SECCIÓN ÁUREA EN ARTE, ARQUITECTURA Y MÚSICA

YOLANDA TOLEDO AGÜERO

"Esta es la tradición del civilizado- del hombre de la geometría-, del hombre de la armonía, porque ha comprendido(porque sabe) que si lo fijo es la ley, la vida es movimiento (el desequilibrio que quiere equilibrarse –la polarización-, la identidad de los contrarios; ya lo hemos estudiado), y sabe también que si la idea es el padre (lo abstracto, el uno, la Razón), la madre de todo es el Alma (el dos, lo que gesta) y que la obra (el tres, lo real, lo realizado) es lo que se manifiesta como cosa. Y esa idea del hombre, tanto la realiza un templo como una vida(porque todo es conjunto ordenado; idea que se llamó clásica); es Egipto, Grecia o Bizancio. Y otro arte que no esté en esta elevación y esta profundidad y en este equilibrio no creo que merece el nombre de tal, como tampoco un vivir desorbitado, porque vivir es cuando se vive en eso universal."

Joaquín Torres García, Agosto,1934.

INDICE

I.PRESENTACIÓN

El tema que voy a desarrollar a continuación es amplio debido a su universalidad y su aplicación a un gran número de campos. Aun así, he intentado reunir todos los aspectos fundamentales de esta proporción, haciendo un estudio de sus aplicaciones más directas y significativas en las artes.

Soy consciente, no obstante, que no he conseguido mas que una aproximación, ya que un tema que era en principio matemático-geométrico se convirtió a medida que redactaba el trabajo en un tema con un trasfondo incierto. Descubrí en la sección áurea uno de los eslabones que unen el mundo de las matemáticas, con el hombre, la naturaleza y las artes. Por eso, muchas veces, he creído necesario hacer comentarios e incisos en temas, que si a simple vista no son puramente matemáticos, me parecían necesarios para la comprensión total del mundo que envuelve la sección áurea. Me parecía que esta esencia la recogía la cita con la que comienzo el trabajo me parecía que recogía esta esencia. Muchos autores apoyan estas teorías y otros tantos no ven en ellas sino casualidad y coincidencia, yo me he limitado a exponerlas, pero la realidad es que hay demasiadas cosas en el mundo (flores, galaxias, peces, conchas de mar, insectos, hombres...) que poseen un crecimiento armónico basado en una proporción tan rebuscada.

Muchos de los estudios de las obras de arte que he realizado se basan en otros tantos, hechos por otros autores o por el creador mismo de la obra; donde he hecho comprobación de que la sección áurea se aplicaba de una forma consciente, en otros casos los análisis de las obras se hacen sin saber muy bien si la aplicación de esta regla era un acto consciente del artista o bien pura intuición, pero no por esto he creído menos conveniente pararme sobre ellas, sino que por el contrario, me parece un hecho a resaltar que el hombre se exprese a sí mismo y su belleza mediante leyes geométricas cuando lo podrían hacer de muchas otras formas. Esto es muestra de la especial sensibilidad del hombre hacia esta proporción.

II.SECCIÓN ÁUREA

II.1.ANTECEDENTES

El origen exacto del término **sección áurea** es bastante incierto. Generalmente se sitúa en Alemania, en la primera mitad del S. XIX. Muchos han sido los artistas, humanistas y matemáticos que lo han tratado, aunque bajo distinto sobrenombre y con distinta disposición. Otros nombres que recibe son sección divina, sección de oro, proporción divina, proporción dorada, canon áureo, regla de oro o número de oro.

Sección áurea es simplemente una proporción concreta. Esta proporción ha desempeñado un importante papel en los intentos de encontrar una explicación matemática a la belleza, de reducir ésta a un número, de encontrar " la cifra ideal ".

De esta proporción se hablaba ya desde muy antiguo, los egipcios la descubrieron buscando medidas que les permitieran dividir la tierra de forma exacta. De Egipto pasó a Grecia y de allí a Roma. **Pitágoras (569 a.C.)** escogió como símbolo para su Escuela la estrella pentagonal, figura geométrica que muestra en todas sus relaciones la sección áurea y se cree que a partir de esta figura llegaron a la noción de inconmensurabilidad y al conocimiento de los números inconmensurables, tales como el que ahora nos ocupa. **Platón (428-347 a.C.)** hace referencia a ella en el *Timeo* y dice "es imposible combinar bien dos cosas sin una tercera, hace falta una ligazón entre ellas que las ensamble, la mejor ligazón para esta relación es el todo...". **Euclides (450-380 a. C.)**, matemático griego, en su obra principal *Elementos,* extenso tratado de matemáticas sobre geometría plana, proporciones, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio, nos revela la primera fuente documental importante sobre esta sección, su cálculo y trazado geométrico. Más tarde, **Vitruvio**, arquitecto romano, vuelve a tratarla en sus *Diez libros de arquitectura*.

En el periodo renacentista existen numerosos autores que retoman este canon. El monje Franciscano **Luca Pacioli (1445-1514)** la denominaba "divina proporción" y escribe todo un tratado (*De Divina Proportione),* sobre sus propiedades y proporciones, del que hablaremos más tarde. Este tratado se apoyaba en las ideas de **Piero della Francesca(1420-1492)**, quien había expuesto en *De Abaco,* manual de matemáticas para comerciantes, el cálculo de proporciones. Otros artistas como **Leonardo da Vinci (1452-1519) o Durero (1417-1528)** hicieron especial hincapié en la relación del número áureo y las proporciones humanas y elogiaron la apariencia de armonía y equilibrio que presentan las obras creadas a partir e dicha proporción. **Andrea Palladio (1508-1580)**, arquitecto italiano, estaba convencido de que las escalas musicales -relacionadas con la sección áurea como veremos más tarde- han de usarse como cánones de diseño arquitectónico. Uno de los últimos renacentistas que celebraron sus virtudes fue **Kepler (1517-1630)**, quien afirmaba: "hay dos tesoros en la geometría... uno el teorema de Pitágoras y otro la división proporcional... una joya". [1]

Después esta regla divina cayó en el olvido hasta el S.XIX. En este periodo vuelve a ser puesta de relieve como principio morfológico por el alemán **Zeysing**, quien en 1855 afirma en su *Aestetische Forschungen*: "Para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso, desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor, la misma razón que entre la mayor y el todo".[2] En este mismo siglo, pintores como **Seurat (1859-1891)** o **Cézanne (1839-1906)** volvieron a buscar la armonía y la belleza en el arte por medio de estrictas reglas geométricas, entre ellas, la regla áurea. En la arquitectura, destacamos sin duda a **Le Corbusier (1887-1965)** que en su empeño de considerar a la naturaleza como encarnación de todo lo verdadero, quiere traducir las leyes que la rigen en proporciones geométricas simples y tomarlas como cánones de diseño universal, haciendo así que toda obra creada por el hombre, refleje la naturaleza misma de éste.

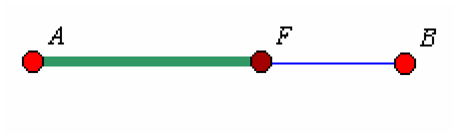
Hoy en día son muchos los artistas que usa esta proporción para estructurar sus obras, ya sea de forma consciente e inconscientemente, debido al bagaje cultural de siglos.

[1] KEPLER J.: El secreto del universo, Ed. Alianza, Madrid, 1992. p 142

[2] Citado en GHYKA M. C.: Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes, Ed. Poseidón, Barcelona, 1983. p 38

II.2. DEFINICIÓN Y CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

La sección áurea del latín *sectio aurea* es una proporción que aparece entre los segmentos de una recta al dividir ésta en media y extrema razón. Una recta AB queda dividida por un punto F en otros dos segmentos (AF y FB) de tal forma que el segmento mayor es al menor, como el todo es al mayor.



Tan solo existe un punto F que haga posible esta relación entre los segmentos y verifique la proporción AF /FB = AB /AF, que también podemos escribir como AF /FB = (AF+FB) /AF.

Si hacemos AF = x y FB =1, tenemos:

$$x^2 = x + 1$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Eligiendo la solución positiva tenemos:

$$x = +(\sqrt{5} + 1) / 2 = 1{,}6180339885 \quad ...$$

Éste es **El Número de Oro,** que normalmente designamos con la letra griega **Φ.** Su característica principal es la inconmensurabilidad, es decir, no se puede expresar como proporción de dos enteros, es irracional. El periodo de este numero es infinito y sus cifras decimales no se repiten periódicamente. Este número tiene propiedades únicas, algunas de ellas las veremos a continuación.

De las expresiones anteriores tenemos:

$$x = \Phi$$
$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi = \sqrt{1+\Phi}$$
$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}}\ldots$$
$$\Phi = lim\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

Podemos también obtener otra expresión del número de oro, dividiendo por Φ los dos miembros de la igualdad:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi = 1 + {}^{1}\!/_{\Phi}$$

sustituyendo de forma reiterada Φ por su valor, tenemos:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\Phi}} = 1 + \ldots$$

$$\Phi = 1 + lim\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

por lo que:

$$\frac{1}{\Phi} = lim \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+...}}}$$

Estos desarrollos del número Φ en fracción continua se conocen desde antiguo, pero la expresión del límite de la raíz cuadrada resulta de un teorema publicado en 1917 en la Universidad de Oklahoma por Nathan Altshiller-Court, como indica Matila en su libro *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.*

Pasemos ahora a ver la construcción geométrica de esta proporción de oro. Existen dos formas básicas de calcular la sección áurea:

1) En la primera se nos plantea la **división de un segmento en media y extrema razón**. Partimos del segmento AB y queremos encontrar un punto F, tal que los segmentos AF y FB, estén en proporción áurea. Para ello, levantamos la perpendicular BD de una altura igual AB/2, con centro en D llevamos esta altura a la hipotenusa del triángulo ABD y obtenemos E; ahora con centro en A y radio AE calculamos el punto F (fig.1).

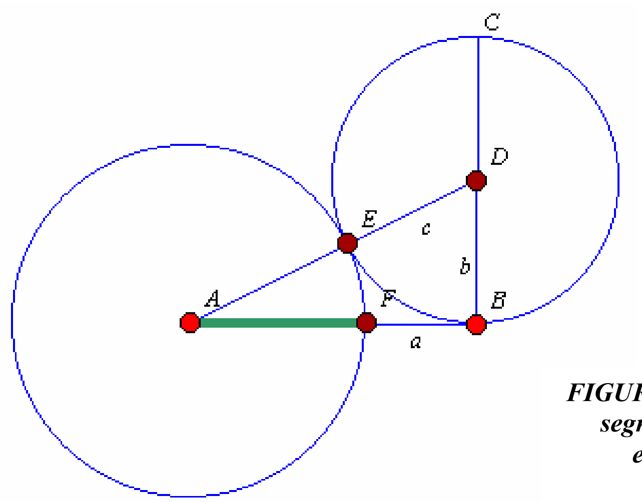
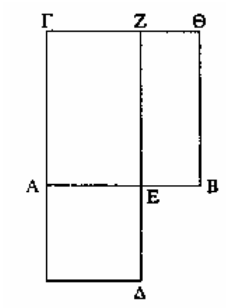


FIGURA 1: División de un segmento en media y extrema razón.

Este problema ya fue resuelto por Euclides en la proposición 30 del libro VI de los *Elementos* de la siguiente forma:

"Dividir una recta finita dada en extrema y media razón: *sea AB la recta finita dada. Así pues, hay que dividir la recta AB en extrema y media razón. Constrúyase a partir de AB el cuadrado* $B\Gamma$ *y aplíquese a* $A\Gamma$ *el paralelogramo* $\Gamma\Delta$ *igual a* $B\Gamma$ *y que exceda en la figura* $A\Delta$ *semejante a* $B\Gamma$. *Ahora bien,* $B\Gamma$ *es un cuadrado; entonces* $A\Delta$ *es también un cuadrado. Y como* $B\Gamma$ *es igual a* $\Gamma\Delta$, *quítese de ambos* ΓE; *entonces el (paralelogramo) restante* BZ *es igual al (paralelogramo) restante* $A\Delta$. *Pero son también equiángulos; entonces los lados que comprenden los ángulos iguales de los (paralelogramos)* BZ, $A\Delta$ *son inversamente proporcionales; entonces, como* ZE *es a* $E\Delta$, *así* AE *a* EB. *Pero* ZE *es igual a* AB *y* $E\Delta$ *a* AE. *Por tanto, como* BA *es a* AE, *así* AE *a* EB. *Pero* AB *es mayor que* AE *; así pues,* AE *es también mayor que* EB. *Por consiguiente se ha dividido la recta* AB *en extrema y media razón por* E *y su segmento mayor es* AE. *Q.E. F."* [3]



2) En la segunda, debemos hallar un segmento FB, que esté en relación áurea con otro dado AF. Para calcularlo, construimos un cuadrado de lado AF, y con centro en AF/2 y radio el lado, trazamos un arco hasta cortar a la prolongación de AF y obtenemos el segmento que buscábamos(fig.2).

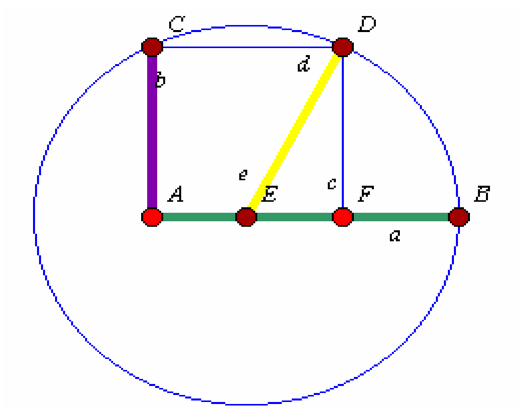


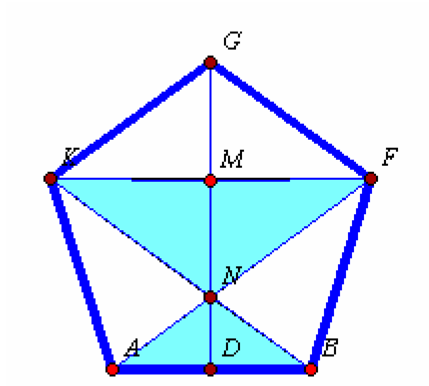
FIGURA 2: Trazado de la sección áurea.

Esta última construcción no es otra que la del pentágono regular, que como veremos está íntimamente relacionado con Φ.

II.3. POLÍGONOS REGULARES

Luca Pacioli en su *Divina proporción* analiza los trece "efectos" (aplicaciones matemáticas) de este número. Algunos de ellos se relacionan con los polígonos regulares; éstos son el séptimo: " que los lados del hexágono y del decágono estén en esta proporción", el noveno: "que mediante el cruce de las diagonales del pentágono obtendremos la relación del lado con la diagonal", el undécimo: " al dividir el lado de un hexágono según esta proporción, su parte mayor será siempre el lado del decágono", y el decimotercer efecto: " Como sin esta proporción no es posible construir un pentágono equilátero y equiángulo".[4] Ahora estudiaremos estas relaciones más detenidamente.

PENTÁGONO: la forma más sencilla de derivar Φ de un polígono regular es hacerlo partiendo de un pentágono. La razón de la diagonal y el lado de un pentágono regular es precisamente el número áureo, así como la de los segmentos en que queda dividida una diagonal al cortarse con otra(fig. 3).



$$\frac{KF}{KG} = \frac{KF}{AB} = \frac{MN}{ND} = \frac{GD}{MD} = \frac{MD}{MG} = \Phi$$

FIGURA 3: Pentágono regular. Relaciones de diagonales

[3]EUCLIDES: Elementos. Libros V-IX, Ed. Gredos, Madrid, 1994, p 104.
[4] PACIOLI L.: La Divina proporción, Ed. Akal, Madrid, 1987. pp 48-58

La construcción más común del pentágono es la llamada de Ptolomeo(fig.4a), que más tarde fue retomada por Durero; pero Euclides también abordó este problema de la siguiente forma: partiendo del segmento AB, calculamos el punto F que lo divide en media y extrema razón. Haciendo centro en F y en B con radio AF, calculamos el punto G(fig.4b).

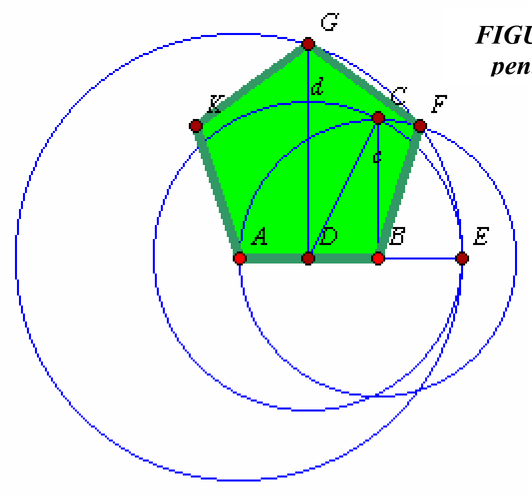


FIGURA 4a: Construcción del pentágono según Ptolomeo.

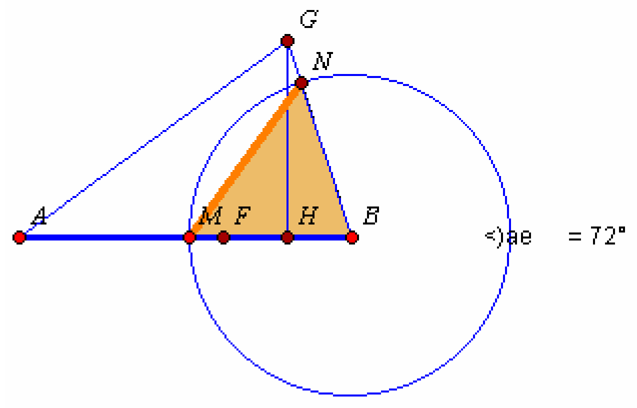


FIGURA 4b: Construcción del pentágono según Euclides.

Por las siguientes relaciones de ángulos el ángulo ae es de 72° por lo tanto el lado MN será el del pentágono regular:

Relaciones de ángulos: ángulo FBG = ae =72°, por lo tanto GFB y AGB también son iguales a ae. El ángulo FGB será entonces de 180°– 2ae y el AGF y GAF 3ae – 180°.

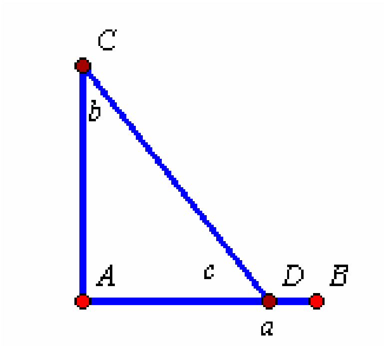
Al hacer la suma de ángulos del triángulo AFG tenemos:

$$180° = 2\,(3ae - 180°) + (180° - ae) = 5ae - 180°$$

$$5ae = 360°$$

$$ae = 72°$$

Podemos encontrar dentro del pentágono diez triángulos rectángulos, es el llamado “triángulo sagrado egipcio o triángulo de Pitágoras”. Es un triángulo rectángulo cuyos lados son proporcionales a los números 3,4, y5. Es el único triángulo cuyos lados forman una serie aritmética. Este triángulo se aproxima al coeficiente áureo en la relación de las 5 unidades del lado y las 3 de la base(fig. 5)



$$\frac{CD}{AD} = \frac{5}{3} = 1{,}666..$$

FIGURA 5: Triángulo pitagórico

PENTÁGONO ESTRELLADO: uniendo de dos en dos los vértices del pentágono regular, obtenemos el pentágono estrellado, también llamada estrella de cinco puntas, pentagrama, pentángulo o pentalfa; símbolo de la antigua Escuela Griega de Matemáticas, fundada por Pitágoras (fig.6).

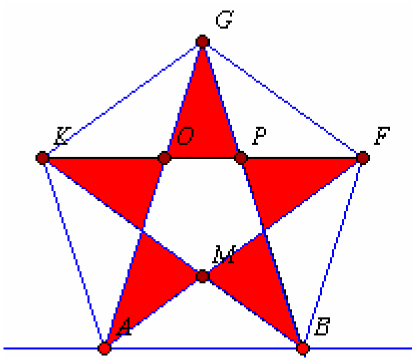
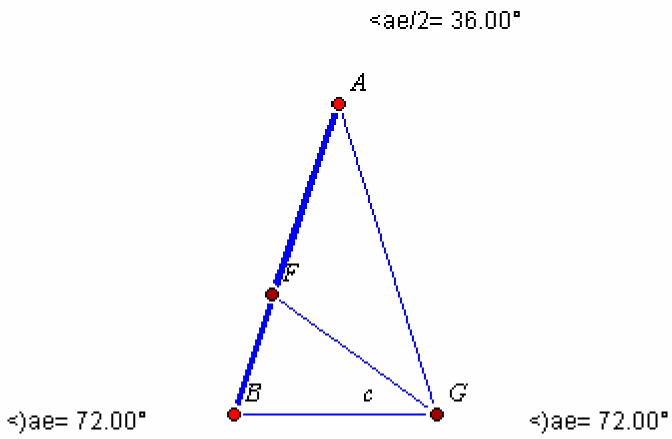


FIGURA 6: Pentagrama.

El número de oro aparece prácticamente en todas las relaciones que podemos establecer entre los diversos segmentos que la forman. Podemos encontrar dentro del pentágono estrellado varios triángulos que resultan estar relacionados con el número de oro.

✔ El primero es un triángulo isósceles(en la fig.6 el AGB). Tres de estos triángulos entrelazados forman la estrella de cinco puntas. Es el mismo triángulo del que se sirvió Euclides(fig.6b) para su construcción del pentágono. Como vemos los ángulos de la base son el doble del ángulo en el vértice, es un triángulo72°-72°-36°(fig.7).

FIGURA 7:
Triángulo 72-72-36



En este triángulo los lados AB/BG están en proporción áurea. Éste es el único triángulo isósceles con esta propiedad, lo que llevó a sus admiradores a calificarlo de *sublime*.

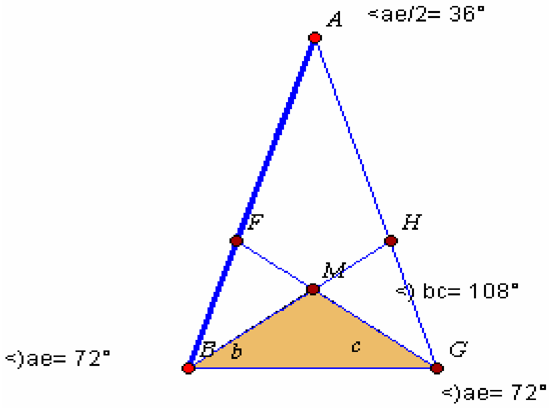
Si se traza la bisectriz "*c*" del ángulo que denominábamos ae(72°), tenemos:

$$FA = FG = GB$$
$$\frac{AF}{FB} = \frac{GB}{FB} = \frac{AB}{BG} = \frac{AB}{FG} = \Phi$$

ya que el pie de la bisectriz(F) es el punto que divide el segmento AB en media y extrema razón, lo que quiere decir que **la relación del lado del pentágono regular (BG) con el lado del pentágono estrellado (AB) es el número de oro o lo que es lo mismo, que el lado del pentágono regular y su diagonal es este mismo número** como afirmábamos anteriormente.

✔El segundo(en la fig. 6 el AMB), es otro triángulo isósceles que aparece al trazar en el triángulo anterior las dos bisectrices de los ángulos de 72°; el punto de intersección de éstas(M), forma con el lado del pentágono un nuevo triángulo BMG con propiedades áureas. El triángulo que obtenemos aquí es uno de 36°-36°-108° (BMG en la fig.8).

FIGURA 8:
Triángulo 36-36-108



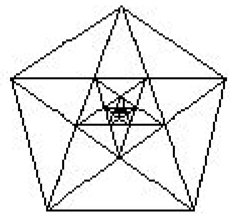
En este triángulo la relación del lado mayor(BG) con los lados menores(BM y MG) es el número Φ.

$$\frac{BG}{BM} = \frac{BG}{MG} = \Phi$$

Por lo tanto, **el punto de intersección entre diagonales divide a cada una de ellas en dos segmentos que están en relación Φ.**

✔El tercer triángulo (KMF en la fig.6) la relación de lados es la misma que en los casos anteriores, al igual que ocurre con el cuarto y último triángulo GOP; ya que son semejantes al AMB y al AGB respectivamente.

Geométricamente, que estos cuatro triángulos tengan estas relaciones entre sus lados, significa que abriendo los lados de estos triángulos obtenemos un rectángulo de oro. Dentro de un pentágono regular podemos dibujar una estrella de cinco puntas trazando sus diagonales, dentro de ésta aparece otro pentágono menor invertido en el que podemos inscribir otra estrella. Así pueden agregarse diagonales indefinidamente; pentágonos y pentángulos recurren en escalas cada vez menores, cada uno tiene relación Φ respecto su antecesor de mayor escala. Repitiendo este patrón en razón Φ formamos un nido armónico encajado, lo que nos muestra la habilidad única de éste número para pasar un patrón entre escala.



DECÁGONO: este polígono tiene una relación muy estrecha con el número de oro al ser una derivación del pentágono. Retomando el triángulo isósceles de la fig. 8 en el que vienen determinados los lados del pentágono regular y estrellado, AF y AB respectivamente, notemos que al ser el ángulo del vértice A de 36°, el lado GB es el lado del decágono regular inscrito en la circunferencia de radio AB.

Probemos ahora que la relación del lado del decágono(D) con la circunferencia(R) es precisamente el número áureo. Al ser semejantes e isósceles los triángulos AGB y FGB, los lados AF, FG y GB deben ser iguales por lo que tenemos:

$$\frac{R}{D} = \frac{D}{(R-D)}$$
$$R^2 - RD - D^2 = 0$$

y dividiendo por $D^{2:}$

$$\frac{R^2}{D^2} - \frac{R}{D} - 1 = 0$$

que es la ecuación del número de oro:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Al igual que en el pentágono podemos obtener un decágono estrellado trazando sus diagonales. Resumimos ahora las relaciones algebraicas que se dan entre los lados de pentágonos y decágonos estrellados y regulares y el número Φ.

$$P = R\sqrt{\sqrt{5}/\Phi}$$
$$P^* = R\sqrt{\Phi\sqrt{5}}$$
$$D = R/\Phi$$
$$D^* = R\Phi$$

P= lado del pentágono regular.
D= lado del decágono regular.
P*= lado del pentágono estrellado.
D*= lado del decágono estrellado.
R= radio de la circunferencia circunscrita.

HEXÁGONO: este polígono resulta de la unión de seis triángulos equiláteros y tiene la propiedad única de tener el lado igual al radio de la circunferencia que lo circunscribe, lo que facilita su construcción. Podemos trazar en su interior seis diagonales que formarán la estrella de seis puntas o hexagrama, símbolo que desempeña un papel importante en la mística y en el arte decorativo judaico(fig.9).

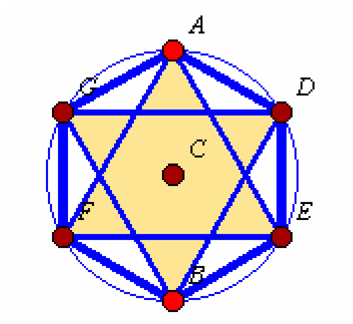
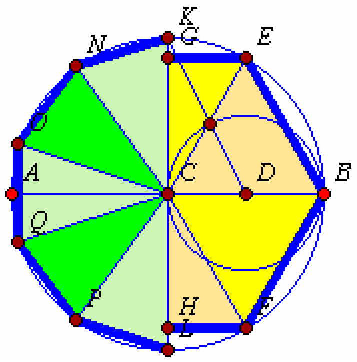


Figura 9: Estrella hexagonal

Al relacionar este polígono con el decágono, obtenemos esta relación áurea: al dividir el lado del hexágono en media y extrema razón, obtenemos el lado del decágono, por tanto el lado del hexágono y del decágono están en **proporción áurea(**fig.10).



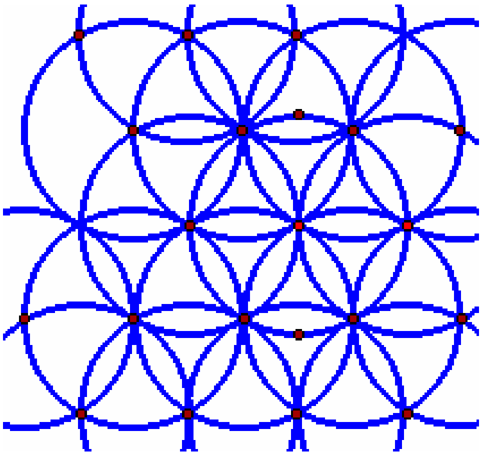
$$\frac{l_{hexágono}}{l_{decágono}} = \frac{EB}{NK} = \Phi$$

FIGURA 10: Construcción del decágono y hexágono regular y comparación de sus lados.

II.3.1. Redes en el plano

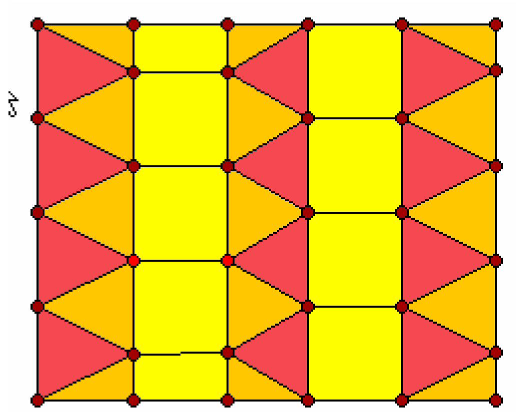
Al intentar hacer un mosaico repleto de triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y octógonos sin dejar espacios libres entre sí, veremos que solo es posible hacerlo partiendo del triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono, pero no con los otros dos. La teoría nos demuestra que solo los polígonos regulares cuyo ángulo en el vértice es submúltiplo de 360°, pueden provocar estas tramas de mosaicos; estos son justamente los tres polígonos nombrados anteriormente(con ángulos de 60°, 90° y 120° respectivamente).

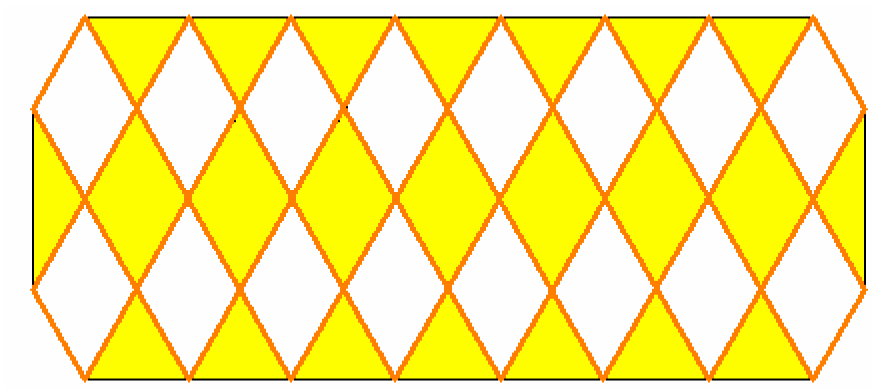
Podemos formar redes isótropas con estas figuras, como la primera que aparece en la serie siguiente, formada por circunferencias intersecantes o podemos hacer combinaciones con ellas como vemos en el segundo ejemplo, donde aparece un mosaico de cuadrados y triángulos equiláteros.



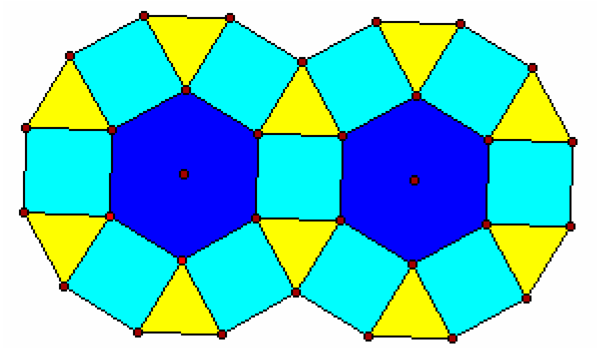
Red isótropa de circunferencias

Mosaico de cuadrados y triángulos equiláteros.

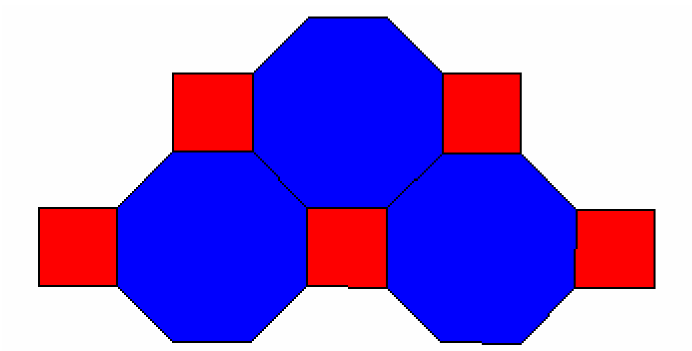


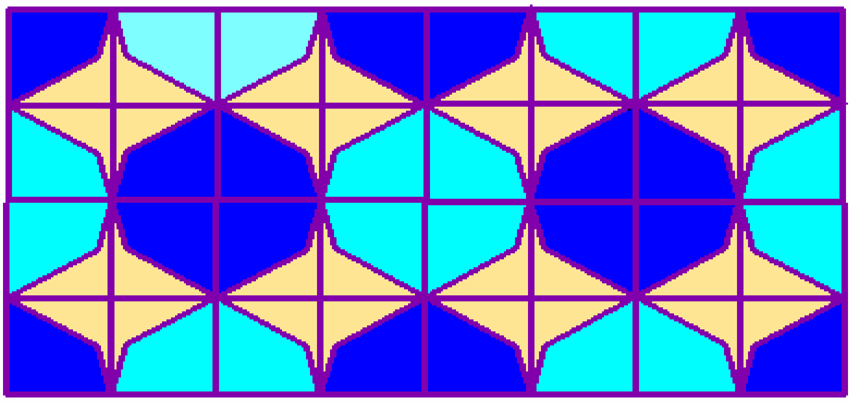


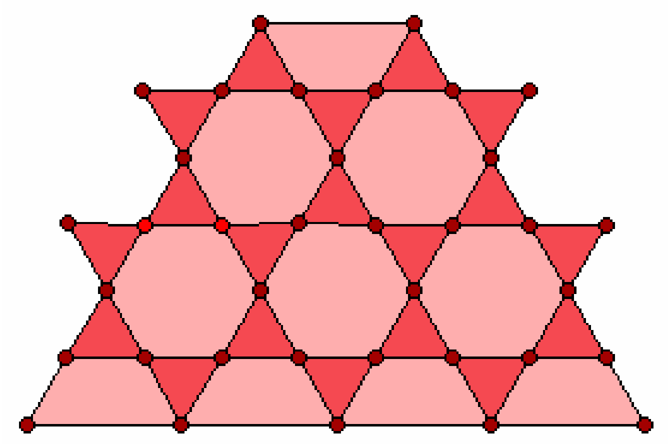
Red isótropa de rombos



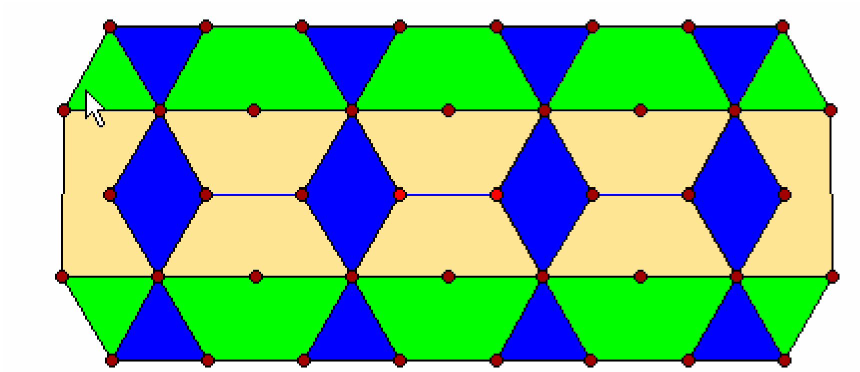
Estos dos trazados se utilizaron como modelos decorativos de los pavimentos bizantinos y románicos.







Redes hexagonales



II.4. POLIEDROS REGULARES

Todos las figuras vistas hasta ahora están dibujadas en dos dimensiones. En este sistema la figura más simple es el triángulo, y la parte de las matemáticas que se ocupa de su estudio, la trigonometría; basada en las razones de los triángulos rectángulos, tomando como base el triángulo 3-4-5 de Pitágoras.

Las formas que aquí estudiaremos están construidas en tres dimensiones, son figuras sólidas llamadas **poliedros regulares** que tienen como caras, polígonos regulares idénticos unidos por aristas de igual longitud; todos inscriptibles en una esfera. Estos cuerpos son cinco: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro y están representados en la fig. 11.

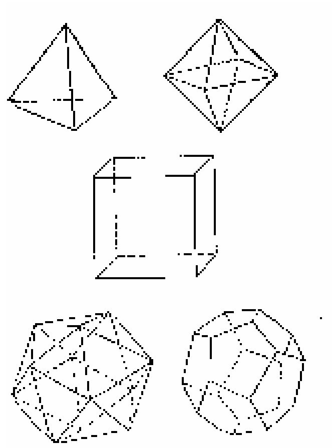


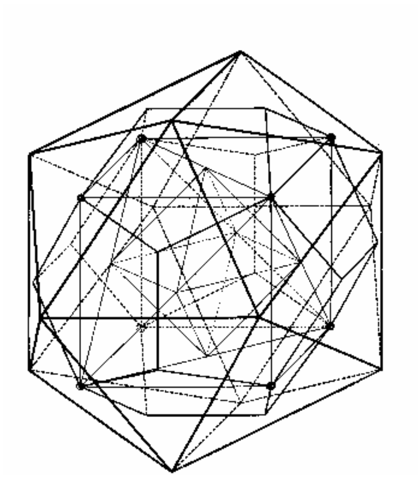
FIGURA 11: Poliedros: tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro.

En este sistema la figura más simple es el **tetraedro,** tres triángulos alrededor de un vértice, con cuatro caras de tres lados y cuatro vértices. El **cubo** formado por seis caras y ocho vértices. El próximo en tamaño y complejidad es el **octaedro**, cuatro triángulos convergen en un punto, con ocho caras y seis vértices; su complemento geométrico es el cubo, las caras de uno son los vértices del otro. El siguiente en complejidad, el **icosaedro**, tiene cinco triángulos por vértice, con doce vértices y doce caras. La quinta forma de geometría en tres dimensiones es el **dodecaedro**, complemento del icosaedro, con tres caras de cinco lados por vértice, doce caras y veinte vértices.

Estos cinco cuerpos habían sido relacionados por Platón en su *Timeo*, con los cuatro elementos de los que surgió la naturaleza: fuego, aire, tierra y agua, (el elemento que falta en esta relación es la quintaesencia, de la que partieron los otros cuatro), y con la proporción áurea. Luca Pacioli, más tarde, retoma esta idea en su *Divina Proporción:* "el dodecaedro... que el antiguo Platón en su *Timeo* denominaba con la misma expresión de quintaesencia. Sin esta proporción no se pueden obtener los cinco cuerpos regulares, de los que el más complejo es el quinto";[5] y desarrolla en varios capítulos de su tratado la dependencia que tienen estos cuerpos de la proporción divina para su construcción.

Una de las características de estos cuerpos es la inclusión de cada uno en el siguiente hasta el punto de que el último (el dodecaedro o la esfera) los contiene a todos (fig. 12).

FIGURA 12: Los cinco poliedros inscritos uno dentro del otro.



Como el dodecaedro y el icosaedro son las ampliaciones en el espacio del pentágono regular encontraremos también en ellos la sección áurea como razón esencial. Idéntica observación se aplica a los dos dodecaedros estrellados que se obtienen prolongando las caras del icosaedro y el dodecaedro, y que constituyen la ampliación en el espacio del pentagrama.

[5] op.cit.: La Divina Proporción

Otras relaciones de estos cuerpos con la sección áurea, las encontramos al intentar transformar, uno de estos cinco poliedros en cualquiera de los otros:

✗Los vértices de un cubo, son los vértices de un tetraedro regular.

✗Los puntos medios de los lados de un tetraedro regular son los vértices de un octaedro regular.

✗Los veinte vértices de un dodecaerdo son los vértices de cinco tetraedros regulares.

✗Un grupo de cinco cubos puede dar los veinte vértices del dodecaedro.

✗Los doce vértices de un icosaedro están sobre la superficie de un cubo, la razón entre la arista del cubo y la del icosaedro inscrito es Φ.

✗Al prolongar las aristas de un dodecaedro, los puntos de intersección son los doce vértices de un icosaedro, la razón entre la arista del icosaedro envolvente y la del dodecaedro generador es Φ^2.

✗Al prolongar las aristas de un icosaedro, se obtienen los vértices de un dodecaedro, la razón entre la arista del dodecaedro envolvente y la del dodecaedro generador es Φ.

Además de estos cuerpos platónicos, existen otros trece cuerpos igualmente inscriptibles en una esfera llamados arquimedianos. Cada uno tiene por caras polígonos regulares de aristas iguales, pero de dos especies distintas. Once de ellos pueden obtenerse de manera muy simple partiendo de los cinco platónicos: el octaedro y el cubo dan el cuboctaedro, el dodecaedro y el icosaedro producen el triakontágono, etc.

II.4.1. Redes en el espacio

El cubo es el único poliedro regular que puede llenar el espacio sin dejar huecos entre sí, pero la red que forma no es isótropa, como tampoco lo es la partición del plano en cuadrados. La trama espacial con propiedades isótropas más compacta de todas es la formada por esferas. Al igual que en el plano se pueden obtener partiendo de una circunferencia, otras seis circunferencias tangentes entre sí y a la primera cuyos centros son los vértices del hexágono regular inscriptible en dicha circunferencia(como veíamos en las redes anteriores), se pueden colocar en el espacio, fuera de una esfera, doce esferas iguales tangentes entre sí y a la primera, con sus centros en los doce vértices de un cuboctaedro. La propiedad que le confiere a dicho poliedro tener primacía en redes isotrópicas y agrupaciones de esferas tangentes, es al igual que en el caso del hexágono, tener su lado igual al radio de la circunferencia que lo circunscribe.

II.5. SUESIÓN DE FIBONACCI

Leonardo Fibonacci, nace en Pisa en torno al 1170 y muere en el 1240 presumiblemente en el mismo lugar. Viajó por Egipto, Siria, Grecia y Sicilia; en donde conoció la matemática empleada en estas regiones. De todas sus obras, la más conocida *Liber abacci* (1228), es un compendio de todos los conocimientos de aritmética y álgebra que adquirió en sus viajes y que han tenido una función fundamental en el desarrollo de la matemática en Europa Occidental y en particular en la numeración indo-arábiga, que remplazó a la latina y fue conocida en Europa a través de este libro. Pero lo que ha recordado desde entonces a este matemático italiano, ha sido una sucesión de números a la que se le ha dado el nombre de Serie de Fibonacci y sobre la que ahora hablaremos.

Fibonacci llegó a descubrir esta sucesión de números estudiando la evolución de una pareja de conejos. Retomemos ahora el problema al que se enfrentó Leonardo: la pareja de conejos A concibe cada mes y a partir del segundo una nueva pareja, que a su vez será productiva a sus dos meses de vida. Se inicia el experimento en su primer mes con una pareja de conejos recién nacida (anotamos el número 1). En el segundo mes seguimos todavía con una única pareja (anotamos de nuevo el número 1). En el tercer mes nace una pareja B (anotamos el número 2). Al siguiente mes la pareja A ha generado una C mientras que la B no ha procreado (anotamos el número 3). Pasado otro mes, las dos primeras parejas generan otras dos (D y E), mientras que la tercera no tiene hijos (anotamos el 5).

Por tanto, tenemos la sucesión de números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144..., que es la famosa sucesión de Fibonacci.

Esta es una sucesión recurrente de orden 2, cada uno de los términos de la sucesión se obtiene como suma de los dos anteriores. En consecuencia fijados los dos primeros términos, ésta queda totalmente determinada.

$U_1=1$

$U_2=1$

$U_3=2$

$U_4=3$

$U_5=5$

$U_6=8$

.

.

.

El concepto de sucesión recurrente generaliza los de progresión aritmética y progresión geométrica.

A toda ecuación recurrente de orden K le corresponde una ecuación algebraica de grado K, tal que toda raíz de ésta, es razón de una progresión geométrica que verifica la ecuación recurrente.

En este caso la ecuación recurrente es:

$$U_N = U_{N-1} + U_{N+2}$$

y la ecuación característica:

$$L^2 = L + 1$$

y sus dos raíces son:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Estas son las raíces de la ecuación, que por tanto son razón de una progresión geométrica que verifique la ecuación recurrente. Si nos fijamos en las raíces, vemos que:

α = 1,6180

β = 0,618

α es el número de oro, y β una parte proporcional de éste; $\alpha = \Phi =$ la razón de la progresión geométrica $\Phi^2 = \Phi + 1$, o lo que es lo mismo, $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$, que verifican la ecuación recurrente anterior. Por tanto, la razón de dos términos consecutivos de la serie de Fibonacci tiende hacia un límite, que es precisamente, el número de oro. Cuanto más avanzamos en esta serie, al calcular su razón, más próxima está ésta del número de oro.

El término general de la sucesión de Fibonacci es: $U_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$, para determinar los coeficientes A y B, tomamos n =1 y n =2 y obtenemos como resultado:

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

Por tanto,

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Podemos resumir este apartado con la siguiente notación:

SUCESIÓN DE FIBONACCI

$$\Phi = \lim_{n\to\infty}\left({U_n}/{U_{n-1}} \right)$$

II.6. RECTÁNGULO ÁUREO

Los rectángulos cuya razón de lados es un número entero o fraccionario son llamados "estáticos", y aquellos en los que esta razón es un número inconmensurable se llaman "dinámicos". De estos últimos nos ocuparemos aquí.

El rectángulo Φ o rectángulo áureo es aquel dinámico cuya razón de lados es el número de oro; en la figura 14 el AFCK.

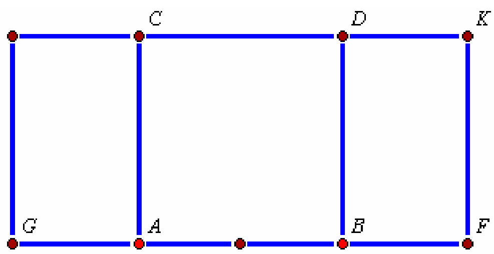


FIGURA 14: Rectángulo Φ y rectángulo

Si calculamos la media y extrema razón del segmento AF, y añadimos la longitud BF=GA al lado mayor del rectángulo obtenemos otro rectángulo dinámico, muy usado en arte conocido como "rectángulo $\sqrt{5}$". Tanto del rectángulo Φ, como el $\sqrt{5}$ podemos obtener composiciones armónicas más o menos complicadas que son -como más tarde veremos- el modelo de planos de templos, de alzados en fachadas de iglesias o la trama geométrica sobre la que se estructuran muchos cuadros. Estas composiciones áureas rectangulares las vemos en la fig.15.

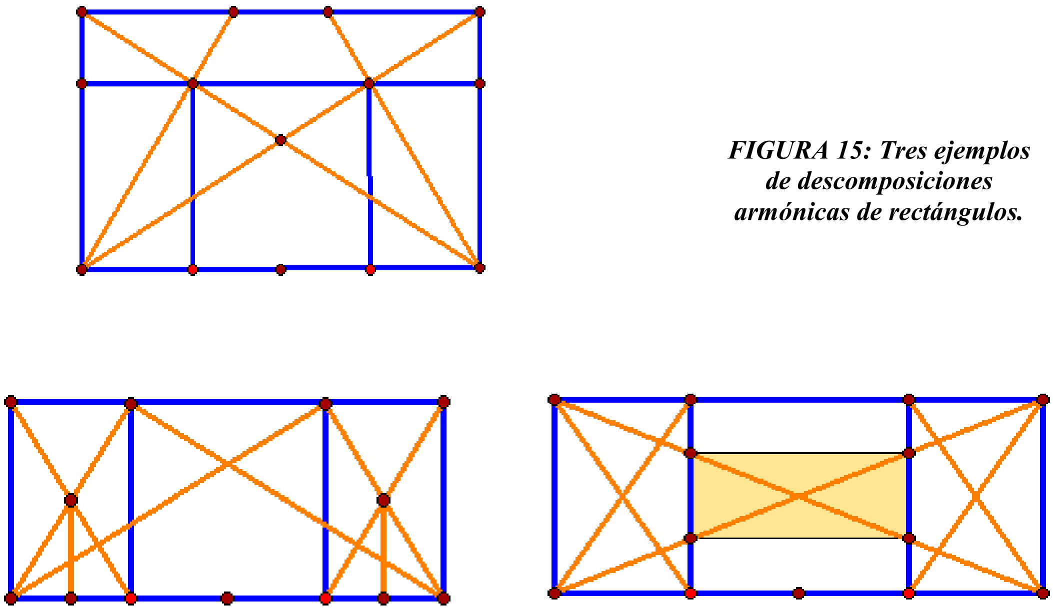


FIGURA 15: Tres ejemplos de descomposiciones armónicas de rectángulos.

Hemos visto en la fig.14, como partiendo de un rectángulo áureo, al trazar dentro de él un cuadrado de lado el menor del rectángulo, obtenemos otro rectángulo áureo del que podemos volver a obtener un cuadrado y un rectángulo Φ menor y así trazar rectángulos áureos hasta el infinito. También podemos tomar esta propiedad a la inversa y añadir al lado mayor del rectángulo áureo un cuadrado de ese lado, y obtendremos así rectángulos cada vez mayores. Así vemos que Φ es un armónico natural capaz de regenerarse a sí mismo y de crear formas geométricas estables como ocurría con el pentágono (fig. 16).

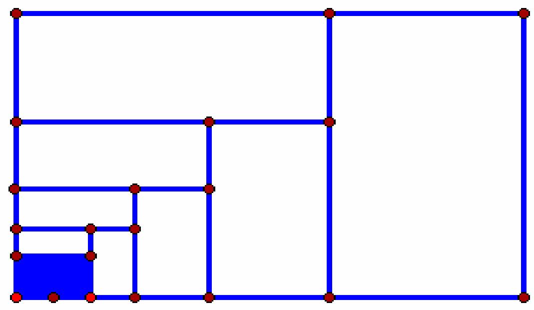


FIGURA 16: Descomposición armónica de un rectángulo áureo.

En la figura anterior vemos como la base de cada rectángulo es la suma de la base y la altura del rectángulo anterior, y la altura es la base de dicho rectángulo. Como consecuencia, podemos aproximar esta sucesión de rectángulos a una sucesión de Fibonacci en la que se tiende a un rectángulo en proporción áurea.

Es interesante destacar aquí la descomposición armónica que Jay Hambidge hace del rectángulo Φ (fig.17).

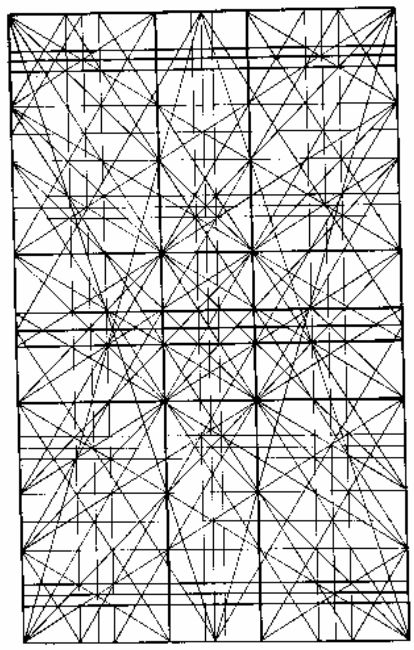


FIGURA 17: Rectángulo phi. Descomposición armónica

II.7. ESPIRALES ÁUREAS

Ya hemos visto como existen formas geométricas que recurren una y otra vez formando “nidos” armoniosos de crecimiento constante Φ. Algunas de estas formas generan espirales que están por lo tanto en la misma relación Φ. Partiendo de que toda espiral logarítmica está caracterizada por una progresión geométrica, podemos asegurar que de la serie: 1,Φ, Φ^2, Φ^3,... obtendremos una de estas espirales, que tienen como pulsación radial, diametral, o cuadrantal al número áureo.

Entre las espirales logarítmicas destacamos la de la figura 18, con pulsación cuadrantal =Φ, con pulsación diametral =Φ^2 y con pulsación radial =Φ^4. El rectángulo director de dicha espiral es de módulo Φ. Al ser la razón de crecimiento de este rectángulo igual a Φ, los módulos de los rectángulos crecientes así obtenidos son los elementos de la sucesión de Fibonacci. También la de la figura 19, espiral formada por sucesivos triángulos isósceles del tipo 72°-72°-36°, aquellos que estudiábamos en la figura 7.

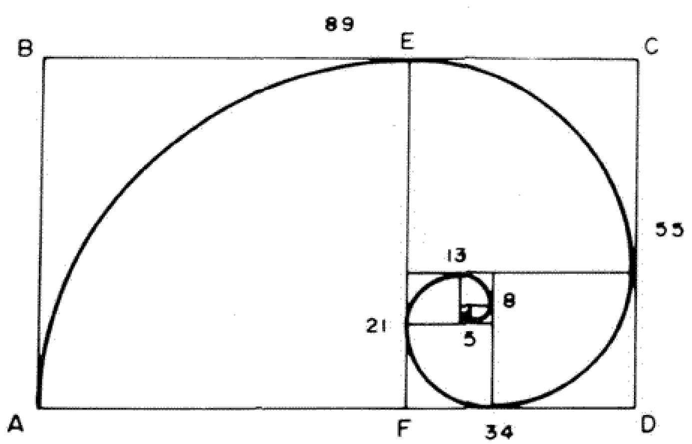


FIGURA 18: Espiral logarítmica y correspondencias con la serie de Fibonacci

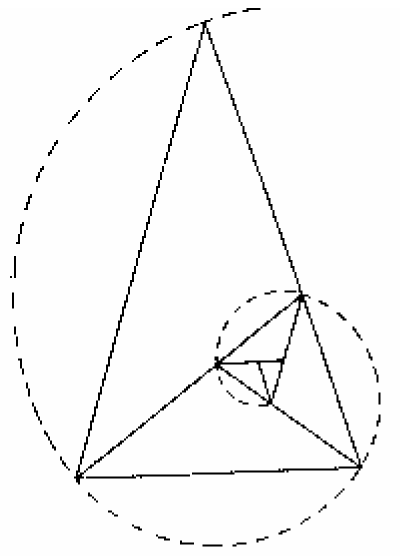


FIGURA 19: Espiral derivada de triángulos isósceles

La espiral de la fig. 18 es el patrón de las formas de la naturaleza, patrón de los seres vivos. Una galaxia o una flor se desenvuelven en intervalos de Fibonacci, creando una de estas espirales.

III. SECIÓN ÁUREA EN MÚSICA

He creído conveniente comenzar el estudio por la música, dado que, muchas de las obras pictóricas y arquitectónicas que más tarde veremos basan sus proporciones en relaciones musicales, a su vez basadas en relaciones áureas. Conociendo estas relaciones de antemano, se facilita la visión, comprensión y descomposición de las obras para su estudio.

III.1. ARMONÍA PITAGÓRICA: "TODO ES NÚMERO

La particularidad del sistema pitagórico fue encontrar en las matemáticas una clave para resolver el enigma del Universo y en el número, el principio de todas las cosas. Las teorías en torno a la música ocupan un puesto de especial importancia para esta escuela pitagórica; mantenía una posición central dentro de la metafísica y la cosmología pitagóricos.

Las matemáticas y la música se unen en el concepto pitagórico de "armonía", que significa proporción de las partes de un todo. Los pitagóricos se guiaron siempre en sus investigaciones por el principio de que la música debía ser reconducida hasta las proporciones más simples, ya que debía reflejar en todo la armonía universal.

Pitágoras descubrió la resonancia de una cuerda tensa, y también que los sonidos obtenidos corresponden a las diferentes fracciones de la cuerda; en consecuencia, estos hechos se pueden reducir a relaciones de números enteros y la armonía tiene un aspecto matemático. Según la leyenda, Pitágoras descubrió la armonía al escuchar el sonido de martillos provenientes de diferentes yunques en el taller de un herrero. El peso de estos martillos se correspondía con los números 12, 9, 8, 6; el peso del cuarto martillo daría el tono, y el del primer martillo, que era el doble del menor, daba la octava. El peso de los otros dos, que son las media aritmética y armónica de los dos anteriores darían la quinta y la cuarta. Llevadas estas proporciones a un monocordio vemos que el tono o nota base lo da el sonido de la cuerda entera, es lo que se llamaba **unísono,** si la cuerda tiene la mitad de la longitud original suena una octava más alta que la anterior, la proporción 1/2, que produce el mismo sonido que la cuerda entera solo que más agudo se llama *octava* (DO-DO) porque se llega a él a través de ocho intervalos de la escala, ocho notas, ocho teclas blancas del teclado; a esta proporción llamaban los griegos **diapasón**. Si su longitud son 2/3 de la primera, la cuerda emite la quinta de la nota base, la proporción 2/3 se llamó **diapente**, denominada hoy *quinta* (DO-SOL) pues se llega a ella a través de cinco intervalos. Por último, si su longitud son 3/4 de la primitiva, la nota que suena es la cuarta de la base, a la proporción 3/4 se le llamó **diatésaron,** conocida ahora como *cuarta* (DO-FA) con cuatro intervalos.

DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI-DO

1/2 3/4 2/3

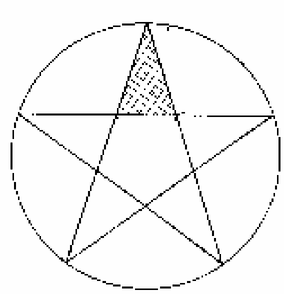
Los pitagóricos atribuían a las distancias entre los astros, relaciones análogas a las de las longitudes de las cuerdas vibrantes que dan las notas características de los modos musicales; es lo que ellos denominaban la armonía de las esferas. Platón retomó las ideas de que la materia y el mundo están organizados según estructuras matemáticas producidas explícitamente como análogas a estructuras musicales. Bajo la influencia de Platón, la Edad Media y el Renacimiento concedieron una gran importancia a esta "música mundana", armonía del mundo.

Los primeros teóricos de los siglos VIII y IX se hayan muy ligados a los principios del mundo antiguo. San Agustín en su tratado *De Música* daba un contenido preciso a su fórmula: "la música es la ciencia de la modulación justa...". Se retoma en esta época de la tradición pitagórica la relación entre el movimiento de los cielos, la música y el número, entre los que reina la máxima concordancia. La belleza de tipo matemático-musical, por la cual se rige el mundo, principio pitagórico-platónico, representa una de los puntos cardinales de todo el pensamiento medieval.

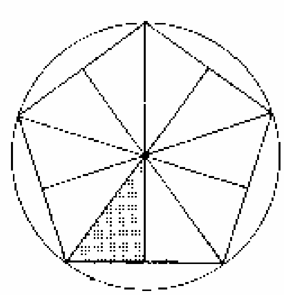
III.2. DIAPASÓN, DIAPENTE, DIATÉSARON Y SECCIÓN ÁUREA

El hecho de que el símbolo de la Escuela Pitagórica fuese el pentagrama hace pensar que los pitagóricos ya conocían sus armonías numéricas y geométricas y por lo tanto que conocían la razón áurea, aunque la primera referencia escrita sobre ésta sea obra de Euclides. Otro hecho que nos aproxima al conocimiento de números inconmensurables por parte de los pitagóricos es el famoso teorema de Pitágoras sobre el triángulo 3-4-5, que como ya vimos en la fig.5 tenía proporciones próximas a las áureas. Veamos ahora las relaciones reales que existen entre el número de oro y las proporciones musicales.

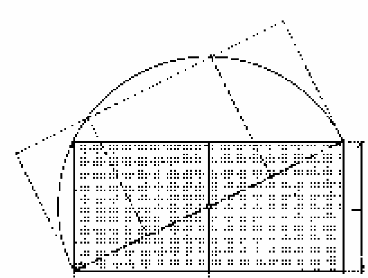
La proporción 2/3 = 0.666 del diapente es una aproximación cercana a la proporción 0.618… de la sección áurea. El diatésaron es idéntico a la proporción 3/4 del triángulo de Pitágoras. El diapasón, tiene la proporción 1/2 = 0.5 de un rectángulo compuesto por dos cuadrados iguales y una diagonal de √5, o lo que es lo mismo, la proporción mayor de un segmento áureo con la porción menor a ambos lados.



DIAPENTE: se aproxima a los lados del pentágrafo.



DIATÉSSARON: corresponde s la proporción 3/4 de un triángulo 3-4-5.



DIAPASÓN: corresponde a un rectángulo recíproco o rectángulo√5.

Si nos fijamos en el teclado de un piano, reconoceremos sus proporciones armoniosas y áureas: hay 8 teclas blancas, 5 teclas negras y ellas aparecen en grupos de 2 y de 3. La serie 2/3/5/8 es, por supuesto, el comienzo de la serie de Fibonacci, y las proporciones de todos esos números gravitan hacia la proporción irracional y perfectamente recíproca de 0.618 de la sección áurea.

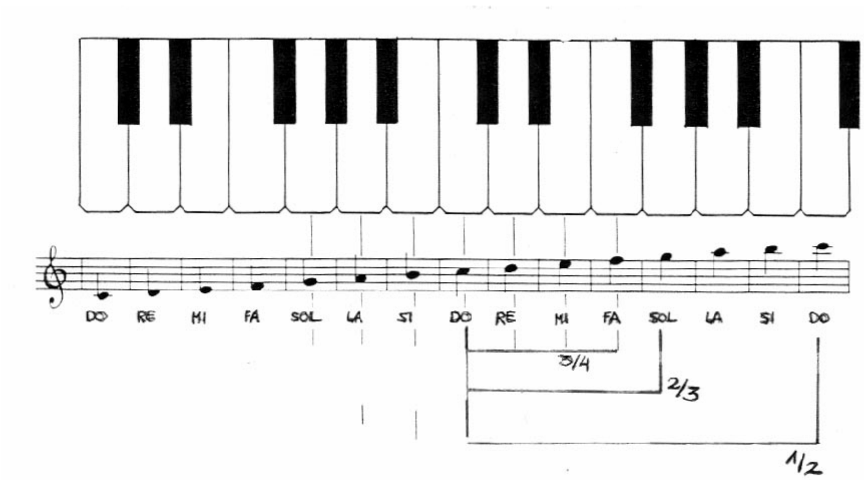


FIGURA 20: Armonías musicales fundamentales de las cuerdas vibrantes y percutibles(teclados).

Las proporciones 1/2, 2/3 y 3/4 reaparecen en los primeros y más fuertes armónicos, también llamados parciales o componentes, que reverberan dentro de cada sonido musical, combinándose con el fundamental, como si simultáneamente se pulsaran más cuerdas invisibles, que acompañan y complementan el sonido fundamental. Esta unión dinergética de la armonía y el sonido fundamental es lo que da a los sonidos musicales plenitud, vitalidad y belleza –se lo llama timbre- y lo que los distingue del mero ruido.

Las dos modalidades principales de las escalas occidentales, la menor (considerada triste) y la mayor (asociada con la brillantez) difieren una de otra únicamente en la longitud de los pasos entre ciertos intervalos, tal como las partes menor y mayor de la sección áurea difieren entre sí sólo por sus longitudes. Y tal como la unión de las partes menor y mayor nos deleita en las armonías visuales de la sección áurea, así también la unión de las escalas menor y mayor, llamada modulación, nos encanta cuando la oímos en acordes y melodías.

Tanto la escala menor como la mayor tienen, cada una, sus propias variantes –llamadas dominantes y subdominantes- con sus propios conjuntos de acordes: y la relación de éstos con sus contrapartidas tónicas se ajusta nuevamente a las proporciones antes mencionadas. La dominante es el intervalo de quinta desde la nota clave (la primera nota de la escala) y la subdominante, el de cuarta.

El poder de la sección áurea para crear armonía surge de su exclusiva capacidad de aunar las diferentes partes de un todo de modo que, conservando cada una su propia identidad, las combina no obstante en el patrón mayor de un todo único. El cociente de la sección áurea es un número irracional e infinito que sólo puede ser aproximado y, sin embargo, tales aproximaciones son posibles incluso dentro de los límites de los números enteros mínimos.

III.3. MÚSICA Y DEMÁS ARTES

La relación de la música con las demás artes es indiscutible, muchos han llegado a decir que es de ésta de dónde parten todas las demás; pero no trataremos aquí este tema sino que nos centraremos en aspectos más particulares de esta relación, como son: el estudio de las proporciones de la música(recordemos que se trataba de proporciones áureas) y su uso en dos artes concretas, la Pintura y la Arquitectura.

Como sabemos, el Renacimiento es un retorno a lo clásico y es precisamente en este ambiente donde encontramos a los artistas más representativos en esta "musicalización" de las artes.

Leonardo da Vinci(1452-1519) describió su arte en términos musicales diciendo que la percepción simultánea de todas las partes integrantes de una pintura crea una armonía concordante que, para el ojo, es una sensación equivalente a aquella experimentada por el oído cuando escucha la música.

Leon Bautista Alberti(1404-1472), arquitecto renacentista, afirmó que una proporción armoniosa en el diseño arquitectónico era aquella que, expresada como una armonía musical, condujese a una concordancia agradable. En el capítulo V de su tratado de arquitectura *De re aedificatoria* explica como los intervalos musicales agradables al oído son los intervalos de cuerda del diapasón, diapente y diatesarón, y hace una descripción de las proporcione más usadas para distribuir superficies en función de estas relaciones que resumimos en la tabla 1.

TABLA 1

SUPERFÍCIE SESQUILÁTERA...........................	2/3
SUPERFÍCIE SESQUITERCIA............................	3/4
SUPERFÍCIE DOBLE	1/2
SUPERFÍCIE SESQUILÁTERA DOBLE..............	4/6/9
SUPERFÍCIE SESQUITERCIA DOBLE...............	9/12/16
SUPERFÍCIE DIAPASÓN-DIAPENTE.................	3/6/9
SUPERFÍCIE DIAPASON-DIATESARON............	3/6/8

Los artistas del renacimiento tomaron al pie de la letra el texto de Alberti, y utilizaron los números que éste proponía en las proporciones de sus obras. Pongamos algunos ejemplos típicos de Albertismo típicos en la pintura.

Empezamos por *El Parnaso* de Mantegna(1431-1506), donde el autor se ciñe a las relaciones musicales 9/12/16. La cesura 9 que parte de la derecha sirve para situar a Venus y Marte en la parte superior y orientar el movimiento de las piernas de las Musas en la inferior(fig.21).

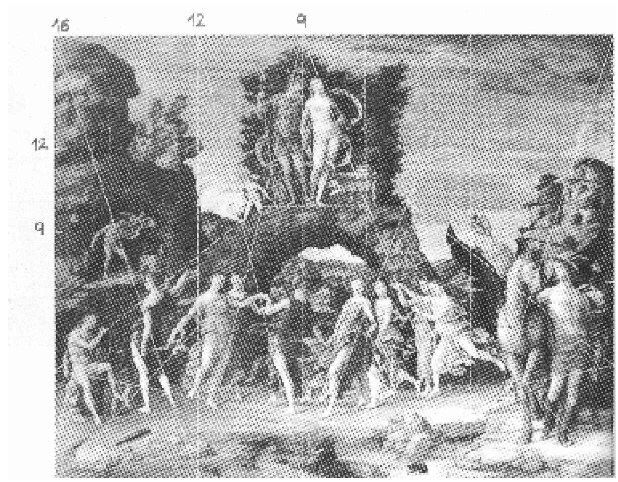


FIGURA 21: El Parnaso (Mantegna).

Botticelli(1444-1510) es la personalidad más famosa de este ambiente, comencemos analizando *La Primavera*, (fig.22) su trazado es simétrico en apariencia pero no en la realidad, Venus no ocupa el centro del cuadro y las damas que rodean a ésta se acomodan perfectamente a una proporción 4/6/9 del doble diapente, los grupos que rodean a la gran dama se acomodan a esta proporción. Señalemos que cada división del cuadro comporta tantos personajes como unidades.

FIGURA 22: La Primavera (Botticelli).

El resto de artistas de esta generación empleó estos mismos cortes verticales introducidos también en la pintura religiosa. Por hombres como Ghirlandaio(1449-1494), en el fresco de *La Natividad de la Virgen* de Santa María Novella utiliza la proporción 2/3; dibuja un cuadrado a la derecha y el corte musical del panel fija el lugar del personaje principal(fig.23).

FIGURA 23: La Natividad (Ghirlandaio).

En los frescos de Masaccio(1401-1428), de tan honda religiosidad, el personaje principal ocupa el lugar de honor que marca la cesura. Así, en *El Tributo de San Pedro* se sitúa en los 4/9 del ancho total. Nótese que Masaccio utilizaba estas proporciones para guiar sus cuadros treinta años antes de que Alberti escribiera su tratado(fig.24).

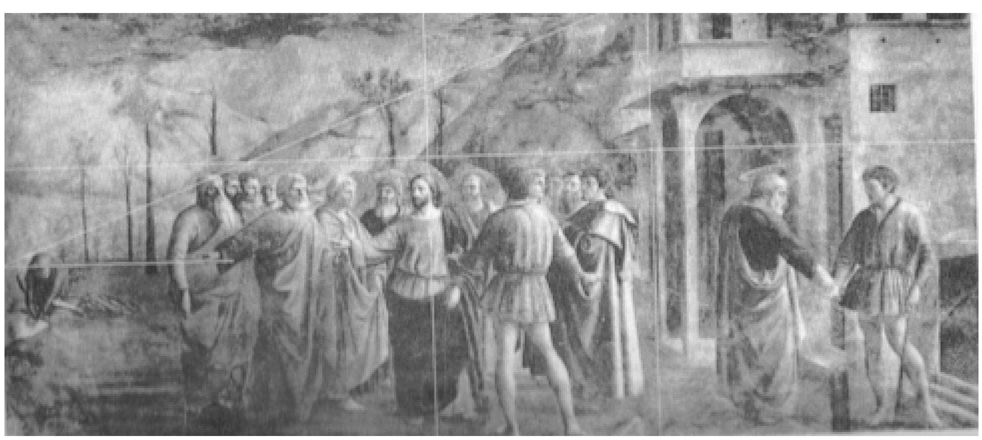


FIGURA 24: Tributo de San Pedro (Masaccio).

La distribución que hace Benozzo Gozzoli(1420-1497) en *Los Reyes Magos*(fig.25) no puede ser más evidente: la composición está dividida por la mitad y los caballeros se sitúan a igual distancia de este eje. Estamos pues ante la división de la octava en quinta y en cuarta.

FIGURA 25: Los Reyes Magos(Gozzoli)

No hemos nombrado aún a Piero della Francesca(1416-1492) y a Rafael(1483-1520), dos de los maestros del Renacimiento. El primero es la expresión estética de Alberti llevada a su máxima radicalidad; en *La Flagelación*(fig.26) superpone los esquemas de la arquitectura y de la perspectiva que vienen determinados por la proyección de los lados menores, resulta chocante su iconografía de tres personajes secundarios situados en primer plano, mientras que a Cristo, más alejado, lo distinguimos difícilmente. La tela está cortada según el doble diapente 4/6/9 este corte insistirá sobre el personaje principal, los 4/9 desde la derecha caen sobre la columna, exactamente sobre el límite de la capa, y los 6/9 sobre el Cristo, las figuras están distribuidas según la relación musical 4/6/9 partiendo de la derecha: 4 marca el limite de los tres personajes en pie, 6 está sobre el Cristo. Estos cortes superponen al rigor de la geometría una sutil armonía.

FIGURA 26: La Flagelación (Piero della Francesca).

El segundo uno de los artistas que representa mejor que nadie la perfección de lo clásico, conoce las ideas de su tiempo, la prueba de que las conocía y de que entendía su alcance, es el lugar eminente que les da en la obra *La Escuela de Atenas*(fig. 27) En el ángulo izquierdo, Pitágoras escribe sobre un libro; a su lado, otros dos filósofos observan con atención una pizarra que un joven sostiene ante su maestro. Sobre esta pizarra está precisamente escrito el diagrama de las consonancias musicales con las indicaciones en griego: tono, diatesarón, diapente, diapasón. El propio fresco está compuesto sobre el diatesarón: sobre la relación 3/4.

FIGURA 27: Detalle de Escuela de Atenas(Rafael).

Entre los grandes artistas de la segunda mitad del XVI y de principios del XVII, el conocimiento de las proporciones musicales parece más o menos claro, peor su empleo se hace ocasional. Veamos algunos ejemplos:

La *Presentación de la Virgen en el Templo*(fig.28) de Tiziano, la situación de la niña se rige por las proporciones musicales: a lo ancho en la 12 de 9/12/16 y a lo alto entre los límites 9 y 12 de la misma proporción. *Las Bacanales* del mismo autor están agrupadas con toda exactitud y dispuestas sobre las líneas que unen los puntos 4/6/9 tomados sobre los lados del rectángulo. La *Resurrección de Cristo* que tanto debe a Piero della Francesca, está compuesta en 9/12/16.

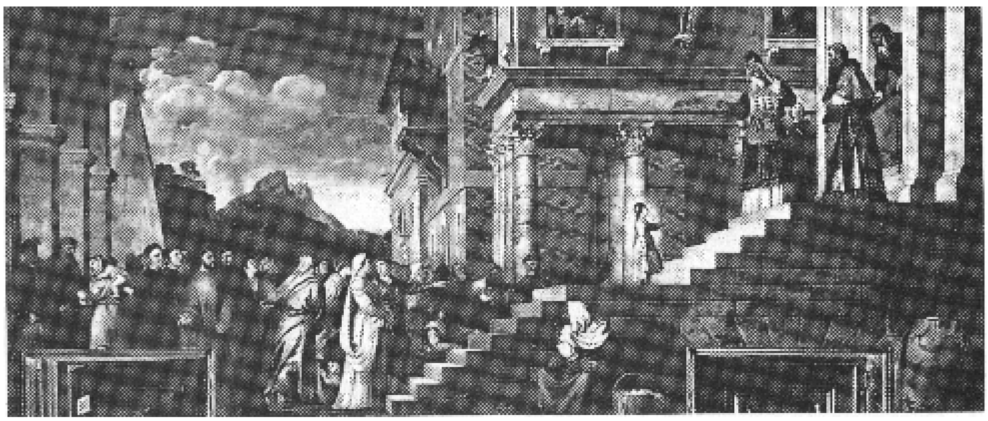


FIGURA 28: Presentación de la Virgen en el Templo(Tiziano).

Otra obra de Tiziano es *Baco y Ariadna*. Relación 4/6/9. Baco está sobre la cesura 4 partiendo de la izquierda. La misma cesura, partiendo desde arriba, establece la altura de los personajes. La cesura vertical 6 determina la situación del tronco del árbol, la oblicua partiendo desde la parte alta de la cesura 4 hacia el ángulo inferior izquierdo rige la pierna de Ariadna y la dirección de su movimiento; la oblicua que parte del vértice superior derecho y se una a la cesura 6 horizontal establece el movimiento de Baco hacia Ariadna así como el movimiento sobresaltado de ésta(fig.29).

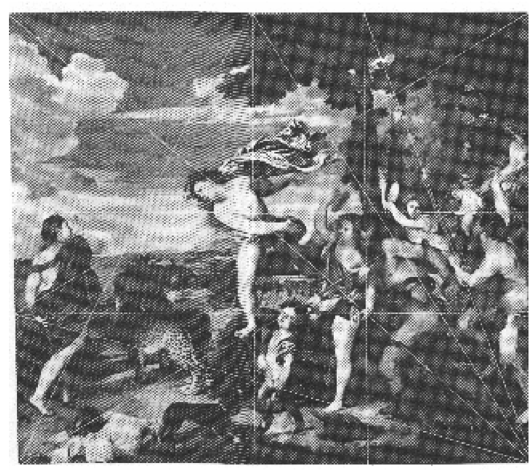


FIGURA 29: Baco y Ariadna (Tiziano).

Tintoretto(1477-1576) emplea en varias ocasiones esta relación: por ejemplo en el *Cristo en el limbo* y *La Serpiente de bronce*.

Veronés(1528-1588), gran amigo de Palladio, asimila sus composiciones arquitectónicas en su obra, dando preferencia a la relación 4/6/9; aunque en algunos de sus retratos emplee otras proporciones como la relación musical 9/12/16 en *Dama y su hijo* y *La Bella Nani*.

Lomazzo(1536-1600) publica en Milán en 1584 su *Tratatto dell'arte della pintura*. La posición de Lomazzo es lo más alejada posible de la estética de Alberti; no obstante Lomazzo habla de las consonancias musicales y cita al gran teórico del pasado. En realidad, sin pasar por la necesidad de explicarlas emplea las expresiones de la terminología musical del *Timeo* que Alberti había puesto de moda.

Poussin(1594-1665) utiliza las relaciones 9/16 tomadas por ejemplo a partir de la izquierda y 4/9 a partir de la derecha, relaciones muy cercanas entre sí y que parecen estar entre sus favoritas. Un hábito común, el de querer resaltar la importancia de un punto haciéndolo coincidir con el punto de fuga de la perspectiva, muchas veces, este punto viene marcado por la proporción áurea y otras por la relación musical, como es el caso del *Rapto de las sabinas* donde el punto de irradiación está sobre la relación 9/16 en las dos dimensiones(fig. 30).

FIGURA 30: El rapto de las Sabinas.

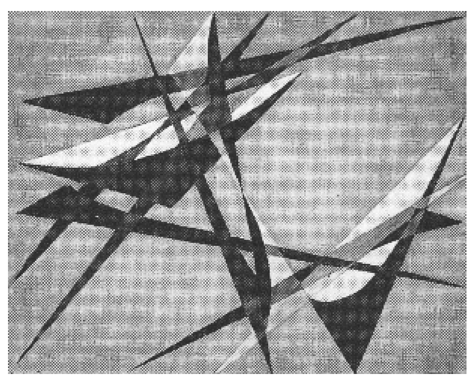
.

Acabamos este periodo hablando de Andrea Palladio(1508-1580), arquitecto italiano del renacimiento tardío, considerado manierista, que ha influido notablemente en la historia de la arquitectura occidental. Estudia a los clásicos como Vitruvio y se guía por un sistema de proporciones musicales al igual que Alberti, consiguiendo así un interesante enlace entre matemáticas, música y arquitectura. Analizaremos algunas de sus obras en el último capítulo.

En el S.XIX, Seurat(1859-1891) defiende la constitución musical de la realidad: "el arte es armonía, la armonía es analogía de los contrarios, la analogía de las semejanzas, del tono, del color, de la línea, considerados a través de la dominante y bajo la influencia de una iluminación en colores alegres, serenas o tristes". Esta definición, dada bajo el título de *Esthétique*, hace pensar en una teoría musical y emplea su lenguaje (dominante). Construyendo un sistema de analogías, Seurat llega a una metodología de líneas y colores que es comparable a la "base cifrada" que conocemos como propia de la música de la gran época de la polifonía, y sus cuadros están compuestos con un rigor igual al de J. S. Bach.

En el S. XX algunos artistas han seguido utilizando las proporciones musicales en sus composiciones. Citemos aquí un cuadro de Charles Bouleau distribuido según las relaciones musicales 9/12/16 (fig.31).

FIGURA 31: Pintura (Charles Bouleau).



IV. SECCIÓN ÁUREA EN ARTE

IV.1. ARTE INDÍGENA AMERICANO

IV.1.1. Artesanía

Recordemos la red formada por varios pentágonos o decágonos regulares similar a una tela de araña, pues bien, los tejedores realizaban su oficio siguiendo un patrón similar. Se han reconstruido dos sombreros hechos artesanalmente por dos tribus indígenas norteamericanas de la región noroeste del pacífico.

El primero(fig.32) es un sombrero tipo cóncavo tejido de corteza de cedro y yuca por los Makah y otros pueblos Nootka. En dicha figura, se muestran cuatro de esas relaciones con construcciones de la sección áurea alrededor de un sombrero alto y de uno bajo.

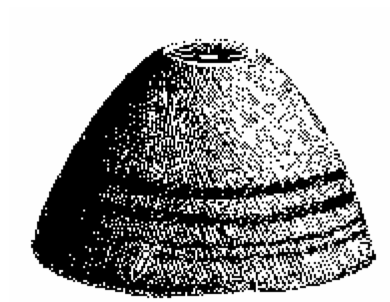
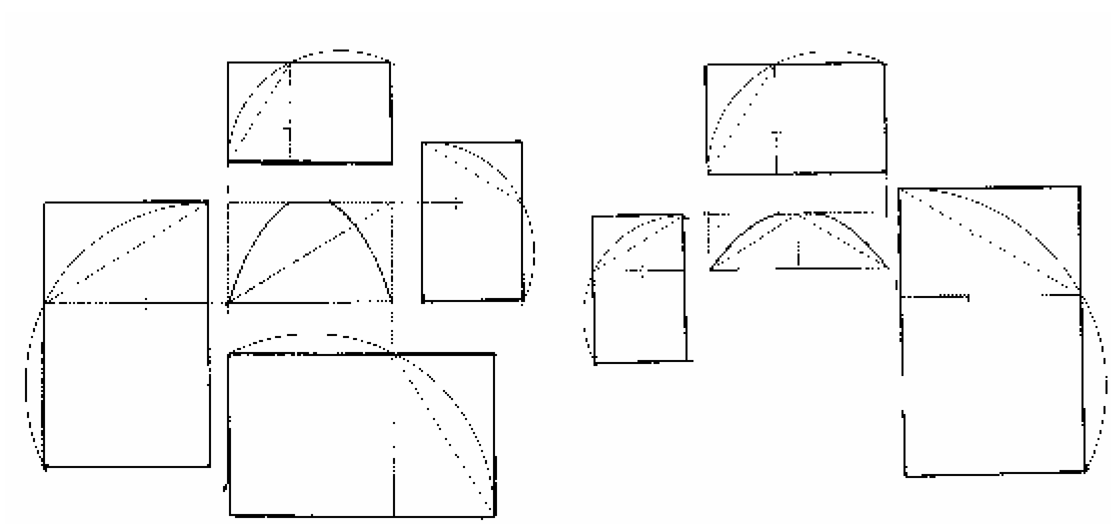
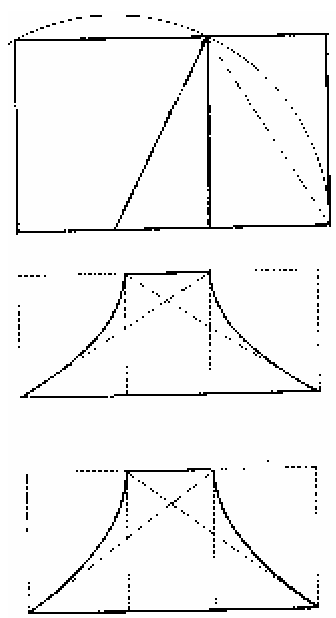


FIGURA 32: Sombrero tipo cóncavo y su descomposición áurea.



El segundo(fig. 33a) es un sombrero convexo de raíces de picea, muy común entre los pueblos TinTinglit, Haida y Kwakiutl. Representamos dos de estos sombreros, el primero, más bajo, tiende a reproducir las proporciones áureas y el segundo, más alto, los 3/4 del triángulo pitagórico. Esto se aprecia en las líneas que conectan los extremos opuestos de los diámetros superiores e inferior y que coinciden –en el primer tipo- con las diagonales de un rectángulo áureo y con la hipotenusa de un triángulo pitagórico en el segundo tipo, la exactitud de estas proporciones se comprueba en el trazado de la sección áurea que se sitúa encima de los dos sombreros.



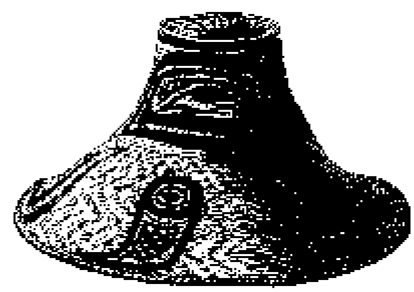


FIGURA 33a: Sombrero tipo convexo y su descomposición áurea.

Las armonías de estos patrones resultan también evidentes en la correspondencia de ambas formas con la estrella pentagonal, donde la segunda forma se encuadra con precisión en los triángulos pitagóricos contenidos en el pentágono central y la primera se alinea con los triángulos de los extremos del pentágrafo(fig.33b).

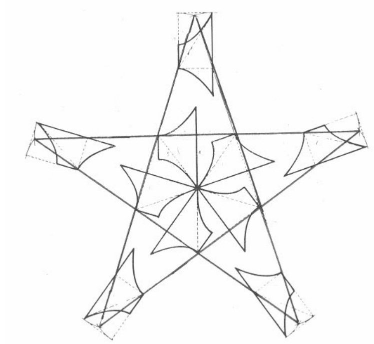


FIGURA 33b: Correspondencias de los sombreros de tipo convexo con formas hexagonales.

Los pueblos indígenas norteamericanos del noroeste muestran la misma preferencia en sus mantas ceremoniales por la proporción de oro, ajustándose a las proporciones tanto en la forma general como en la articulación del diseño. La fig. 34 muestra variantes áureas en el borde de una manta Chilkat. Vemos que la construcción de la sección áurea sobre la manta está formada por un dos rectángulos áureos recíprocos, que conjuntamente generan el rectángulo √5.

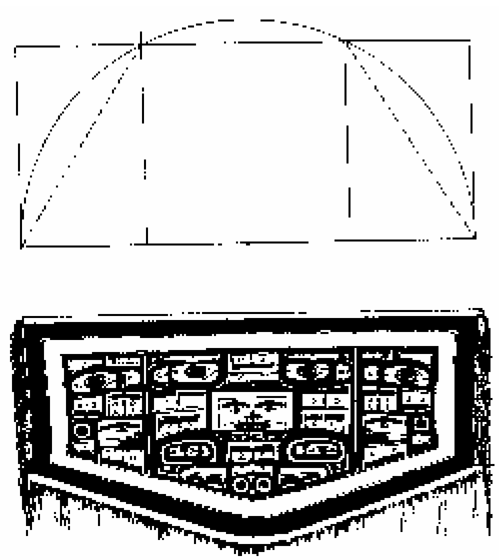


FIGURA 34: Manta Chilkat

Las mismas proporciones se extienden a los detalles de la trama de la manta formada por los característicos ojos u ovoides del arte indígena norteamericano del noroeste. La fig. 35 muestra dos diseños de este tipo encuadrados en rectángulos áureos.

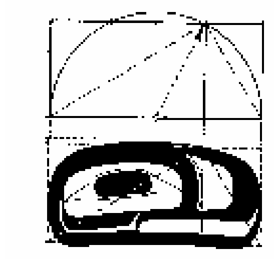
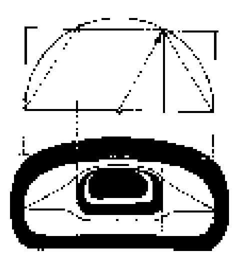



FIGURA 35: Típica cabeza de trucha asalmonada(izq.) y típico diseño de ojo (dcha.).

Las proporciones de éste rectángulo también aparecen en los reiterados diamantes del patrón de un tejido mejicano (fig. 36).

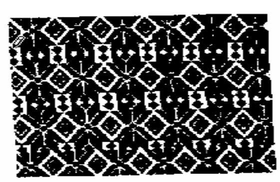
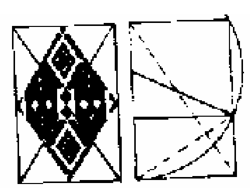
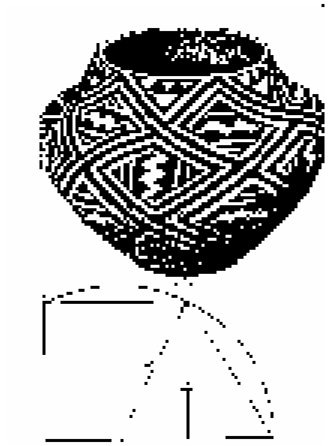



FIGURA 36: Patrón de tejido mejicano

IV.1.2. Cerámica

La fig. 37 es un cuenco de barro cocido de los Acoma. Su forma es común entre las tribus Zuni y Pueblo y se fabrica en diferentes tamaños y proporciones. Vemos el análisis áureo del cuenco compuesto por una parte de la correspondencia de las dimensiones del cuenco con la proporción áurea, y por otra el patrón del dibujo formado por espirales rectangulares, que se mueven en direcciones opuestas formando un trazado armónico.



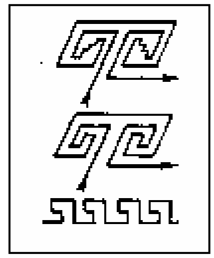


FIGURA 37: Cuenco Acoma decorada con espirales rectangulares.

IV.2. ARTE ORIENTAL

IV.2.1. Artesanía

También podemos ver en el arte oriental, diversas muestras de la utilización de la proporción áurea. En las proporciones de una alfombra prusiana oriental (fig. 38), podemos distinguir el rectángulo de oro tanto en las dimensiones de la alfombra, como en los diamantes del patrón del tejido, como ocurría en la fig. 36 en los patrones del tejido mejicano.

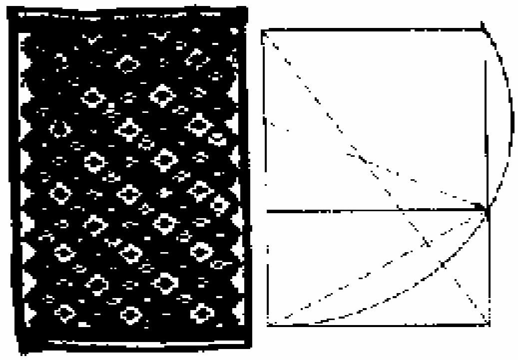
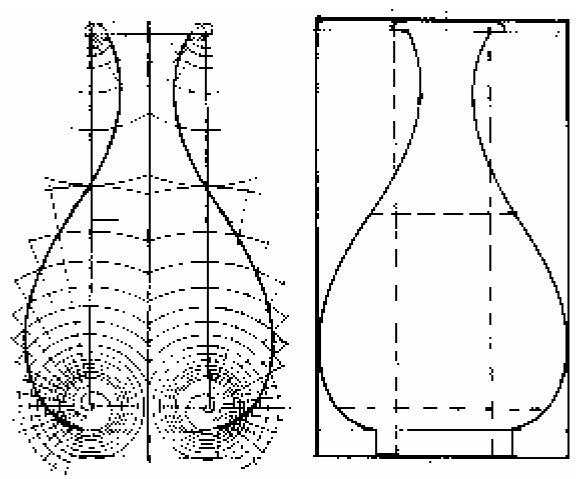


FIGURA 38: Alfombra prusiana

IV.2.2. Cerámica

Pasando ahora al estudio de la célebre cerámica china, la fig. 39 muestra un jarrón chino Lung Chuan, de la dinastía Sung (960-1279 d. C) y su estudio áureo. Esta derivación muestra que los centros de las cuatro espirales logarítmicas, generadoras de contornos, ocupan las esquinas de dos rectángulos de proporciones muy cercanas a las áureas. Podemos comprobarlo dividiendo la anchura de la boca(7,1) entre la altura de los rectángulos(11,5): 7,1/11,5 = 0.617 =0.6178….). La forma completa se encuadra en un rectángulo formado por un cuadrado – que abarca la parte de mayor volumen y la base- y dos rectángulos áureos separados por el eje principal que rige la figura y cuyas alturas corresponden a la del cuello.

FIGURA 39: Jarrón chino Lung Chuang



IV.2.3. Escultura

El canon tibetano para construir la figura de Buda, muestra como se la encuadra entres rectángulos áureos, uno dentro del otro. El rectángulo mayor encierra toda la figura, desde el punto superior de la cabeza hasta la base, incluyendo las rodillas; el rectángulo intermedio, se extiende desde la parte superior de la cabeza hasta las piernas, tocando la mano derecha y el codo; y el rectángulo menor encuadra la cabeza. Aparecen también dos triángulos que van desde el mentón hasta las piernas y dibujan un pentágono central y dentro de él un pentágrafo que apunta al mentón, la cintura y las axilas(Fig.40a).

La figura coreana de bronce de Maitreya, el futuro Buda(fig. 40b), se puede encuadrar en un rectángulo áureo que descansa sobre un cuadrado del mismo ancho, conteniendo este último el asiento y abarcando, el primero, el grueso de la figura.

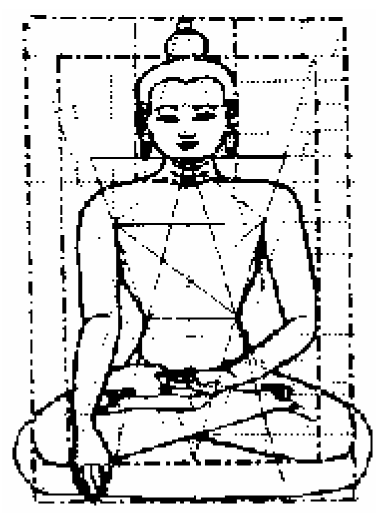


FIGURA 40a: Buda según el canon tibetano.

FIGURA 40b: Buda Maitreya.

IV.3. ARTE EGIPCIO

Una de las obras de arte más importantes de las dos primeras dinastías, es la estela del faraón Vadyi, el Rey Serpiente. Es un relieve calcáreo procedente de Abydos. Mide 1,45 metros y constituye la parte superior de una alta estela que adornaba la puerta del cenotafio de este rey. El rectángulo en que ondea la serpiente está en relación áurea con el cuadrado constituido por el edificio(fig.41).

FIGURA 41: La estela del faraón Vadyi.

IV.4. ARTE GRIEGO

"El placer no es el primero ni el segundo de los bienes, sino que el primero de los bienes consiste en la mesura, en el justo medio, en lo conveniente y en todas las demás cualidades análogas a esas, que debemos considerar dotadas de una naturaleza inmutable[...] Que el segundo de los bienes es la proporción, lo hermoso, lo perfecto, lo que es por sí mismo suficiente, y todo lo que pertenece a este género".[1]

En el mundo clásico son numerosas las muestras de arte creado según la proporción áurea, no en vano, es en le mundo griego donde “nace”, con Pitágoras y sus discípulos, Platón, Euclides, etc., un estudio de dicha proporción. Como ya hemos dicho anteriormente, son los *Elementos* de Euclides la primera fuente escrita de estudio que ha llegado hasta nosotros que trata de esta proporción.

En esta época encontramos ejemplos del uso de ésta en todas las artes, desde la escultura o la arquitectura, hasta la poesía.

IV.4.1. Cerámica

Estudiemos el contorno de una ánfora ática que ilustra la leyenda de Hércules y Pholus. Las proporciones principales, tanto de la altura como del ancho comparten la relación áurea. La fig. 42 presenta el contorno de dicha ánfora y su estudio áureo en altura.

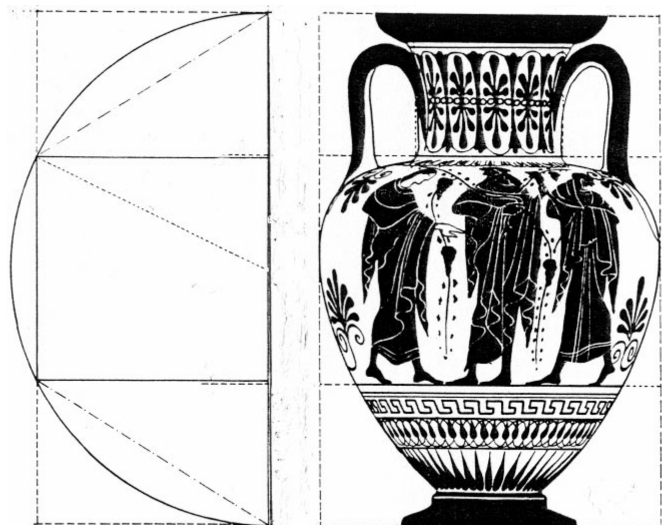


FIGURA 42: Ánfora àtica

Las figuras siguientes nos muestran otros tres ejemplos cerámicos. La primera es una cratera cretense(fig.43a) encuadrada en dos conjuntos de rectángulos áureos recíprocos - √5 de longitud total-, como si tales rectángulos hubiesen rotado conjuntamente alrededor del eje longitudinal de la vasija. Los rectángulos áureos más pequeños contienen los hombros, la cabeza y las asas, y los mayores, la parte más voluminosa. Además, el ancho de la abertura y la altura total comparten la misma relación áurea.

El ánfora cretense (fig. 43b) está contenida en un rectángulo dentro del cual los hombros, la cabeza y las asas se encuadran en el rectángulo áureo reciproco. Las proporciones de los dos rectángulos áureos recíprocos están presentes en la

[1] VVAA: Historia del arte, Ed. Anaya, Madrid, 1986, p 90.

relación del borde con los hombros y en la relación de la base con sus entradas. Por último, en la fig. 43c, se muestra un cántaro minoico contenido en un solo rectángulo áureo.

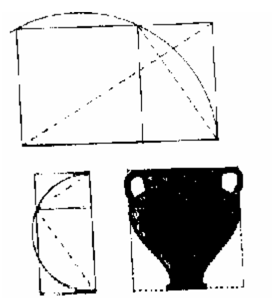


FIGURA 43a:
Cratera cretense

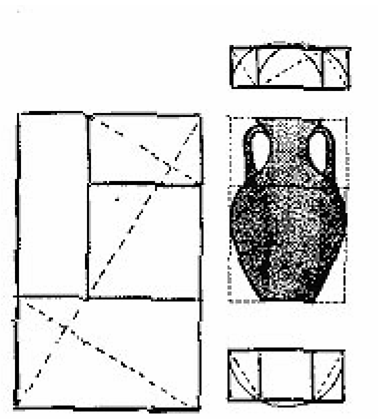


FIGURA 43b:
Ánfora cretense.

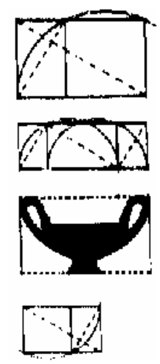


FIGURA 43c:
Cántaro Minoico.

IV.4.2. Escultura

Se otorga en la escultura griega la absoluta primacía a la representación del cuerpo humano. En éste, la belleza se consigue tanto por la perfección formal como por la armonía de sus proporciones, basada en la correspondencia de sus diversas partes. Por otra parte, mediante la actitud, el movimiento o la mirada, el escultor griego expresa el mundo del espíritu. Destacamos a tres grandes escultores: Mirón, Fidias y Políleto.

En Policleto (s.V a.C.), a quien se atribuye la autoria de un célebre tratado sobre las proporciones del cuerpo humano, actualmente perdido, encontramos por vez primera el concepto de belleza basada en el idealismo de proporciones del cuerpo humano como ocurre en dos de sus obras maestras *El Diadúmenos* y *El Portalanza o Doríforo*. Las construcciones de la sección áurea de esta escultura(fig.40) muestran dos conjuntos de rectángulos áureos recíprocos, cada uno de √5 de largo; el conjunto mayor abarca todo el cuerpo, con las rodillas y el pecho en los puntos de la sección áurea; el conjunto menor se extiende desde la parte superior de la cabeza hasta los genitales. El ombligo se encuentra en el punto de la sección áurea de la altura total, los genitales en el punto de 3/4 de la altura hasta el mentón.

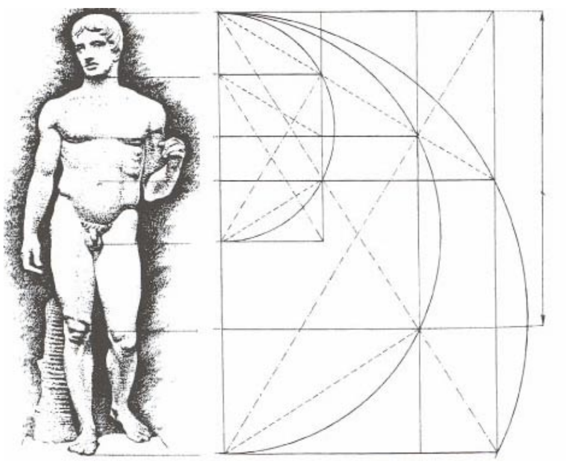
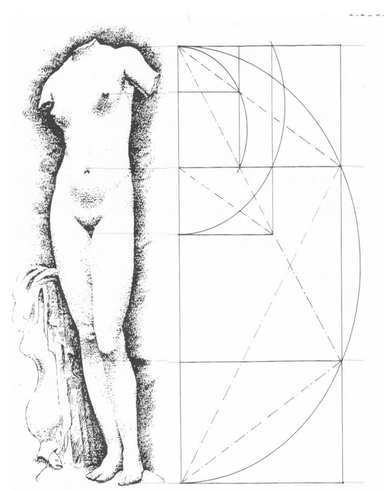


FIGURA 44: Doríforo(Polícleto).

En la Afrodita de Cirene (fig. 45) se pueden reconocer relaciones de longitud igualmente armoniosas, aunque por desgracia se ha perdido la cabeza.

FIGURA 45: Afrodita de Cirene..



Las cabezas de Hipnos, diosa del sueño (fig. 46a) y de Higeia, diosa de la salud y patrona de los pitagóricos (fig.46b), ambas del siglo IV a.C., comparten en miniatura los mismo límites proporcionales que articulan los cuerpos de la Afrodita de Cirene y del Doriforo.

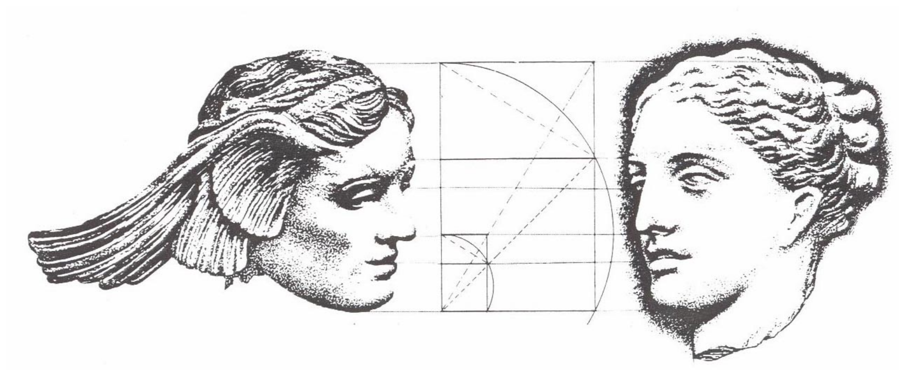


FIGURA 46a: Hipnos *FIGURA 46b: Higeia*

IV.5. ARTE ROMANO

Quizás sea la arquitectura la rama de las artes más desarrollada en Roma, la cual se tratará más tarde. Citamos aquí, a modo de ejemplo, un bajo relieve procedente de una tumba de Neumagen(fig.47) donde un preceptor da clase a sus discípulos. La distribución de los personajes se hace mediante medidas áureas, situándose el preceptor a una distancia Φ en relación a los discípulos sentados a ambos lados del mismo.

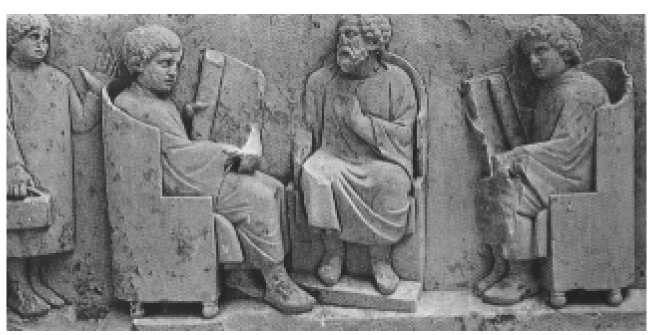


FIGURA 47:Bajorelieve romano

IV.6. ARTE ISLÁMICO

Las muestras del uso de la sección áurea en el arte islámico son muy frecuentes debido a sus característicos entramados poligonales que decoran techumbres, bóvedas, arcos y paredes de sus construcciones arquitectónicas. Tomamos aquí la *Puerta del dormitorio de los Reyes Moros del Alcázar de Sevilla*, edificio de finales del S.XIII, donde se resumen técnicas típicas decorativas del arte hispanoárabe(fig.48). Distinguimos en dicha puerta un entramado de hexágonos regulares, que entrelazados, forman una red que deja en sus interior estrellas hexagonales.

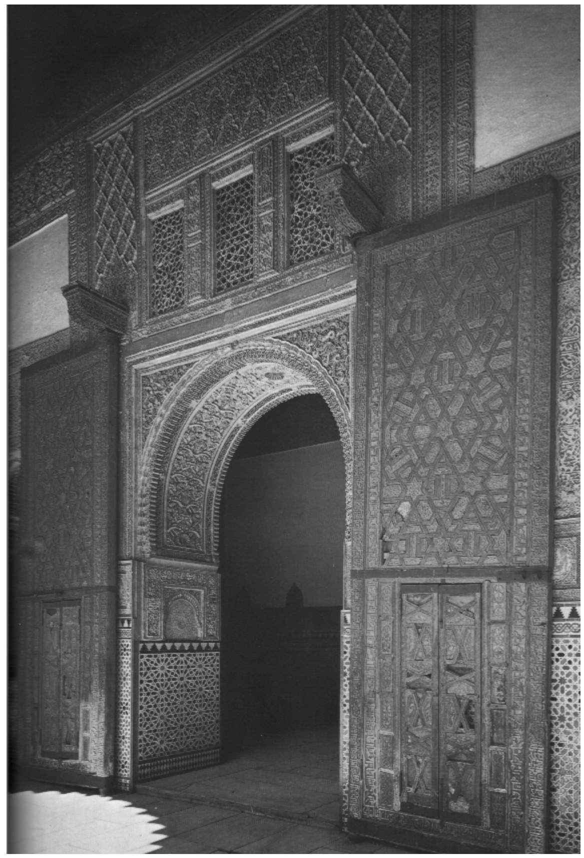


FIGURA 48: Puerta del dormitorio de los Reyes del Alcázar de Sevilla.

IV.7. ARTE GÓTICO

Quizá la primera idea que se nos viene a la cabeza al intentar relacionar este arte con la sección áurea sean las típicas vidrieras, que adornan iglesias y catedrales, y que se forman en su mayor parte por formas geométricas poligonales. Pero no es la única forma artística relacionada con la sección de oro. Pasemos al estudio de algunas obras pictóricas que comparten dicha medida.

IV.7.1. Pintura

El *Salterio de la Capilla Santa,* llamado *Salterio de Blanca de Castilla* es un libro que se sitúa en los primeros años del S. XIII, es representativo del arte gótico. El análisis de dicho libro revela el empleo sistemático de una traza geométrica, basada sobre todo en polígonos regulares y esquemas muy simples, sobre la que se sitúan los sucesos de su iconografía. Entre sus ilustraciones destaquemos una, la del *Astrónomo* (fig. 49).

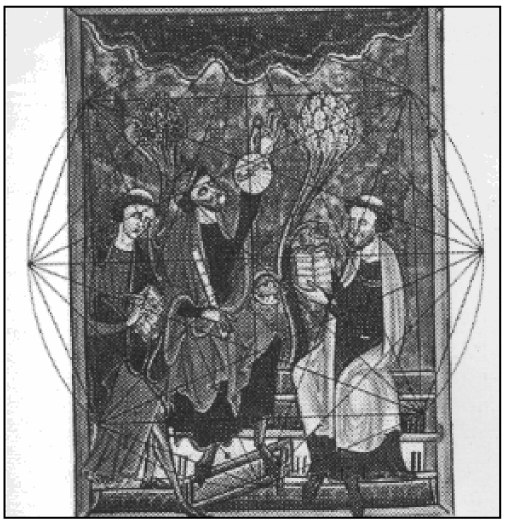


FIGURA 49: Salterio de Blanca de Castilla- El astrónomo y el calculista.

Vemos como el círculo trazado tiene por diámetro el eje mayor de la imagen, el cielo es un arco del mismo radio. El hexágono inscrito en él es el determinante del punto de suspensión del astrolabio, la dirección del rodillo, la altura de los escalones, etc. Ésta misma estructura se repite en la mayoría de las imágenes del libro, tales como la *Creación de Eva.*

En la pintura del S.XV se distinguen dos estilos, el internacional y el flamenco. En el desarrollo del primero, es importante destacar las cortes de Berry y de Borgoña y en particular a los miniaturistas. Nos detenemos ahora en una obra de uno de ellos Paul de Limbour, las *Muy Ricas Horas del duque de Berry*. La vida de Jesús se abre con una representación del *Paraíso terrenal,* (fig.50)imagen de la perfección identificada con el trazado geométrico de la sección áurea, “proporción perfecta”. En relación a su posición en la página del manuscrito, el eje de la fuente está situado sobre la proporción áurea. En el círculo del Paraíso se inscribe un doble pentágono. Cuatro verticales establecen el ancho de la fuente y sitúan al árbol prohibido y los personajes la derecha.

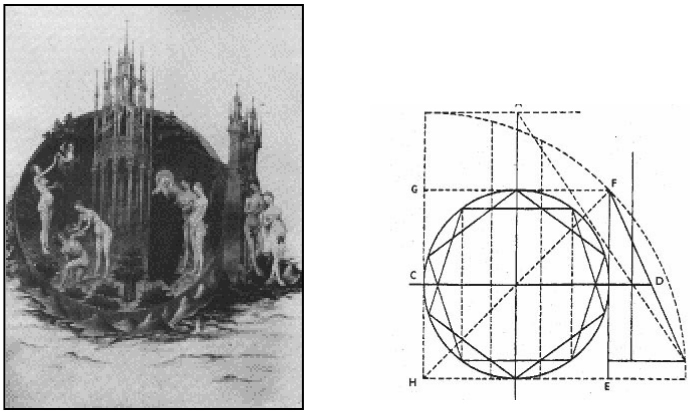


FIGURA 50: Muy Ricas Horas del Duque de Berry(Paul Limbour).

También se encuadra en este estilo la obra de Stefan Lochner, a quién debemos *La Virgen del Rosal*(fig.51), donde se aprecia un trazado geométrico complejo: tangente a los lados, un círculo encierra un doble pentágono. El pentágono apoyado sobre su base, situado a igual distancia de arriba que de abajo, determina el lugar del círculo. La prolongación de algunas diagonales de los pentágonos da la construcción de la pérgola. El muro que rodea a la Virgen, sigue el arco que ha servido para trazar el pentágono apoyado en un vértice.

FIGURA 51: La Virgen del Rosal (S. Lochner).

En la *Natividad* de Weltchronik des Rudolf von Ems podemos ver el uso de la sección áurea partiendo de la dimensión media del cuadrado, que se encuentra en la parte superior del cuadro, la rueda se apoya en la base del cuadrado, el camino del paisaje asciende a lo largo de la diagonal del cuadrado(fig.52).

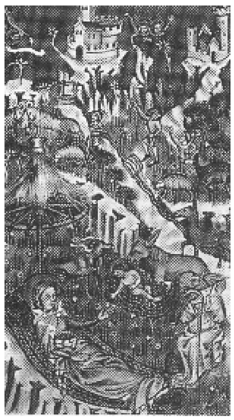
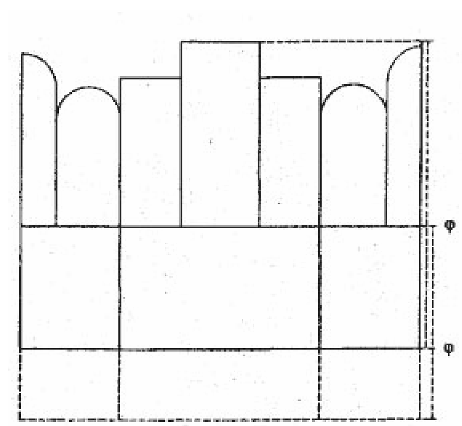


FIGURA 52: Natividad (W.Rudolf von Ems) y entramado geométrico.

En el desarrollo del estilo flamenco destacamos a los hermanos Huberto y Jan Van Eyck, ambos colaboraron en la obra maestra de este arte, *La Adoración del Cordero Místico*, tabla central del políptico de San Bavón de Gante, integrado por numerosas tablas, cuyas divisiones en anchura corresponden a una progresión áurea(fig. 53)

FIGURA 53: Estructuira geométrica del políptico deSan Bavón de Gante.



Podemos destacar en el uso del número de oro, otro pintor flamenco, Roger van der Weyden (1400-1464), en especial dos de sus cuadros. El *Juicio Final,* el *Descendimiento de la Cruz (*fig.54). En el primero de estos cuadros la proporción entre la altura de las hojas plegables y la central. es el número de oro En el segundo, el cuadro está dibujado sobre una trama geométrica de pentágonos, la estructura del retablo está establecida sobre la proyección de las diagonales del cuadrado y de los rectángulos y sobre el número áureo.

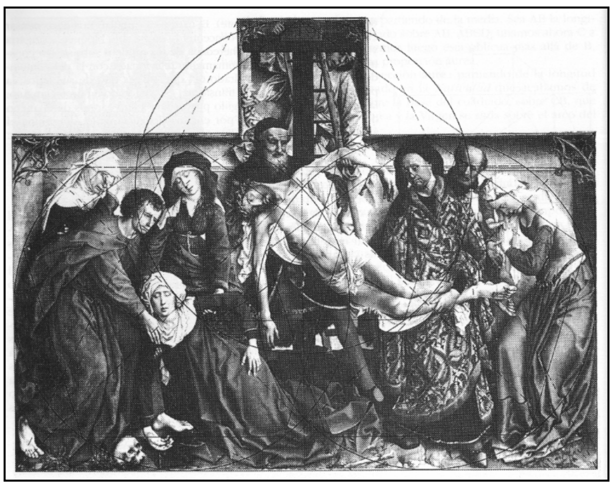


FIGURA 54: El Descendimiento (Roger van der Weyden)

De la influencia flamenca por Europa tenemos obras de varios autores que ponen de relieve la divina proporción de forma particular con el pentágono, tan comúnmente escogido por estos autores para guiar la trama de sus obras como ocurre en la *Coronación de la Virgen* del Maestro Moulins dónde se aprecia un doble pentágono que sirve de trama a los círculos místicos, el círculo pequeño está centrado sobre el cruce del eje vertical con el horizontal dado por la sección áurea(fig.55). Otra *Coronación de la Virgen* de Enguerrand Quarton también nos muestra la proporción áurea que, tomada sobre los lados establece la altura del centro del círculo. Este círculo es tangente a la parte superior del retablo y su punto inferior establece la altura de la pedrela. En el círculo se inscribe un doble pentágono. Las diagonales de los pentágonos, prolongadas más allá del círculo, establecen el rítmo de las pequeñas figuras de los lados(fig. 56)

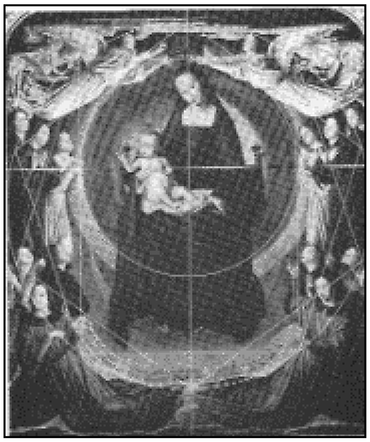


FIGURA 55: Coronación de la Virgen (Moulins).

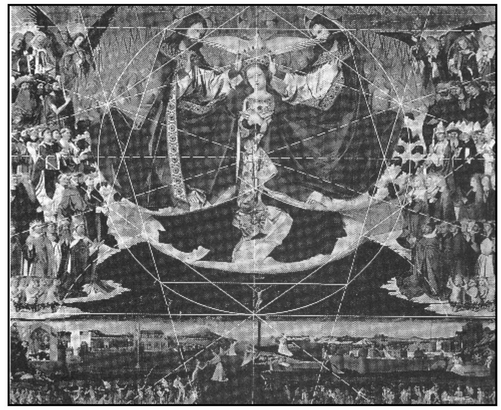


FIGURA 56: Coronación de la Virgen (Enguerrand Ouarton).

Por último, pasemos al más grande pintor de la época, Jean Fouquet (1415-1481) y su obra maestra, el díptico de *La Virgen de Etienne Chevalie* (fig. 57). Vemos como se forma un triángulo isósceles principal donde se encuadra a la Virgen con absoluta naturalidad, con su manto cayendo sobre los lados mayores el triángulo. Este pentágono se combina con otro, formando un decágono, el cual deja un rectángulo en su interior donde se encuadran el montante de la silla y la hilera de ángeles.

FIGURA 56: La Virgen (Etienne Echevalie.).

IV.8. ARTE RENACENTISTA

El Renacimiento nace apoyado en los modelos clásicos pero no rompe con ciertas formas del Medievo; se une a una evocación a lo antiguo, con una observación viva de la naturaleza y un dominio de la perspectiva que hace posible la representación de lo real en dos dimensiones. En 1509, se publica el libro de Fray Luca Pacioli; así, la divina proporción se vuelve a poner de actualidad en Italia, particularmente en Venecia. El número áureo sería presentado en lo sucesivo a los artistas, en los distintos tratados de pintura, al mismo nivel que las relaciones musicales, pero al recuperar las composiciones de la Edad Media se cometían grandes errores en su trazado.

La proporción áurea se haya casi siempre con la ayuda del pentágono, que la contiene en todas sus partes. Como la construcción es bastante compleja, se procurará simplificarla. Alberto Durero, un perfecto conocedor de la construcción clásica del pentágono, propone una nueva con una sola apertura de compás, se trata de una buena aproximación. Es importante señalar que este método tan ingenioso es una buena simplificación del diagrama de Hipócrates.

Por estos polígonos, estas inteligentes construcciones se volvieron cada día más engorrosas para los artistas, que sólo conservaron la sección áurea como un buen método para distribuir las líneas y de organizar las superficies según relaciones armónicas, sin necesidad se seguir una figura geométrica. Esta diferencia existente entre una composición de la Edad Media y por ejemplo una composición de Vermeer.

Algunas escenas están compuestas (como las que se encontrarán más tarde en Pompeya) según una concepción del número áureo muy diferente de la de la Edad Media y mucho más moderna; la relación está tomada directamente sobre los lados del marco y regula a partir de ahí sus personajes, los lienzos de muro, las arquitecturas.

Para concluir diremos que siendo creciente el cansancio de los pintores al proyectarla, la sección áurea se reducirá al hábito de cortar las composiciones a cierta distancia del marco, corte que se convertirá por así decirlo en intuitivo.

IV.8.1. Pintura italiana del "Quattrocento"

La primera mitad de este siglo se corresponde con la incorporación de elementos clásicos, y un estudio de la perspectiva. La investigación que se llevó a cabo en Florencia en este periodo, y que fundía el arte con la ciencia matemática, la geometría y la perspectiva; tiene su máximo representante en Piero della Francesca (1416-1492). Él, consiguió armonizar lo científico y la claridad intelectual, con una intuición de belleza de las formas y del uso de la luz como elemento expresivo y simbólico. Escribió *De Prospectiva Pingendi*, un tratado de perspectiva donde descubre que la distribución de las luces es simplemente un problema de color, y siendo el maestro de Luca Pacioli, muchos le señalan como "coautor" o al menos inspirador de la *Divina Proporción* del fraile franciscano.

Muchos pintores recurrieron a las trazas geométricas. Pero ninguno como Piero creó una obra tan profundamente calada por una concepción geométrica de la belleza. Las figuras son cuerpos simples que no están sometidos por la fuerza a un entramado geométrico sino que forman este entramado con una apariencia natural.

La obra maestra de Piero son los frescos de San Francisco de Arezzo, pero aquí trataremos su última obra conocida: *La Virgen y el Niño rodeados de Santos* (fig.58). Se trata de una composición basada en los «cuerpos regulares» y los números 2 y 3. Su anchura es a su altura como 2 a 3, relación discretamente repetida en la bóveda, cuyos casetones suman 9 en un sentido y 6 en el otro (6/9=2/3). Toda la obra está organizada sobre tres círculos, los dos de la bóveda cortan otro círculo, centrado sobre el primer tercio de la alturas y en el cual se inscriben dos hexágonos. Las prolongaciones de los lados de uno de los hexágonos determinan la altura de la bóveda. De este modo, a pesar del aparente desfase en la distribución de los espacios, la composición es uniforme.

Piero della Francesca permanecerá siempre fiel a las divisiones sencillas de sus cuadros según los números 2,3,4; veamos, no obstante, cómo su última obra es una composición mucho más compleja, basada en el hexágono. *El Bautismo de Cristo* (fig.58) está construido sobre el número tres. División en tres de su anchura, con los ejes sobre el lado derecho del árbol y del costado izquierdo de San Juan, trazado a lo largo de la vertical. División en tres de la altura, o más exactamente en dos si sólo consideramos la parte rectangular, que sigue la relación 2/3. El semicírculo que corona la obra y constituye el tercer tercio es, en realidad, un círculo completo si seguimos la curvatura del brazo de San Juan y la parte superior de los paños de Cristo. La paloma, perfectamente horizontal, indica el emplazamiento exacto del lado superior del rectángulo y el centro del círculo.

FIGURA 58:La Virgen y el Niño rodeados de Santos (Piero della Francesca).

FIGURA 59:El Bautismo de Cristo (Piero della Francesca)

Otros artistas de este primer periodo son Paolo Ucello(1396-1475), Andrea Castagno(1390-157) o Masaccio(1401-1428), del que hemos hablado en el capítulo anterior relacionando alguna de sus obras con la proporción musical.

La segunda generación de artistas de este periodo presentan un interés sorprendente por los aspectos concretos de la vida, estando también presente la evocación del mundo clásico. Muchas de las obras de este periodo, han sido ya estudiadas, como ocurría con la obra *El Tributo de San Pedro* de Masaccio, en el capítulo anterior dado que sus estructuras tienen un claro apoyo en las proporciones musicales y en la teorías de Alberti; entre estas obras destacamos *Los Reyes Magos* de Benozzo Gozzoli, la *Natividad de la Virgen* de Domenico Ghirlandaio, *El parnaso* de Andrea Mantegna y *La Primavera* de Boticelli.

Sandro Botticelli(1444-1510) sea quizá el más conocido de todos ellos. Analicemos otra de sus obras con más repercusión, *El Nacimiento de Venus*(fig. 59).

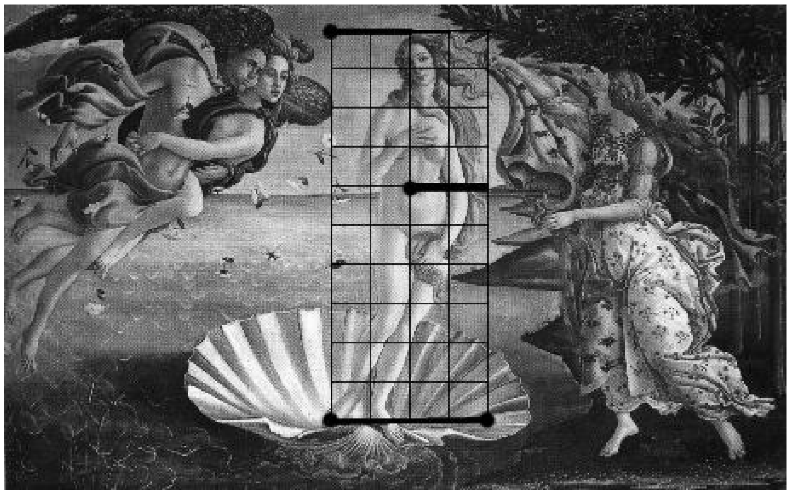


FIGURA 59: *El Nacimiento de Venus de Botticelli*

La proporción utilizada es un 9/16. Volvemos a encontrar el eje de simetría del cuadro desplazado ligeramente a un lado. La relación de espacio entre los pies y el ombilgo y la cabeza es de 0,618; que es la misma relación que hay entre el cuello del fémur y la rodilla y la longitud de la pierna entera y la misma que hay entre el codo y la punta del dedo medio y la longitud del brazo.

V.8.2. Pintura italiana del "Cinquecento"

El tránsito del “Quattrocento” al “Cinquecento” está encarnado de forma excepcional en Leonardo da Vinci(1452-1519), considerado siempre como una de las mentes más brillantes y prodigiosas de la historia. Leonardo es el artista más secreto y más sabio de los tratados hasta el momento. Apasionado de la música, habla abundantemente de la sutileza de las relaciones del arte de los sonidos con la pintura, pero su forma de concebir estas relaciones es realmente particular. Sus reflexiones sobre todas las cosas son excesivamente profundas y enigmáticas. *La Última Cena,* la única composición monumental que conservamos, sigue una disposición simple del rectángulo √5. Aunque esta composición está centrada sobre el Cristo, su traza determina otro cuadrado central que está en proporción áurea con las longitudes sobrantes a los lados. En el cuadrado central, se inscribe un cuadrado más pequeño donde residen cuatro rectángulo áureos y a su vez la figura de Cristo se inscribe en otro rectángulo áureo delimitado por la ventana del fondo(fig. 60).

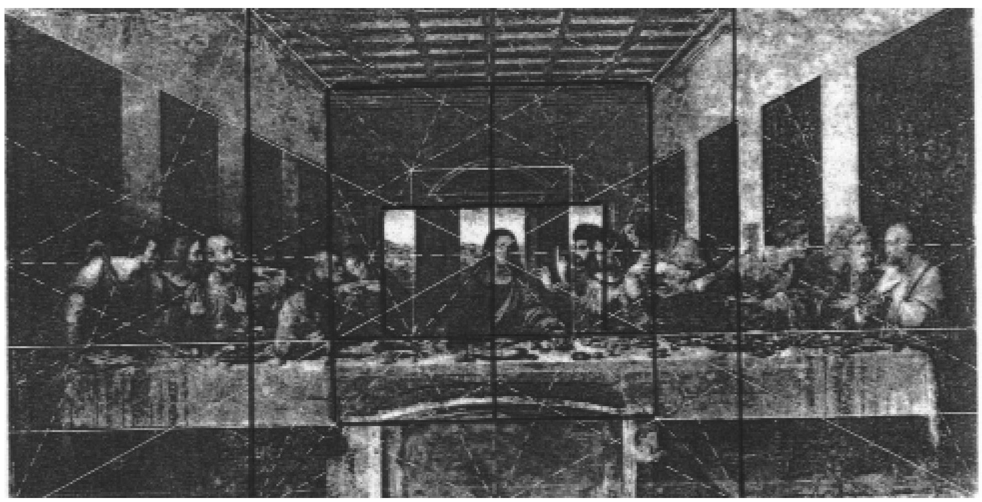


FIGURA 60: La Última Cena (Leonardo da Vinci).

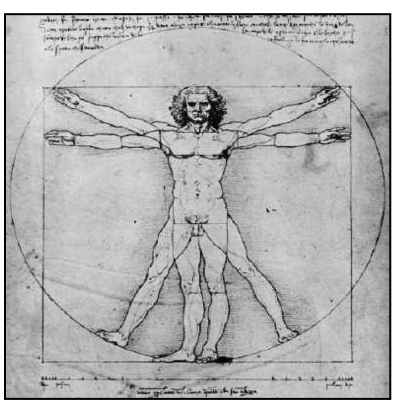
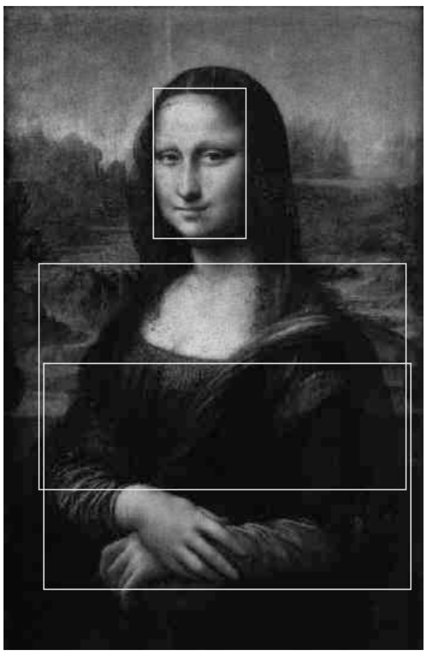


FIGURA 61: Hombre de Vitruvio (Leonardo da Vinci).

En muchos otros cuadros suyos utilizó la proporción áurea considerada por él como un reflejo de la proporción humana. Leonardo establece -siguiendo los dictámenes de la arquitectura de Vitruvio- que las proporciones del cuerpo humano son perfectas cuando el ombligo divide al cuerpo en modo áureo y es a la vez el centro de la circunferencia que lo circunscribe(fig.61).



La aplicación más directa que hace de estas proporciones la encontramos en *La Gioconda* (fig.62) donde la relación áurea la encontramos en las proporciones del cuadro, en las dimensiones del rostro, en el espacio que hay entre el cuello y la mano y en el que hay entre el escote del vestido y el final de la mano.

FIGURA 62: Gioconda o Mona Lisa

Uno de los artistas que representa mejor que nadie la perfección de lo clásico es Rafael Sanzio de Urbino, "Rafael"(1483 –1520). Su obra más importante quizás sean las decoraciones al fresco que realizó en el palacio del Vaticano. La división de 3/4 la repite en los frescos de las Estancias del *Incendio del Borgo*, *La Disputa sobre el Santo Sacramento*, la de la *Expulsión de Heliodoro*, etc. Es una división muy simple: corte del ancho en cuatro y del alto en tres.

FIGURA 63: Retrato de Juana de

Rafael, aún conociendo el conjunto de relaciones musicales, sólo empleaba para sus grandes composiciones relaciones musicales simples: las divisiones 2/3 o 3/4 son las más frecuentes. Basten como ejemplos los cartones de tapices de algunas Madonas (*Madonna de Orleans, Madonna de Belvedere*). En sus retratos emplea sin embargo las divisiones 4/6/9 o 9/12/16, como ocurre en el *Retrato de Juana de Aragón* (fig. 63)donde el personaje está en un eje ligeramente oblícuo que se corresponde con la medida de 9 en la relación 9/12/16, arriba tomada desde la derecha y abajo desde la izquierda.|

IV.8.3. Pintura renacentista en Europa

Nos detendremos aquí en Alberto Durero(1471-1528), grabador, pintor y teórico alemán, investigador de las proporciones humanas, representa la fusión del gótico alemán con las novedades renacentistas. Como todos los artistas del norte, conocía tan bien como Pacioli el número áureo. Basta con indagar un poco en su obra para darse cuenta de que lo empleó corrientemente en todas las etapas de su vida, especialmente en su juventud. La sección áurea para Durero no suponía ninguna novedad. En el *Apocalipsis*(fig. 64a) y en *La Vida de la Virgen*: *la Asunción* (fig. 64b)casi todas las escenas dibujadas antes de 1506 siguen el número áureo y las planchas de *David penitente* (fig. 65a) y la *Degollación de San Juan Bautista*(fig. 65b), fechadas en 1510,siguen el compás de la relación musical 4/6/9.

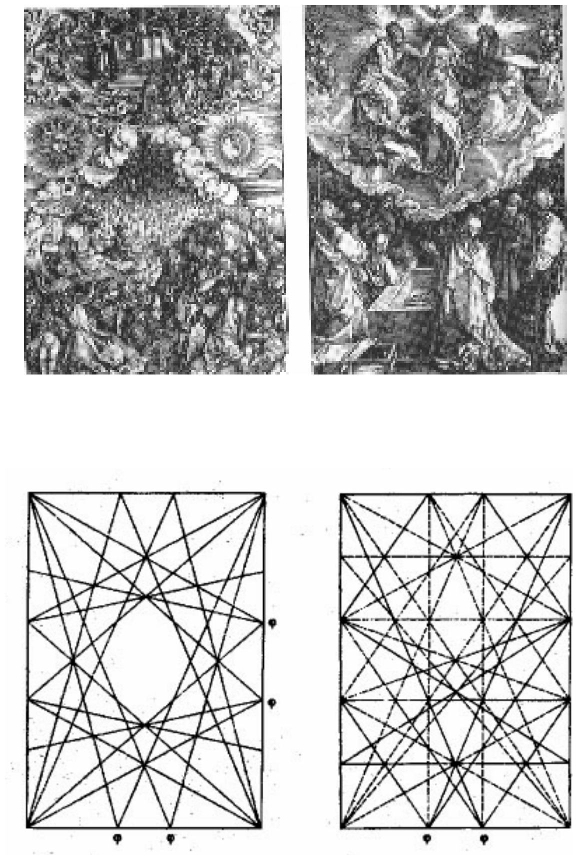


FIGURA 64: Apocalipsis y Vida de la Virgen(Durero).

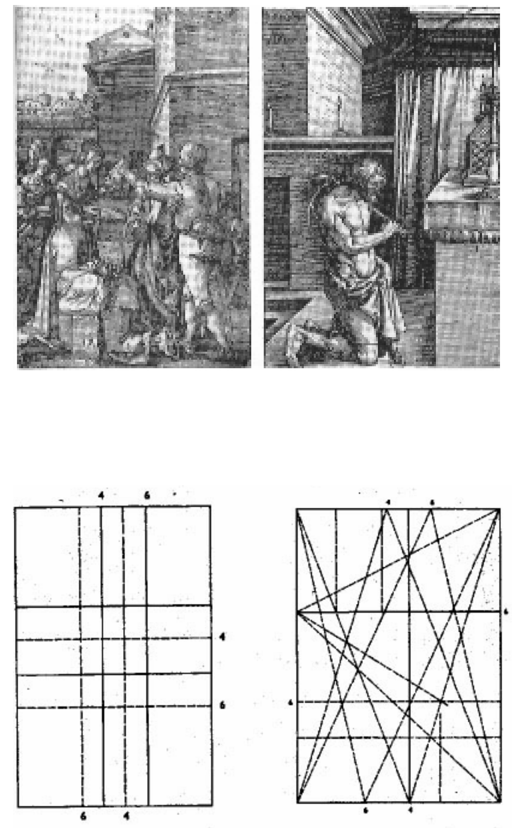


FiGURA 65: Degollación de San Juan Bautista y David penitente(Durero).

IV.8.4. Pintura italiana manierista

En el manierismo hay un fuerte sentido anticlásico, es un mundo fuertemente intelectualizado; las formas, los modelos y los tipos de los grandes artistas van a ser utilizados como un elemento más en las composiciones tan libremente entendidas.

En Venecia se consigue mantener un clima calmado frente a la crispación manierista del resto de Italia. Entre los artistas venecianos destacamos a Giorgione, que significó para Venecia lo mismo que Leonardo para Florencia, y a Tiziano(1487-1576), discípulo del primero, y gran figura de la pintura veneciana.

La mayoría de estos artistas ya fuero estudiados en el capítulo anterior; ahora veremos otras obras suyas con correspondencias áureas y musicales.

De Giorgione destacamos su *Venus*(fig.66). La relación 9/12/16 está aquí tomada hacia la izquierda y hacia la derecha sobre cada lado del lienzo, como ya hizo Mantegna sobre el Parnaso. Centrado en este arco se encuentra el arco sobre el que reposa Venus, división que en otro sentido, establece la horizontal del paisaje.

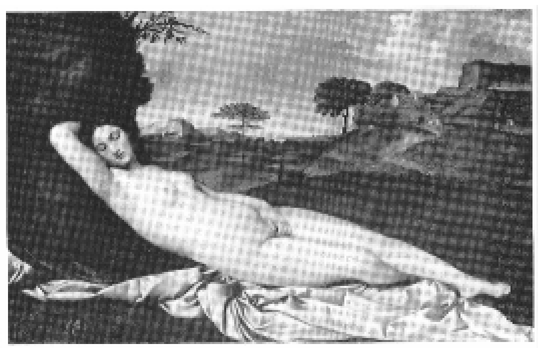


FIGURA 66: Venus (Giorgione).

De Tiziano destacamos, además de las obras ya señaladas anteriormente, *Venus y el organista*(fig.67)construida sobre la relación 4/6/9, una de las más comunes en este artista. Estas Venus derivan todas de las de Giorgione y siguen la misma composición: el semicírculo sobre el que se apoya Venus está en el centro de la división 4 partiendo de la derecha.

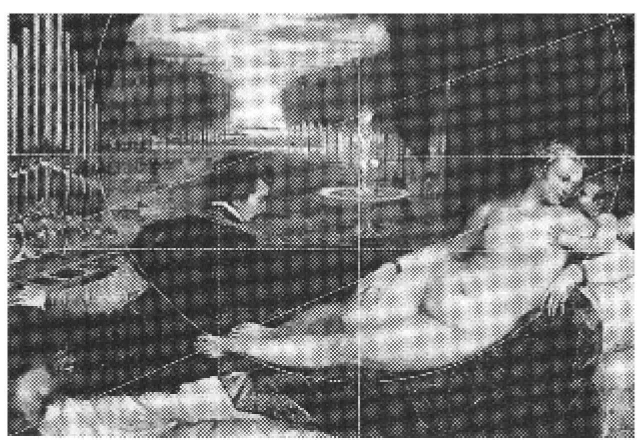


FIGURA 67: Venus y el Organista (Tiziano).

Veronés y Tintoretto emplearon la regla de oro de buen grado, paralelamente a otras trazas. Paolo Veronés(1528-1588) construye muchas veces sus retratos sobre el número áureo. Citaremos el *Retrato de F. Franceschini,* el *Conde Porto y su hijo, Retratos de geltilhombre*. Otras obras de Veronés que siguen esta proporción, son *Jesús y el centurión*, *Jesús entre los doctores*, *La Anunciación* y la *Resurección de Lázaro.* En *La familia de Darío*, la arquitectura sigue el número áureo y los personajes la armadura del rectángulo. En la *Comida en la casa de Leví(fig. 68)*, la arquitectura está regulada por la relación áurea, con regresión armónica de una misma relación. Los puntos de intersección de las líneas que unen los puntos Φ entre sí y con los vértices del rectángulo son los puntos que permiten la disposición de las columnas. Las dos diagonales del rectángulo dan las escalera del primer plano.

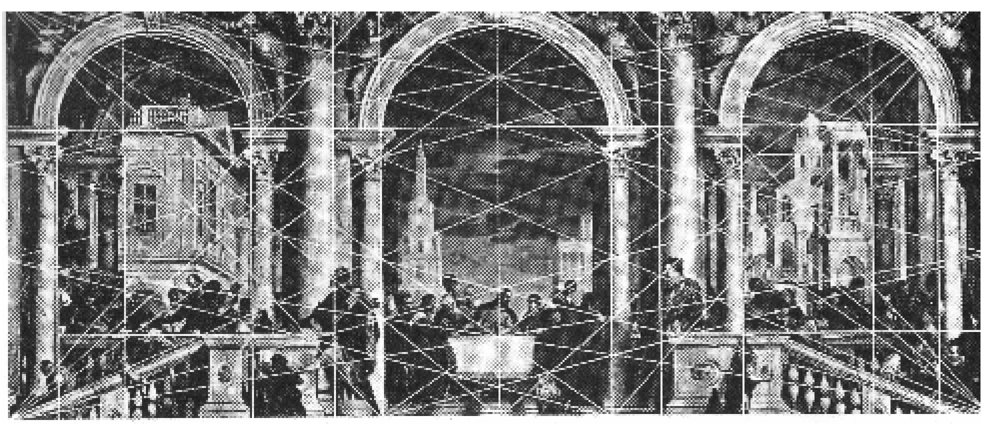


FIGURA 68: Comida en casa de Leví (Veronés).

Para las *Bodas de Caná*(fig.69), por una parte Veronés parece haber empleado el número áureo en su trazado más sencillo; y por otro el doble diapente parece inspirar las proporciones generales.

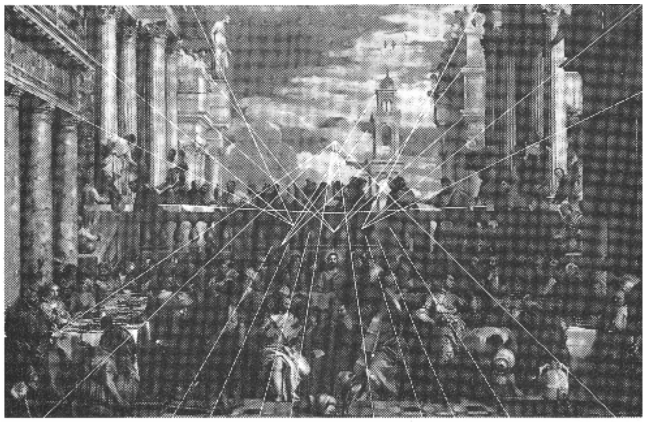


FIGURA 69: Las bodas de Caná (Veronés).

Jacobo Tintoretto (1518-1594) es el único artista veneciano que presenta algo de inquietud a cerca del manierismo. En su obra tropezaremos también con bastante frecuencia con el número áureo: ver el *Milagro de San Marcos,* el *Hallazgo del cuerpo de San Marcos*, la *Leda*, etc.

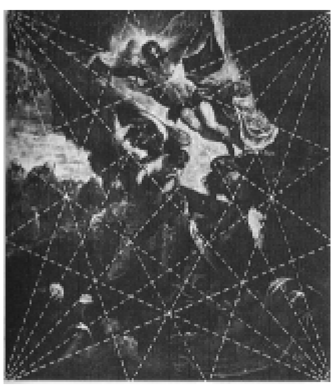


FIGURA 70: La Resurrección (Tintoretto).

En *La Resurrección*(fig.70), sobre las líneas oblicuas surgidas de la proporción áurea trasladada por dos veces alternativamente sobre los cuatro lados del lienzo, Tintoretto sitúa a sus personajes y distribuye las zonas de luz y de sombra

En *El Lavatorio* (fig. 71), conservada en el museo del prado, podemos ver como el espacio está ordenado por las columnas del fondo. El espacio que va de la segunda columna, partiendo del lado izquierdo, hasta el lateral derecho del cuadro, forma un rectángulo áureo; siendo un punto de división Φ la primera columna partiendo del lado derecho. Obtenemos así un cuadrado y un nuevo rectángulo áureo menor donde sitúa a tres personajes en primer plano, reservando el cuadrado para los personajes sentados alrededor de la mesa. Al rectángulo total se añade a la izquierda la longitud del cuadrado anterior, donde encuadra a varios personajes en primer y tercer plano.

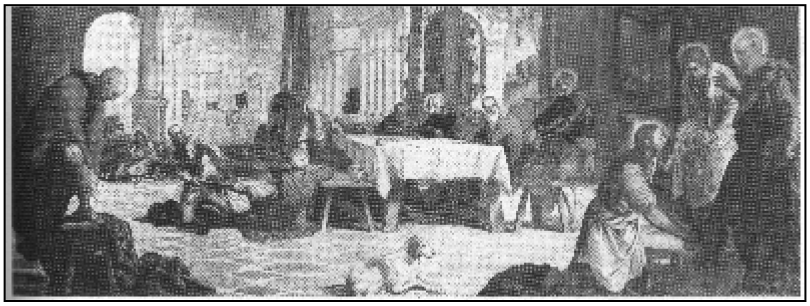


FIGURA 71: El Lavatorio (Tintoretto)

IV.9. ARTE BARROCO

El arte del S. XVII, supone la vuelta al ambiente sereno del Renacimiento. Se recobran las formas bellas y verosímiles. La pintura toma dos caminos: el naturalismo, y el clasicismo.

IV.9.1. Pintura Barroca francesa

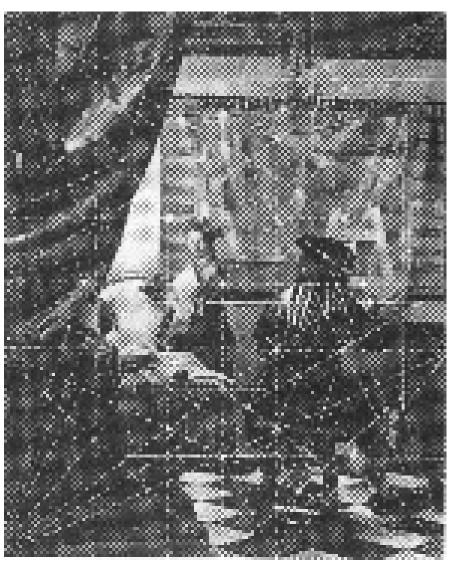
La figura máxima de clasicismo es el francés Nicolás Poussin (1594-1665), del que ya estudiamos una de sus obras, *Las Sabinas.*

IV.9.2. Pintura Barroca holandesa

La enumeración de los maestros holandeses que utilizaron el número áureo resultaría engorrosa. De entre todos ellos podemos destacar a Rembrandt van Ryn (1607- 1669) y a Jan Vermeer de Delft (1632-1675). Rembrandt, por ejemplo, lo utilizó en los *Síndicos del gremio de los Paños*(fig.73) tanto en las dimensiones del cuadro como en la distribución de personajes.

FIGURA 73: Los Síndicos del gremio de los paños (Rembrandt)

Vermeer lo usa especialmente y podemos asegurar que lo prefiere a otros métodos en la *Mujer sentada al clave,* la *Pareja de jóvenes,* la *Dama en su escritorio,* la *Carta de amor* y *El Taller de pintor* (fig.74). Esta última obra merece una especial mención dado que es una obra totalmente regida por la sección áurea. Vermeer nos demuestra su absoluto conocimiento y dominio de esta proporción, el cuadro se inscribe en una red de líneas ortogonales y oblicuas que conducen a un entramado áureo.



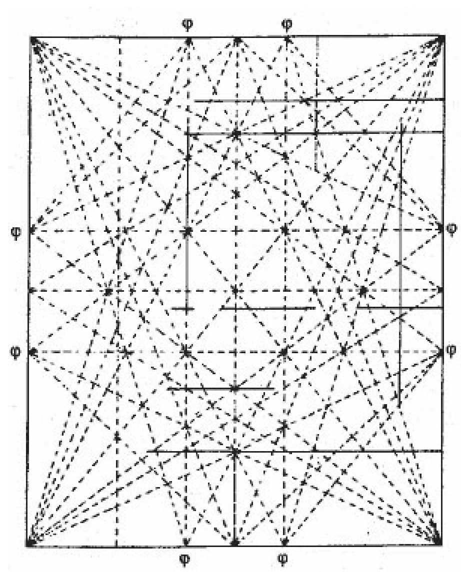


FIGURA 74: El Taller del pintor(Vermeer).

IV.9.3. Pintura Barroca española

La figura de Velázquez(1599-1660), de las más grandes de toda la pintura española, es en la que nos detendremos en este apartado. Desde sus primeras obras supo representar la realidad tal como la veía y tuvo la virtud de saber comunicar al espectador la noción de espacio, mediante un genial uso de luces y sombras y una pincelada segurísima. Se ha dicho a veces que el realismo de Velázquez es "espiritualizado" de tal manera que, siendo barroco, parece un clásico de la época de Pericles; y su pintura se ha mantenido -como el arte griego- en un plano elevado de armonía, elegancia y profundidad que solo son reflejo de la autentica belleza.

Dos de sus grandes obras: *Las Hilanderas* y *Las Meninas*, que el autor pintó al término de su carrera, son ejemplo del sentido espacial que poseía este español y podemos pensar que detrás de estos trazos geniales se esconde la proporción áurea. En la trama de *Las Meninas* se esconde una espiral áurea de aquellas de Fibonacci como vemos en el detalle de la fig.75b.

FIGURA 75a: Las Meninas (Velazquez).

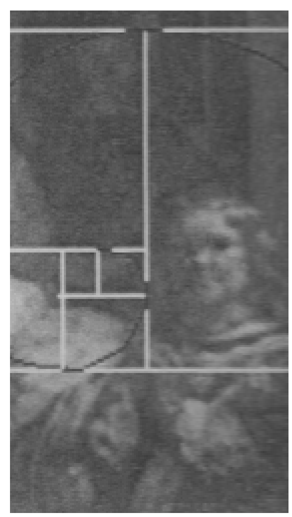


FIGURA 75b: Detalle de las Meninas. Centro de la espiral áurea.

IV.10. ARTE DEL SIGLO XVIII

En este periodo la geometría de los artistas se reduce a trazas muy simples, todo se resolvía con el uso del cuadrado o el rectángulo, que en muchos casos se apoyaban en el número de oro.

Aquí asistimos al nacimiento del estilo Rococó, del que el francés Antoine Watteau (1684-1721) es uno de los más representativos, De él estudiaremos su *Gilles*(fig.76), donde observamos la descomposición del cuerpo, desde el sombrero hasta el comienzo de las piernas, en un rectángulo áureo; las piernas se encuadran en un cuadrado igual al que se forma dentro del rectángulo anterior al buscar sobre su lado mayor la sección aúrea.

Otro de estos artistas, Greuze (1725-1815) utiliza también la medida áurea en alguno de sus cuadros como *El Pajarero* (fig. 77), donde la longitud de la figura marca la longitud del segmento áureo respecto el resto del cuadro.

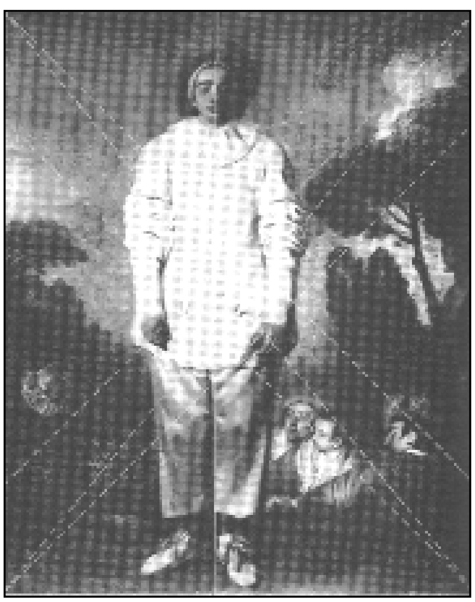
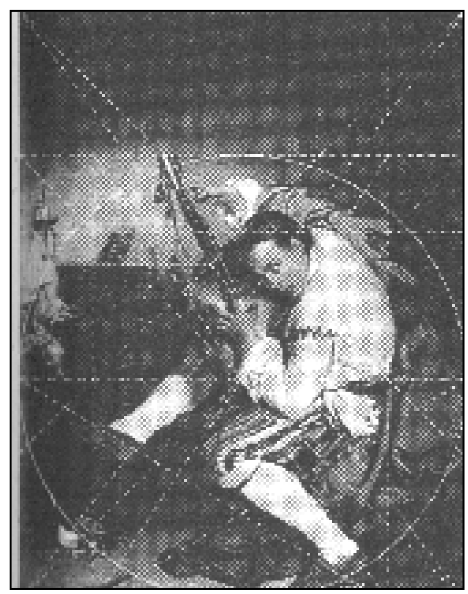


FIGURA 76: Gilles (Watteau).



FUGURA 77: El Pajarero (Greuze)

IV.11. ARTE EN EL SIGLO XIX

En los años finales del S. XVIII y principios del S.XIX, se dan los movimientos del Clasicismo y Romanticismo en la Pintura, de los que ahora analizaremos algunos autores. El primer estilo se caracteriza por el deseo de resucitar las formas de la antigüedad; el segundo por el culto al sentimentalismo, a la naturaleza, y el rechazo a la civilización.

En La segunda mitad del S. XIX surge la llamada corriente Impresionista, llevada a cabo por un grupo de autores que imprimen un espíritu de cambio e innovación en el arte occidental.

IV.11.1. Clasicismo

De este periodo destacamos a dos autores Jacques-Louis David (1748-1825), a Jean-Auguste-Dominique Ingres (1780-1867) y a Theodore Géricault (1791-1824).

Del primero examinemos su cuadro *El juramento de los Horacios* (fig. 78) considerado el punto de partida de la pintura Neoclásica.

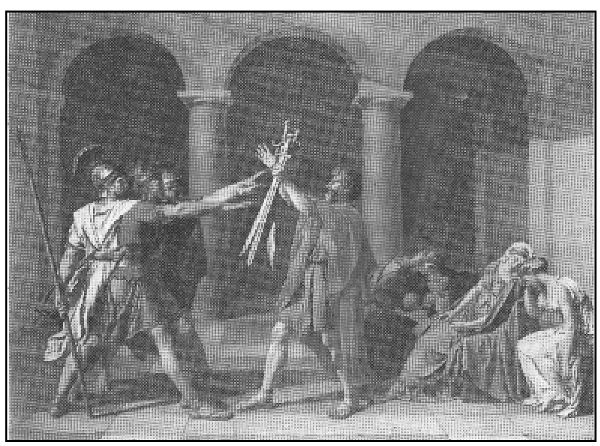


FIGURA 78: El juramento de los Horacios (J.-L.David)

En él encontramos que la situación de los personajes atiende a medidas áureas respecto las dimensiones del cuadro. El personaje principal no ocupa el centro del cuadro sino una posición desviada a la derecha donde se ve encerrado en un rectángulo cuyo lado menor viene marcado por los puntos Φ de la longitud total del cuadro. Estos puntos se obtienen calculando la sección de oro a partir de los dos extremos de esta longitud. De igual forma, vemos que calculando en su altura los puntos Φ, obtenemos los niveles a los que sitúa a los Horacios y a las mujeres.

Otra de las obras más representativa de David, *La muerte de Marat* (fig.79) se descompone en medidas áureas de forma similar a la anterior; calculando los puntos Φ que dividen su altura encontramos la posición donde se encuadra a Marat.

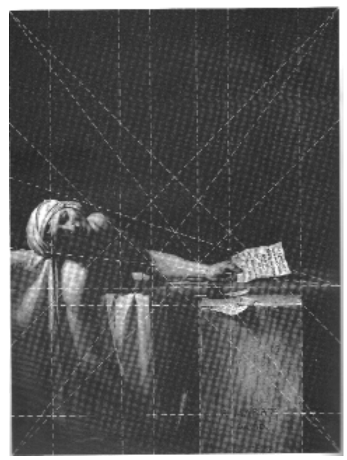


FIGURA 79: La muerte de Marat (J.-L. David)

Del mismo autor *Las Sabinas*(fig. 80), donde utiliza la sección áurea para colocar a los personajes principales.

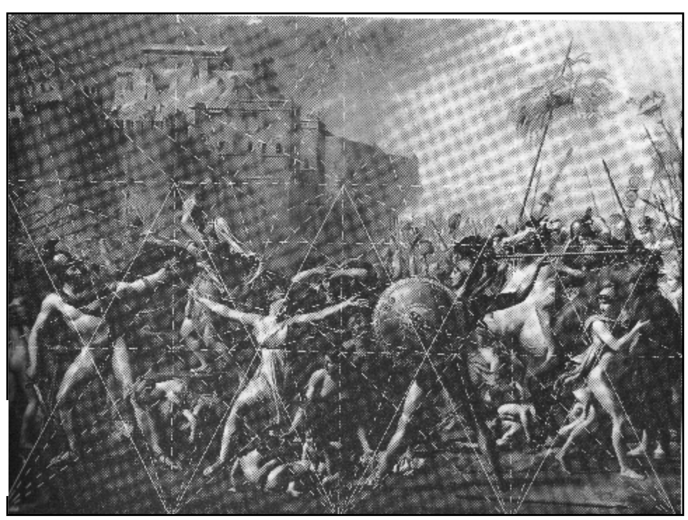


FIGURA 80: Las Sabinas (J.-L. David)

Con Ingres volvemos al Quattrocento italiano, su obsesión era contemplar a Rafael, y lo acabó imitando. Uno de sus cuadros más representativos es *Odalisca y su esclava* (fig.81)donde vuelve a utilizar un arco que ya conocíamos de Tiziano y Giorgione, la oblicua que marca Φ, es la cuerda del arco sobre el que se apoya Odalisca.

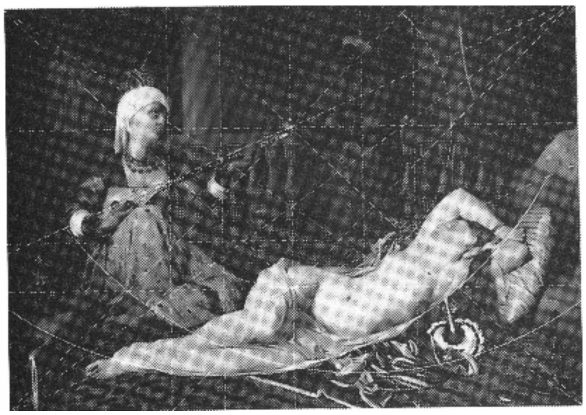


FIGURA 81 : Odalisca y su esclava (Ingres).

Para terminar, hablemos de *La Balsa de la Medusa* (fig.82) de Géricault. En el esquema vemos la descomposición del cuadro en proporciones áureas.

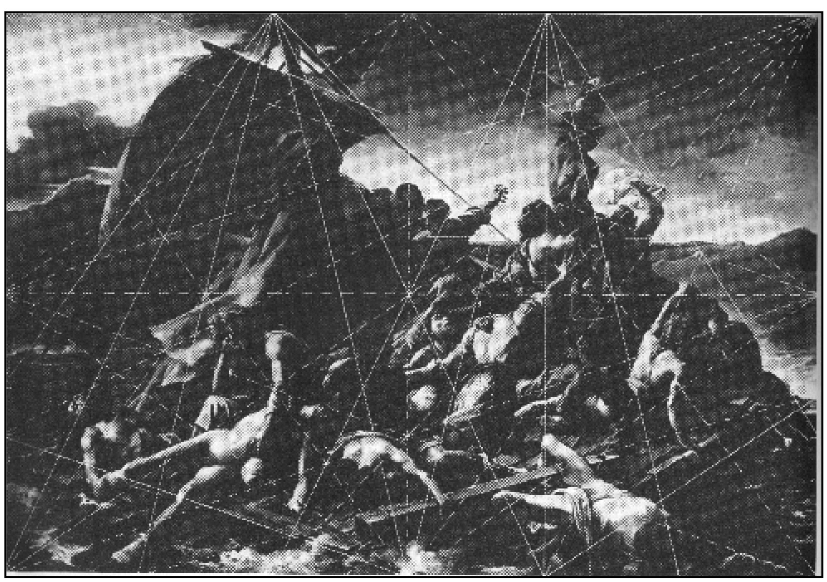


FIGURA 82: La Balsa de la Medusa

IV.11.2. Movimientos Impresionistas

En este periodo lo que más preocupa es la unión entre arte y ciencia, destacaremos a dos artistas cuyo pensamiento está en sintonía con la búsqueda de las leyes de la naturaleza que rigen el arte y son las mismas del espíritu humano. Georges Seurat (1859-1891), neoimpresionista y admirador de Piero della Francesca, Ingres, Poussin, etc. Para Seurat el arte es armonía, y podemos ver esta en cuadros como *La Parada* (fig.83), cuya característica es un corte ortogonal entre la línea superior de la rampa y el bastidor vertical de la derecha; la horizontal está muy próxima a la sección áurea. Otras relaciones áureas que se han encontrado en el cuadro se muestran en la fig.83.

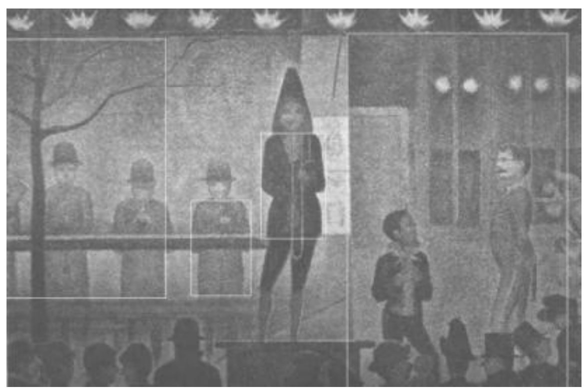


FIGURA 83: La Parada(Seurat).

Paul Cézanne (1839-1906) es un artista posimpresionista que fundamenta su arte sobre estrictas leyes geométricas: "tratar la naturaleza por medio del cilindro, de la esfera, del cono, todo ello puesto en perspectiva, de modo que cada lado de un objeto o de un plano se dirija a un punto central...".[2] Las obras de Cézanne sobre las que hemos estudiado la proporción áurea tenemos *El castillo negro* (fig. 84), donde las líneas ortogonales y horizontales que estructuran el cuadro están sobre los puntos de sección áurea.

También de Cézanne *Las Grandes Bañistas* (fig.85). Aquí hace intervenir todo un juego de curvas cuyos centros se sitúan en las ortogonales nacidas del

[2] Cézane P. : Correspondence, París, 1937.

cruce de las diagonales del rectángulo y las ortogonales marcadas por los puntos de sección áurea de ambos lados del rectángulo.

FIGURA 84: El castillo negro (Cézanne).

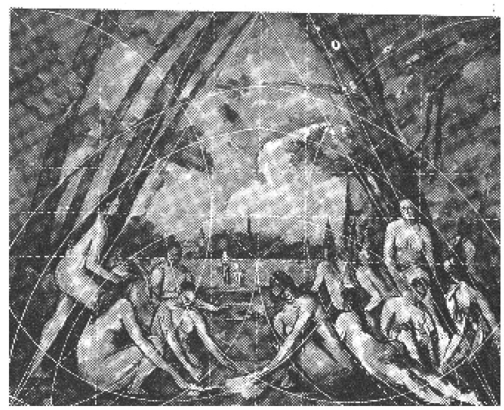


FIGURA 85: Las Grandes Bañistas (Cézanne).

IV.12. ARTE EN EL SIGLO XX

IV.12.1.Cubismo

El nacimiento del Cubismo pasa necesariamente por el Neoimpresionismo de Seurat y la obra de Cézanne. Este movimiento representa la ruptura clara y definitiva con la pintura tradicional, lo que se insinuaba con el cubismo no era solo una transformación del arte, sino una nueva manera de ver el mundo. Dentro de este ambiente destacaremos a dos autores que, sin ser los puntos de referencia más claros de este arte, usaban proporciones áureas en sus composiciones.

Uno de ellos Roger de la Fresnaye (1885-1925) y su *Conquista del Aire*, donde establece la arquitectura lineal del cuadro sobre proporciones áureas similares alas que usó Vermeer en su *Taller.*

Otro autor es Fernand Léger (1881-1955) con *Las Bellas Ciclistas* (fig. 86), donde la composición se rige por un círculo en el que inscribe un pentágono, que coma ya vimos, está basado en relaciones áureas.

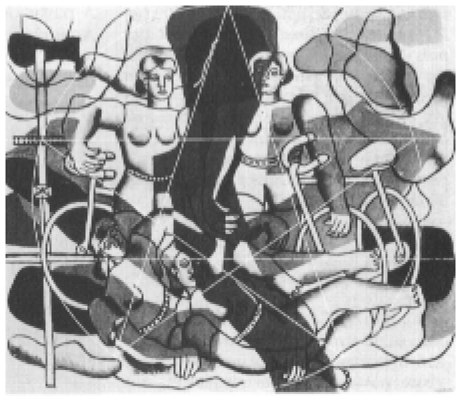


FIGURA 86:Las Bellas Ciclistas (Léger)

IV.12.2. Abstracción Geométrica

"La belleza se convertirá quizás en un sentimiento inútil para la humanidad y el arte será algo que se situará a mitad del camino entre el álgebra y la música". Esta definición premonitoria de la abstracción geométrica, fue citada por Flaubert.[3]

La abstracción geométrica, nacida en la segunda década del siglo XX, como consecuencia del Cubismo, es un gran movimiento que agrupa a distintos autores pertenecientes a movimientos menores, como el Orfismo o el

[3] VVAA: Historia del arte, Ed. Salvat, vol. 26, Barcelona, 2000, p 79.

Neoplasticismo, bajo una misma idea: dar prioridad al orden conceptual sobre la percepción sensorial, que exige una armonía paralela a la naturaleza y no una imagen de ella. Dos grandes maestros de la pintura francesa, Cézanne y Seurat, le dieron fundamento, defendiendo la armonía como objetivo y esencia de la pintura.

● ORFISMO:

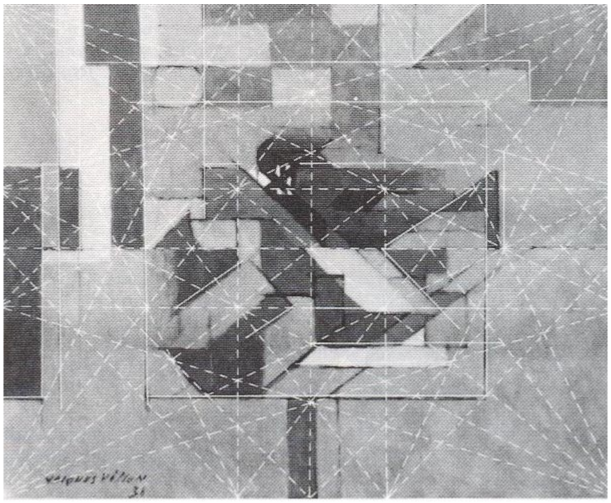
Es muy difícil establecer con exactitud cuándo nació la primera obra considerada típica de la noción de abstracción geométrica. En cualquier caso, uno de los focos de los que partió fue la *Section d'Or*, ese grupo de cubistas heréticos (orfistas) que quisieron basar los fundamentos de su arte sobre las relaciones entre el "número" y la "medida", aficionados absolutos del número áureo y seguidores del camino esbozado por Seurat. El nombre del grupo demuestra la búsqueda de una teoría de la armonía, de una base cifrada en la pintura.

De la *Setion d'Or*, formaban parte, junto a Jacques Villon, pintores como Robert Delunay (1885-1966) y Frantisek Kupka (1871-1957).

Kupka que en su grandiosa tela *Arquitectura filosófica*, en la que grandes planos de colores llamativos están dispuestos según una proporción entre dimensiones y tonos que sugiere la matemática musical y la matemática arquitectónica y Robert Delunay que fue uno de los que llevó la *Section d'Or* a sus últimas consecuencias.

Jacques Villon afirmaba: " Igual que en la Edad Media se elevaba una plegaria antes de comenzar a pintar, yo me apoyo en la sección áurea para tener una primera seguridad". [4] Así, en su *Pájaro disecado* (fig. 87)los puntos de intersección de las distintas oblicuas que unen los extremos en los puntos áureos del marco y las ortogonales que unen entre sí esos puntos permiten establecer todas las divisiones de esta composición estrictamente rectilínea y rectangular.

[4] BOULEAU CH.: Tramas. La geometría secreta de los pintores, Ed. Akal, Madrid, 1996, p245.



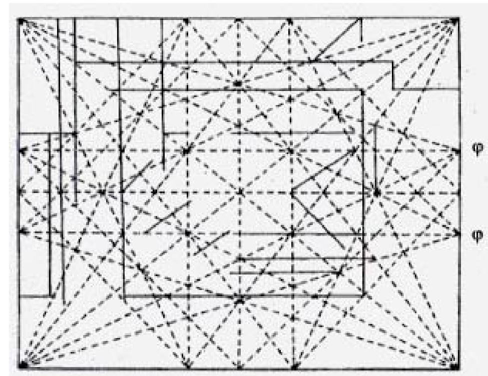


FIGURA 87: Pájaro disecado

● NEOPLASTICISMO:

Otro de los focos iniciadores de esta abstracción tuvo lugar en los Paises bajos, en autores como : Mondrian, Van Doesburg, Van Leck y Huszar, y sus esfuerzos colectivos se concretaron en la revista *De Stijl*. Dos principios dominan la creación artística: la abstracción completa y la limitación del vocabulario a la línea recta y al ángulo recto. La armonía fue realizada de un modo diferente en este grupo, seguidor de Cézanne. Los principios de la autonomía arquitectónica del cuadro, formulado por Cézanne, encontraron sus consecuencias en el cubismo y en la búsqueda del orden y de la organización del cuadro que constituyeron las conquistas de esta escuela y que se encuadran a su vez en el Movimiento Neoplasticista. El objetivo del grupo era: hacer visible la esencia de la realidad, que no estaba más velada por las formas individuales de la naturaleza y por el temperamento característico del artista.

Nos detendremos sobre todo en el holandés Piet Mondrian (1827-1944) y en varias de sus obras. En la primera de ellas *Pintura I* (fig.88)partiendo del gran cuadrado inicial lo corta por la diagonal AC y por una paralela a los lados AB y CD que pasa por el punto Φ de la diagonal. El segmento AΦ va a ser el lado de un cuadrado menor que obedece al mismo esquema anterior y que se situará sobre éste pero con las posiciones invertidas, el antiguo lado será la posición de la nueva diagonal.

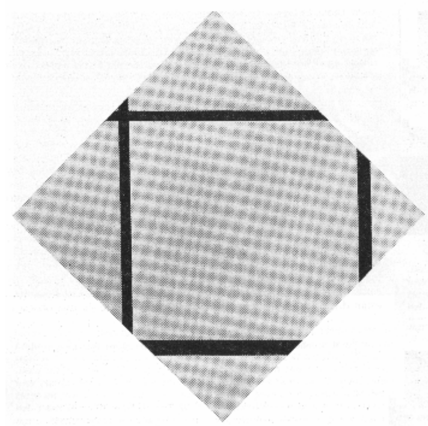
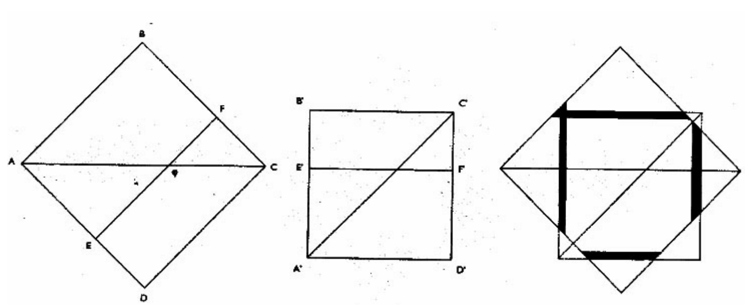
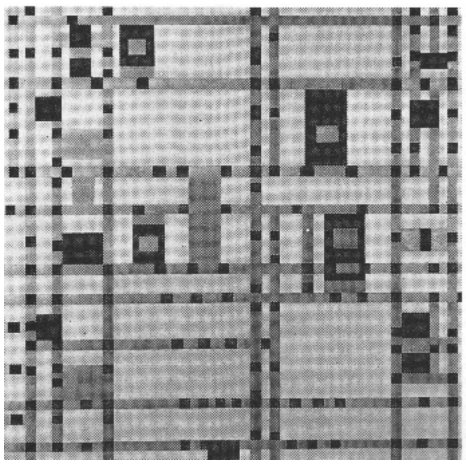


FIGURA 88: Pintura I y descomposición geométrica(Mondrian).



En *Broadway Boogie Woogle* (fig.89), las horizontales y verticales que la forman están casi todas sobre la sección áurea como vemos en el esquema. En las verticales, los segmentos así obtenidos serán a su vez redivididos por la relación áurea y así sucesivamente hasta seis veces. En las horizontales la relación será tomada a veces hacia arriba y a veces hacia abajo.



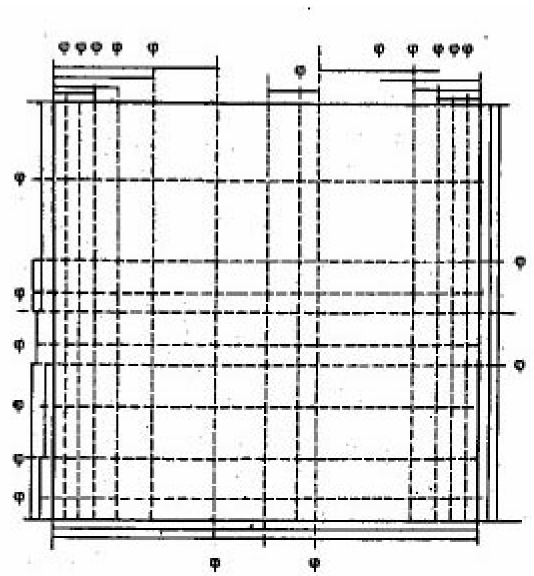


FIGURA 89: Broadway Boogie Woogle(Mondrian)

Otra obra de este autor similar a la primera es *Composición con dos líneas* (fig.90). El cuadrado mayor, apoyado sobre un vértice, se divide en otros cuatro cuadrados menores; el lado de uno de estos cuadrados (AE) pasará a ser el lado mayor de una relación áurea A'E'F, siendo A'F el lado de un nuevo cuadrado que situará sobre el primero haciendo coincidir las diagonales del primer cuadrado con los segmentos áureos del segundo.0

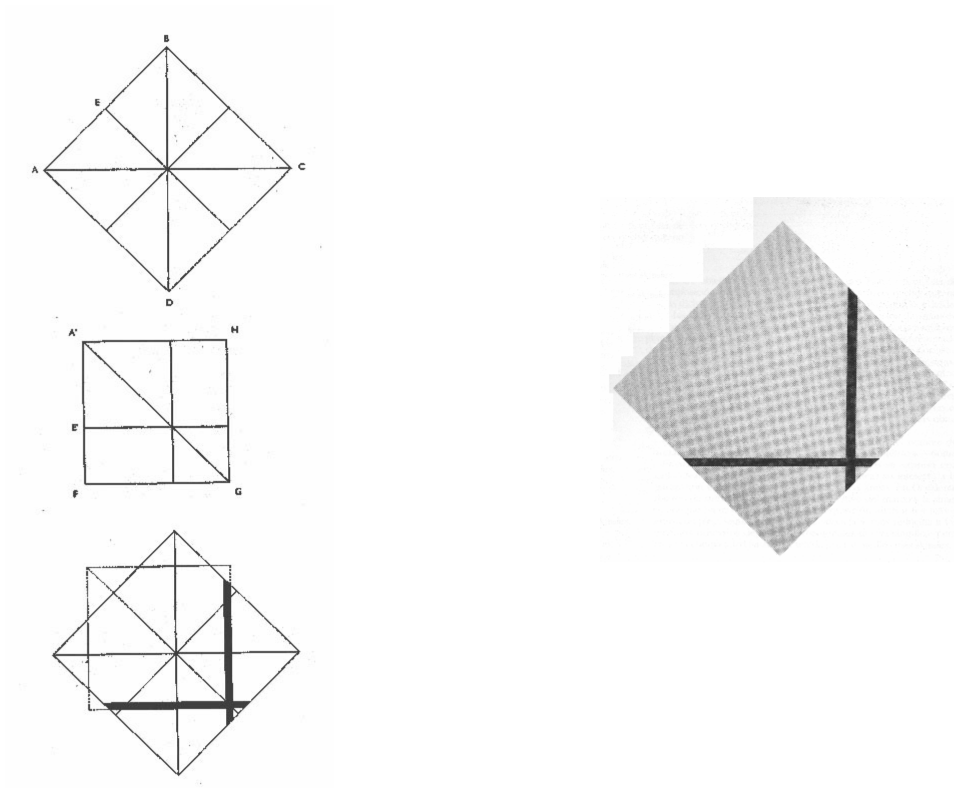
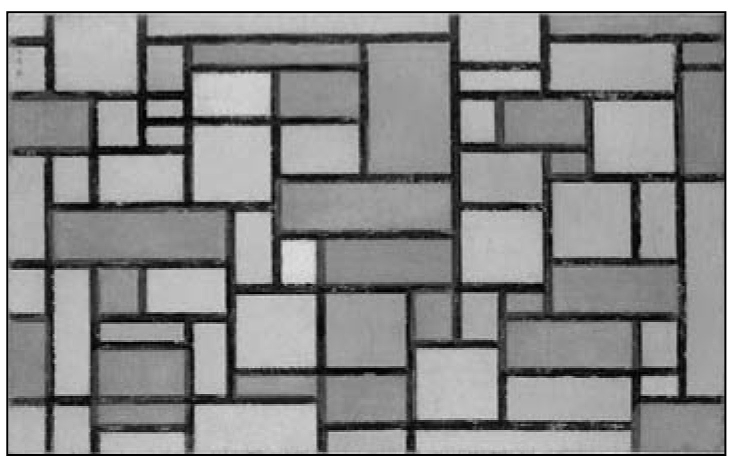


FIGURA 90: Composición con dos líneas

Por último, vemos otro cuadro de Mondrian (fig. 91), donde la estructura de la obra se basa en el cruce de cuadrados y rectángulos áureos.



● CONSTRUCTIVISMO RUSO:

Dentro del Constructivismo ruso también existían artistas que compartían la abstracción geométrica. Anton Pevsner (1886-1962) y Naum Gabo (1890) publican en Moscú el Manifiesto realista con posiciones muy próximas al Neoplasticismo. Destacamos en este periodo dos obras entre la escultura y la arquitectura: *Monumento a la tercera Internacional* (fig.92) de Vladimir Tatlin (1895-1956) y *Construcción de superficie desarrollable* de Pevsner, ambas con formas en espiral, muy cercanas a aquellas espirales áureas que estudiamos en el primer capítulo.

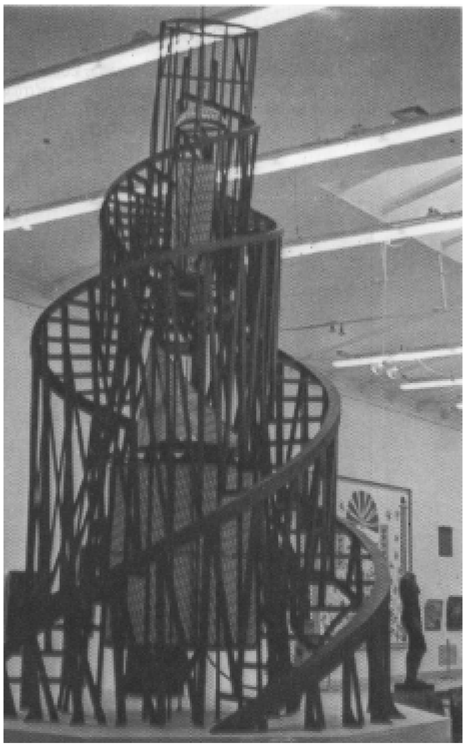


FIGURA 92 Monumento a la III Internacional (Vladimir Tatlin).

Otro autor que se encuadra en esta corriente es Kasimir Malevitch (1878-1935) y una de sus obras, *Supermatismo 418* (fig. 93)donde vemos como el triángulo se coloca sobre la posición áurea del lado del rectángulo, haciendo coincidir en la paralela al lado menor del rectángulo que pasa por Φ, este punto Φ y el vértice del triángulo.

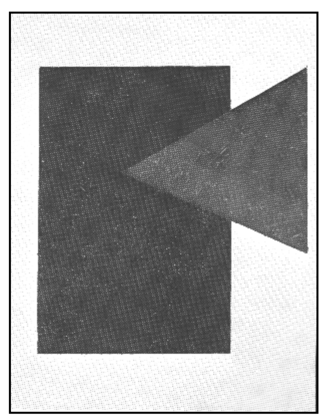
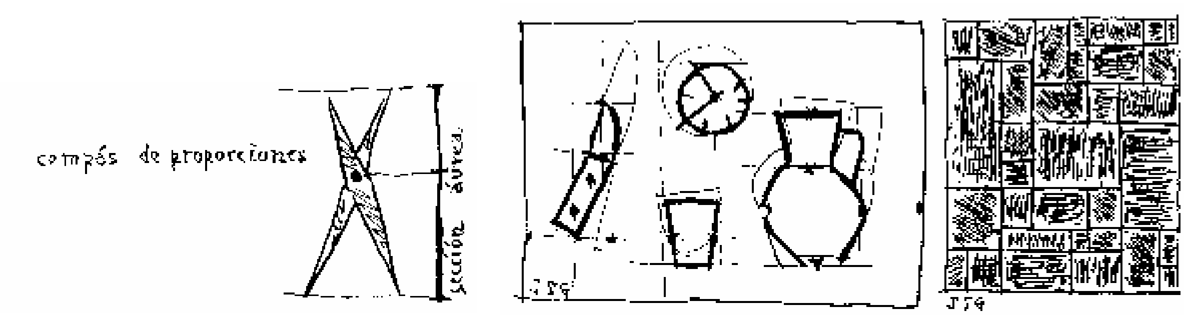


FIGURA 93: Supermatismo 418 (Malevitch).

La abstracción geométrica no se caracteriza, pues, por el empleo exclusivo de formas geométricas ni por su rechazo total de toda referencia a la realidad perceptible, sino por su manera de considerar, de ordenar y comprender el universo. No es el lenguaje geométrico lo que confiere su impulso innovador, sino el pensamiento matemático. Es una necesidad de objetividad y de capacidad de transmisión lo que, liberándonos de la arbitrariedad de las apariencias de la naturaleza y de la subjetividad de nuestro temperamento individual, nos ha permitido dominar el mundo. Se trata de un arte que pretende hacer visibles las leyes de este universo, la música de las esferas.

IV.12.3. Arte moderno hispanoamericano

El Uruguayo Joaquín Torres García (1874-1949) marca rumbos en la vanguardia plástica contemporánea, siendo considerado el precursor del arte abstracto hispanoamericano. Sus ideas quedaron recogidas en su libro *Universalismo constructivo*, donde escribe: "...la dimensión nos interesa como proporción. De ahí que nos interesa que el dibujo sea planista (geometral) a fin de que todo pueda medirse y así establecer relaciones armónicas... nuestro sistema de proporciones se basa en la llamada sección áurea...".[5] Esta forma de medir con la sección áurea hace imprescindible el uso del compás áureo y queda reflejada en su libro con otros bocetos de sus cuadros que aquí reproducimos en la siguiente figura.



[5] TORRES GARCÍA, Joaquín: Universalismo constructivo, Ed. Alianza forma, Madrid, p 46-47.

En la fig.94, una de sus obras más significativas *Homo sapiens,* donde las figuras y los símbolos se forman con rectángulos áureos y son divididas, a la vez, mediante otros rectángulos de la misma naturaleza.

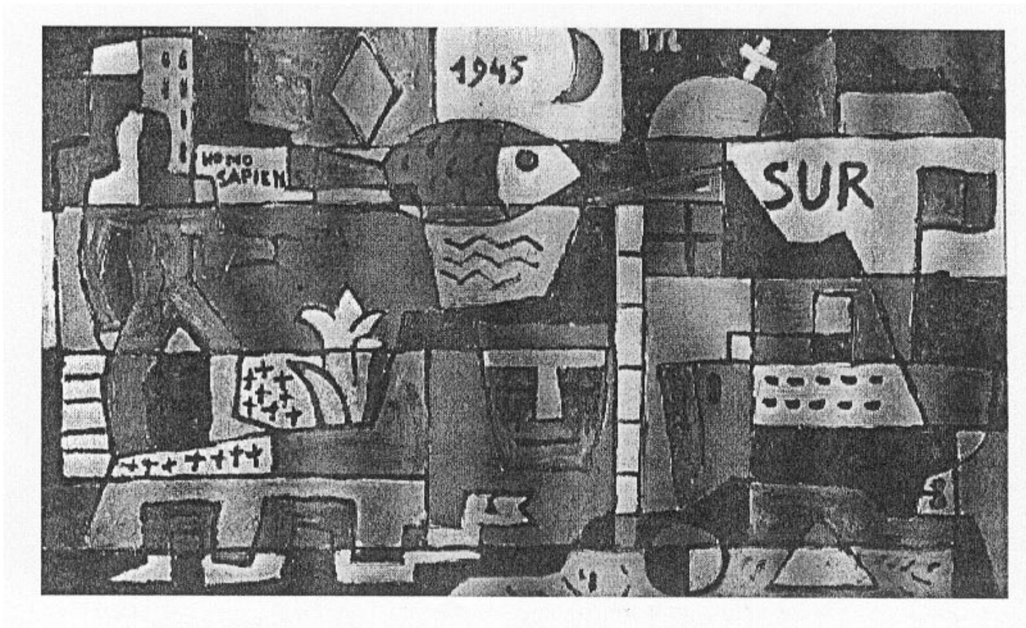


FIGURA 94: Homo Sapiens (J. Torres García).

IV.13. ARTE EN CASTILLA - LA MANCHA

En este apartado hablaré de dos artistas que me parecen representativos del arte castellano-manchego de este siglo. El primero, Alberto Sánchez(1895-1962), escultor toledano que pasó de vivir en un entorno humilde a formar parte de los círculos intelectuales de la renovación y de la vanguardia española, en ellos compartía su experiencia artístiica con Picasso, Neruda, Palencia, Lorca, Bores, Alberti,...

Escultor naturalista, de composición sencilla y austera, muestra más el volumen que el vacío y el complicado juego de planos, de inspiración cezianna. Nunca dejó de ser naturalista pero tuvo presente el neocubismo, con el empleo de figuras planas y planos geométricos.

Su obra *El pueblo español tiene un camino que conduce a una estrella* (fig.95) posee unas proporciones áureas muy parecidas a las que usó Botticelli en su Venus.

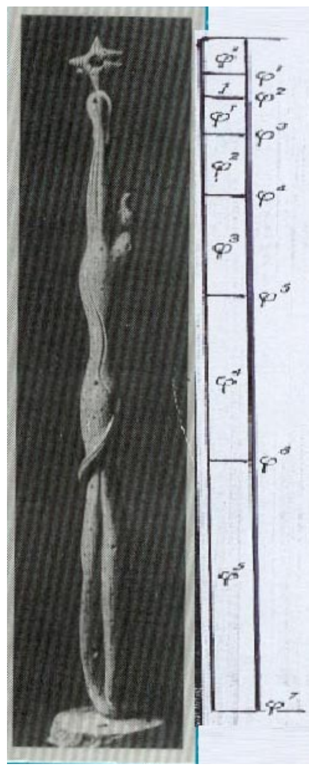


FIGURA 95: El pueblo español tiene un camino que conduce a una estrella(Alberto Sánchez).

Ignacio Llamas(1970) es un artista joven que ha querido transmitir en su obra la belleza entendida como relación de contrarios: orden y caos, simetría y asimetría, perfección e imperfección. En esta unión de opuestos también caben lo antiguo y lo nuevo, como vemos en su obra *Tratados y Estructuras*(fig.96) donde retoma a Vitruvio y estructura la composición según el número áureo. También podemos apreciar en dicha figura el trazado de un triángulo 72º-72º-36º. "La principal función del arte es la comunicación de un contenido: aquello que de inmortal hay en el ser humano…La obra de arte toca alguno de los arquetipos innatos al hombre mediante los cuales se comunica algo del ser."[6]

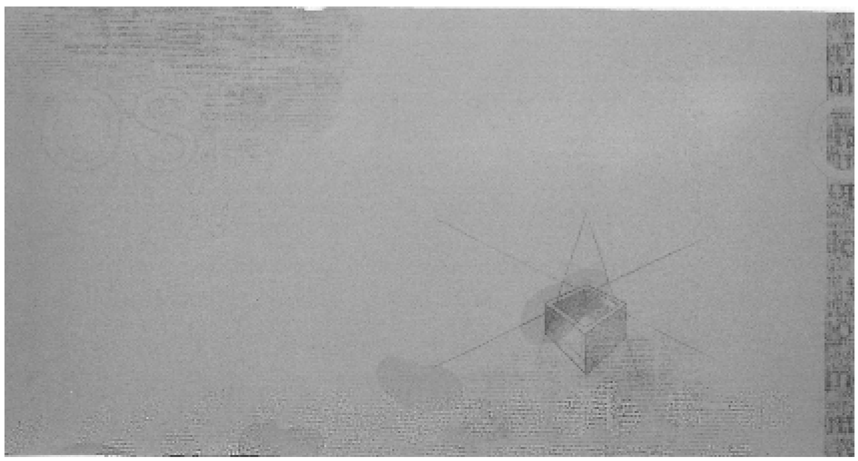


FIGURA 96: Tratados y estructuras(Ignacio Llamas)

[6] LLAMAS, Ignacio: Cuaderno de instrucciones, Madrid, 2000.

V. SECCIÓN ÁUREA EN ARQUITECTURA

V.1. ARQUITECTURA MEGALÍTICA.

La investigación arqueológica y astronómica ha establecido que los grandes monumentos de piedra construidos por todo el norte de Europa hace alrededor de 3.5000 años eran brújulas, calendarios y computadoras gigantes de los patrones estacionales, así como altares sagrados para los rituales religiosos. El más famoso de esos monumentos megalíticos es *Stonehenge*, en las llanura de Salisbury en Inglaterra, construido en etapas entre los siglos XX y XVI a. C. Vemos en la figura 97a, que existe relación áurea entre el ancho de la Herradura de megalitos de tres piedras grises azuladas y el diámetro del Círculo Pagano o Druida. El rectángulo formado por las Piedras de las Estaciones se aproxima al rectángulo √5, formado por dos rectángulos áureos recíprocos(fig. 97b)

Vista general de Stonehenge

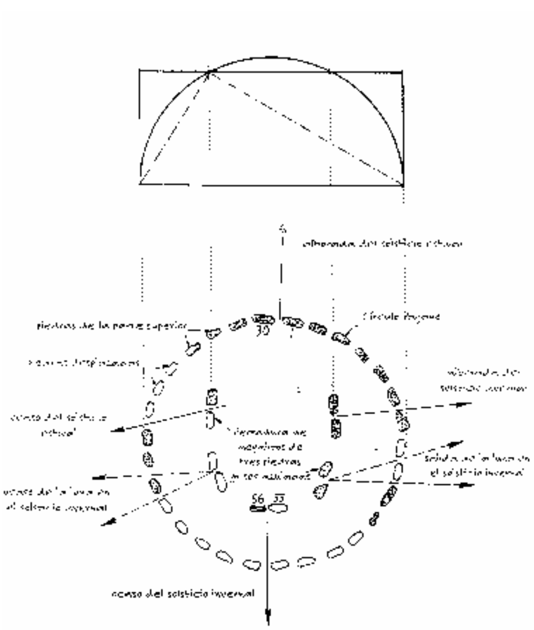


FIGURA 97a: Alienamiento de Stonehenge

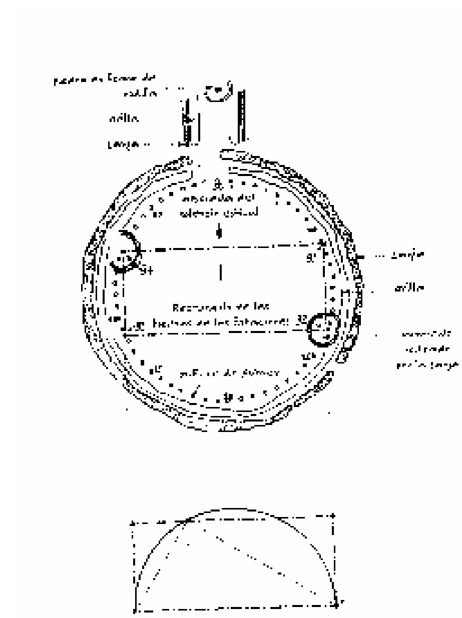


FIGURA 97b: Plano de Stonehenge

El análisis geométrico, con la ayuda de las líneas centrales de los pilares y las diagonales, también muestra que las proporciones de los arcos paganos resultan cercanas a las relaciones del triángulo 3-4-5, como lo indica la fig. 97c.

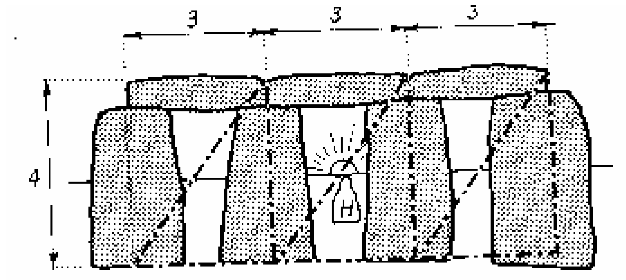


FIGURA 97c:Arcos paganos de Stonehenge

V.2. ARQUITECTURA ORIENTAL

2.1.Zigurats

El zigurat es el elemento más característico en los templos de la arquitectura mesopotámica. Zigurat es una torre formada por terrazas a las que se ascendía por rampas, de los que subsisten trozos de los basamentos. El Zigurat más famoso fue la *Torre de Babel en Babilonia*. Livio Catullo Stecchini reconstruyó los contornos básicos de éste, como vemos en la fig.99. Las construcciones de la sección áurea y del triángulo pitagórico revelan correspondencias con las armonías musicales fundamentales de diatéssaron-cuarta y de diapente-quinta.

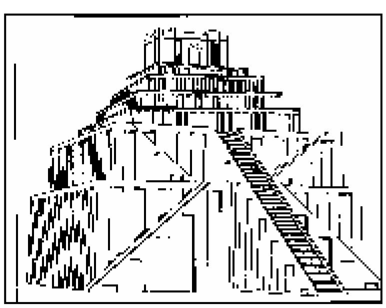


FIGURA 98: Zigurat de Babilonia

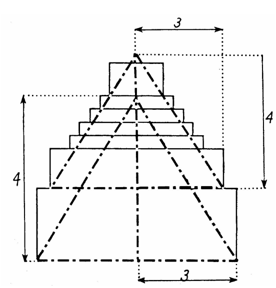


FIGURA 99: Recconstrucción del Zigurat de Babilonia por L.C.Stecchini

Otra reconstrucción del *Zigurat del Rey Ur Namu*, (alrededor del S. XXII a. C.), nos revela que las alturas y los anchos de las terrazas y del templo están todos intervinculados por invisibles relaciones proporcionales. Todas las líneas de estas redes comparten las proporciones de la sección áurea (5:8)y del triángulo pitagórico (3:4). Un solo rectángulo áureo abarca la altura y el ancho totales de la elevación sudeste y cuatro de ellos la elevación noreste(fig.100).

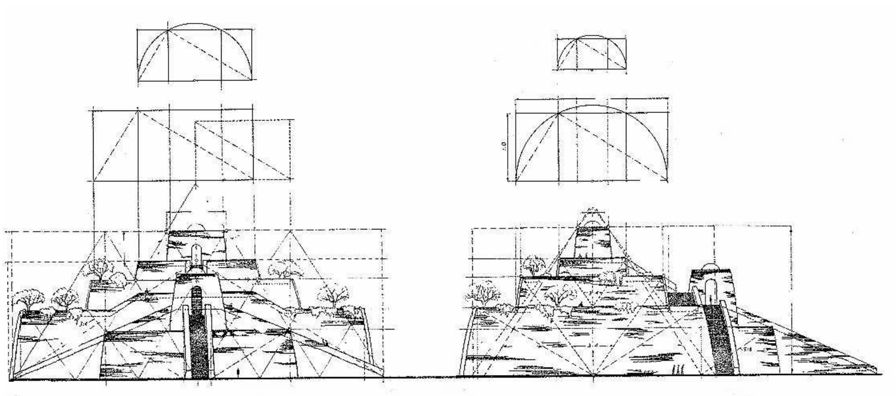
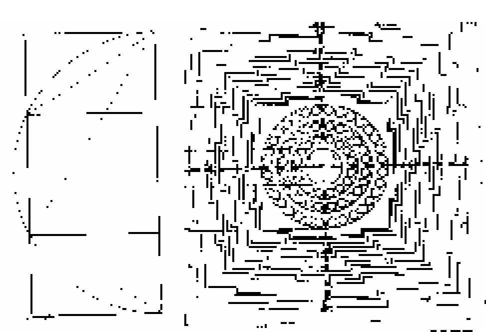


FIGURA 100: Zigurat de Ur

V.2.2. Arquitectura budista

Borobudur, la estupa budista más grande del mundo(fig.101), consta de ocho terrazas cubiertas de estupas, que emergen de una base elevada cuadrada, de 115 metros de lado. Las cinco terrazas interiores son cuadradas, las tres superiores, circulares: 3-5-8 son, por supuesto, los núme5ros de Fibonacci.

FIGURA 101:Estupa budista



V.2.3. Otras construcciones orientales

En Japón, *la Pagoda de Yakushiji* (fig. 102), está construida en madera y consta de seis techos, todos de diferente tamaño y levantados unos sobre el otro, hasta culminar en una elevada aguja. Sobre el piso asentado en el suelo hay dos niveles de pisos. La estructura completa se articula en ocho alturas iguales. Dos de ellas contienen el piso asentado en el suelo, otras dos la aguja, y las restantes cuatro, los dos pisos superiores intermedios. Las alturas de los tres niveles más bajos y de los tres más altos se relacionan con las alturas de los dos centrales en proporciones cercanas a las áureas, tal como lo hacen las cinco inferiores con las tres superiores y viceversa.

El predominio de estas proporciones recíprocas en la estructura total también se demuestra por el hecho de que su contorno global se encuadra perfectamente en un solo triángulo de la estrella pentagonal, patrón de relaciones áureas.

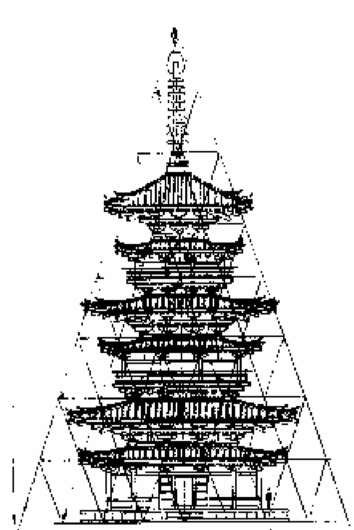


FIGURA 102: Pagoda de Yakushiji

Busquemos ahora las armonías proporcionales del *jardín del templo Ryoanji Zen*, cerca de Kyoto, que data de principios del S.XV (fig. 103a). Este Jardín nació para ser contemplado, nunca para caminar sobre él. Hay cinco grupos de piedras, aparentemente dispuestos al azar sobre la arena rastrillada, pero existen sutiles proporciones que unen la forma global del jardín con las distancias entre las rocas y el recinto.

Las proporciones del campo de arena corresponden a dos rectángulos áureos recíprocos y la posición de las rocas se regula mediante líneas diagonales, y dentro de estas líneas, por medidas áureas(fig.103b).

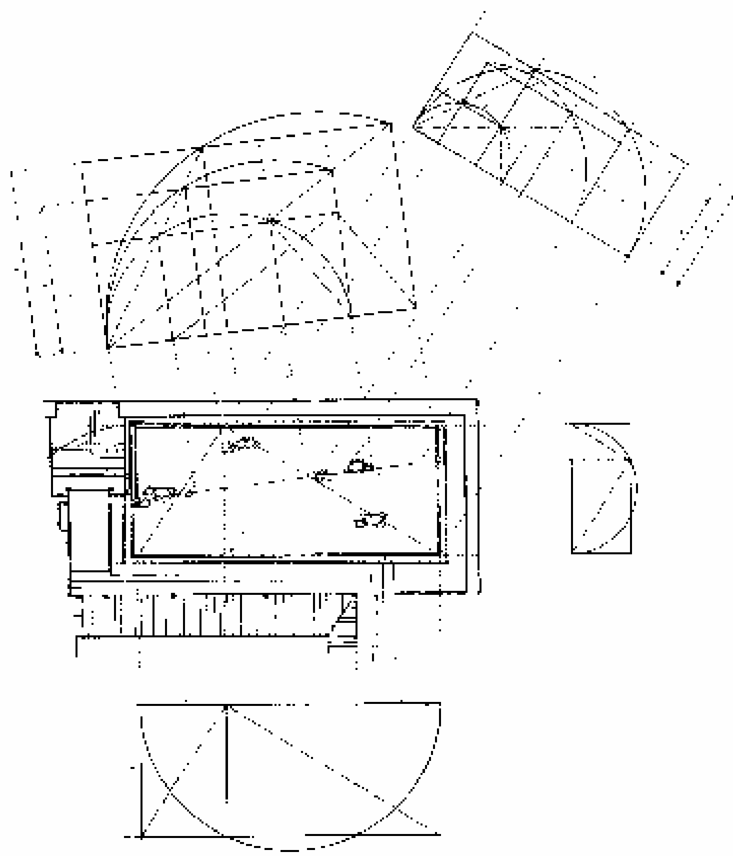


FIGURA 103b: Descomposición armónica del Jardín del templo de Ryoan-ji

Vamos ahora a una de las joyas arquitectónicas de Japón, la *Mina del Este del Santuario de Ise*, dedicada a la diosa del alimento. Data del S.XV pero su conservación es envidiable dado que cada veinte años se demuele y se reconstruye con el objetivo de preservar su integridad original.

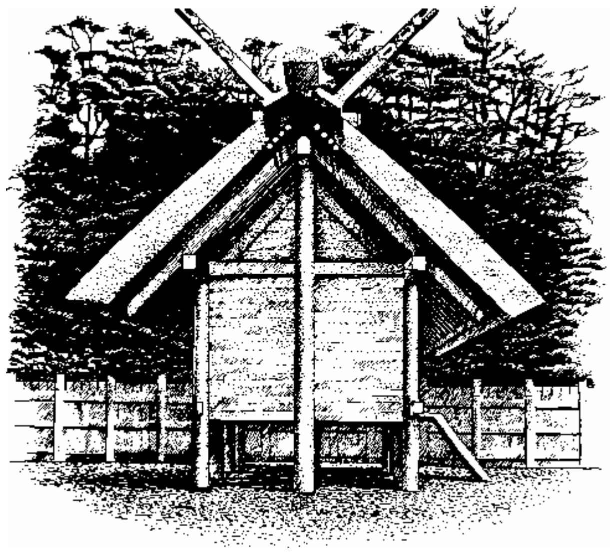


FIGURA 104: Mina del Santuario de Shinto de Ise.

Está construída según los prototipos prehistóricos de viviendas sobre pilotes. El plano del edificio es un solo rectángulo áureo. La elevación del frontón, desde el piso hasta la línea del saliente y de alero a alero, corresponde a dos rectángulos áureos. La elevación lateral, entre el piso y la línea del saliente y entre los bordes del techo, se encuadra nuevamente en dos rectángulos áureos, sobre los que se asientan otros dos más grandes que cubren el techo propiamente dicho(fig. 100).

Todas las casas del té y los jardines de té de Japón fueron diseñadas por venerados maestros del té: pintores, poetas, arquitectos y jardineros, como Koburi Enshu, que construyó el *salón de té de Bosén*. El entramado áureo de estas casas se muestra en la fig.105.

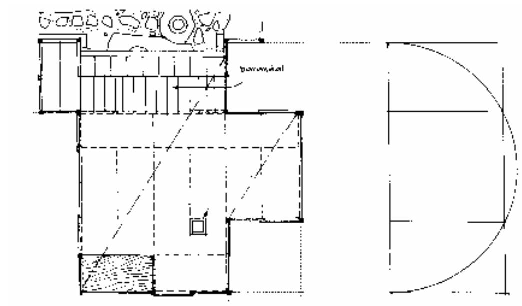


FIGURA 105: Casa de té Bosen

El plano de la *Villa Imperial Katsura* en Kyoto, es otro ejemplo de "arquitectura áurea". En la fig. 106, vemos como las aberturas principales forman con los paneles de Shoji la típica estructura áurea. De la misma forma el espacio entre columnas comparte relacionas análogas.

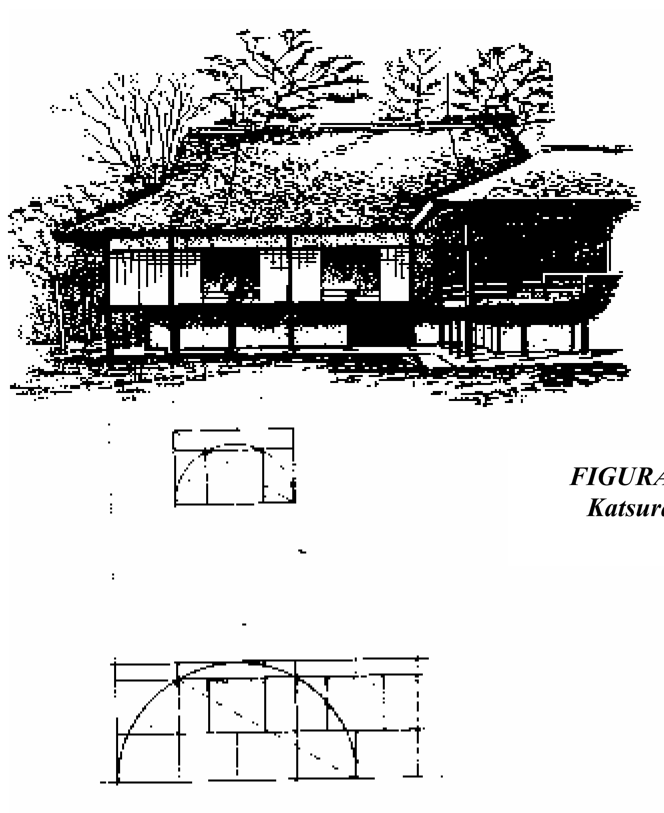


FIGURA 106: Villa Imperial Katsura, fachada sudeste.

V.3. ARQUITECTURA EGIPCIA

Se caracteriza la arquitectura egipcia por el empleo de la piedra, en grandes sillares. La organización arquitectónica tomando como elemento básico la columna es una aportación esencial del arte egipcio, como lo es la belleza en la razón matemática de las proporciones, es decir, de las relaciones entre las partes que integran el edificio.

Las construcciones más características del arte egipcio son las tumbas y los templos. Como no destacar aquí *La Gran Pirámide de Keops*(fig.106).

FIGURA 106: Pirámide de Kéops

"Herodoto relata que los sacerdotes egipcios le habían enseñado que las proporciones establecidaa para la Gran Pirámide entre el lado de la base y la altura eran tales, que el cuadrado construido sobre la altura vertical era exactamente igual al área de cada una de las caras triangulares".[1]

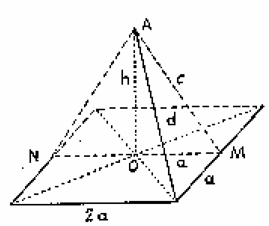


FIGURA 107: Esquema de Pirámide Kéops.

[1] Op cit: Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes, p 240.

Traduciendo esta frase a términos algebraicos y tomando como figura de referencia la 107, tenemos:

$$h^2 = c \cdot a$$

aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OAM:

$$c^2 = h^2 + a^2$$
$$h = c^2 - a^2$$

sustituyendo h^2, dividiendo por a^2 y llamando $x = c/a$:

$$c^2 - a^2 = c \cdot a$$
$$x^2 = x + 1$$

que es la ecuación del Número de Oro.

V.4. ARQUITECTURA INDÍGENA AMERICANA

En México, alrededor del 300 a.C. se construyeron enormes estructuras piramidales destinadas, a propósitos religiosos y astronómicos, que presentan patrones proporcionales básicos similares a los de la Gran Pirámide de Egipto y los de Stonehege.

La Pirámide del Sol y la Pirámide de la Luna en Teotihucán, cerca de la ciudad de México, fueron en cierta época el corazón de una espléndida civilización metropolitana. La figura 108 muestra cómo los contornos de la *Pirámide del Sol* están contenidos en dos conjuntos de triángulos de 5/8 y 3/4.

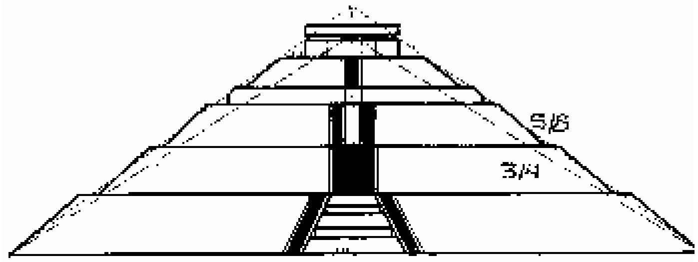


FIGURA 108: Pirámide del Sol

Otras pirámides mejicanas que se encuadran en los contornos del triángulo de 3/4, como se puede apreciar en los dibujos que representan las elevaciones de dos de ellas, son la *Pirámide de Nichos en el Tajín*(fig.110) y *el Castillo en Chichen Itzá*(fig.109).

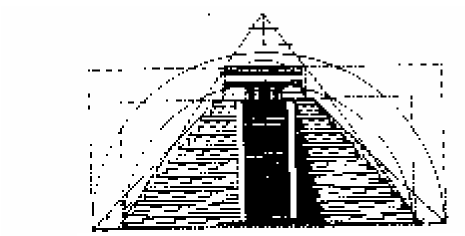


FIGURA 109: Castillo Chichén Itzá.

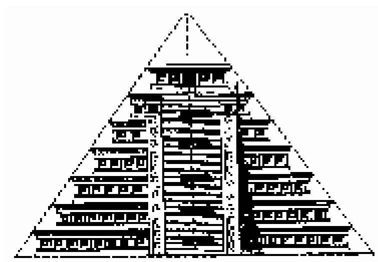


FIGURA 110: El Tajín

V.5. ARQUITECTURA ANTIGUA: GRECIA Y ROMA

Estudiaremos aquí a Grecia y Roma conjuntamente basándonos en que los principios de arquitectónicos romanos derivan de los griegos y que el único testimonio escrito de los cánones arquitectónicos usados en la Antigüedad es un tratado de diez libros, obra del arquitecto romano Vitruvio, titulado *De Architectura,* que no es más que un compendio de directrices griegas.

Pero analicemos esta obra de Vitruvio, donde el arquitecto romano da una serie de fundamentos técnicos para la correcta ejecución y trazado de edificios, y detengámonos particularmente en aquellos fragmentos en los que se habla de proporción y armonía. La arquitectura, dice Vitruvio, depende del orden, de la disposición, la propiedad, la euritmia, la economía y la simetría. Esta última da concordancia a las proporciones del conjunto.

Euritmia es la belleza y propiedad en la disposición de los elementos de una obra. La simetría es un acuerdo correcto entre los miembros de la propia obra, y la relación entre las diferentes partes del proyecto general en su totalidad, de acuerdo con una parte determinada, seleccionada como modelo. De la misma forma que en el cuerpo humano existe una especie de armonía simétrica entre el antebrazo, la palma de la mano, el dedo y otras partes pequeñas, lo mismo ocurre también en los edificios perfectos. Fue al seleccionar partes del cuerpo humano como módulo-modelo, como hacían los griegos al diseñar los templos, como se forjaron los primeros eslabones de una cadena histórica que une a Vitruvio, Durero, Leonardo y un sinfín de artistas más hasta llegar a Le Corbusier. Hagamos aquí un paréntesis para profundizar en la idea que fascinó a estos artistas que hicieron corresponder su ideal de belleza y armonía con la armonía existente en la correspondencia de medidas entre las partes del cuerpo humano.

V.5.1. Armonías humanas

En toda la cultura griega el cuerpo humano fue considerado como el modelo vivo más perfecto de simetría en sus formas, de armonía en todas sus proporciones, de euritmia. Cuatro siglos más tarde Vitruvio, comienza su tratado de arquitectura con la recomendación de que los templos, para ser magníficos, se construyan análogos al cuerpo humano bien formado, en el cual, dice, existe una perfecta armonía entre todas las partes. Entre ellas menciona la altura que, en el hombre bien formado, es igual a la amplitud de sus brazos extendidos. Estas medidas iguales generan un cuadrado que abarca todo el cuerpo, en tanto que las manos y los pies desplazados tocan un círculo centrado en el ombligo. Esta relación del cuerpo humano con el círculo y el cuadrado se asienta en la idea arquetípica de la “cuadratura del círculo”, que fascinó a los antiguos, porque esas formas se consideraban perfectas e incluso sagradas.

Cuando el Renacimiento redescubrió la vigencia clásica, Leonardo ilustró con su famoso dibujo (fig.61) la versión de esta idea expuesta por Vitruvio. El diagrama de barras y el diagrama triangular que aquí se añaden al dibujo, muestran cómo las partes adyacentes de este cuerpo comparten proporciones comprendidas en el rango de la sección áurea y del triángulo pitagórico. Leonardo, como otros maestros del Renacimiento, fue un gran estudioso de las proporciones armoniosas. Al igual que El, Durero publicó varios volúmenes sobre las proporciones humanas. Sus teorías incluyen el uso de escalas armónicas, para ilustrar esas relaciones en los dibujos de los cuerpos de un niño y de un hombre.

En la siguiente figura 111 retomamos este dibujo al que hemos añadido un diagrama de proporciones áureas y del rectángulo pitagórico.

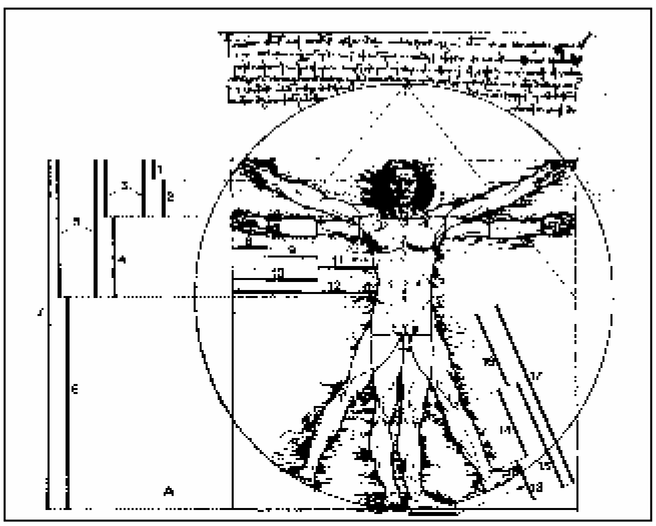


FIGURA 111: Hombre de Leonardo con diagrama áureo.

La división determinada por el ombligo es la manifestación más importante de la sección áurea en el cuerpo humano, aunque se encuentra también en las demás proporciones de las partes del cuerpo. Sir Th. Cook en *The Curves of Life* señala sobre un cuerpo femenino estas medidas(fig. 112)

La idea de que las armonías fundamentales de la música se corresponden con las proporciones adecuadas del cuerpo humano y deben, por lo tato, continuarse en la arquitectura, se convirtió en una idea dominante entre los maestros del Renacimiento. “La belleza es la armonía y es acuerdo de todas las partes, logrados de tal manera que nada se podría agregar, quitar o alterar, excepto para empeorarlo”. Son las palabras de otro maestro del Renacimiento, Leon Battista Alberti, arquitecto y autor de un famoso tratado sobre arquitectura.

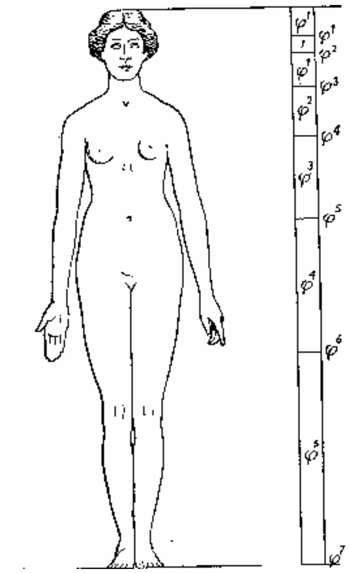


FIGURA 112: Estudio de medidas áureas sobre un cuerpo femenino.

V.5.2. Construcciones arquitectónicas

Siguiendo el criterio de diseño griego -diseñar los templos según proporciones humanas- se recomienda que la longitud del templo duplique su ancho y que las proporciones del vestíbulo de entrada abierto (pronaos) y de la habitación interior cerrada (cella) estén en relación 3-4-5 (3 la profundidad del pronaos, 4 el ancho y 5 la profundidad de la cella). La Fig 113a muestra las relaciones proporcionales de los templos según Vitruvio comparadas con ejemplos reales (*Templo de Hércules en Cori y Templo de Themis en Rhamnus*) donde observamos también la correspondencia de estos con las armonías musicales.

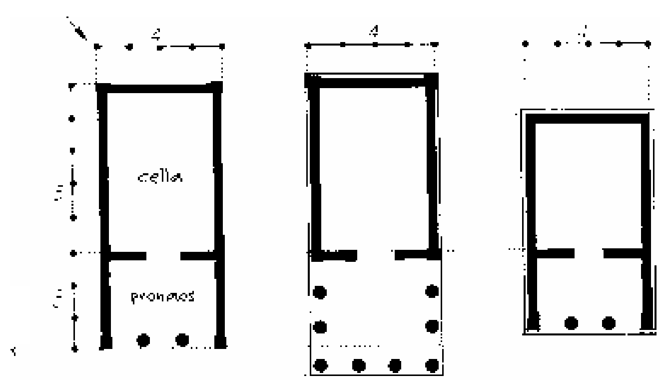
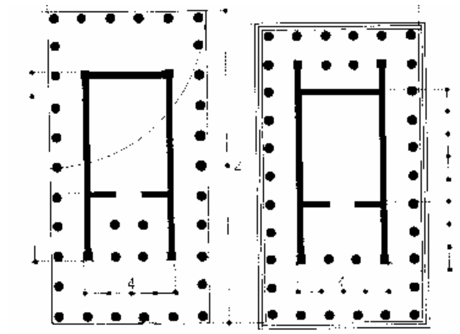


FIGURA 113a: Proporciones de Templos.

En la fig. 113b. Comparamos el *Templo Corinto de Labranda* con las medidas de Vitruvio.

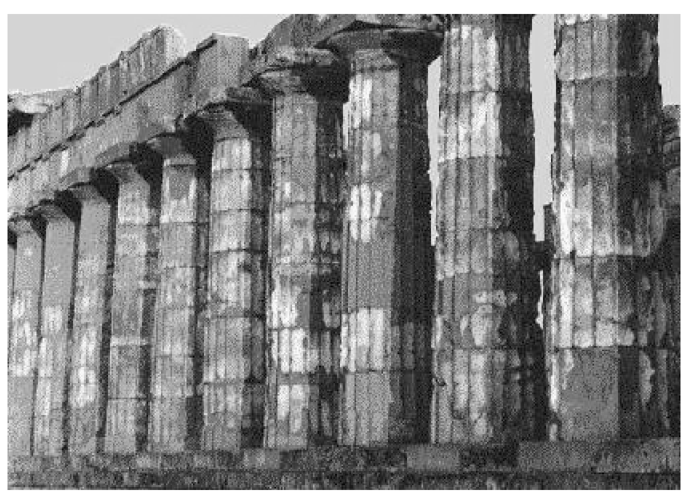
FIGURA 113b: Comparación de proporciones de un templo según Vitruvio y las del templo corinto de Labranda.



Vitruvio también aportó muchas otras recomendaciones en cuanto a las proporciones de los templos, todas basadas en modelos griegos. Por ejemplo, se refirió a las distancias entre columnas y a la altura correcta de éstas, ambas medidas expresadas en términos de diámetro columna. Ese elemento, elegido para expresar las proporciones de la estructura completa (tal como los pies lo hacen respecto de las proporciones del cuerpo humano), se llama módulo, concepto que desempeña un importante papel a todo lo largo de la historia de la arquitectura.

Las proporciones recomendadas para los templos griegos se pueden apreciar en tres ejemplos pertenecientes a estilos distintos: el *Templo de la Concordia de Agrigento*, el *Partenón de Atenas* (siglo V a.C.), ejemplos del orden dórico, y el *Templo de Atenea de Priene* (siglo IV a.C.), característico del estilo jónico.

El Partenón, levantado originariamente en Agripa, como pórtico de sus termas, dispuesto más tarde para servir de templo y provisto de su atrio, ha conseguido conservar su esencia a lo largo del tiempo, más cercana a dioses que a hombres.



El esquema dinámico que Hambidge propuso al acabar su estudio sobre él: *The Parthenon and Other Greek Temples, their Dynamic Symetry,*[2] encuadra la fachada en un solo rectángulo y marca las principales proporciones por medio de cuatro diagonales(fig.114a).

Las columnas ejemplifican la diferencia entre el estilo dórico y jónico: la primera es más maciza y la segunda, más esbelta. La altura de las columnas del *Partenón* contiene cinco veces y media el ancho de la base de la columna. Los capiteles consisten en simples losas cuadradas que descansan sobre formas, cuyos contornos se asemejan a dos manos extendidas. La parte superior de los capiteles de las columnas está cerca del punto de la sección áurea de la altura total, y las líneas centrales de las dos columnas de las esquinas, más las líneas del piso y la parte superior del entablamiento forman un rectángulo de $\sqrt{5}$, que consta de dos rectángulos áureos recíprocos, Las columnas frontales del Partenón con sus siete espacios intermedios incorporan tanto el coeficiente 3/4 del triángulo pitagórico y la correspondiente armonía musical de cuarta-diatéssaron, como afinidad con proporciones áureas o armonía de quinta-diapente.

[2] Op. Cit.: Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes, p 201.

El plano del *Partenón* corresponde a dos rectángulo áureos recíprocos y refleja de ese modo la armonía de diapente. El naos o cella y el tesoro o cámara de la virgen corresponden a la proporción áurea(fig. 114b).

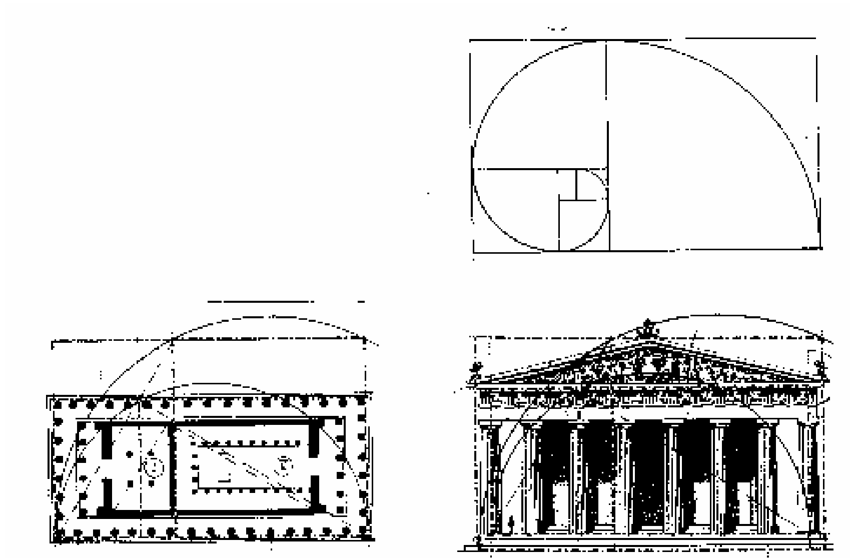
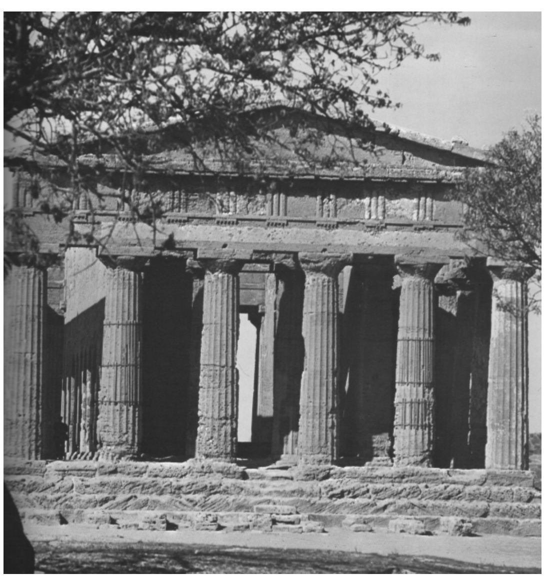


FIGURA 114b: Plano y fachada del Partenón



El *Templo de la Concordia de Agrigento* es, tanto en el diseño de la planta, como en el alzado de la fachada, un canto a la divina proporción(fig.115a).

Jules Tannery observó que la longitud total era igual al cuádruple del lado del decágono inscrito en un círculo cuyo radio era igual al ancho del frontón[3].

Pasando ya al orden jónico, estudiemos el *Templo de Atenea de Priene*, cuya fachada se eleva en dos rectángulos áureos verticales y la altura de las columnas contiene nueve veces el ancho de la base de la columna y el capitel está adornado con dos volutas en forma de concha.

Las columnas frontales poseen las relaciones 2/3 y 3/5 cercanas al diapente y tres líneas. El punto superior de los capiteles se sitúa en la línea de encuentro de dos rectángulos áureos recíprocos y tres líneas centrales de columnas contiguas abarcan un solo rectángulo áureo.

La longitud del *Templo de Atenea* es casi el doble del ancho, lo cual confirma lo dicho por Vitruvio y expresa la armonía 1/2 (octava), su pronaos se ajusta a la proporción 3/4 y su naos, al igual que en el *Partenón*, se ajusta a la sección áurea(fig. 116).

[3] Op. Cit.: Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes, p 201.

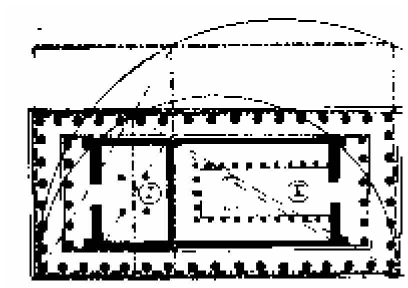


FIGURA 115: Planta del Templo de Atenea.

La arquitectura griega y la romana se unifican en los límites proporcionales, como ya dijimos. Lo ilustraremos con dos ejemplos: el *Arco de Triunfo de Constantino* (Fig.117) *y el Coliseo* (fig.118), ambos en Roma.

La forma global de la estructura del *Arco de Triunfo* resulta cercana a dos rectángulos áureos. La parte superior de la cornisa principal y la línea en la que aparecen los arcos menores coinciden con los lados de dos rectángulos áureos recíprocos. Las alturas del arco mayor y los menores, así como su diferencia, y las dos articulaciones del arquitrabe forman una serie de relaciones áureas.

El estudio proporcional del *Coliseo* muestra que el plano se encuadra en dos rectángulos áureos y que el ancho de la elipse gigante que forman la pared exterior se relaciona con el ancho de la arena central en la proporción de √5 generada por dos rectángulos áureos recíprocos.

Todas estas proporciones se aproximan a la armonía musical fundamental de quinta, en tanto que el emplazamiento central de la cornisa sobre el segundo piso corresponde a la octava.

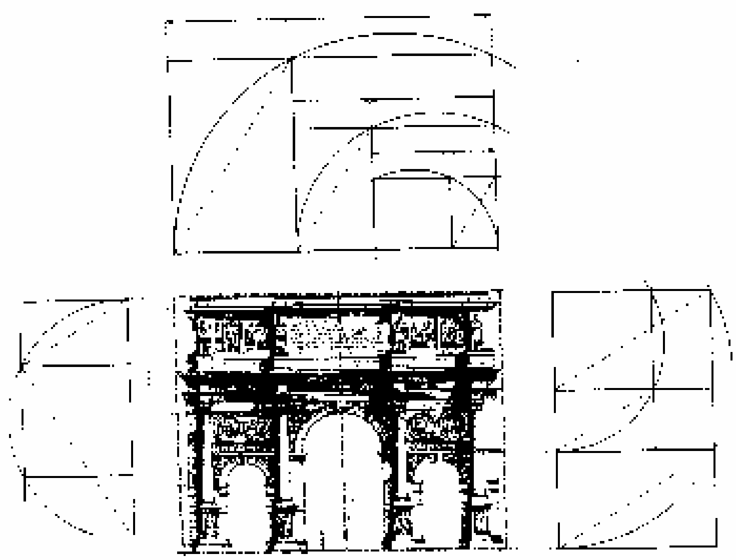


FIGURA 117: El Arco de Triunfo de Constantino

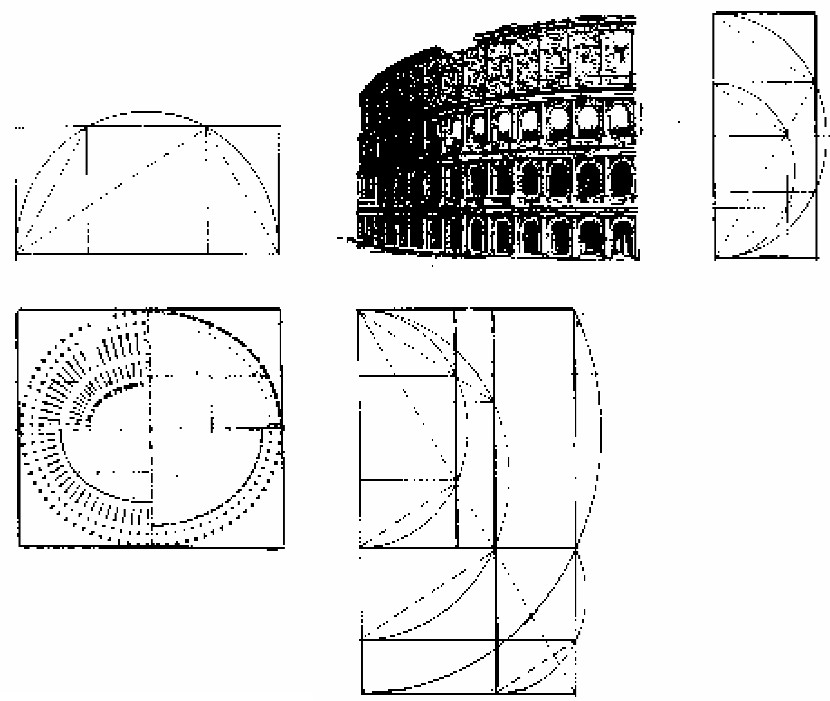


FIGURA 118: Estudio proporcional del Coliseo.

V.6. ARQUITECTURA GÓTICA

El arte gótico occidental europeo está comprendido entre el Románico y el Renacimiento y contraponiéndose al arte clásico. En los primeros tiempos todavía el edificio gótico revelará su apoyo en la arquitectura románica, pero acabará oponiéndose a ella radicalmente. La arquitectura gótica frecuentemente adoptará el triángulo egipcio como trama reguladora de sus fachadas, introduciendo así en ellas un crecimiento armonioso. Vemos en la fig.119 una reconstrucción, hecha por el arqueólogo F.M. Lund, del alzado y la fachada de una Catedral gótica (*Catedral de Nidaros)* utilizando este triángulo como elemento generador de formas.

Al comparar, dicho arqueólogo, las plantas de muchas de las catedrales góticas europeas encontró en ellas dos elementos constantes: el doble cuadrado y la sección áurea(fig.120).

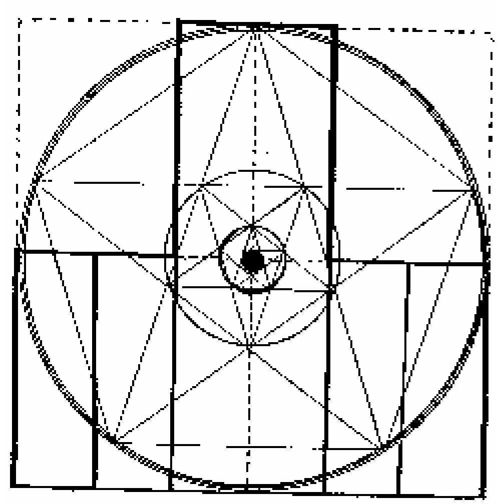


Figura 120: Trazado gótico según Lund

En la nave de la *Catedral de Colonia* (fig. 121), observemos los siete pentagramas concéntricos en un estudio armónico del mismo autor citado anterioirmente.

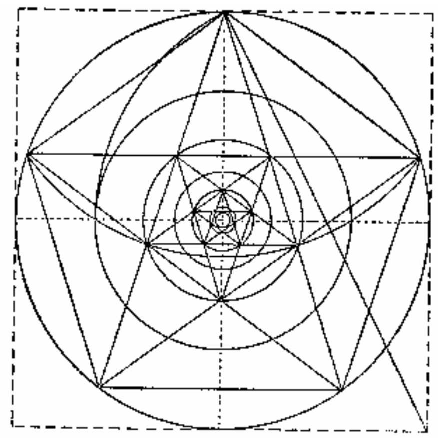
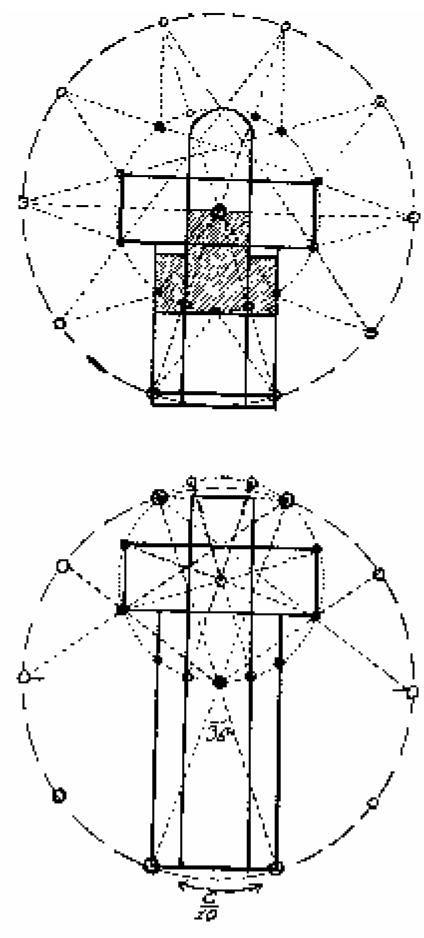


FIGURA 121: Catedral de Colonia



Otros trazados góticos típicos nos lo muestra Moessel en la (fig. 122) donde destacamos las plantas pentagonales y decagonales.

FIGURA 122: Trazados Gótico (Moessel)

V.7. ARQUITECTURA RENACENTISTA

V.7.1. Arquitectura Renacentista italiana: quattrocento

Como hemos visto anteriormente, tanto en el capítulo en el que estudiábamos el arte como aquel en el que hablábamos de la armonías humanas, los creadores renacentistas retoman los cánones clásicos en todas las artes . En la arquitectura hombres como León Batista Alberti o Palladio son fieles a estas antiguas normas.

Leon Bautista Alberti(†1472) figura de gran trascendencia que cultivó también las letras y ha dejado una serie de tratados (*De Pictura*, *De sculptura, De re aedificatoria*) con gran repercusión. Su arquitectura, basada en relaciones matemáticas establecidas sobre la proporción áurea, es de autentica monumentalidad. Su obra maestra, *La Iglesia de San Andrés* de Mantua (fig.123)presenta una fachada inspirada en los arcos de triunfo romanos, y en el interior funde la solemne nave única, de bóveda de cañón y capillas laterales, con el crucero, cubierto con gran cúpula. Con respecto a proporciones áureas podemos decir que la distribución de columnas en el eje horizontal, y la de vanos en el vertical, sigue una regla áurea. El crucero de la planta es un rectángulo áureo.

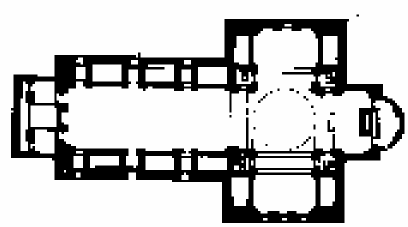


FIGURA 123*: *Fachada y planta de S. Andrés de Mantua (Alberti).

Otra obra suya, la *Iglesia de Santa María Novella*(fig.124), demuestra la preocupación de Bautista por la armonía de los números y las proporciones musicales. Toda la fachada se descompone en proporciones sencillas y toma la medida de oro para situar el segundo piso, en donde vuelve a usarla para encuadrar el ojo de buey.

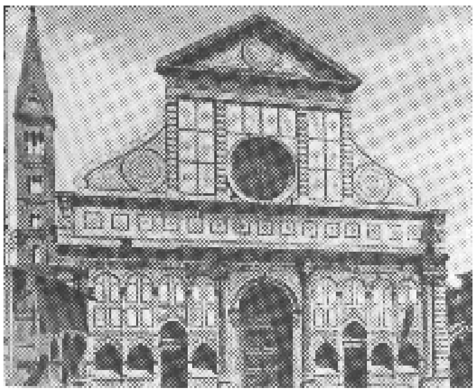


FIGURA 124: Sta. María Novella de Florencia(Alberti)

Otro gran arquitecto, Filippo Brunelleschi († 1446) utlizó proporciones áureas en la iglesia de *Santa María de las Flores* en Florencia(fig.125). Los puntos Φ se sitúan en la línea de alzado donde comienza el tambor de la cúpula, y en planta separa el diámetro de la cúpula del ábside.

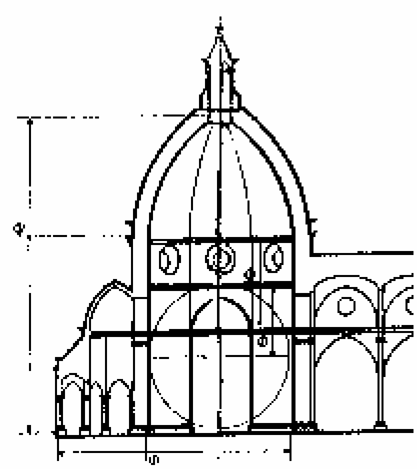


FIGURA 125:Esquema de la Iglesia de Santa María de las flores en Florencia.

Suyas son también las dos grandes iglesias basilicales de Florencia, *San Lorenzo y Santo Espíritu,* trazadas con propociones del número de oro(fig.126).

V.7.2. Manierismo italiano

Se dice que es Miguel Angel quién inicia esta corriente, pero destaquemos aquí a Palladio. Andrea Palladio de Vicenza (1508 -1580), estuvo varias veces en Roma y acumuló una experiencia teórica que recoge en sus *Quattro libri dell' Arquittetura* donde resucita el modelo romano de Vitruvio. Realizó numerosas obras de iglesias y villas en Vicenza, todas ellas al igual que las de Vitruvio o Alberti con un estudio estricto de simetría y geometria, determinado por un sistema de proporciones meticuloso. Veamos aquí (fig.127) *Villa Rotonda* donde la estructura evoca la de los templos romanos.

FIGURA 127: Villa Rotonda (Palladio).

V.7.3. Arquitectura Renacentista española

En 1526 se publica en Toledo el libro de Diego de Sagredo, *Medidas del Romano* que es el primer tratado renacentista escrito fuera de Italia en el que se insiste en la proporción y disposición de los elementos. Muchos fueron los arquitectos de esta época que siguieron estas directrices.

En Toledo, el *Hospital de Santa Cruz*(fig.128), proyectado por ************************ presenta una fachada rica y sorprendente tratada con una extraordinaria libertad aún gótica aunque el detalle sea renacentista. Ésta se encuadra en un rectángulo de proporciones áureas, que vuelve a generar otro rectángulo de este tipo que contiene un cuadrado de la misma altura de la portada.

Otro ejemplo de esta arquitectura la encontramos en la fachada de la *Catedral de Salamanca*, obra de autor desconocido, que podemos descomponer en diversos rectángulos áureos que se distinguen fácilmente(fig. 129).

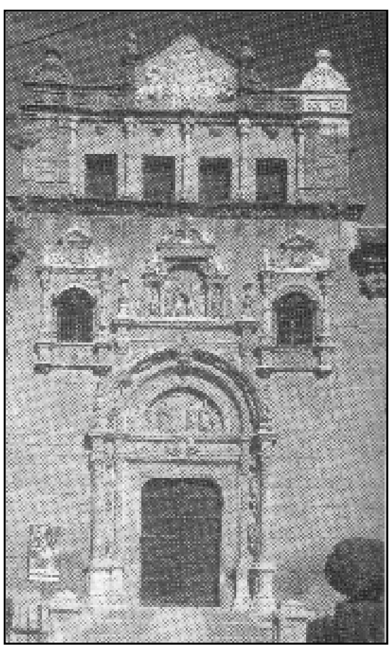


FIGURA 128: Hospital de Santa Cruz de Toledo.

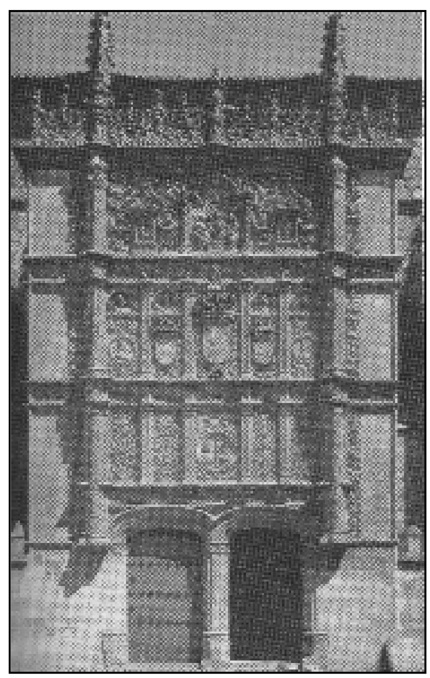


FIGURA 129: Fachada de la Catedral de Salamanca.

La fachada principal de la *Universidad de Alcalá de Henares* nos muestra otro ejemplo de "arquitectura áurea" en la que Rodrigo Gil de Hortañón ha realzado la importancia de los huecos con un hermoso encuadre (fig. 130)

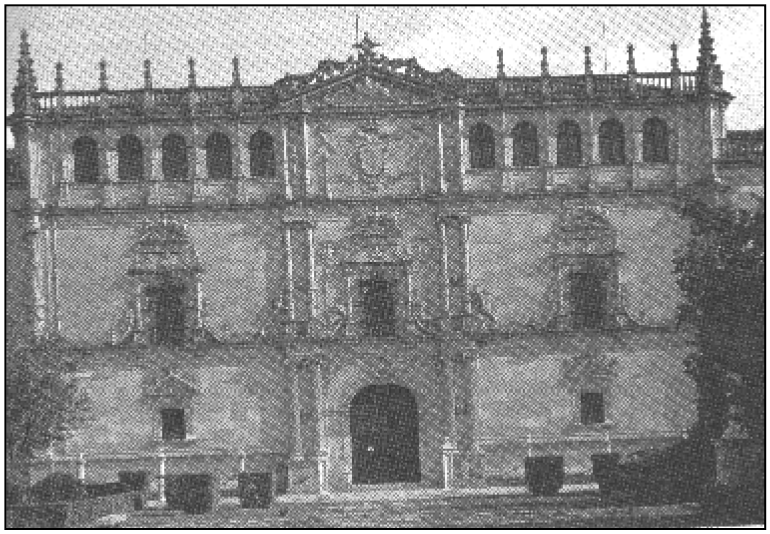


FIGURA 130: Fachada de la Universidad de Alcalá de Henares(Rodrigo Gil).

Para terminar con el Renacimiento arquitectónico en España, hablemos de Juan de Herrera y una de sus obras cumbres, la *Catedral de Valladolid* (fig.131), donde al igual que Alberti concibe todo el conjunto en función de las proporciones. La fachada hasta la base del remate de las torres dibuja un rectángulo en proporción 4/3. El centro de la ventana superior lo es a la vez de las diagonales que parten de los cuatro ángulos. Los dos triángulos rectángulos que se forman son del tipo egipcio en proporción 3/4/5.

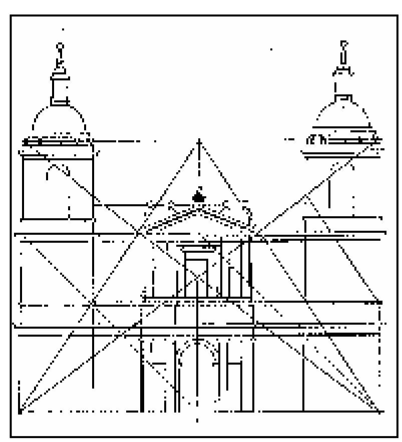


FIGURA 131:Esquema de Catedral de Valladolid.

V.8. ARAQUITECTURA ROCOCÓ

V.8.1. ROCOCÓ FRANCÉS

El arquitecto francés que mejor encarna este estilo es Jacques Gabriel (†1742). Gabriel siguió los cánones del número de oro en el diseño de los palacios de la *Plaza de la Concordia de París*, tanto en lo referente a las columnatas como en lo referente a los pabellones(fig.132).

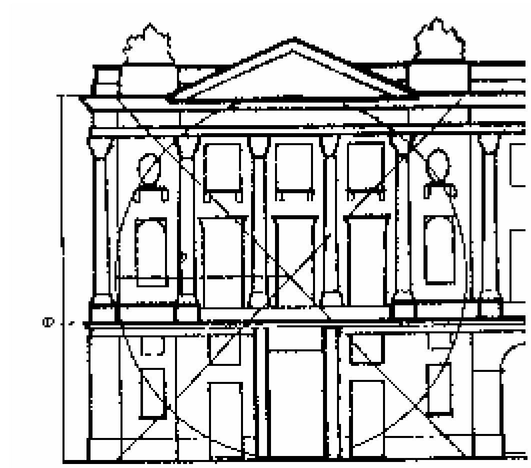


FIGURA 132: Plaza de la Concordia (J. Gabriel).

V.9. ARQUITECTURA EN LOS S.XIX-XX

V.9.1. Gaudí

Detrás de un movimiento llamado modernismo se encuentra Antoni Gaudí(1852-1926), iniciador y máximo representante del mismo en Cataluña. Su obra maestra, *La Sagrada Familia* de Barcelona, inacabada aún y de cuya construcción se encargó el arquitecto en 1883, es uno de los edificios más representativos del modernismo europeo.

El templo tiene planta basilical de cruz latina, cinco naves y un crucero de tres. Gaudí hizo el primer proyecto del templo partiendo del tipo gótico, acentúo la verticalidad de elementos, introdujo soluciones geométricas y estructuras insólitas y añadió una decoración minuciosa que reproducía en muchos casos la naturaleza. Sobre este último punto, hay que incidir en la relación existente entre naturaleza y sección áurea. Vimos en el primer capítulo que muchas formas naturales poseen formas espirales que se corresponden con espirales logarítmicas que se forman mediante una relación áurea. Un ejemplo, lo encontramos en muchas conchas de mar y una de estas conchas fue la que Gaudí reprodujo en una de las escaleras de la Basílica barcelonesa(fig. 133b).

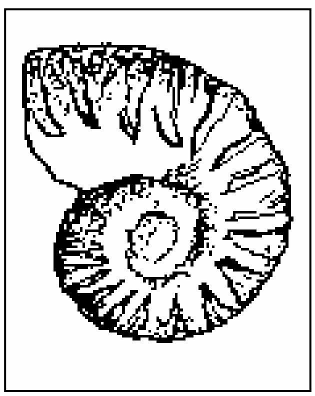


FIGURA 133a: Concha del Nautilus.

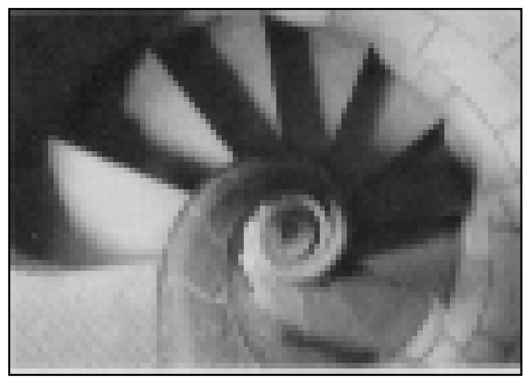


FIGURA 133b: Escalera de La Sagrada Familia.

Una de las formas totalmente nuevas que introdujo fue la de las columnas ligeramente helicoidales e inclinadas con base estrellada. De la intersección de dos helicoides surgen unas aristas que se inician en las partes cóncavas del polígono estrellado de la base, las cuales se multiplican hacia arriba, a medida que se producen unos giros. El primer giro se produce a una altura en metros igual al número de lados del polígono de la base. El segundo a la mitad en metros del número de lados y el tercer giro a la cuarta parte del mismo. Esta estructura hace crecer de una forma armónica el intercolumnio del edificio.

V.9.2. Le Corbusier

Charles-Édouard Jeanneret, Le Corbusier(1887-1965), consideró la naturaleza como encarnación de todo lo verdadero, bello, sano y original. Todo lo que llevó a cabo a lo largo de su vida giraba en torno a estos dos conceptos: naturaleza y geometría. Por una parte, una creencia casi religiosa en la naturaleza. Por otra, la voluntad de imponer una forma de organizar el mundo de una manera exacta y de acuerdo a la razón. La síntesis de la naturaleza y de la geometría, la necesidad no sólo de restituir las formas exteriores de la naturaleza sino de hacer visibles sus leyes estructurales para traducirlas en un severo lenguaje geométrico es una constante en este arquitecto. La geometría es, por decirlo de algún modo, la respuesta de la razón a la naturaleza; es continuación de la naturaleza como principio(en el plano intelectual) y su antítesis(en el plano plástico). Le Corbusier estaba destinado a crear el vocabulario de la nueva arquitectura.

Reasumió un género que nunca se había olvidado por competo pero que pertenecía esencialmente al Renacimiento y fue un factor fundamental en las obras de Alberti y Palladio. Se resumía en la convicción de que en la arquitectura sólo pueden garantizarse unas relaciones armoniosas cuando las formas de los elementos de un edificio se ajustan a ciertas relaciones numéricas que guardan una vinculación constante.

Le Corbusier elabora un sistema de medidas y proporciones cuya validez sería independiente de las diferentes convenciones en uso y que, sin esfuerzo podría trasladarse del sistema métrico a medidas anglosajonas. Este sistema lo llamó *Modulor,* palabra derivada de "módulo"(es decir, unidad de medida) y "section d´or" (sección de oro o sección áurea). El esquema fundamental del *Modulor* propone un denominador común de las dimensiones del hombre y de la geometría elemental: un hombre de pie, con el brazo alzado y el ombligo situado justo en medio, se halla inscrito en dos rectángulos de 1,13 m de altura, lo que da como total 2,26 m, que es la dimensión básica de una habitación. La medida que define la proporción entre la mitad inferior del hombre hasta el ombligo, del ombligo a la cabeza y, desde allí a la extremidad de la mano levantada es la sección áurea. La medida ideal del hombre sería por lo tanto de 1,829 m. A partir de este esquema(fig. 134) se establece una progresión de medidas que conduce a las grandes de la arquitectura. La importancia y papel fundamental que Le Corbusier otorga a la sección áurea viene marcado por la aparición de *Nuevas lecciones acerca de las proporciones del cuerpo humano* de Adolf Zeisig, quien afirmaba que la proporción de la sección áurea servía tanto para regir el macrocosmos como el microcosmos, y por la obra de Matila Ghyka *El Número de Oro*.

Pasemos ahora al estudio de algunas de las obras de este arquitecto. Le Corbusier hizo numerosos estudios de museos, pero solo construyó tres: el de Tokyo, el de Ahmedabad y el de Chandigard. El *Museo de crecimiento infinito* (fig. 135) en Argelia, consta de un volumen posado sobre pilotes cuya entrada se hace por debajo desde el centro el edificio., desde allí las salas se suceden inscritas en una espiral que recuerda nuevamente a la concha del nautilus(fig. 133a). La forma que da a este museo tiene, más allá de la búsqueda de la belleza mediante la reproducción de formas orgánicas, el propósito de crear un edificio flexible, capaz de crecer según las necesidades y los recursos con los que se cuente. Es un edificio precursor de la "arquitectura móvil". El de Tokyo

VI. OTROS

Me ha parecido interesante desarrollar en un capítulo final -dada mi condición de estudiante de Ingeniería Técnica Agrícola- algunas correspondencias que he encontrado entre la sección áurea con frutos, flores y plantas comestibles, así como actividades desarrolladas en la UCLM: Facultad de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real y que se relacionan de algún modo con esta proporción.

VI. SECCIÓN ÁUREA EN LA NATURALEZA

La lista de formas orgánicas en las que encontramos la sección áurea podría ser interminable (algo de esto hemos intuido en el desarrollo del trabajo: las proporciones del cuerpo humano, la forma espiral de la concha del nautilus, etc.), pero aquí me limitaré a exponer la relación de ésta con algunas especies vegetales.

Algunas flores tienen la particularidad de crecer siguiendo tramas impensables que nos hacen pensar en un "Dios geómetra", por ejemplo, los flósculos de la **margarita**, crecen en los puntos de contacto de dos conjuntos de espirales que se mueven en direcciones opuestas, una en el mismo sentido y otra en contrario al de las agujas del reloj(fig.137). El centro del **girasol** también se compone de flósculos que crecen siguiendo espirales logarítmicas y equiangulares y que se mueven en direcciones opuestas(fig.138). El patrón estructural de una **flor de cardo**(fig. 139) comparte también esta forma espiral.

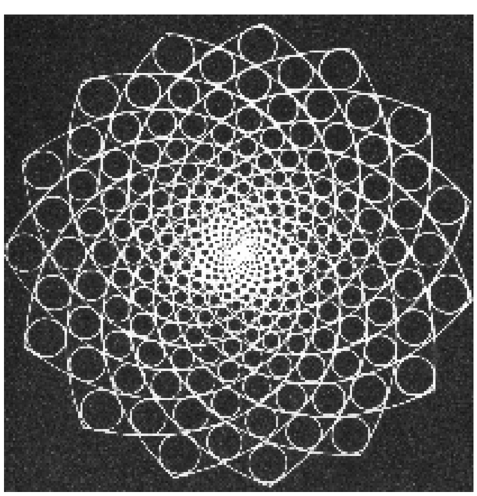


FIGURA 137: Diagrama de margarita

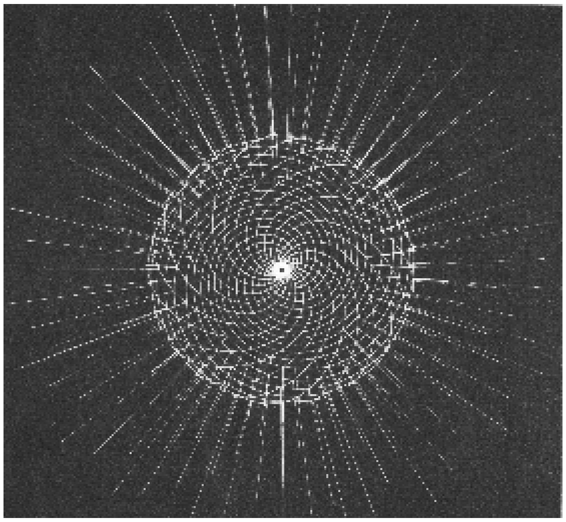


FIGURA 139: Flor de cardo

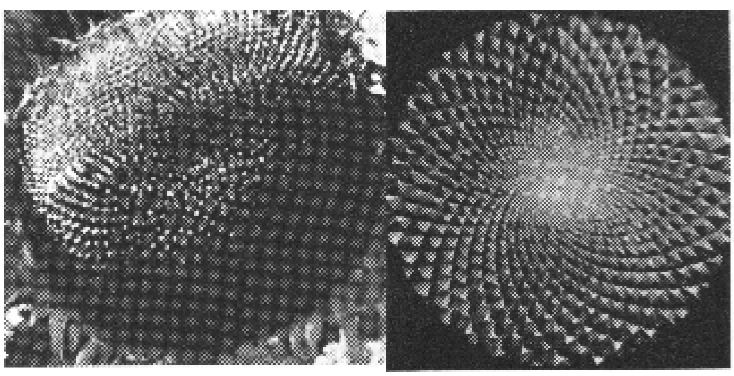
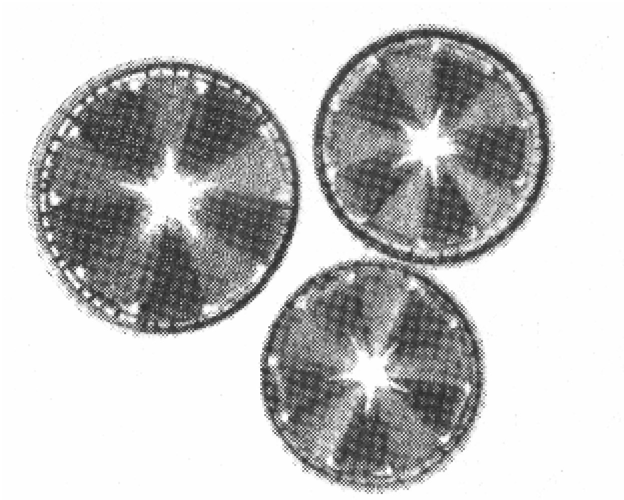


FIGURA 138:Girasol

Pasando a las formas poligonales tenemos un patrón de **tallo de amapola** (fig.140) con forma hexagonal y la forma pentagonal de las **diatomeas**(fig.141). Muchos árboles y arbustos que producen frutos comestibles crecen también de acuerdo a un patrón pentagonal. Si se cortan horizontalmente las **manzanas** y las **peras** (fig. 142), revelan en su distribución de semillas la estrella pentagonal heredado del patrón original de la flor.



FIFURA 141: Diatomeas; agrandadas 450 veces

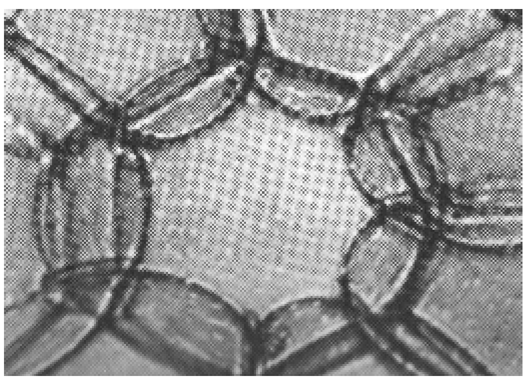


FIGURA 140: Patron de mandala en el tallo de una amapola; agrandado 1.000 veces

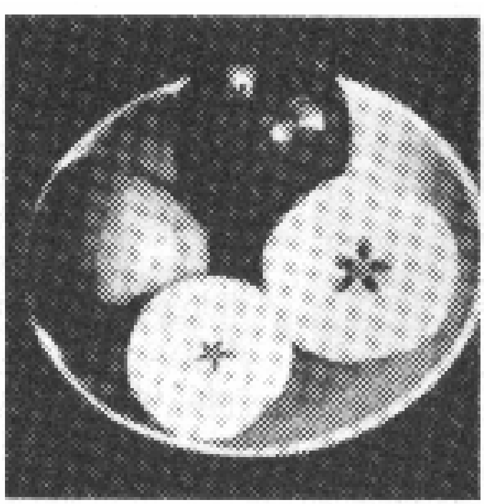


FIGURA 142: Corte transversal de peras y manzanas

Estas formas participan también del triángulo pitagórico 3-4-5, al estar incluido éste en la geometría pentagonal. Veamos aquí otros ejemplos de correspondencia con este triángulo(fig.143).

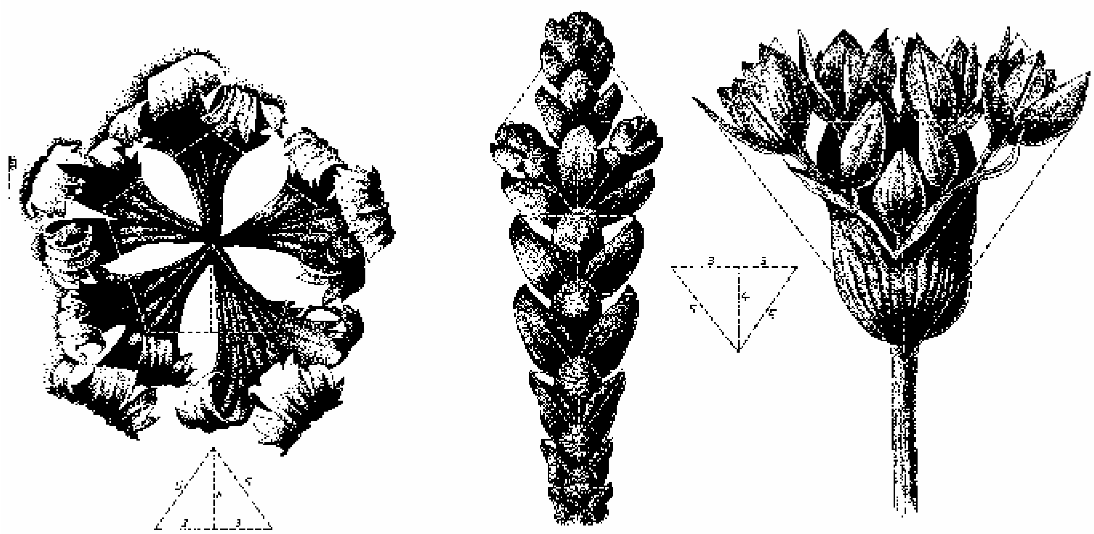
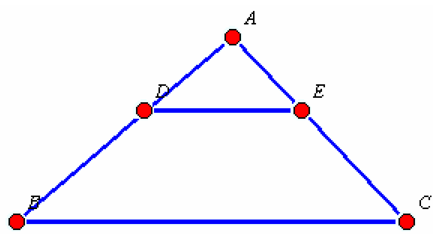


FIGURA 143: (Por orden) Hoja seca de Ccalderona, Cedro cuerno de vanado y Ajo.

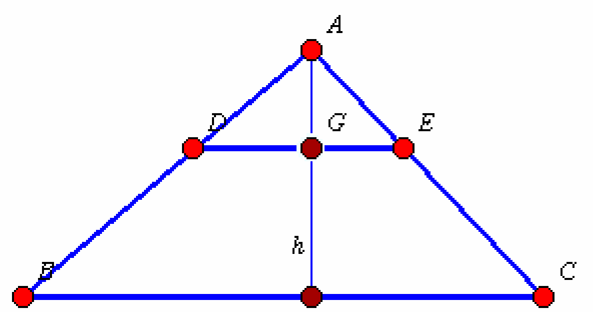
VI.2. SECCIÓN ÁUREA EN LA UCLM

En este apartado quería incluir un problema de la asignatura *Dibujo y Sistemas de representación* de la titulación de Ingeniería Técnica Agrícola(Ciudad Real), correspondiente al examen del curso 1999-2000 y cuya resolución se basa en el trazado de la sección áurea de un segmento.

Una vez construido el triángulo "ABC" conociendo el lado a = 7 u; la altura $h_a = (560)^{1/4}$ u; y el ángulo A = 66°. Trácese un segmento "DE" paralelo a la base "BC" tal que las superficies S(ADE), S(DECB), S(ABC) estén en progresión geométrica creciente.



① PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA



Después de calcular el triángulo ABC, planteamos las relaciones de semejanza entre los triángulos ADE y ABC, y llamando:

$$y = AG$$
$$a = BC$$
$$a^* = DE$$

Las superficies serán:

$$S(ADE) = \frac{a * \cdot y}{2} = \frac{ay^2}{2h} = A_1$$
$$S(DECB) = \frac{a \cdot h}{2} - \frac{ay^2}{2h} = \frac{a(h^2 - y^2)}{2h} = A_2$$
$$S(ABC) = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ay^2}{2h} = A_3$$

Y la progresión geométrica:

$$A_1$$
$$A_2 = A_1 \cdot R$$
$$A_3 = A_2 \cdot R$$

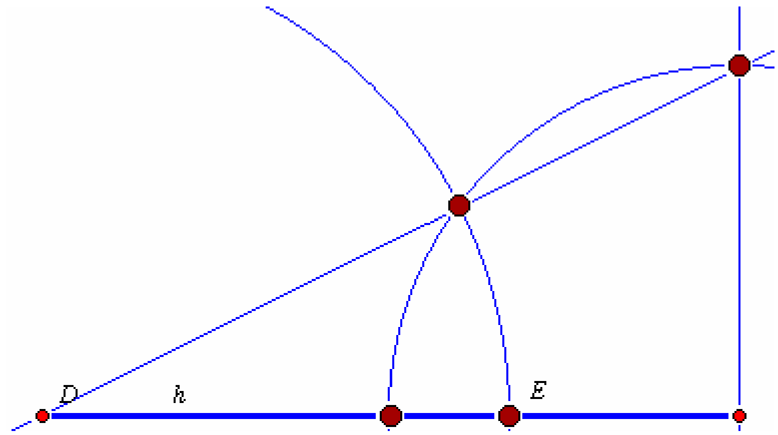
$$A_3 \cdot A_1 = A_2^2$$
$$\frac{a \cdot h^2}{2h} \cdot \frac{ay^2}{2h} = \left[\frac{a(h^2 - y^2)}{2h}\right]^2$$
$$h \cdot y = h^2 - y^2$$

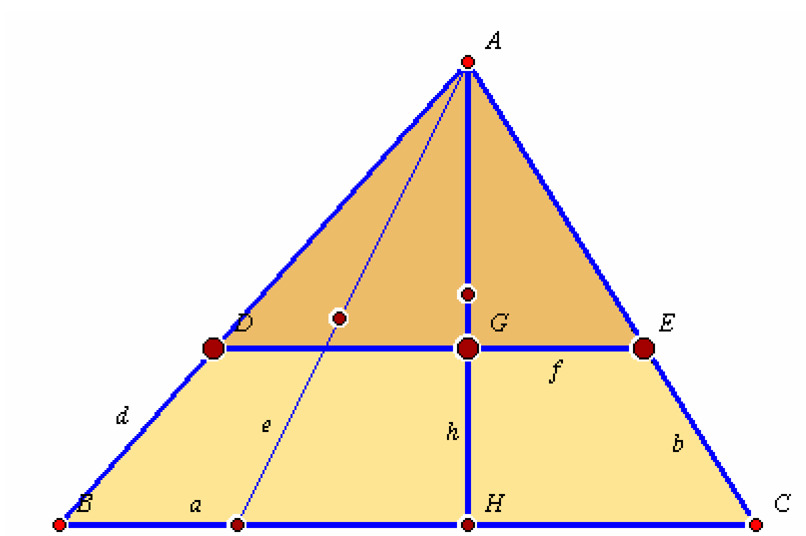
② RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN

$$h^2 - y^2 = hy$$
$$y^2 + hy - h^2 = 0$$
$$y = \frac{(-h) + \sqrt{h^2 + (2h)^2}}{2}$$
$$y = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \cdot h = NÚM.AÚREO$$

③ CÁLCULO DEL SEGMENTO ÁUREO

Por lo tanto *y* y *h* están en proporción áurea. El problema se acaba calculando la sección áurea de *h*, que es *y* (en la figura y =DE).





④ SOLUCIÓN

Para terminar, incluyo el cartel de una exposición que tuvo lugar en la misma E.U.I.T.A. de Ciudad Real, del 26 de mayo al 14 de junio del 2000, montada y diseñada por alumnos de Bellas Artes y Arquitectura de la Universidad de Granada y sobre la que no he conseguido recoger más información. Llevaba por título ***Velázquez: una mirada actual*** y en ella se hacía un estudio áureo de la obra de Velázquez

VII. BIBLIOGRAFIA

LIBROS Y ARTÍCULOS

ARNAU, Joaquín: Voces para un diccionario de arquitectura teórica, Ed. Celeste, Madrid, 2000.

ARPHE Y VILLAFAÑE, Juan de: Varia commensuración para la escultura y arquitectura, añadido por Don Pedro Enguera, Madrid, 1773, 6ª impresión.

BAKER, Geoffrey H.: Le Corbusier, análisis de la forma, traducción de Santiago Castán, Ed. Gustavo Gili(GG), Barcelona,1985, 3ª edición.

BODEI, Remo: La forma de lo bello, traducción de Juan Díaz de Atauri, Ed. Visor, Madrid, 1998.

BOULEAU, Charles: Tramas. La geometría secreta de los pintores, traducción de Yago Barja de Quiroga, Ed. Akal, Madrid, 1996.

CLARK, Kenneth: Leonardo da Vinci, traducción de José María Petralanda Ed. Alianza, Madrid, 1986.

DOCZI, Gyorgy: El poder de los límites; proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura, Ed. Troquel, Buenos Aires, 1996.

DOMÍNGUEZ MURO, Mariano J.: El número de oro, Ed. Dospuntos, Granada,1999.

DURERO, Alberto: De la medida, edición y prólogo de Jeanne Peiffer, Ed. Akal, Madrid, 2000.

FUBINI, Enrico: La estética musical desde la antigüedad hasta el S.XX, traducido por Carlos Guillermo Pérez de Aranda , Ed. Alianza, Madrid,**año,** 2ª edición.

GHYKA, Matila C. : Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes, traducción de J.Bosch Bousquet, Ed. Poseidon, Barcelona,1983, 3ª edición.

GHYKA, Matila C. : El número de oro: I los ritmos - II Los ritos , traducción de J.Bosch Bousquet, Ed. Poseidon, Barcelona,1978, 3ª edición.

JOUETTE, André: El secreto de los números, traducción de Pedro Crespo, Ed. Robibbook, Barcelona, 2000.

KEPLER, Johannes: El secreto del universo ;traducción, introducción y notas de Eloy Rada García , Ed. Alianza, Madrid, 1992.

LEONARDO DA VINCI: Cuadernos de notas, traducción de José Luis Velaz, Ed. Planeta-De Agostini, Barcelona, 1995.

LEONARDO DA VINCI: Tratado de la pintura y los tres libros que sobre el mismo arte escribió Leon Bautista Alberti, Traducción D. Diego Antonio Rejón de Silva, Ed.

Consejo de Cultura y Educación de la Comunidad Autónoma, Colegio Oficial de Aparejadores Y Arquitectos Técnicos, Galería-Librería Yerba, Dpto. de Historia del Arte de la Universidad de Murcia, Cajamurcia; Murcia, 1985.

LEONARDO DA VINCI: Tratado de pintura, edición preparada por Angel Gónzalez García, Ed. Akal, Madrid, 1986.

MOOS, Stanislaus von: Le Corbusier, Ed. Lumen, Barcelona, 1977.

PACIOLI, Luca: La Divina propporción, traducción de Juan Calatrava, Ed. Akal, Madrid,1987.

PALLADIO, Andrea: Los cuatro libros de arquitectura, traducción de Luisa de Aliprandini y Alicia Martínez Crespo, Ed. Akal, Madrid, 1998.

PANOFSKY, Erwin: El significado en las artes visuales, traducido por Nicanor Anochea, Ed. Alianza Forma, Madrid, 1995.

PEDOE, Dan: La geometría en el arte, traducido por Caroline Phipps, Ed. Gustavo Gili(GG), Barcelona,1979.

SEVERINI, Gino: Del cubismo al clasicismo. Estética del compás y del número, traducción de Alfonso Carmona González, Ed.Colegio de aparejadores y arquitectos técnicos, librería yerba, cajamurcia, Murcia, 1993.

SORURIAU, Étienne: Diccionario Akal de estética, traducción de Ismael Grasa Adé, Xavier Pita, Cacilia Mercadal y Alberto Ruiz de Samaniego, Ed. Akal, Madrid, 1998.

SUMMERSON, John: El lenguaje clásico de la arquitectura. De L.B. Alberti a Le Corbusier, traduccion de Justo G. Beramendi y Ramón Álvarez, Ed. Gustavo Gili(GG), Barcelona, 1988, 6ª edición.

SZAMBIEN, Werner: Simetría, gusto y carácter.Teoría y terminología de la arquitectura en la época clásica,1550-1800, traducción de Juan A. Calatrava, Ed. Akal, Madrid, 1993.

VÁLERY, Paul: Escritos sobre Leonardo da Vinci, traducido por Encarna Castejón y Rafael Conte, Ed. Visor, Madid, 1987.

VITRUVIO: Los diez libros de arquitectura, traducción y prólogo de Agustín Blánquez, Ed. Iberia, Barcelona, 1991.

VVAA: Diccionario de estética, editores Wolfhart Henckman y Konrad Lotter, traducción de Daniel Gamper y Begoña Sáez, Ed. Crítica, Barcelona,1998.

PÁGINAS WEB

http://berchet.enet.it/ricerche/sezioneaurea/sez5.htm

http://www.geocities.com/symbols/rguenonc.html

http://www.enelglobo.com/musica/comentario02.htm

http://www.intercom.es/aipet/ponen/arqueo.htm

http://www.geocities.com/Athens/Thebes/1340/7/7.html

http://www.arquitectum.edu.mx/bibliografia/biblio-EH.html

http://www.banrep.gov.co/blaavirtual/pg-content.htm

http://terra,es/personal/agmn25/genios.htm

http://prodigyweb.net.mx/rmendezb/SeccionAurea.html

http://pntic.mec.es/pagtem/arte/pintura/prop-aur.htm

http://henciclopedia.org.uy/autores/Renermann/TorresGarcia.htm

http://henciclopedia.org.uy/autores/Renermann/Renermanaurea.htm