omega_a(z)|^2}\left|\frac{h_a''(z)}{h_a'(z)} - \frac{\omega_a''(z)}{\omega_a'(z)}\right| \\
&+\frac{3(1 - |z|^2)}{2}\left|\frac{\omega_a'(z)}{1 - |\omega_a(z)|^2}\right|^2. \\
=\;& |S_{f_a}(z)|\,(1 - |z|^2) + \frac{|\omega'(z)|\,(1 - |z|^2)}{1 - |\omega(z)|^2}\left|\frac{h_a''(z)}{h_a'(z)} - \frac{\omega_a''(z)}{\omega_a'(z)}\right| \\
&+\frac{3(1 - |z|^2)}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1 - |\omega(z)|^2}\right|^2, \qquad \forall z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Como, $h'_a = h' + \overline{a}g' = h'(1+\overline{a}\omega)$, entonces

$$\frac{h''_a}{h'_a} = \frac{h''}{h'} + \frac{\overline{a}\omega'}{1+\overline{a}\omega}.$$

Por otro lado, $\omega'_a = \varphi'_a(\omega)\cdot\omega'$ implica que

$$\frac{\omega''_a}{\omega'_a} = \frac{\varphi''_a}{\varphi'_a}(\omega)\cdot\omega' + \frac{\omega''}{\omega'} = -\frac{2\overline{a}\omega'}{1+\overline{a}\omega} + \frac{\omega''}{\omega'}.$$

Continuando con la desigualdad y usando el hecho que $S_{f_a} = S_f$ tenemos que,

$$\begin{aligned}
|Sh_a(z)|(1-|z|^2) &\leq |S_f(z)|(1-|z|^2) \\
&\quad + \frac{|\omega'(z)|\,(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)} + \frac{\overline{a}\omega'(z)}{1+\overline{a}\omega(z)} + \frac{2\overline{a}\omega'(z)}{1+\overline{a}\omega(z)} - \frac{\omega''(z)}{\omega'(z)}\right| \\
&\quad + \frac{3(1-|z|^2)}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2. \\
&= |S_f(z)|\,(1-|z|^2) + \frac{|\omega'(z)|\,(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)} - \frac{\omega''(z)}{\omega'(z)} + \frac{3\overline{a}\omega'(z)}{1+\overline{a}\omega(z)}\right| \\
&\quad + \frac{3(1-|z|^2)}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2. \\
&\leq |S_f(z)|\,(1-|z|^2) + \frac{|\omega'(z)|\,(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)} - \frac{\omega''(z)}{\omega'(z)}\right| \\
&\quad + \frac{3(1-|z|^2)\,|a|\,|\omega'(z)|^2}{|1+\overline{a}\omega(z)|\,(1-|\omega(z)|^2)} \\
&\quad + \frac{3(1-|z|^2)}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2, \quad \forall z\in\mathbb{D}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $a\in\mathbb{D}$ entonces $|a|<1$ y además,

$$\frac{1}{|1+\overline{a}\omega|} \leq \frac{1}{1-|\omega|},$$

entonces en la desigualdad (3.3) obtenemos que para todo $z\in\mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}
|Sh_a(z)|\,(1-|z|^2) &\leq |S_f(z)|\,(1-|z|^2) + \frac{|\omega'(z)|\,(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)} - \frac{\omega''(z)}{\omega'(z)}\right| \\
&\quad + \frac{3(1-|z|^2)\,|\omega'(z)|^2}{(1-|\omega(z)|)(1-|\omega(z)|^2)} + \frac{3(1-|z|^2)}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2.
\end{aligned}$$

Luego, por la condición (3.1),

$$|Sh_a(z)| \leq \frac{4}{1-|z|^2}, \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Así, $h_a = h + \overline{a}g$ es univalente para todo $a \in \mathbb{D}$. Aplicando ahora el Teorema de Hurwitz a h_a se cumple que la función $h+\lambda g$ es univalente para todo $|\lambda| = 1$. Luego, por la Proposición 2 en [7], $h + \lambda\overline{g}$ es univalente para todo $|\lambda| = 1$, en particular, f es univalente. □

Ahora consideremos un ejemplo del teorema antes demostrado para verificar las hipótesis y posterior consecuencia del mismo:

Ejemplo 3 *Consideremos la función $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:*

$$f(z) = z + 0.05\overline{z^3}.$$

En este caso, $h(z) = z$ y $g(z) = 0.05z^3$ son analíticas en $\mathbb{D}$ y $h'(z) = 1 \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, es decir, que h es localmente univalente en $\mathbb{D}$.

Además, $|h'(z)| = 1$ y $|g'(z)| = 0.15\,|z^2|$. Luego, usando el principio del módulo máximo para funciones analíticas tenemos que para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} |\omega(z)| = \left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right| &\leq \sup_{|z|<1}\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right| \\ &= \sup_{|z|<1}\left|0.15z^2\right| \\ &= 0.15 \\ &< 1, \end{aligned}$$

es decir, $|\omega| < 1$ preservando f la orientación.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} S_f(z) &= -\frac{18\cdot 0.05\overline{z^2}}{1-9\cdot 0.05^2|z|^2} - \frac{486\cdot 0.05^2 z^2\overline{z^2}^2}{1-9\cdot 0.05^2|z|^2} \\ &= -\frac{18\cdot 0.05\overline{z}^2(1+27\cdot 0.05^3|z|^4)}{1-9\cdot 0.05^2|z|^2} \\ &= -\frac{0.9\overline{z}^2(1+0.003375|z|^4)}{1-0.0225|z|^2}. \end{aligned}$$

Ahora, verifiquemos que se satisface la desigualdad (3.1),

$$|S_f(z)|(1-|z|^2) + \frac{1-|z|^2}{1-|\omega(z)|^2}\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\omega'(z) - \omega''(z)\right|$$
$$+\frac{3(1-|z|^2)}{2}\left|\frac{\omega'(z)}{1-|\omega(z)|^2}\right|^2 + \frac{3(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|}\frac{|\omega'(z)|^2}{1-|\omega(z)|^2}.$$

$$\begin{aligned} =\; & \frac{18\cdot 0.05|z|^2(1+27\cdot 0.05^3|z|^4)(1-|z|^2)}{1-9\cdot 0.05^2|z|^2} + \frac{6\cdot 0.05(1-|z|^2)}{1-9\cdot 0.05^2|z|^2} + \frac{54\cdot 0.05^2|z|^2(1-|z|^2)}{(1-9\cdot 0.05^2|z|^2)^2} \\ & + \frac{108\cdot 0.05^2|z|^2(1-|z|^2)}{(1-3\cdot 0.05|z|)(1-9\cdot 0.05^2|z|^2)}. \\ =\; & \frac{0.9|z|^2(1+0.003375|z|^4)(1-|z|^2)}{1-0.0225|z|^2} + \frac{0.3(1-|z|^2)}{1-0.0225|z|^2} + \frac{0.135|z|^2(1-|z|^2)}{(1-0.0225|z|^2)^2} \\ & + \frac{0.27|z|^2(1-|z|^2)}{(1-0.15|z|)(1-0.0225|z|^2)} \leq 0.3 < 4, \end{aligned}$$

ya que $z \in \mathbb{D}$, es decir, $|z| < 1$.

Finalmente, por el Teorema 3.1, f es univalente en $\mathbb{D}$. A continuación veamos la imagen del mapeo armónico f:

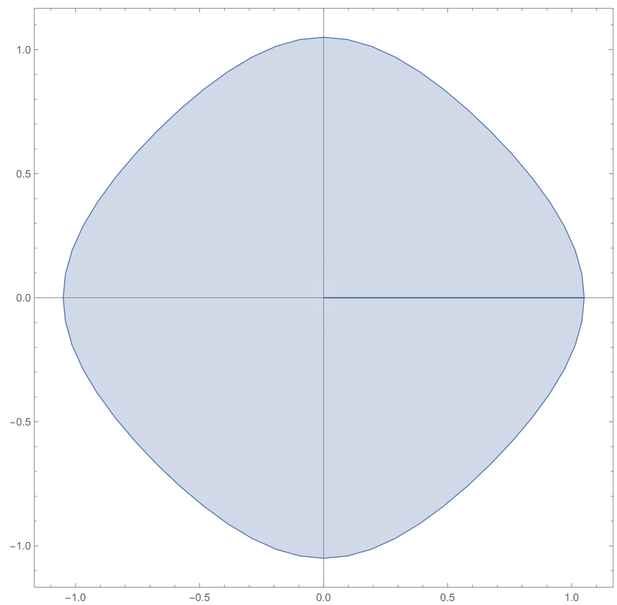


Figura 3.1: *Imagen del mapeo armónico* $f(z) = z + 0.05\overline{z^3}$.

Conclusiones

En este estudio se ha presentado la formulación, generalización y verificación de tres criterios de univalencia que fueron desarrollados a mediados del siglo pasado de funciones analíticas al caso de mapeos armónicos en su forma canónica.

La formulación es una extensión y ampliación de la presentada en [8] donde se exponen dos criterios de univalencia realizados por Zeev Nehari para el caso de funciones analíticas dentro del disco unitario. En tal sentido, la formulación presentada se obtiene utilizando de la derivada Schwarziana Sf desarrollada a finales del siglo XIX, operador usado en las hipótesis de los criterios de Nehari. Posteriormente, haciendo uso de la extensión de la derivada Schwarziana a mapeos armónicos S_f presentada en [6], se generalizan los criterios de univalencia de Nehari: teoremas 2,1 y 2.2, resultados que, en consecuencia, son aportes originales de la presente tesis.

Seguidamente, se generaliza un tercer criterio de univalencia de funciones analíticas realizado por V. Pokornyi en [9] el cual también hace uso de la derivada Schwarziana presentada en [6], obteniéndose el teorema 3.1 no expuesto anteriormente en la literatura, siendo otro aporte.

Cabe resaltar que las desigualdades (2.15), (2.18) y (3.1) de los teoremas 2.1, 2.2 y 3.1 respectivamente, son fuertes ya que, de acuerdo a los criterios de univalencia para funciones analíticas lo son.

Por su parte, se implementaron tres ejemplos de mapeos armónicos que cumplieran con las hipótesis presentadas en cada uno de los teoremas extendidos los cuales evidencian computacionalmente, a través de la imagen de cada ejemplo, que efectivamente se satisface la univalencia de los mismos en el disco unitario.

Bibliografía

[1] Chuaqui M.; Duren P.; Osgood B. (2003) "The Schwarzian derivate for harmonic mappings", *Math. Anal. Math.*, **91**, 329–351.

[2] Clunie J.; Sheil-Small T. (1984) "Harmonic univalent functions", *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **9**, 3–325.

[3] Duren P.L. (1983), *Univalent Functions*, Springer Verlag, New York.

[4] Duren P.L. (2004), *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, New York.

[5] Graham I.; Khor G. (2003), *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker, New York.

[6] Hernández R.; Martín M.J. (2013) "Pre-Schwarzian and Schwarzian Derivates of Harmonic Mapping", *Journal of Geometric Analysis*, **25**(1), 64–91.

[7] Hernández R.; Martín M.J. (2013) "Stable geometric properties of analytic and harmonic functions", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **155**(2), 343–359.

[8] Nehari Z. (1949), "The Schwarzian Derivates and schlicht functions", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**, 545–551.

[9] Pokornyi V.V. (1951) "On some sufficient conditions for univalence", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **79**, 743–746.

[10] Pommerenke Ch. (1975), *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.