ŘADY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ

V kapitole si ukážeme, že holomorfní funkce a mocninné řady skoro jedno jsou.

Někomu . . .

OBECNÉ VLASTNOSTI

Řady komplexních čísel $\sum z_n$ byly částečně probírány v kapitole o číselných řadách.

Definice říká, že $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, jestliže z je limita částečných součtů řady $\sum z_n$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro $m > k$ je $|z - \sum_{n=0}^{m} z_n| < \varepsilon$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ (to je řada reálných čísel a lze na ní použít kritéria konvergence řad reálných čísel).

1. $\sum z_n = z$ právě když $\sum \Re(z_n) = \Re(z)$ a $\sum \Im(z_n) = \Im(z)$.
2. Pokud $\sum z_n$ konverguje, pak $z_n \to 0$ a tedy $\{z_n\}$ je omezená posloupnost.
3. $\sum z_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že $|\sum_{n=m}^{m+p} z_n| < \varepsilon$ pro každé $m > k$ a $p \in \mathbb{N}$.
4. $\sum (az_n + bw_n) = a \sum z_n + b \sum w_n$.
5. Absolutně konvergentní řada je konvergentní.

V kapitole o řadách funkcí byly zmíněny i obecnější funkce než jen reálné funkce jedné reálné proměnné.

Nicméně, u některých vlastností používajících derivaci nebo integrál bylo nutné se omezit jen na reálné funkce. Základní definice však zůstávají stejné.

DEFINICE. Řada $\sum f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f, jestliže konverguje bodově, tj. pro každé $z \in A$ je $\sum f_n(z) = f(z)$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f stejnoměrně, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro každé $m > k$ a každé $z \in A$ je $|f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon$ (tj. $\lim_m \sup_{z \in A} |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| = 0$).

Následující tvrzení je stejné (i s důkazem) jako odpovídající tvrzení pro reálné funkce.

VĚTA. Nechť řada $\sum f_n$ konverguje k f stejnoměrně na A. Jsou-li všechny funkce f_n (stejnoměrně) spojité, je i f (stejnoměrně) spojitá.

Tvrzení o integraci a derivaci řad komplexních funkcí je však nutné ověřit. Přitom využijeme předchozí vztahy mezi integrací a derivací.

VĚTA. Nechť f_n jsou spojité funkce na křivce C a řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na křivce C. Potom je

$$\sum \int_C f_n(z)\ \mathrm{d}z = \int_C \sum f_n(z)\ \mathrm{d}z\,.$$

Důkaz. Označme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ a L délku křivky C. Platí

$$\Big| \int_C f(z)\ \mathrm{d}z - \int_C \sum_{n=0}^{m} f_n(z)\ \mathrm{d}z \Big| \le L \max_{z\in C} |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)|$$

a uvedené maximum konverguje k 0 vzhledem ke stejnoměrné konvergenci. ◇

Tvrzení o záměně derivace a součtu řady už tak jednoduché nebylo a bylo třeba přidat nějakou podmínku.

Pro komplexní funkce stačí existence derivace v okolí bodu, tj. holomorfnost:

VĚTA. Nechť řada holomorfních funkcí f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na oblasti G. Pak f je holomorfní a $f'(z) = \sum f_n'(z)$.

Důkaz. Nechť $w \in G$, W je otevřený kruh okolo w ležící v G a C je jednoduchá uzavřená křivka ve W.

Podle předchozí věty je

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum \oint_C f_n(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

protože f_n jsou holomorfní ve W. Podle Morerovy věty je tedy i f holomorfní ve W.

Nyní lze použít Cauchyův vzorec pro kružnici se středem z_0 ležící ve W a dostane se

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\ \mathrm{d}z =$$

$$= \sum \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\ \mathrm{d}z = \sum f_n'(z_0)\,.$$

Použil se fakt, že spolu se $\sum f_n(z)$ je stejnoměrně konvergentní i řada $\sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}$, protože

$$\Big| \sum_{n=m}^{k} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2} \Big| = \frac{1}{r^2} \Big| \sum_{n=m}^{k} f_n(z) \Big|,$$

kde r je poloměr kružnice C. ◇

Je to dobře rozdaný. Já ty komplexní řady miluju.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

MOCNINNÉ ŘADY

Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$ a z je komplexní proměnná. Bod z_0 je střed konvergence řady a v tomto bodě řada vždy konverguje. Připomeňte si důležité tvrzení o konvergenci mocninných řad.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Pak uvedená řada konverguje absolutně pro $|z-z_0| < \rho$, diverguje pro $|z-z_0| > \rho$. Pro libovolné kladné $r < \rho$ konverguje stejnoměrně pro $|z-z_0| \leq r$.

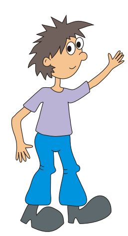
Číslo ρ se nazývá poloměr konvergence a $\{z; |z-z_0| < \rho\}$ kruh konvergence dané řady.

Z předchozích tvrzení a podobných úvah z dřívější kapitoly o mocninných řadách nyní vyplývají následující vlastnosti:

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
3. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k $f(z)$ v kruhu konvergence a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
4. Je-li $|z-z_0| < \rho$ a C křivka ležící v kruhu konvergence s počátečním bodem A a koncovým bodem B, pak
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left((B-z_0)^{n+1} - (A-z_0)^{n+1}\right).$$
5. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je Taylorovou řadou funkce $f(z)$ na kruhu konvergence, tj.
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Součet mocninné řady je tedy holomorfní funkce v kruhu konvergence. Platí i opak, že holomorfní funkce lze napsat jako součet holomorfní funkce?



Na to jsem si předem vsadil, vyvracet to nebudu.

VĚTA. Funkce f je holomorfní v bodě z_0 právě když je v nějakém otevřeném kruhu okolo z_0 součtem své Taylorovy řady.

A mám to v kapse!!!

Důkaz. Nechť f je holomorfní v kruhu $K = \{z; |z - z_0| < r\}$ a w je libovolný bod K. Má se dokázat, že

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w - z_0)^n .$$

Nechť C je kružnice se středem z_0 ležící v K obsahující uvnitř w, takže $f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)/(z-w)^{-1} \, \mathrm{d}z$. Zlomek $1/(z - w)$ je součtem geometrické řady

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n ,$$

přičemž poslední řada konverguje stejnoměrně na C (má za majorantu geometrickou řadu s kvocientem menším než 1).

Dosazením do Cauchyova vzorce pro $f(w)$ se dostane

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} (w-z_0)^n \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w-z_0)^n ,$$

což se mělo dokázat ◇

Bez Cauchyova vzorce nevím nevím . . .

Pro každý bod z_0, ve kterém je funkce f holomorfní, tedy existuje největší možný otevřený kruh o středu z_0, ve kterém je f součtem mocninné řady.

Poloměr tohoto kruhu je vzdálenost mezi z_0 a nejbližším bodem, v kterém f není holomorfní (a tedy je to ∞ pokud je f celistvá).

Tímto bodem může být i bod, kde f není definována – pak získaná řada může konvergovat na větším kruhu a tedy původní funkci rozšiřuje na větší definiční obor jako holomorfní funkci.

Otázka je, zda takovéto rozšíření je jediné, nebo jich může existovat více. Tuto otázku řeší věta o jednoznačnosti v poslední části této kapitoly.

Pomocí řad a jejich kruhů konvergence se dají modelovat úžasné plochy.

Kdo si chce hrát, tak si zkusí funkci arkustangens rozvíjet v řadu na různých kruzích konvergence. Bude příjemně překvapen.

Poznámky 2 Příklady 2 2

LAURENTOVY ŘADY

Velice často se vyskytují případy, kdy funkce je holomorfní v nějakém kruhu kromě jeho středu.

Pak tuto funkci nelze v tomto kruhu psát jako součet mocninné řady.

Např. funkce $e^{1/z}$ je holomorfní všude kromě bodu 0. Je možné se na tuto funkci dívat jako na funkci holomorfní v kruhu o středu ∞.

To byl sqělý nápad. Kdybych na něj přišel já, mohly se ty řady jmenovat po mně. Smůla.

Nelze psát $\sum a_n(z-\infty)^n$, ale právě uvedená funkce dává návod na použití řady $\sum a_n \frac{1}{z^n}$, resp. $\sum a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ pro funkci $e^{1/(z-z_0)}$.

Podívejme se tedy na tyto „obrácené mocninné řady".

Je to jako když se jí koláč odprostředka. To se nemá, ale je to legrace.

VĚTA. Pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ existuje číslo $\rho \in [0, +\infty]$ takové, že tato řada konverguje absolutně na množině $K = \{z; |z - z_0| > \rho\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině K.

Platí $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Důkaz. Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ má poloměr konvergence $r \in [0, +\infty]$. Tato řada vznikla z řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ substitucí $w = \frac{1}{z-z_0}$. Z tohoto převodu snadno vyplývají tvrzení věty pro $\rho = 1/r$. $\diamond$

Z předchozích obecných vět o stejnoměrné konvergenci holomorfních funkcí vyplývají následující tvrzení:

VĚTA. Součet řady $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ je holomorfní funkce a její derivace a primitivní funkce se získá derivováním a integrováním řady člen po členu.

Nyní se tyto řady a mocninné řady použijí dohromady.

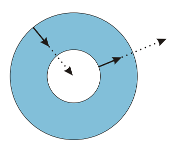
DEFINICE. Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se definuje rovností

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}\,.$$

První část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ Laurentovy řady se nazývá regulární část, druhá se nazývá hlavní část.

Uvědomte si, že definice určuje, co znamená konvergence Laurentovy řady: je to konvergence obou jejích částí.

Jedna část takové řady konverguje uvnitř nějakého kruhu, jiná část vně jiného kruhu. Když se protnou, vznikne mezikruží konvergence.



Kombinací předchozích vět o konvergenci regulární a hlavní části Laurentrovy řady se dostává následující tvrzení.

VĚTA. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existují čísla $0 \le r \le R \le +\infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z-z_0| < R\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M.

Součtem této řady je holomorfní funkce v mezikruží M, její derivace a primitivní funkce se získají derivováním a integrováním řady člen po členu.

Podobně jako u funkcí holomorfních v kruhu je otázka, zda funkce holomorfní v mezikruží lze představit jakou součet Laurentovy řady. Odpověď je kladná:

VĚTA. Nechť $0 \le r < R \le \infty$ a funkce f je holomorfní v mezikruží M o středu z_0 a poloměrech r, R. Potom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

pro nějaká $a_n \in \mathbb{C}$ a všechna $z \in M$.

Důkaz. Kvůli jednoduššímu vyjádření stačí předpokládat $z_0 = 0$.

Zvolte $w \in M$ a kružnice (kladně orientované) C, D o středu 0 ležící v M, z nichž C obsahuje w uvnitř a D vně. Podle obecné Cauchyovy věty je

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-w}\, \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_D \frac{f(z)}{z-w}\, \mathrm{d}z\,.$$

V prvním integrálu je $|z| > |w|$ a tedy $\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n$. Ve druhém integrálu je $|z| < |w|$ a tedy $\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n$. Tyto řady po vynásobení $f(z)$ je možné integrovat člen po členu, takže

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty} w^n \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1}\oint_D z^n f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

což je hledaný tvar. $\diamond$

V důkazu jsme získali vzorec pro výpočet koeficientů a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde C je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

Vždy si prstem ukazujte, která část řady je která. Jinak to popletete. Ty koeficienty to jenom potvrzují.

Odtud vyplývají odhady pro koeficienty a_n. Za křivku C se vezme kružnice se středem v z_0 a poloměrem ρ:

$$|a_n| \le \frac{\max\{|f(z)|; |z-z_0| = \rho\}}{\rho^n}\,.$$

Zatím necítím nic nebezpečného.

BTW, Laurentovy řady se čtou loránovy řady.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

RŮZNÁ POUŽITÍ

Zajímavým a důležitým důsledkem předchozího tvrzení je následující věta o jednoznačnosti.

Ta je značně silnější než tvrzení vyplývající z Cauchyova vzorce, odkud vyplývalo, že dvě funkce holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C se rovnají uvnitř C, jakmile se rovnají na C.

Věty o jednoznačnosti jsou v teorii holomorfních funkcí klíčovým výsledkem.

VĚTA. (Věta o jednoznačnosti) Nechť funkce f a g jsou holomorfní v oblasti G a $\{w_n\}$ je posloupnost v G konvergující k $w \in G$. Jestliže $f(w_n) = g(w_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in G$.

Věta o jednoznačnosti má zajímavé důsledky pro přenášení vzorců z reálné analýzy do komplexní analýzy – viz *Otázky*.

Například sinus z reálné osy nešel rozšířit jinak než tak, jak jsme to udělali.

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

Zbývá dokázat, že pro libovolný bod $c \in G$ je $f(c) = 0$. Spojme c s w lomenou čarou L ležící v G.

Pokud $c \in K_w$, není co dokazovat. Jinak se vezme průsečík c_1 hranice kruhu K_w s L takový, že část L od w do c_1 leží v K_w.

Bod c_1 je hromadným bodem nulových bodů funkce f a tedy okolo něho existuje kruh K_1, na kterém je $f = 0$.

Pokud $c \notin K_1$, vezme se průsečík c_2 hranice K_1 s L ležící blíže k c tak, že část L od c_1 do c_2 leží v K_1. Tímto způsobem se po konečně mnoha krocích dostaneme do situace, kdy $c \in K_n$ pro nějaké n. $\diamond$

Jednou z aplikací rozvoje v řady je obdoba L'Hospitalova pravidla o výpočtu limit pomocí derivací.

VĚTA. (L'Hospitalovo pravidlo) Nechť f a g jsou holomorfní funkce v bodě w a nechť $f(w) = g(w) = 0$. Potom

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to w} \frac{f'(z)}{g'(z)}\,.$$

Důkaz. Podle předpokladu je $f(z) = (z-w)^k(a_k + a_2(z-w) + ...)$ a $g(z) = (z-w)^l(b_1 + b_2(z-w) + ...)$, kde $k, l \geq 1$, a tedy

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-w)^{k-l}\frac{a_k + a_{k+1}(z-w) + ...}{b_l + b_{l+1}(z-w) + ...}\,,\ \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z-w)^{k-l}\frac{ka_k + (k+1)a_{k+1}(z-w) + ...}{lb_l + (l+1)b_{l+1}(z-w) + ...}\,.$$

Srovnáním obou posledních rovností snadno plyne tvrzení věty. $\diamond$

Z důkazu vyplývá více, než je formulováno ve větě. Pokud je $k > l$, je uvedená limita podílu rovna 0. Pokud je $k < l$, je limita rovna ∞. Pokud je $k = l$, je limita rovna a_k/b_k.

Následující tvrzení je podobné tvrzení o regulárních zobrazeních uvedenému v části o substituci v integrálu více proměnných. Podobnost není náhodná, nekonstantní holomorfní funkce je regulárním zobrazením.

VĚTA. Každá holomorfní nekonstantní funkce f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina roviny, jakmile je G otevřená podmnožina definičního oboru f.

Důkaz. Má se dokázat toto tvrzení: pro každé $w_0 \in f(G)$ existuje $s > 0$ tak, že $w \in f(G)$ jakmile $|w - w_0| < s$.

Vezme se $z_0 \in G$ a $r > 0$ tak, že $f(z_0) = w_0$ a $z \in G$ jakmile $0 < |z - z_0| \leq r$ a navíc pro tato z platí $f(z) \neq w_0$ (lze předpokládat, protože f není konstantní). Nechť $m = \min\{|f(z) - w_0|; |z - z_0| = r\}$. Podle předchozího předpokladu je $m > 0$.

Předpokládejte, že existuje w takové, že $|w - w_0| < m/2$ a $w \notin f(G)$. Potom funkce $f(z) - w$ je nenulová a holomorfní na G. Podle věty o nabývání minima absolutní hodnoty na hranici je

$$\frac{m}{2} > |w - w_0| = |w - f(z_0)| \geq \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w| \geq$$

$$\geq \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}\,,$$

což dává spor. $\diamond$

S regulárními zobrazeními mají souvislost i následující věty. Nejdříve je nutné uvést pomocné tvrzení, které je zajímavé samo o sobě. Připomeňte si, že násobnost (neboli řád) nulového bodu w funkce f je nejmenší přirozené číslo k takové, že $f^{(k)}(w) \neq 0$ (tj. první index koeficientu a_k v Taylorově rozvoji f okolo w, který je nenulový).

LEMMA. Nechť f je holomorfní uvnitř a na uzavřené jednoduché křivce C, nenulová na C a má jen konečný počet nulových bodů uvnitř C. Pak integrál

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

udává počet nulových bodů f uvnitř C, každý braný tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Důkaz. Označme $w_1, w_2, ..., w_n$ všechny nulové body f uvnitř C, které mají po řadě násobnosti $k_1, k_2, ..., k_n$.

Funkce f'/f není uvnitř C definována jen v nulových bodech funkce f, takže podle Cauchyovy věty je

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z\,,$$

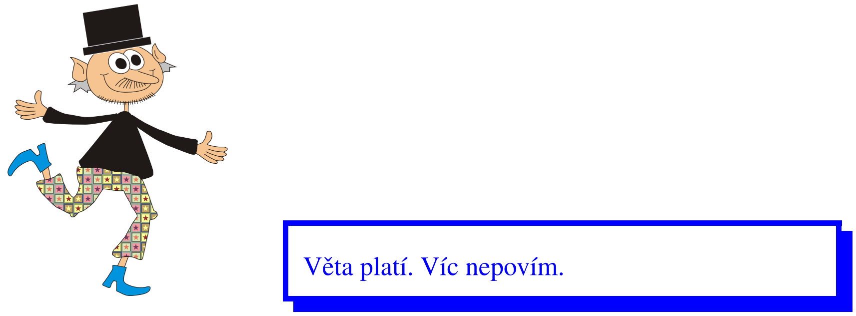
kde C_i jsou navzájem disjunktní kružnice okolo w_i ležící uvnitř C.

Lze předpokládat $n = 1$ a $w_1 = w, k_1 = k$. Tudíž je $f(z) = (z-w)^k g(z)$, kde $g(w) \neq 0$ v nějakém okolí U bodu w. Může se i předpokládat, že C je částí U (opět podle Cauchyovy věty).

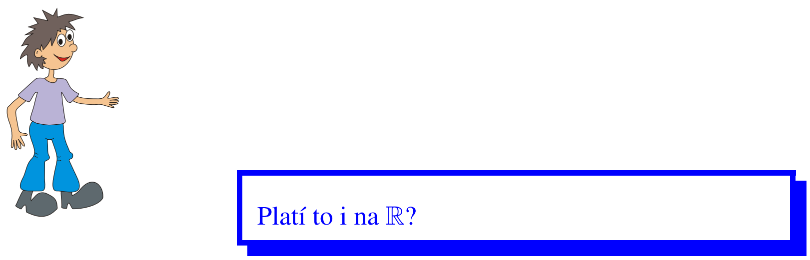
Po zderivování uvedeného výrazu pro f se dostává

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{k}{z-w}\,\mathrm{d}z + \oint_C \frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}k\,,$$

což se mělo dokázat. $\diamond$



VĚTA. Holomorfní a prostá funkce na oblasti má všude nenulovou derivaci.



Důkaz. Nechť f je holomorfní v bodě w a $f'(w) = 0$. Potom $f(z) - f(w) = (z-w)^k g(z)$, kde $k \geq 2$ a g je holomorfní funkce nenabývající 0 ve w. Existuje $r > 0$ tak, že $f'(z) \neq 0$ pro $0 < |z-w| \leq r$ (jinak by f byla konstantní na nějakém okolí bodu w). Položte $m = \min\{|f(z) - f(w)|; |z-w| = r\}$ ($m > 0$ protože f je prostá).

Pro kružnici C se středem w a dostatečně malým poloměrem je podle předchozího lemmatu $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f'(z)/(f(z) - f(w))\, \mathrm{d}z = k \geq 2$. Spočte se integrál $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f'(z)/(f(z) - f(w) - m/2)\, \mathrm{d}z$. Integrál $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f'(z)/(f(z) - f(w) - m/2)\, \mathrm{d}z$ je roven přírůstku argumentu funkce $(f(z) - f(w) - m/2)$ po oběhu křivky C dělený číslem 2π (viz úvahu v *Poznámkách*). Protože

$$f(z) - f(w) - m/2 = (f(z) - f(w))\big(1 - \frac{m/2}{f(z) - f(w)}\big)\,,$$

je přírůstek argumentu funkce $f(z) - f(w) - m/2$ součtem přírůstku argumentů funkcí $f(z) - f(w)$ a $1 - \frac{m/2}{f(z)-f(w)}$. Ale vzdálenost $\frac{m/2}{f(z)-f(w)}$ od 0 pro $z \in C$ je nejvýše $1/2$ a tedy změna argumentu funkce $1 - \frac{m/2}{f(z)-f(w)}$ je tu menší než 2π, což znamená, že přírůstek argumentu je nulový.

Z předchozího vyplývá, že počet nulových bodů funkce $f(z) - f(w) - m/2$ je také $k \geq 2$. Protože $f'(z) \neq 0$ pro $0 < |z-w| \leq r$, má funkce $f(z) - f(w) - m/2$ jen jednoduché nulové body, a proto $k \geq 2$ nulových bodů, což je spor s tím, že f je prostá. $\diamond$

Předchozí věta se dá obrátit, ale jen lokálně.

VĚTA. Mé-li holomorfní funkce nenulovou derivaci v bodě, je prostá na nějakém jeho okolí.

Důkaz. Nechť $f'(w) \neq 0$. Existuje tedy $r > 0$ tak, že $|f'(z) - f'(w)| < |f'(w)|/2$ pro všechna z splňující $|z-w| \leq r$.

Předpokládejte, že existují $u \neq v$ tak, že $|u-w| < r, |v-w| < r$ a $f(u) = f(v)$.

Funkce $f'(z) - f'(w)$ má primitivní funkce $f(z) - f'(w)z$ a tedy, pro úsečku P spojující body u, v,

$$\int_P (f'(z) - f'(w))\, \mathrm{d}z = f'(w)(u-v) \quad \text{ale} \quad \Big|\int_P (f'(z) - f'(w))\, \mathrm{d}z\Big| \leq \frac{|f'(w)|}{2}|u-v|\,.$$

což je spor. $\diamond$

Obě věty lze vyslovit současně: *Funkce holomorfní v nějakém bodě je prostá v nějakém jeho okolí právě když má v tomto bodě nenulovou derivaci.*

Dalším důsledkem je obdoba derivace inverzní reálné funkce reálné proměnné.

S tvrzením o derivaci inverzní funkce jste se setkali již v kapitole o derivaci, ale bylo nutné předpokládat spojitost inverzní funkce – ta nyní vyplývá z předchozích tvrzení.

VĚTA. Nechť f je holomorfní prostá funkce na oblasti G. Pak inverzní funkce $g = f^{-1}$ je holomorfní na G a $g'(z) = 1/f'(g(z))$.

VĚTA. (Riemannova věta.) Nechť U je jednoduše souvislá otevřená množina v $\mathbb{C}$. Pak U je izomorfní s jednotkovým kruhem $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, to znamená, že existuje holomorfní bijekce mezi U a D, která má holomorfní inverzi.

Důkaz věty najde hledanou funkci jako limitu funkcí, které existují. Je cool hledat tu bijekci metodou pokus omyl. Například zobrazení čtvrt kruhu na horní polorovinu je $((1 + z^2)/(1 - z^2))^2$.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4 4 5 6

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Existují funkce, které se nedají napsat pomocí elementárních funkcí a je nutné použít nějaký nekonečný proces. Bývá to popis např. pomocí integrálu nebo součinu či součtu posloupnosti. Součet nekonečné řady funkcí má v těchto popisech důležitou funkci a je velmi podrobně propracován.

Příkladem takového popisu je tzv. Riemannova dzeta funkce z *Příkladu 1*. Uvidíte dále, že takto definovaná funkce lze rozšířit na holomorfní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

Uvědomte si, že vzorce pro výpočet koeficientů mocninné řady implikují jednoznačnost rozkladu holomorfní funkce v mocninnou řadu.

Pro konvergenci mocninné řady na hraniční kružnici se často používá Dirichletovo kritérium. Místo z^n se vezme polární vyjádření $r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$ a zkoumání konvergence se rozdělí na oddělené zkoumání reálné složky a imaginární složky.

Úlohu je rozvinout danou funkci v mocninnou řadu s daným středem (pokud je daná funkce v onom středu holomorfní) lze řešit několika způsoby. Jedním z postupů je použít vzorec pro Taylorovy koeficienty, ale to nebývá někdy vhodný postup, protože ne vždy lze po výpočtu prvních koeficientů odhadnout, jak budou vypadat další.

Jinou možností je případ, kdy daná funkce lze získat derivováním nebo integrováním funkce, jejíž mocninnou řadu již znáte. Pro racionální funkce se používá rozklad na parciální zlomky a jejich rozvoj v geometrickou řadu.

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Zatímco mocninná řada vždy konverguje alespoň v jednom bodě, Laurentova řada nemusí konvergovat nikde. Může se stát, že konverguje pouze na nějaké kružnici (viz *Příklady*) a pak její součet není holomorfní funkce.

Pokud se u Laurentovy řady mluví o mezikruží konvergence, má se na mysli otevřená množina $\{z; r < |z - w| < R\}$, kde $0 \le r < R \le +\infty$.

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Z věty o jednoznačnosti vyplývá řada vztahů pro holomorfní funkce, které platí v reálném oboru. Např. holomorfní funkce $\sin^2 z + \cos^2 z$ a funkce 1 se rovnají na reálné přímce a proto se rovnají všude v C. Další podobné vztahy jsou v *Otázkách*.

Další důležitý důsledek věty o jednoznačnosti se týká tzv. analytického pokračování holomorfní funkce. Je-li f holomorfní funkce na otevřené množině G, g, h jsou holomorfní funkce na otevřené množině H, přičemž $G \cap H \neq \emptyset$ a $g = f, h = f$ na $G \cap H$, pak $g = h$ na H.

Vezmou-li se složky f_1, f_2 holomorfního zobrazení, snadno se zjistí, že splňují definici regulárního zobrazení. Regulární zobrazení je však obecnější pojem. V citované kapitole je bez důkazu tvrzení, že regulární zobrazení zachovává otevřené množiny. Nyní, alespoň pro speciální případ, je toto tvrzení dokázáno.

Také předposlední věta o lokální prostotě holomorfní funkce s nenulovou derivací platí obecněji pro regulární zobrazení.

Poslední věta o inverzním zobrazení byla již dokázána v *Otázkách* v první kapitole o komplexních funkcích pomocí Cauchyových-Riemannových podmínek. Současný důkaz je elegantnější.

Funkce f'/f se často nazývá logaritmická derivace funkce f, protože má za primitivní funkci $\log(f(z)) = \log|f(z)| + \mathrm{i}\arg f(z)$.

Uvedený integrál $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ je tedy roven přírůstku argumentu funkce f (vynásobený i) po oběhu bodu z po křivce C (na uzavřené křivce se reálná část logaritmu zruší).

Konec poznámek 4.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

1. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \le 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

2. Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$ je holomorfní funkce pro $\Re z > 0$, jakmile $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolutně konverguje.

3. Zjistěte, kde následující řady konvergují stejnoměrně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n .$$

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

1. Ukažte, že v oboru komplexních čísel je součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ roven $1/(1-z)$ pro $|z| < 1$. Geometrická řada diverguje pro $|z| > 1$. Jak je to s konvergencí na hranici? [konverguje (neabsolutně) kromě bodu $z = 1$]

2. Najděte kruh konvergence následujících řad a zkuste zjistit konvergenci na hraniční kružnici:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n\,, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\,, \sum_{n=1}^{\infty} (nz)^n\,, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}\,.$$

3. Najděte kruh konvergence následujících řad a zkuste zjistit konvergenci na hraniční kružnici:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)\left(\frac{z}{2} - 1\right).$$

4. Najděte rozvoj $1/z$ okolo bodu 1. [Napište $1/z$ jako $1/(1-(1-z))$ a použijte geometrickou řadu s kvocientem $1-z$.]

5. Najděte rozvoj $\frac{2z}{(z-1)(z+1)}$ okolo bodu 0. [Rozklad $\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}$ je součet geometrických řad $-\sum z^n$, $\sum(-z)^n$.]

6. Předchozím způsobem rozložte $z^2/(z^2+1)$ okolo bodu 1.

7. Pomocí derivace mocninné řady získejte rozvoj v mocninnou řadu funkce $1/(1-z)^3$.

8. Integrací jistých mocninných řad získejte mocninné řady pro $\mathrm{Log}(z+1)$ a $\mathrm{arctg}\, z$.

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

1. Najděte mezikruží konvergence Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n/2^{n^2}$.

2. Rozkladem na parciální zlomky a jejich rozvojem v geometrické řady lze získat Laurentovy řady racionálních funkcí. Zjistěte Laurentovu řadu funkce $1/(z^2-3z+2)$ v mezikruží $1<|z|<2$. [Regulární část se získá z parciálního zlomku $1/(z-2)$ postupem ukázaným v *Příkladech 2*; hlavní část se získá ze zlomku $1/(z-1)$ úpravou na $(1/z)/(1-(1/z))$ a rozvojem v geometrickou řadu s kvocientem $1/z$.]

3. Najděte Laurentovy řady funkce $z^3/(z^3-5z^2+6z)$ v jednotlivých oblastech

$$0<|z|<2\,,\quad 2<|z|<3\,,\quad 3<|z|\,.$$

4. V některých případech se Laurentovy řady získají pouhým vydělením. Napište Laurentovy řady pro $\frac{\mathrm{e}^z}{z^3}$, $\frac{\sin z}{z^2}$, $\frac{\cosh z}{z^5}$.

5. Najděte všechny body z, pro které konvergují řady

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}\qquad\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\,.$$

Konec příkladů 3.

Příklady 4:

1. Integrací logaritmické derivace zjistěte počet oběhů následujících funkcí okolo 0:

$$z^n\ \ (n\in Z)\,,\quad \sin z\,,\quad \mathrm{e}^z\,.$$

2. Funkce z^3 je v reálném oboru prostá a má v 0 derivaci rovnou 0. Derivaci rovnou 0 v počátku má i jako funkce komplexní proměnné a tedy jako funkce komplexní proměnné není prostá v žádném okolí 0. Ověřte tento fakt přímo bez použití obecných vět.

3. Použijte L'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit (ověřte podmínky pro jeho použití)

$$\lim_{x\to 3\pi\mathrm{i}/2}\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{i}}{z-3\pi\mathrm{i}/2}\,,\quad \lim_{x\to 3\mathrm{i}}\frac{\sinh(z-3\mathrm{i})}{z-3\mathrm{i}}\,,\quad \lim_{x\to 3\mathrm{i}}\frac{\mathrm{Log}\, z-\mathrm{i}}{\sin(z-\mathrm{i})}\,.$$

Konec příkladů 4.

OTÁZKY

Otázky 1:

1. Dokažte pomocí principu maxima modulu. že pokud řada funkcí, holomorfních uvnitř a na jednoduché uzavřené křivce, konverguje stejnoměrně na této křivce, konverguje stejnoměrně i uvnitř křivky.

2. Najděte příklad stejnoměrně konvergentní řady holomorfních funkcí na uzavřeném kruhu, jejichž derivace konverguje uvnitř kruhu a nikoli na hranici. [$\sum z^n/n^2$]

Konec otázek 1.

Otázky 3:

1. V důkazu poslední věty se při získání vzorce pro koeficienty a_n integrovalo podél různých křivek C a D podle toho, zda index n byl kladný nebo záporný.

Ukažte, že vzorec $a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z$ platí pro libovolnou jednoduchou uzavřenou křivku C ležící uvnitř M a obsahující z_0 ve svém vnitřku.

2. Dokažte, že pokud Laurentova řada $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-w)^n$ konverguje v mezikruží $r < |z-w| < R$, pak řada $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_n} (z-\overline{w})^n$ konverguje v mezikruží $r < |z-\overline{w}| < R$.

Vyvoďte odtud, že má-li f za definiční obor otevřenou množinu G symetrickou kolem osy x a $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ na G, pak holomorfnost f v mezikruží $r < |z-w| < R$ implikuje holomorfnost f v mezikruží $r < |z-\overline{w}| < R$.

Konec otázek 3.

Otázky 4:

1. Pomocí věty o jednoznačnosti dokažte následující vztahy:

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w \,, \sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w \,, \left(z^w\right)^c = z^{wc} \,.$$

[Nejdříve předpokládejte, že např. w je reálné a dokažte rovnost pro komplexní z; v druhém kroku rozšiřte platnost rovnosti i na komplexní w.]

2. Ověřte, že nekonstantní holomorfní funkce je regulárním zobrazením.

3. Ukažte, že hodnota následujícího integrálu logaritmické derivace

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z$$

udává počet oběhů hodnot $f(z)$ okolo 0 když z obíhá jednoduchou uzavřenou křivku C obsahující 0 ve svém vnitřku (funkce f na C nenabývá hodnoty 0). Počtem oběhů se myslí změna argumentu $f(z)$.

4. Ukažte, že pokud je f nekonstantní a holomorfní v oblasti G, pak množina nulových bodů funkce f je diskrétní v G (tj., každý nulový bod má okolí, v němž nemá f, kromě bodu samého, nulové hodnoty).

5. Ukažte, že v důkazu věty o jednoznačnosti se opravdu po konečně mnoha krocích dospěje k bodu c.

6. Najděte holomorfní funkci v jednoduše souvislé oblasti, která má všude nenulovou derivaci a přitom není prostá.

7. Použijte metodu z důkazu věty o prostém zobrazení na důkaz tzv Rouchého věty: *Nechť f, g jsou holomorfní funkce na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky C. Jestliže na C platí $|g| < |f|$, pak f a $f+g$ mají uvnitř C stejný počet nulových bodů.* [$f+g = f(1+g/f)$ a podobně jako v uvedeném důkazu ukažte, že $1+g/f$ nemůže oběhnout počátek.]

Konec otázek 4.

CVIČENÍ

Cvičení 1: Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Řešení. Začneme tím, že zadanou (racionální) funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

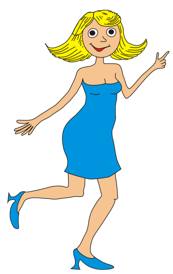
Singularity funkce jsou v bodech 0 a 1. Pro $|z-1| < 1$ je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Na mezikruží $0 < |z-1| < 1$ tedy platí

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Takže stačí znát součet geometrické řady a spočítáme všecko!



Jaká je hlavní a vedlejší část v získané Laurentově řadě?

Konec cvičení 1.

Cvičení 2: Příklad. Najděte rozvoj funkce

$$\frac{1}{(z-a)^k}$$

do Laurentovy řady se středem v 0. Předpokládejme, že $a \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$.

Řešení. Zadaná funkce má singularitu v bodě a.

Pro $|z| < |a|$ platí

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n.$$

Tuto řadu $(k-1)$-krát zderivujeme:

$$\frac{-1}{(z-a)^2} = -\frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1}.$$

$$\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z-a)^k} = -\frac{1}{a^k}\sum_{n=k-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+2)\left(\frac{z}{a}\right)^{n-k+1}.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{1}{(z-a)^k} = \frac{(-1)^k}{a^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{z}{a}\right)^n.$$

Konec cvičení 2.

Cvičení 3: Příklad. Najděte Laurentovu řadu v bodě 0 pro funkci

$$e^{z+\frac{1}{z}}.$$

Řešení. Protože je
$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{\frac{1}{z}},$$
získáme Laurentovu řadu jako součet Laurentových řad funkcí
$$e^z, \qquad e^{\frac{1}{z}}.$$
Rozvoj exponenciely známe:
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$
a odtud získáme i rozvoj druhé funkce:
$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$
Celkem tedy máme, podle definice násobení řad, rozvoj
$$e^{z+\frac{1}{z}} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$
kde
$$a_n = a_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$
Konec cvičení 3.

Cvičení 4: Příklad. Určete konvergenci následující řady pro $|z| < 1$ a pokud konverguje, určete její součet:
$$z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots$$

Řešení. n-tý částečný součet S_n uvedené řady je
$$\begin{aligned} S_n(z) &= z(1-z) + z^2(1-z) + \cdots + z^n(1-z) \\ &= z - z^2 + z^2 - z^3 + \cdots + z^n - z^{n+1} \\ &= z - z^{n+1}. \end{aligned}$$
Nyní je vidět, že částečné součty konvergují k funkci z :
$$|S_n(z) - z| = |z^{n+1}| = |z|^{n+1} < \varepsilon,$$
pro
$$(n+1)\log|z| < \log\varepsilon,$$
neboli
$$n > \frac{\log\varepsilon}{\log|z|} - 1,$$
pro $z \neq 0$.
Jinak, pro $z = 0$ máme
$$S_n(0) = 0,$$
takže samozřejmě
$$|S_n(0) - 0| < \varepsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Dokázali jsme tedy, že řada konverguje pro $|z| < 1$ a jejím součtem je z.

To je ale náhoda, co? Nebo teda jako ne?

Konec cvičení 4.

Cvičení 5: Příklad. Rozhodněte, zda je možné rozšírit funkci f definovanou na kruhu $|z| < 1$ součtem řady

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Řešení. Snadno ověříme, že platí

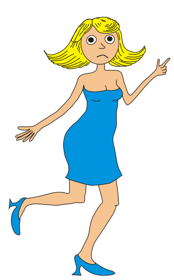
$$f(z) = z + f(z^2), \quad f(z) = z + z^2 + f(z^4), \quad f(z) = z + z^2 + z^4 + f(z^8).$$

Odtud je vidět, že řada diverguje pro všechna z splňující

$$z = 1, \quad z^2 = 1, \quad z^4 = 1, \quad z^8 = 1, \ldots .$$

Všechna tato z leží na jednotkové kružnici a libovolně malý úhel jich obsahuje nekonečně mnoho.

Proto neexistuje otevřená množina, která by měla s otevřeným jednotkovým kruhem neprázdný průnik a nebyla jeho podmnožinou, tak že f je na této množině analytická.



Analytické prodloužení tedy neexistuje.

Ani prodloužení ani rozšíření. Prostě nic.

Konec cvičení 5.

Cvičení 6: Příklad. Určete, kde konverguje následující řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n .$$

Řešení. Označme $a_n = n!$. V tomto případě je vhodnější místo počítání $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ počítat limitu podílu

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty .$$

Tedy poloměr konvergence je

$$\rho = \frac{1}{\infty} = 0 .$$

Jelikož řada konverguje v nule, je to jediný bod konvergence.

Konec cvičení 6.

STANDARDY z kapitoly

ŘADY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ

OBECNÉ VLASTNOSTI

Definice říká, že $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, jestliže z je limita částečných součtů řady $\sum z_n$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro $m > k$ je $|z - \sum_{n=0}^{m} z_n| < \varepsilon$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ (to je řada reálných čísel a lze na ní použít kritéria konvergence řad reálných čísel).

1. $\sum z_n = z$ právě když $\sum \Re(z_n) = \Re(z)$ a $\sum \Im(z_n) = \Im(z)$.
2. Pokud $\sum z_n$ konverguje, pak $z_n \to 0$ a tedy $\{z_n\}$ je omezená posloupnost.
3. $\sum z_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že $|\sum_{n=m}^{m+p} z_n| < \varepsilon$ pro každé $m > k$ a $p \in \mathbb{N}$.
4. $\sum (az_n + bw_n) = a \sum z_n + b \sum w_n$.
5. Absolutně konvergentní řada je konvergentní.

DEFINICE. Řada $\sum f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f, jestliže konverguje bodově, tj. pro každé $z \in A$ je $\sum f_n(z) = f(z)$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ funkcí konverguje na množině A k funkci f stejnoměrně, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro každé $m > k$ a každé $z \in A$ je $|f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon$ (tj. $\lim_m \sup_{z\in A} |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| = 0$).

VĚTA. Nechť řada $\sum f_n$ konverguje k f stejnoměrně na A. Jsou-li všechny funkce f_n (stejnoměrně) spojité, je i f (stejnoměrně) spojitá.

VĚTA. Nechť f_n jsou spojité funkce na křivce C a řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na křivce C. Potom je

$$\sum \int_C f_n(z)\, \mathrm{d}z = \int_C \sum f_n(z)\, \mathrm{d}z .$$

Důkaz. Označme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ a L délku křivky C. Platí

$$\left| \int_C f(z)\, \mathrm{d}z - \int_C \sum_{n=0}^{m} f_n(z)\, \mathrm{d}z \right| \le L \max_{z\in C} |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)|$$

a uvedené maximum konverguje k 0 vzhledem ke stejnoměrné konvergenci. $\diamond$

VĚTA. Nechť řada holomorfních funkcí f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na oblasti G. Pak f je holomorfní a $f'(z) = \sum f'_n(z)$.

Důkaz. Nechť $w \in G$, W je otevřený kruh okolo w ležící v G a C je jednoduchá uzavřená křivka ve W. Podle předchozí věty je

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum \oint_C f_n(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

protože f_n jsou holomorfní ve W. Podle Morerovy věty je tedy i f holomorfní ve W.
Nyní lze použít Cauchyův vzorec pro kružnici se středem z_0 ležící ve W a dostane se

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\ \mathrm{d}z =$$

$$= \sum \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\ \mathrm{d}z = \sum f'_n(z_0)\,.$$

Použil se fakt, že spolu se $\sum f_n(z)$ je stejnoměrně konvergentní i řada $\sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}$, protože

$$\Big|\sum_{n=m}^{k} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\Big| = \frac{1}{r^2}\Big|\sum_{n=m}^{k} f_n(z)\Big|,$$

kde r je poloměr kružnice C. $\diamond$

MOCNINNÉ ŘADY

Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$ a z je komplexní proměnná. Bod z_0 je střed konvergence řady a v tomto bodě řada vždy konverguje.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Pak uvedená řada konverguje absolutně pro $|z-z_0| < \rho$, diverguje pro $|z-z_0| > \rho$. Pro libovolné kladné $r < \rho$ konverguje stejnoměrně pro $|z-z_0| \le r$.

Číslo ρ se nazývá poloměr konvergence a $\{z; |z-z_0| < \rho\}$ kruh konvergence dané řady.

VĚTA. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f(z)$ je její součet a ρ její poloměr konvergence.

1. Funkce f je holomorfní v kruhu konvergence.
2. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
3. Je-li $|z-z_0| < \rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k $f(z)$ v kruhu konvergence a poloměr konvergence této řady je opět ρ.
4. Je-li $|z-z_0| < \rho$ a C křivka ležící v kruhu konvergence s počátečním bodem A a koncovým bodem B, pak

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left((B-z_0)^{n+1} - (A-z_0)^{n+1}\right).$$

5. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je Taylorovou řadou funkce $f(z)$ na kruhu konvergence, tj.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,.$$

VĚTA. Funkce f je holomorfní v bodě z_0 právě když je v nějakém otevřeném kruhu okolo z_0 součtem své Taylorovy řady.

Důkaz. Nechť f je holomorfní v kruhu $K = \{z; |z - z_0| < r\}$ a w je libovolný bod K. Má se dokázat, že

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w - z_0)^n .$$

Nechť C je kružnice se středem z_0 ležící v K obsahující uvnitř w, takže $f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)/(z - w)^{-1}\, \mathrm{d}z$. Zlomek $1/(z - w)$ je součtem geometrické řady

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n ,$$

přičemž poslední řada konverguje stejnoměrně na C (má za majorantu geometrickou řadu s kvocientem menším než 1).

Dosazením do Cauchyova vzorce pro $f(w)$ se dostane

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} (w-z_0)^n \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(w-z_0)^n ,$$

což se mělo dokázat $\diamond$

LAURENTOVY ŘADY

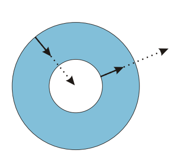
DEFINICE. Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ se definuje rovností

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n} .$$

První část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ Laurentovy řady se nazývá regulární část, druhá se nazývá hlavní část.

Definice určuje, co znamená konvergence Laurentovy řady: je to konvergence obou jejích částí:

Jedna část takové řady konverguje uvnitř nějakého kruhu, jiná část vně jiného kruhu. Když se protnou, vznikne mezikruží konvergence.



VĚTA. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existují čísla $0 \le r \le R \le +\infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z-z_0| < R\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M.

Součtem této řady je holomorfní funkce v mezikruží M, její derivace a primitivní funkce se získají derivováním a integrováním řady člen po členu.

VĚTA. Nechť $0 \le r < R \le \infty$ a funkce f je holomorfní v mezikruží M o středu z_0 a poloměrech r, R. Potom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

pro nějaká $a_n \in \mathbb{C}$ a všechna $z \in M$.

Důkaz. Kvůli jednoduššímu vyjádření stačí předpokládat $z_0 = 0$.

Zvolte $w \in M$ a kružnice (kladně orientované) C, D o středu 0 ležící v M, z nichž C obsahuje w uvnitř a D vně. Podle obecné Cauchyovy věty je

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-w}\, \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_D \frac{f(z)}{z-w}\, \mathrm{d}z\,.$$

V prvním integrálu je $|z| > |w|$ a tedy $\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n$. Ve druhém integrálu je $|z| < |w|$ a tedy $\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n$. Tyto řady po vynásobení $f(z)$ je možné integrovat člen po členu, takže

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} w^n \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1} \oint_D z^n f(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

což je hledaný tvar. $\diamond$

V důkazu jsme získali vzorec pro výpočet koeficientů a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z\,,$$

kde C je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

BTW, Laurentovy řady se čtou loránovy řady.

RŮZNÁ POUŽITÍ

VĚTA. (Věta o jednoznačnosti) Nechť funkce f a g jsou holomorfní v oblasti G a $\{w_n\}$ je posloupnost v G konvergující k $w \in G$. Jestliže $f(w_n) = g(w_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in G$.

Důkaz. Lze předpokládat, že $g = 0$ na G. V nějakém kruhu K okolo w je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; nechť existuje nějaké k tak, že $a_k \neq 0$ a k je takový první index.

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-w)^n$ je holomorfní funkce v K a rovná se $f(z)/(z-w)^k$ pro $z \in K \setminus \{w\}$; prvně uvedená funkce je nenulová v nějakém okolí bodu w, druhá funkce tam však má nekonečně mnoho nulových hodnot, což je spor.

Platí tedy, že $f = 0$ na nějakém kruhu K_w okolo každého bodu w, který je hromadným bodem nulových bodů funkce f.

Zbývá dokázat, že pro libovolný bod $c \in G$ je $f(c) = 0$. Spojme c s w lomenou čarou L ležící v G.

Pokud $c \in K_w$, není co dokazovat. Jinak se vezme průsečík c_1 hranice kruhu K_w s L takový, že část L od w do c_1 leží v K_w.

Bod c_1 je hromadným bodem nulových bodů funkce f a tedy okolo něho existuje kruh K_1, na kterém je $f = 0$.

Pokud $c \notin K_1$, vezme se průsečík c_2 hranice K_1 s L ležící blíže k c tak, že část L od c_1 do c_2 leží v K_1. Tímto způsobem se po konečně mnoha krocích dostaneme do situace, kdy $c \in K_n$ pro nějaké n. $\diamond$

VĚTA. Každá holomorfní nekonstantní funkce f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina roviny, jakmile je G otevřená podmnožina definičního oboru f.

LEMMA. Nechť f je holomorfní uvnitř a na uzavřené jednoduché křivce C, nenulová na C a má jen konečný počet nulových bodů uvnitř C. Pak integrál

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z$$

udává počet nulových bodů f uvnitř C, každý braný tolikrát, kolik je jeho násobnost.

VĚTA. Holomorfní a prostá funkce na oblasti má všude nenulovou derivaci.

VĚTA. Mé-li holomorfní funkce nenulovou derivaci v bodě, je prostá na nějakém jeho okolí.

Obě věty lze vyslovit současně: *Funkce holomorfní v nějakém bodě je prostá v nějakém jeho okolí právě když má v tomto bodě nenulovou derivaci.*

VĚTA. Nechť f je holomorfní prostá funkce na oblasti G. Pak inverzní funkce $g = f^{-1}$ je holomorfní na G a $g'(z) = 1/f'(g(z))$.

VĚTA. (Riemannova věta.) Nechť U je jednoduše souvislá otevřená množina v $\mathbb{C}$. Pak U je izomorfní s jednotkovým kruhem $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, to znamená, že existuje holomorfní bijekce mezi U a D, která má holomorfní inverzi.

Důkaz věty najde hledanou funkci jako limitu funkcí, které existují. Je cool hledat tu bijekci metodou pokus omyl. Například zobrazení čtvrt kruhu na horní polorovinu je $((1 + z^2)/(1 - z^2))^2$.

POZNÁMKY

Z věty o jednoznačnosti vyplývá řada vztahů pro holomorfní funkce, které platí v reálném oboru. Např. holomorfní funkce $\sin^2 z + \cos^2 z$ a funkce 1 se rovnají na reálné přímce a proto se rovnají všude v C.

Další důležitý důsledek věty o jednoznačnosti se týká tzv. analytického pokračování holomorfní funkce. Je-li f holomorfní funkce na otevřené množině G, g, h jsou holomorfní funkce na otevřené množině H, přičemž $G \cap H \neq \emptyset$ a $g = f, h = f$ na $G \cap H$, pak $g = h$ na H.

Funkce f'/f se často nazývá logaritmická derivace funkce f, protože má za primitivní funkci $\log(f(z)) = \log|f(z)| + \mathrm{i}\arg f(z)$.

Uvedený integrál $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ je tedy roven přírůstku argumentu funkce f (vynásobený i) po oběhu bodu z po křivce C (na uzavřené křivce se reálná část logaritmu zruší).

PŘÍKLADY

Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $\Re z > 1$ a diverguje pro $\Re z \le 0$. Pro $\Re z > 1$ je tedy funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ holomorfní.

Příklad. Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$ je holomorfní funkce pro $\Re z > 0$, jakmile $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolutně konverguje.

Příklad. Ukažte, že v oboru komplexních čísel je součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ roven $1/(1-z)$ pro $|z| < 1$. Geometrická řada diverguje pro $|z| > 1$.

Příklad. Najděte rozvoj $1/z$ okolo bodu 1.

Řešení. Napíšeme $1/z$ jako $1/(1-(1-z))$ a použijte geometrickou řadu s kvocientem $1-z$.

Příklad. Najděte rozvoj $\frac{2z}{(z-1)(z+1)}$ okolo bodu 0.

Řešení. Rozklad $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$ je součet geometrických řad $-\sum z^n, \sum(-z)^n$.

Příklad. Integrací vhodných mocninných řad získejte mocninné řady pro $\mathrm{Log}(z+1)$ a $\operatorname{arctg} z$.

Příklad. Najděte mezikruží konvergence Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n/2^{n^2}$.

Příklad. Rozkladem na parciální zlomky a jejich rozvojem v geometrické řady lze získat Laurentovy řady racionálních funkcí. Zjistěte Laurentovu řadu funkce $1/(z^2-3z+2)$ v mezikruží $1 < |z| < 2$.

Řešení. Regulární část se získá z parciálního zlomku $1/(z-2)$; hlavní část se získá ze zlomku $1/(z-1)$ úpravou na $(1/z)/(1-(1/z))$ a rozvojem v geometrickou řadu s kvocientem $1/z$.

Příklad. Integrací logaritmické derivace zjistěte počet oběhů následujících funkcí okolo 0:

$$z^n \ (n \in Z)\,, \quad \sin z\,, \quad \mathrm{e}^z\,.$$

Příklad. Najděte rozvoj do Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$ pro funkci

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Řešení. Začneme tím, že zadanou (racionální) funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

Singularity funkce jsou v bodech 0 a 1. Pro $|z-1| < 1$ je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Na mezikruží $0 < |z-1| < 1$ tedy platí

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$