OBECNÁ TOPOLOGIE

1. TOPOLOGIE A SPOJITOST

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2008

Topologické prostory vznikly abstrakcí vlastností potřebných pro definici spojitosti zobrazení. Spojitost reálných funkcí reálné proměnné lze charakterizovat pomocí konvergence, pomocí okolí nebo otevřených (resp. uzavřených) množin. Jsou i další méně používané možnosti.

Nemuselo být ovšem jasné, jaké požadavky se na konvergenci nebo soustavy okolí nebo soustavy otevřených množin mají klást. Celkem brzy však vykrystalizovaly základní požadavky, které se vzaly za axiómy. Je zřejmé, že ve speciálních případech mohly být vybrané axiómy příliš obecné (pak bylo nutné přidat další vlastnosti) nebo naopak příliš zužující (a pak bylo nutné některé axiómy oslabit). Vznikly tak speciální topologické prostory nebo zobecněné topologické prostory.

V tomto textu se nebudeme zobecněnými topologiemi zabývat. Speciální topologické prostory, splňující další přidané podmínky, jsou však velmi důležité a budou obsahem dalších kapitol.

Topologické prostory vznikly abstrakcí vlastností potřebných pro definici spojitosti zobrazení. Spojitost reálných funkcí reálné proměnné lze charakterizovat pomocí konvergence, pomocí okolí nebo otevřených (resp. uzavřených) množin. Jsou i další méně používané možnosti.

Nemuselo být ovšem jasné, jaké požadavky se na konvergenci nebo soustavy okolí nebo soustavy otevřených množin mají klást. Celkem brzy však vykrystalizovaly základní požadavky, které se vzaly za axiómy. Je zřejmé, že ve speciálních případech mohly být vybrané axiómy příliš obecné (pak bylo nutné přidat další vlastnosti) nebo naopak příliš zužující (a pak bylo nutné některé axiómy oslabit). Vznikly tak speciální topologické prostory nebo zobecněné topologické prostory.

V tomto textu se nebudeme zobecněnými topologiemi zabývat. Speciální topologické prostory, splňující další přidané podmínky, jsou však velmi důležité a budou obsahem dalších kapitol.

Topologické prostory vznikly abstrakcí vlastností potřebných pro definici spojitosti zobrazení. Spojitost reálných funkcí reálné proměnné lze charakterizovat pomocí konvergence, pomocí okolí nebo otevřených (resp. uzavřených) množin. Jsou i další méně používané možnosti.

Nemuselo být ovšem jasné, jaké požadavky se na konvergenci nebo soustavy okolí nebo soustavy otevřených množin mají klást. Celkem brzy však vykrystalizovaly základní požadavky, které se vzaly za axiómy. Je zřejmé, že ve speciálních případech mohly být vybrané axiómy příliš obecné (pak bylo nutné přidat další vlastnosti) nebo naopak příliš zužující (a pak bylo nutné některé axiómy oslabit). Vznikly tak speciální topologické prostory nebo zobecněné topologické prostory.

V tomto textu se nebudeme zobecněnými topologiemi zabývat. Speciální topologické prostory, splňující další přidané podmínky, jsou však velmi důležité a budou obsahem dalších kapitol.

$\Rightarrow$

Vzhledem k návaznosti na spojitost probíranou v matematické analýze nebo v teorii metrických prostorů by bylo přirozené definovat topologické prostory pomocí okolí bodů nebo pomocí konvergence. Obě možnosti jsou však složitější než definice pomocí otevřených množin. Použijeme tedy otevřené množiny a později ukážeme ekvivalentní charakterizaci pomocí okolí (definice topologie pomoci konvergence uvádět nebudeme, prakticky se nepoužívá pro svou složitost).

DEFINICE (Definice topologie pomocí otevřených množin)

Topologický prostor je dvojice $(X, \mathcal{G})$, kde X je množina a $\mathcal{G}$ je soustava podmnožin X, která je uzavřená na libovolná sjednocení a konečné průniky v X.
Soustava $\mathcal{G}$ se nazývá topologie a její prvky se nazývají otevřené množiny. Množina X se nazývá nosná množina prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Soustava $\exp(X)$ všech podmnožin množiny X je zřejmě topologie. Je to největší topologie na množině X a nazývá se diskrétní topologie.

Opačným extrémem je nejmenší možná topologie na množině X, která obsahuje jen $\emptyset$ a X. Nazývá se indiskrétní topologie.

DEFINICE (Definice topologie pomocí otevřených množin)

Topologický prostor je dvojice $(X, \mathcal{G})$, kde X je množina a $\mathcal{G}$ je soustava podmnožin X, která je uzavřená na libovolná sjednocení a konečné průniky v X.

Soustava $\mathcal{G}$ se nazývá topologie a její prvky se nazývají otevřené množiny. Množina X se nazývá nosná množina prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Soustava $\exp(X)$ všech podmnožin množiny X je zřejmě topologie. Je to největší topologie na množině X a nazývá se diskrétní topologie.

Opačným extrémem je nejmenší možná topologie na množině X, která obsahuje jen $\emptyset$ a X. Nazývá se indiskrétní topologie.

Mnoho dalších příkladů je uvedeno v Příkladech (speciální jednotlivé příklady) a ve Cvičeních (kde jsou obecnější příklady), samozřejmě nejen k této kapitole.

DEFINICE (Definice topologie pomocí otevřených množin)

Topologický prostor je dvojice $(X, \mathcal{G})$, kde X je množina a $\mathcal{G}$ je soustava podmnožin X, která je uzavřená na libovolná sjednocení a konečné průniky v X.

Soustava $\mathcal{G}$ se nazývá topologie a její prvky se nazývají otevřené množiny. Množina X se nazývá nosná množina prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Soustava $\exp(X)$ všech podmnožin množiny X je zřejmě topologie. Je to největší topologie na množině X a nazývá se diskrétní topologie.

Opačným extrémem je nejmenší možná topologie na množině X, která obsahuje jen $\emptyset$ a X. Nazývá se indiskrétní topologie.

Mnoho dalších příkladů je uvedeno v Příkladech (speciální jednotlivé příklady) a ve Cvičeních (kde jsou obecnější příklady), samozřejmě nejen k této kapitole.

DEFINICE (Definice topologie pomocí otevřených množin)

Topologický prostor je dvojice $(X, \mathcal{G})$, kde X je množina a $\mathcal{G}$ je soustava podmnožin X, která je uzavřená na libovolná sjednocení a konečné průniky v X.
Soustava $\mathcal{G}$ se nazývá topologie a její prvky se nazývají otevřené množiny. Množina X se nazývá nosná množina prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Soustava $\exp(X)$ všech podmnožin množiny X je zřejmě topologie. Je to největší topologie na množině X a nazývá se diskrétní topologie.

Opačným extrémem je nejmenší možná topologie na množině X, která obsahuje jen $\emptyset$ a X. Nazývá se indiskrétní topologie.

Mnoho dalších příkladů je uvedeno v Příkladech (speciální jednotlivé příklady) a ve Cvičeních (kde jsou obecnější příklady), samozřejmě nejen k této kapitole.

DEFINICE (Definice topologie pomocí otevřených množin)

Topologický prostor je dvojice $(X, \mathcal{G})$, kde X je množina a $\mathcal{G}$ je soustava podmnožin X, která je uzavřená na libovolná sjednocení a konečné průniky v X.
Soustava $\mathcal{G}$ se nazývá topologie a její prvky se nazývají otevřené množiny. Množina X se nazývá nosná množina prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Soustava $\exp(X)$ všech podmnožin množiny X je zřejmě topologie. Je to největší topologie na množině X a nazývá se diskrétní topologie.

Opačným extrémem je nejmenší možná topologie na množině X, která obsahuje jen $\emptyset$ a X. Nazývá se indiskrétní topologie.

Mnoho dalších příkladů je uvedeno v Příkladech (speciální jednotlivé příklady) a ve Cvičeních (kde jsou obecnější příklady), samozřejmě nejen k této kapitole.

DEFINICE (Definice topologie pomocí otevřených množin)

Topologický prostor je dvojice $(X, \mathcal{G})$, kde X je množina a $\mathcal{G}$ je soustava podmnožin X, která je uzavřená na libovolná sjednocení a konečné průniky v X.
Soustava $\mathcal{G}$ se nazývá topologie a její prvky se nazývají otevřené množiny. Množina X se nazývá nosná množina prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Soustava $\exp(X)$ všech podmnožin množiny X je zřejmě topologie. Je to největší topologie na množině X a nazývá se diskrétní topologie.

Opačným extrémem je nejmenší možná topologie na množině X, která obsahuje jen $\emptyset$ a X. Nazývá se indiskrétní topologie.

Mnoho dalších příkladů je uvedeno v Příkladech (speciální jednotlivé příklady) a ve Cvičeních (kde jsou obecnější příklady), samozřejmě nejen k této kapitole.

Pro stručnost se budou v dalším používat různé zkratkovité výrazy, které neovlivní popisovanou situaci. Nebudeme vždy rozlišovat prostor a jeho nosnou množinu. Např. podmnožina A topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$ znamená, že A je podmnožina X; někdy naopak bude X zastupovat celý topologický prostor $(X, \mathcal{G})$, bude-li jasné nebo nebude-li důležité, o jakou topologii se jedná. Pokud nemůže dojít k omylu, budeme také říkat *prostor* místo *topologický prostor*.

DEFINICE (Uzavřené množiny)

Podmnožina topologického prostoru se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Každá podmnožina diskrétního prostoru X je uzavřená. V indiskrétním prostoru X jsou uzavřené množiny pouze $\emptyset$ a X. V obou těchto případech nastává výjimečná situace, kdy soustava otevřených množin splývá se soustavou uzavřených množin. Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené, se nazývají obojetné. V diskrétním i indiskrétním prostoru se tedy topologie skládají z obojetných množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti uzavřených množin)

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzavřených množin)

Často budeme definovat nějaký pojem pro topologii a budeme ho pak používat i pro topologický prostor, nebo naopak. Např. jsme definovali *diskrétní topologii* a nebudeme již definovat a budeme pokládat za zřejmý pojem *diskrétní topologický prostor*.

DEFINICE (Uzavřené množiny)

Podmnožina topologického prostoru se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Každá podmnožina diskrétního prostoru X je uzavřená. V indiskrétním prostoru X jsou uzavřené množiny pouze $\emptyset$ a X V obou těchto případech nastává výjimečná situace, kdy soustava otevřených množin splývá se soustavou uzavřených množin. Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené, se nazývají obojetné. V diskrétním i indiskrétním prostoru se tedy topologie skládají z obojetných množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti uzavřených množin)

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzavřených množin)

Nechť $\mathcal{F}$ je soustava podmnožin množiny X uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení. Pak existuje jediná topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že $\mathcal{F}$ je soustava všech uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Také se bude užívat jednodušší spojení „bod a je otevřená množina" místo přesného vyjádření „množina složená z bodu a je otevřená". Podobně i další termíny pro množiny se budou stejně používat pro body (např. bod je uzavřený).

DEFINICE (Uzavřené množiny)

Podmnožina topologického prostoru se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Každá podmnožina diskrétního prostoru X je uzavřená. V indiskrétním prostoru X jsou uzavřené množiny pouze $\emptyset$ a X V obou těchto případech nastává výjimečná situace, kdy soustava otevřených množin splývá se soustavou uzavřených množin. Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené, se nazývají obojetné. V diskrétním i indiskrétním prostoru se tedy topologie skládají z obojetných množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti uzavřených množin)

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzavřených množin)

Nechť $\mathcal{F}$ je soustava podmnožin množiny X uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení. Pak existuje jediná topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že $\mathcal{F}$ je soustava všech uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

DEFINICE (Uzavřené množiny)

Podmnožina topologického prostoru se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Každá podmnožina diskrétního prostoru X je uzavřená. V indiskrétním prostoru X jsou uzavřené množiny pouze $\emptyset$ a X. V obou těchto případech nastává výjimečná situace, kdy soustava otevřených množin splývá se soustavou uzavřených množin. Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené, se nazývají obojetné. V diskrétním i indiskrétním prostoru se tedy topologie skládají z obojetných množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti uzavřených množin)

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzavřených množin)

Nechť $\mathcal{F}$ je soustava podmnožin množiny X uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení. Pak existuje jediná topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že $\mathcal{F}$ je soustava všech uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Topologie se tedy může definovat jak pomocí otevřených tak pomocí uzavřených množin podle toho, co je v daném případě vhodnější.

DEFINICE (Uzavřené množiny)

Podmnožina topologického prostoru se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Každá podmnožina diskrétního prostoru X je uzavřená. V indiskrétním prostoru X jsou uzavřené množiny pouze $\emptyset$ a X V obou těchto případech nastává výjimečná situace, kdy soustava otevřených množin splývá se soustavou uzavřených množin. Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené, se nazývají obojetné. V diskrétním i indiskrétním prostoru se tedy topologie skládají z obojetných množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti uzavřených množin)

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzavřených množin)

Nechť $\mathcal{F}$ je soustava podmnožin množiny X uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení. Pak existuje jediná topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že $\mathcal{F}$ je soustava všech uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Topologie se tedy může definovat jak pomocí otevřených tak pomocí uzavřených množin podle toho, co je v daném případě vhodnější.

DEFINICE (Uzavřené množiny)

Podmnožina topologického prostoru se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Každá podmnožina diskrétního prostoru X je uzavřená. V indiskrétním prostoru X jsou uzavřené množiny pouze $\emptyset$ a X V obou těchto případech nastává výjimečná situace, kdy soustava otevřených množin splývá se soustavou uzavřených množin. Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené, se nazývají obojetné. V diskrétním i indiskrétním prostoru se tedy topologie skládají z obojetných množin.

De Morganovy vzorce o sjednocení nebo průniku doplňků množin dají snadno následující vlastnosti uzavřených množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti uzavřených množin)

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzavřených množin)

Nechť $\mathcal{F}$ je soustava podmnožin množiny X uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení. Pak existuje jediná topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že $\mathcal{F}$ je soustava všech uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

DEFINICE (Uzavřené množiny)

Podmnožina topologického prostoru se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Každá podmnožina diskrétního prostoru X je uzavřená. V indiskrétním prostoru X jsou uzavřené množiny pouze $\emptyset$ a X V obou těchto případech nastává výjimečná situace, kdy soustava otevřených množin splývá se soustavou uzavřených množin. Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené, se nazývají obojetné. V diskrétním i indiskrétním prostoru se tedy topologie skládají z obojetných množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti uzavřených množin)

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzavřených množin)

Nechť $\mathcal{F}$ je soustava podmnožin množiny X uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení. Pak existuje jediná topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že $\mathcal{F}$ je soustava všech uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Topologie se tedy může definovat jak pomocí otevřených tak pomocí uzavřených množin podle toho, co je v daném případě vhodnější.

DEFINICE (Uzavřené množiny)

Podmnožina topologického prostoru se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Každá podmnožina diskrétního prostoru X je uzavřená. V indiskrétním prostoru X jsou uzavřené množiny pouze $\emptyset$ a X V obou těchto případech nastává výjimečná situace, kdy soustava otevřených množin splývá se soustavou uzavřených množin. Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené, se nazývají obojetné. V diskrétním i indiskrétním prostoru se tedy topologie skládají z obojetných množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti uzavřených množin)

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

Protože otevřené množiny jsou právě všechny doplňky uzavřených množin, dostane se snadno následující charakterizace topologických prostorů.

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzavřených množin)

Nechť $\mathcal{F}$ je soustava podmnožin množiny X uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení. Pak existuje jediná topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že $\mathcal{F}$ je soustava všech uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

DEFINICE (Uzavřené množiny)

Podmnožina topologického prostoru se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Každá podmnožina diskrétního prostoru X je uzavřená. V indiskrétním prostoru X jsou uzavřené množiny pouze $\emptyset$ a X V obou těchto případech nastává výjimečná situace, kdy soustava otevřených množin splývá se soustavou uzavřených množin. Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené, se nazývají obojetné. V diskrétním i indiskrétním prostoru se tedy topologie skládají z obojetných množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti uzavřených množin)

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzavřených množin)

Nechť $\mathcal{F}$ je soustava podmnožin množiny X uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení. Pak existuje jediná topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že $\mathcal{F}$ je soustava všech uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Topologie se tedy může definovat jak pomocí otevřených tak pomocí uzavřených množin podle toho, co je v daném případě vhodnější.

DEFINICE (Uzavřené množiny)

Podmnožina topologického prostoru se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Každá podmnožina diskrétního prostoru X je uzavřená. V indiskrétním prostoru X jsou uzavřené množiny pouze $\emptyset$ a X V obou těchto případech nastává výjimečná situace, kdy soustava otevřených množin splývá se soustavou uzavřených množin. Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené, se nazývají obojetné. V diskrétním i indiskrétním prostoru se tedy topologie skládají z obojetných množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti uzavřených množin)

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzavřených množin)

Nechť $\mathcal{F}$ je soustava podmnožin množiny X uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení. Pak existuje jediná topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že $\mathcal{F}$ je soustava všech uzavřených množin topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Topologie se tedy může definovat jak pomocí otevřených tak pomocí uzavřených množin podle toho, co je v daném případě vhodnější.

V metrických prostorech nebo v uspořádaných prostorech se otevřené množiny definují pomocí vhodné podsoustavy otevřených množin: pomocí otevřených koulí nebo pomocí otevřených intervalů, resp. Tento případ nastává dosti často a je vhodné uvedený postup definice otevřených množin nějak nazvat.

DEFINICE (Definice báze otevřených množin)

Nechť X je topologický prostor. Soustava $\mathcal{B}$ otevřených množin v X se nazývá báze otevřených množin, je-li každá otevřená množina v X sjednocením množin z $\mathcal{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti báze)

Soustava $\mathcal{B}$ podmnožin X je otevřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti

1. *Je-li $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$, pak existuje $B \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*
2. $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Důkaz

Přechodem k doplňkům lze definovat báze uzavřených množin a charakterizovat soustavy, které jsou takovými bázemi – viz Cvičení

DEFINICE (Definice báze otevřených množin)

Nechť X je topologický prostor. Soustava $\mathcal{B}$ otevřených množin v X se nazývá báze otevřených množin, je-li každá otevřená množina v X sjednocením množin z $\mathcal{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti báze)

Soustava $\mathcal{B}$ podmnožin X je otevřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti

1. *Je-li $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$, pak existuje $B \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*
2. $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Důkaz

Přechodem k doplňkům lze definovat báze uzavřených množin a charakterizovat soustavy, které jsou takovými bázemi – viz Cvičení

$\Rightarrow$

DEFINICE (Definice báze otevřených množin)

Nechť X je topologický prostor. Soustava $\mathcal{B}$ otevřených množin v X se nazývá báze otevřených množin, je-li každá otevřená množina v X sjednocením množin z $\mathcal{B}$.

Topologický prostor tedy stačí zadat bází otevřených množin. Např. pro definici diskrétního prostoru stačí říci, že má bázi otevřených množin složenou ze všech jednobodových množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti báze)

Soustava $\mathcal{B}$ podmnožin X je otevřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti

1. *Je-li $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$, pak existuje $B \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*
2. $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Důkaz

Přechodem k doplňkům lze definovat báze uzavřených množin a charakterizovat soustavy, které jsou takovými bázemi – viz Cvičení

$\Rightarrow$

DEFINICE (Definice báze otevřených množin)

Nechť X je topologický prostor. Soustava $\mathcal{B}$ otevřených množin v X se nazývá báze otevřených množin, je-li každá otevřená množina v X sjednocením množin z $\mathcal{B}$.

Někdy se místo báze otevřených množin říká otevřená báze nebo báze topologie. V posledně uvedeném případě ale musí být jasné, ze se jedná o otevřenou bázi (budou definovány ještě jiné báze).

TVRZENÍ (Vlastnosti báze)

Soustava $\mathcal{B}$ podmnožin X je otevřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti

1. *Je-li $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$, pak existuje $B \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*
2. $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Důkaz

Přechodem k doplňkům lze definovat báze uzavřených množin a charakterizovat soustavy, které jsou takovými bázemi – viz Cvičení

$\Rightarrow$

DEFINICE (Definice báze otevřených množin)

Nechť X je topologický prostor. Soustava $\mathcal{B}$ otevřených množin v X se nazývá báze otevřených množin, je-li každá otevřená množina v X sjednocením množin z $\mathcal{B}$.

Jaké musí mít soustava podmnožin X vlastnosti, aby mohla být otevřenou bází nějaké topologie na X?

TVRZENÍ (Vlastnosti báze)

Soustava $\mathcal{B}$ podmnožin X je otevřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti

1. *Je-li $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$, pak existuje $B \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*
2. $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Důkaz

Přechodem k doplňkům lze definovat báze uzavřených množin a charakterizovat soustavy, které jsou takovými bázemi – viz Cvičení

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Definice báze otevřených množin)

Nechť X je topologický prostor. Soustava $\mathcal{B}$ otevřených množin v X se nazývá báze otevřených množin, je-li každá otevřená množina v X sjednocením množin z $\mathcal{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti báze)

Soustava $\mathcal{B}$ podmnožin X je otevřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti

1. *Je-li $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$, pak existuje $B \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*
2. $\bigcup \mathcal{B} = X$.

▸ Důkaz

Přechodem k doplňkům lze definovat báze uzavřených množin a charakterizovat soustavy, které jsou takovými bázemi – viz Cvičení

$\Rightarrow$

DEFINICE (Definice báze otevřených množin)

Nechť X je topologický prostor. Soustava $\mathcal{B}$ otevřených množin v X se nazývá báze otevřených množin, je-li každá otevřená množina v X sjednocením množin z $\mathcal{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti báze)

Soustava $\mathcal{B}$ podmnožin X je otevřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti

1. *Je-li* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$, *pak existuje* $B \in \mathcal{B}$ *takové, že* $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.
2. $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Důkaz

Přechodem k doplňkům lze definovat báze uzavřených množin a charakterizovat soustavy, které jsou takovými bázemi – viz Cvičení

$\Rightarrow$

Jak vyplývá z předchozí charakterizace otevřené báze, ne každá soustava podmnožin X je bází nějaké topologie. Může libovolná soustava množin určovat jednoznačně topologii?

DEFINICE (Definice subbáze otevřených množin)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze topologie $\mathcal{G}$ na X, jestliže $\mathcal{G}$ je nejmenší topologie na X obsahující $\mathcal{S}$.

TVRZENÍ (Charakterizace subbáze)

1. *Každá soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X je subbáze nějaké (jediné) topologie $\mathcal{G}$ na X.*
2. *Konečné průniky množin z $\mathcal{S}$ tvoří otevřenou bázi topologie $\mathcal{G}$.*

Důkaz

DEFINICE (Definice subbáze otevřených množin)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze topologie $\mathcal{G}$ na X, jestliže $\mathcal{G}$ je nejmenší topologie na X obsahující $\mathcal{S}$.

TVRZENÍ (Charakterizace subbáze)

1. *Každá soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X je subbáze nějaké (jediné) topologie $\mathcal{G}$ na X.*
2. *Konečné průniky množin z $\mathcal{S}$ tvoří otevřenou bázi topologie $\mathcal{G}$.*

Důkaz

DEFINICE (Definice subbáze otevřených množin)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze topologie $\mathcal{G}$ na X, jestliže $\mathcal{G}$ je nejmenší topologie na X obsahující $\mathcal{S}$.

Např. prázdná soustava množin z X je subbází indiskrétní topologie na X.
Jednoznačnost určení topologie $\mathcal{G}$ danou subbázi, je zřejmá z definice. Existence a popis jsou vyjádřeny v následujícím tvrzení.

TVRZENÍ (Charakterizace subbáze)

1. *Každá soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X je subbáze nějaké (jediné) topologie $\mathcal{G}$ na X.*
2. *Konečné průniky množin z $\mathcal{S}$ tvoří otevřenou bázi topologie $\mathcal{G}$.*

Důkaz

DEFINICE (Definice subbáze otevřených množin)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze topologie $\mathcal{G}$ na X, jestliže $\mathcal{G}$ je nejmenší topologie na X obsahující $\mathcal{S}$.

TVRZENÍ (Charakterizace subbáze)

1. *Každá soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X je subbáze nějaké (jediné) topologie $\mathcal{G}$ na X.*
2. *Konečné průniky množin z $\mathcal{S}$ tvoří otevřenou bázi topologie $\mathcal{G}$.*

▸ Důkaz

DEFINICE (Definice subbáze otevřených množin)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá subbáze topologie $\mathcal{G}$ na X, jestliže $\mathcal{G}$ je nejmenší topologie na X obsahující $\mathcal{S}$.

TVRZENÍ (Charakterizace subbáze)

1. *Každá soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X je subbáze nějaké (jediné) topologie $\mathcal{G}$ na X.*
2. *Konečné průniky množin z $\mathcal{S}$ tvoří otevřenou bázi topologie $\mathcal{G}$.*

▸ Důkaz

Podobně lze definovat a popsat i uzavřenou subbázi topologie.

Jak jsme se zmínili na začátku, popis topologie např. na reálné přímce (obecněji v metrických nebo uspořádaných prostorech) je přirozenější pomocí okolí bodů. Tuto charakterizaci nyní uvedeme.

DEFINICE (Definice okolí)

V topologickém prostoru $(X, \mathcal{G})$ se podmnožina U nazývá okolím bodu x (nebo množiny A), jestliže existuje otevřená množina G taková, že $x \in G \subset U$ (nebo $A \subset G \subset U$, resp.).

DEFINICE (Definice okolí)

V topologickém prostoru $(X, \mathcal{G})$ se podmnožina U nazývá okolím bodu x (nebo množiny A), jestliže existuje otevřená množina G taková, že $x \in G \subset U$ (nebo $A \subset G \subset U$, resp.).
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá bází okolí (nebo lokální bází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějakou množiny z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je bází filtru všech okolí bodu x.
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá subbází okolí (nebo lokální subbází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějaký průnik konečně mnoha množin z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je subbází filtru všech okolí bodu x.

DEFINICE (Definice okolí)

V topologickém prostoru $(X, \mathcal{G})$ se podmnožina U nazývá okolím bodu x (nebo množiny A), jestliže existuje otevřená množina G taková, že $x \in G \subset U$ (nebo $A \subset G \subset U$, resp.).
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá bází okolí (nebo lokální bází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějakou množiny z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je bází filtru všech okolí bodu x.
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá subbází okolí (nebo lokální subbází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějaký průnik konečně mnoha množin z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je subbází filtru všech okolí bodu x.

TVRZENÍ (Vlastnosti soustav okolí)

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{U}_x$ značí soustavu všech okolí v bodě $x \in X$. Pak platí:

DEFINICE (Definice okolí)

V topologickém prostoru $(X, \mathcal{G})$ se podmnožina U nazývá okolím bodu x (nebo množiny A), jestliže existuje otevřená množina G taková, že $x \in G \subset U$ (nebo $A \subset G \subset U$, resp.).
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá bází okolí (nebo lokální bází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějakou množiny z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je bází filtru všech okolí bodu x.
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá subbází okolí (nebo lokální subbází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějaký průnik konečně mnoha množin z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je subbází filtru všech okolí bodu x.

Uvědomte si, že množina je otevřená právě když je okolím každého svého bodu. V diskrétním prostoru X je každá jeho podmnožina obsahující bod x i okolím tohoto bodu. V indiskrétním prostoru X má každý bod jediné okolí, a to množinu X.
Ve cvičeních jsou uvedeny souvislosti mezi otevřenými bázemi a bázemi okolí.

TVRZENÍ (Vlastnosti soustav okolí)

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{U}_x$ značí soustavu všech okolí v bodě $x \in X$. Pak platí:

1. *$\mathcal{U}_x$ je filtr v X obsahující x ve svém průniku;*

DEFINICE (Definice okolí)

V topologickém prostoru $(X, \mathcal{G})$ se podmnožina U nazývá okolím bodu x (nebo množiny A), jestliže existuje otevřená množina G taková, že $x \in G \subset U$ (nebo $A \subset G \subset U$, resp.).
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá bází okolí (nebo lokální bází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějakou množiny z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je bází filtru všech okolí bodu x.
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá subbází okolí (nebo lokální subbází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějaký průnik konečně mnoha množin z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je subbází filtru všech okolí bodu x.

Jaké vlastnosti mají soustavy okolí a dají se pomocí nich charakterizovat topologie? Na první otázku odpovídá následující tvrzení

TVRZENÍ (Vlastnosti soustav okolí)

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{U}_x$ značí soustavu všech okolí v bodě $x \in X$. Pak platí:

1. *$\mathcal{U}_x$ je filtr v X obsahující x ve svém průniku;*
2. *Pro každé $U \in \mathcal{U}_x$ existuje $V \in \mathcal{U}_x$ takové, že $U \in \mathcal{U}_y$ pro každé $y \in V$.*

Důkaz

TVRZENÍ (Topologie pomocí okolí)

Nechť je pro každé $x \in X$ dána soustava množin $\mathcal{U}_x$ splňující obě vlastnosti z předchozího tvrzení. Pak

DEFINICE (Definice okolí)

V topologickém prostoru $(X, \mathcal{G})$ se podmnožina U nazývá okolím bodu x (nebo množiny A), jestliže existuje otevřená množina G taková, že $x \in G \subset U$ (nebo $A \subset G \subset U$, resp.).
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá bází okolí (nebo lokální bází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějakou množiny z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je bází filtru všech okolí bodu x.
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá subbází okolí (nebo lokální subbází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějaký průnik konečně mnoha množin z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je subbází filtru všech okolí bodu x.

TVRZENÍ (Vlastnosti soustav okolí)

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{U}_x$ značí soustavu všech okolí v bodě $x \in X$. Pak platí:

1. *$\mathcal{U}_x$ je filtr v X obsahující x ve svém průniku;*
2. *Pro každé $U \in \mathcal{U}_x$ existuje $V \in \mathcal{U}_x$ takové, že $U \in \mathcal{U}_y$ pro každé $y \in V$.*

Důkaz

TVRZENÍ (Topologie pomocí okolí)

Nechť je pro každé $x \in X$ dána soustava množin $\mathcal{U}_x$ splňující obě vlastnosti z předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie pro kterou jsou $\mathcal{U}_x$ soustavami všech okolí v bodě x.

Důkaz

DEFINICE (Definice okolí)

V topologickém prostoru $(X, \mathcal{G})$ se podmnožina U nazývá okolím bodu x (nebo množiny A), jestliže existuje otevřená množina G taková, že $x \in G \subset U$ (nebo $A \subset G \subset U$, resp.).
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá bází okolí (nebo lokální bází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějakou množiny z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je bází filtru všech okolí bodu x.
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá subbází okolí (nebo lokální subbází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějaký průnik konečně mnoha množin z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je subbází filtru všech okolí bodu x.

TVRZENÍ (Vlastnosti soustav okolí)

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{U}_x$ značí soustavu všech okolí v bodě $x \in X$. Pak platí:

1. *$\mathcal{U}_x$ je filtr v X obsahující x ve svém průniku;*
2. *Pro každé $U \in \mathcal{U}_x$ existuje $V \in \mathcal{U}_x$ takové, že $U \in \mathcal{U}_y$ pro každé $y \in V$.*

▸ Důkaz

Odpověď na druhou otázku je obsažena v dalším tvrzení.

TVRZENÍ (Topologie pomocí okolí)

Nechť je pro každé $x \in X$ dána soustava množin $\mathcal{U}_x$ splňující obě vlastnosti z předchozího tvrzení. Pak

DEFINICE (Definice okolí)

V topologickém prostoru $(X, \mathcal{G})$ se podmnožina U nazývá okolím bodu x (nebo množiny A), jestliže existuje otevřená množina G taková, že $x \in G \subset U$ (nebo $A \subset G \subset U$, resp.).
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá bází okolí (nebo lokální bází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějakou množiny z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je bází filtru všech okolí bodu x.
Soustava $\mathcal{U}$ okolí bodu x se nazývá subbází okolí (nebo lokální subbází) bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nějaký průnik konečně mnoha množin z $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ je subbází filtru všech okolí bodu x.

TVRZENÍ (Vlastnosti soustav okolí)

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{U}_x$ značí soustavu všech okolí v bodě $x \in X$. Pak platí:

1. *$\mathcal{U}_x$ je filtr v X obsahující x ve svém průniku;*
2. *Pro každé $U \in \mathcal{U}_x$ existuje $V \in \mathcal{U}_x$ takové, že $U \in \mathcal{U}_y$ pro každé $y \in V$.*

Důkaz

TVRZENÍ (Topologie pomocí okolí)

Nechť je pro každé $x \in X$ dána soustava množin $\mathcal{U}_x$ splňující obě vlastnosti z předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie pro kterou jsou $\mathcal{U}_x$ soustavami všech okolí v bodě x.

Důkaz

Z vlastností otevřených a uzavřených množin vyplývá existence nejmenší uzavřené množiny obsahující danou množinu, a největší otevřené množiny obsažené v dané množině. Tyto dvě množiny jsou velmi důležité pro práci v topologických prostorech (jsou to jakési uzavřené, popř. otevřené modifikace dané množiny) a mají proto své jméno.

DEFINICE (Uzávěr a vnitřek množiny)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Sjednocení všech otevřených množin obsažených v A se nazývá vnitřek množiny A a průnik všech uzavřených množin obsahujících A se nazývá uzávěr množiny A. Vnitřek množiny A se značí $\operatorname{int} A$ nebo A^o, její uzávěr se značí $\operatorname{cl} A$ nebo $\overline{A}$, někdy i uA, vA apod. (je-li třeba odlišit různé uzávěry). Chceme-li zdůraznit, že se jedná o uzávěr v X, píše se např. $\overline{A}^X$.

TVRZENÍ (Popis uzávěru a vnitřku pomocí okolí)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Pak

$$A^o = \{x \in X;\ \textit{existuje okolí } U \textit{ bodu } x \textit{ takové, že } U \subset A\}\,,$$
$$\overline{A} = \{x \in X;\ \textit{pro každé okolí } U \textit{ bodu } x \textit{ je } U \cap A \neq \emptyset\}\,.$$

Důkaz

DEFINICE (Uzávěr a vnitřek množiny)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Sjednocení všech otevřených množin obsažených v A se nazývá vnitřek množiny A a průnik všech uzavřených množin obsahujících A se nazývá uzávěr množiny A.
Vnitřek množiny A se značí $\operatorname{int} A$ nebo A^o, její uzávěr se značí $\operatorname{cl} A$ nebo $\overline{A}$, někdy i uA, vA apod. (je-li třeba odlišit různé uzávěry). Chceme-li zdůraznit, že se jedná o uzávěr v X, píše se např. $\overline{A}^X$.

TVRZENÍ (Popis uzávěru a vnitřku pomocí okolí)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Pak

$$A^o = \{x \in X;\ \text{existuje okolí } U \text{ bodu } x \text{ takové, že } U \subset A\},$$
$$\overline{A} = \{x \in X;\ \text{pro každé okolí } U \text{ bodu } x \text{ je } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (Uzávěr a vnitřek množiny)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Sjednocení všech otevřených množin obsažených v A se nazývá vnitřek množiny A a průnik všech uzavřených množin obsahujících A se nazývá uzávěr množiny A. Vnitřek množiny A se značí int A nebo A^o, její uzávěr se značí cl A nebo $\overline{A}$, někdy i uA, vA apod. (je-li třeba odlišit různé uzávěry). Chceme-li zdůraznit, že se jedná o uzávěr v X, píše se např. $\overline{A}^X$.

Je zřejmé, že A^o je největší otevřená podmnožina A a $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující A. Uvědomte si, že množina A je uzavřená (nebo otevřená) právě když se rovná svému uzávěru $\overline{A}$ (nebo svému vnitřku A^o, resp.).
Vnitřek množiny $\mathbb{Q}$ racionálních čísel na reálné přímce $\mathbb{R}$ je prázdný, její uzávěr je celá množina $\mathbb{R}$. Totéž platí pro množinu iracionálních čísel v $\mathbb{R}$. Uzávěr množiny A v metrickém prostoru (X, d) je roven $\{x; d(x, A) = 0\}$.

TVRZENÍ (Popis uzávěru a vnitřku pomocí okolí)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Pak

$$A^o = \{x \in X;\ \text{existuje okolí } U \text{ bodu } x \text{ takové, že } U \subset A\}\,,$$
$$\overline{A} = \{x \in X;\ \text{pro každé okolí } U \text{ bodu } x \text{ je } U \cap A \neq \emptyset\}\,.$$

DEFINICE (Uzávěr a vnitřek množiny)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Sjednocení všech otevřených množin obsažených v A se nazývá vnitřek množiny A a průnik všech uzavřených množin obsahujících A se nazývá uzávěr množiny A.
Vnitřek množiny A se značí $\operatorname{int} A$ nebo A^o, její uzávěr se značí $\operatorname{cl} A$ nebo $\overline{A}$, někdy i uA, vA apod. (je-li třeba odlišit různé uzávěry). Chceme-li zdůraznit, že se jedná o uzávěr v X, píše se např. $\overline{A}^X$.

Uzávěr i vnitřek je samozřejmě možné popsat i pomocí okolí:

TVRZENÍ (Popis uzávěru a vnitřku pomocí okolí)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Pak

$$A^o = \{x \in X;\ \textit{existuje okolí } U \textit{ bodu } x \textit{ takové, že } U \subset A\}\,,$$
$$\overline{A} = \{x \in X;\ \textit{pro každé okolí } U \textit{ bodu } x \textit{ je } U \cap A \neq \emptyset\}\,.$$

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (Uzávěr a vnitřek množiny)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Sjednocení všech otevřených množin obsažených v A se nazývá vnitřek množiny A a průnik všech uzavřených množin obsahujících A se nazývá uzávěr množiny A.
Vnitřek množiny A se značí $\operatorname{int} A$ nebo A^o, její uzávěr se značí $\operatorname{cl} A$ nebo $\overline{A}$, někdy i uA, vA apod. (je-li třeba odlišit různé uzávěry). Chceme-li zdůraznit, že se jedná o uzávěr v X, píše se např. $\overline{A}^X$.

TVRZENÍ (Popis uzávěru a vnitřku pomocí okolí)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Pak

$$A^o = \{x \in X;\ \text{existuje okolí } U \text{ bodu } x \text{ takové, že } U \subset A\},$$
$$\overline{A} = \{x \in X;\ \text{pro každé okolí } U \text{ bodu } x \text{ je } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (Uzávěr a vnitřek množiny)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Sjednocení všech otevřených množin obsažených v A se nazývá vnitřek množiny A a průnik všech uzavřených množin obsahujících A se nazývá uzávěr množiny A. Vnitřek množiny A se značí int A nebo A^o, její uzávěr se značí cl A nebo $\overline{A}$, někdy i uA, vA apod. (je-li třeba odlišit různé uzávěry). Chceme-li zdůraznit, že se jedná o uzávěr v X, píše se např. $\overline{A}^X$.

TVRZENÍ (Popis uzávěru a vnitřku pomocí okolí)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Pak

$$A^o = \{x \in X;\ \text{existuje okolí } U \text{ bodu } x \text{ takové, že } U \subset A\}\,,$$
$$\overline{A} = \{x \in X;\ \text{pro každé okolí } U \text{ bodu } x \text{ je } U \cap A \neq \emptyset\}\,.$$

▸ Důkaz

$\Rightarrow$

Podobně jako u okolí lze uvést charakterizující vlastnosti uzávěru a vnitřku (pro vnitřek viz Cvičení).

TVRZENÍ (Vlastnosti uzávěru)

Nechť X je topologický prostor a A, B jsou libovolné podmnožiny X. Pak

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Důkaz

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzávěru)

Nechť pro každou podmnožinu A množiny X je dána množina $\overline{A} \subset X$ splňující 4 podmínky předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie na X taková, že $\overline{A}$ je uzávěr množiny A v této topologii pro každou $A \subset X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti uzávěru)

Nechť X je topologický prostor a A, B jsou libovolné podmnožiny X. Pak

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Důkaz

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzávěru)

Nechť pro každou podmnožinu A množiny X je dána množina $\overline{A} \subset X$ splňující 4 podmínky předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie na X taková, že $\overline{A}$ je uzávěr množiny A v této topologii pro každou $A \subset X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti uzávěru)

Nechť X je topologický prostor a A, B jsou libovolné podmnožiny X. Pak

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Důkaz

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzávěru)

Nechť pro každou podmnožinu A množiny X je dána množina $\overline{A} \subset X$ splňující 4 podmínky předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie na X taková, že $\overline{A}$ je uzávěr množiny A v této topologii pro každou $A \subset X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti uzávěru)

Nechť X je topologický prostor a A, B jsou libovolné podmnožiny X. Pak

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Důkaz

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzávěru)

Nechť pro každou podmnožinu A množiny X je dána množina $\overline{A} \subset X$ splňující 4 podmínky předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie na X taková, že $\overline{A}$ je uzávěr množiny A v této topologii pro každou $A \subset X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti uzávěru)

Nechť X *je topologický prostor a* A, B *jsou libovolné podmnožiny* X. *Pak*

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzávěru)

Nechť pro každou podmnožinu A *množiny* X *je dána množina* $\overline{A} \subset X$ *splňující 4 podmínky předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie na* X *taková, že* $\overline{A}$ *je uzávěr množiny* A *v této topologii pro každou* $A \subset X$.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti uzávěru)

Nechť X je topologický prostor a A, B jsou libovolné podmnožiny X. Pak

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Důkaz

Uvedené vlastnosti charakterizují uzávěr:

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzávěru)

Nechť pro každou podmnožinu A množiny X je dána množina $\overline{A} \subset X$ splňující 4 podmínky předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie na X taková, že $\overline{A}$ je uzávěr množiny A v této topologii pro každou $A \subset X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti uzávěru)

Nechť X *je topologický prostor a* A, B *jsou libovolné podmnožiny* X. *Pak*

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Důkaz

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzávěru)

Nechť pro každou podmnožinu A *množiny* X *je dána množina* $\overline{A} \subset X$ *splňující 4 podmínky předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie na* X *taková, že* $\overline{A}$ *je uzávěr množiny* A *v této topologii pro každou* $A \subset X$.

Důkaz

V metrických prostorech se mnoho vlastností dá vyjádřit pomocí konvergence posloupností. Přenést konvergenci do topologických prostorů není jednoduché. Spočetné posloupnosti totiž nestačí na charakterizaci topologie (viz např. prostor ordinálů nebo spočetný prostor vytvořený ultrafiltrem nebo pseudovějíř. Ani dobře uspořádané dlouhé posloupnosti nestačí. Musí se vzít usměrněné soubory.

DEFINICE (Konvergence)

Nechť X je topologický prostor a $S = \{x_a\}_A$ je usměrněný soubor v X. S konverguje k $x \in X$ (značení $S \to x$), jestliže každé okolí U bodu x obsahuje skoro všechny body x_a, tj. existuje $a_0 \in A$ tak, že všechna $x_a \in U$, jakmile $a > a_0$.
Místo *S konverguje k x* se též říká, že *S má limitu x* a tato situace se značí $\lim S = x$.

Bod $x \in X$ je hromadným bodem usměrněného souboru S, jestliže každé okolí bodu x obsahuje konfinálně mnoho bodů x_a, tj. množina indexů a, pro které leží x_a v daném okolí, je konfinální v A.

TVRZENÍ (Vlastnosti konvergence)

Nechť X je topologický prostor, pak platí:

1. *Konstantní usměrněný soubor konverguje ke své hodnotě.*
2. *Jestliže usměrněný soubor v X konverguje k bodu x, konverguje k témuž bodu i každý usměrněný podsoubor.*

DEFINICE (Konvergence)

Nechť X je topologický prostor a $S = \{x_a\}_A$ je usměrněný soubor v X. S konverguje k $x \in X$ (značení $S \rightarrow x$), jestliže každé okolí U bodu x obsahuje skoro všechny body x_a, tj. existuje $a_0 \in A$ tak, že všechna $x_a \in U$, jakmile $a > a_0$.
Místo *S konverguje k x* se též říká, že *S má limitu x* a tato situace se značí $\lim S = x$.

Bod $x \in X$ je hromadným bodem usměrněného souboru S, jestliže každé okolí bodu x obsahuje konfinálně mnoho bodů x_a, tj. množina indexů a, pro které leží x_a v daném okolí, je konfinální v A.

TVRZENÍ (Vlastnosti konvergence)

Nechť X je topologický prostor, pak platí:

1. *Konstantní usměrněný soubor konverguje ke své hodnotě.*
2. *Jestliže usměrněný soubor v X konverguje k bodu x, konverguje k témuž bodu i každý usměrněný podsoubor.*
3. *Jestliže každý usměrněný podsoubor usměrněného souboru S má usměrněný podsoubor konvergující k x, pak S konverguje k x.*
4. *Je-li x hromadným bodem usměrněného souboru S, pak existuje usměrněný podsoubor souboru S, který k x konverguje.*

Důkaz

DEFINICE (Konvergence)

Nechť X je topologický prostor a $S = \{x_a\}_A$ je usměrněný soubor v X. S konverguje k $x \in X$ (značení $S \to x$), jestliže každé okolí U bodu x obsahuje skoro všechny body x_a, tj. existuje $a_0 \in A$ tak, že všechna $x_a \in U$, jakmile $a > a_0$.
Místo *S konverguje k x* se též říká, že *S má limitu x* a tato situace se značí $\lim S = x$.

Bod $x \in X$ je hromadným bodem usměrněného souboru S, jestliže každé okolí bodu x obsahuje konfinálně mnoho bodů x_a, tj. množina indexů a, pro které leží x_a v daném okolí, je konfinální v A.

TVRZENÍ (Vlastnosti konvergence)

Nechť X je topologický prostor, pak platí:

1. *Konstantní usměrněný soubor konverguje ke své hodnotě.*
2. *Jestliže usměrněný soubor v X konverguje k bodu x, konverguje k témuž bodu i každý usměrněný podsoubor.*
3. *Jestliže každý usměrněný podsoubor usměrněného souboru S má usměrněný podsoubor konvergující k x, pak S konverguje k x.*
4. *Je-li x hromadným bodem usměrněného souboru S, pak existuje usměrněný podsoubor souboru S, který k x konverguje.*

Důkaz

DEFINICE (Konvergence)

Nechť X je topologický prostor a $S = \{x_a\}_A$ je usměrněný soubor v X. S konverguje k $x \in X$ (značení $S \to x$), jestliže každé okolí U bodu x obsahuje skoro všechny body x_a, tj. existuje $a_0 \in A$ tak, že všechna $x_a \in U$, jakmile $a > a_0$.
Místo *S konverguje k x* se též říká, že *S má limitu x* a tato situace se značí $\lim S = x$.

Bod $x \in X$ je hromadným bodem usměrněného souboru S, jestliže každé okolí bodu x obsahuje konfinálně mnoho bodů x_a, tj. množina indexů a, pro které leží x_a v daném okolí, je konfinální v A.

Např. v diskrétním prostoru X konverguje usměrněný soubor S k bodu x právě když je skoro konstantní s hodnotou x (tj., od určitého indexu jsou hodnoty S rovny x). V indiskrétním prostoru X konverguje každý usměrněný soubor ke každému bodu z X.

TVRZENÍ (Vlastnosti konvergence)

Nechť X je topologický prostor, pak platí:

1. *Konstantní usměrněný soubor konverguje ke své hodnotě.*
2. *Jestliže usměrněný soubor v X konverguje k bodu x, konverguje k témuž bodu i každý usměrněný podsoubor.*
3. *Jestliže každý usměrněný podsoubor usměrněného souboru S má usměrněný podsoubor konvergující k x, pak S konverguje k x.*

DEFINICE (Konvergence)

Nechť X je topologický prostor a $S = \{x_a\}_A$ je usměrněný soubor v X. S konverguje k $x \in X$ (značení $S \to x$), jestliže každé okolí U bodu x obsahuje skoro všechny body x_a, tj. existuje $a_0 \in A$ tak, že všechna $x_a \in U$, jakmile $a > a_0$.
Místo *S konverguje k x* se též říká, že *S má limitu x* a tato situace se značí $\lim S = x$.

Bod $x \in X$ je hromadným bodem usměrněného souboru S, jestliže každé okolí bodu x obsahuje konfinálně mnoho bodů x_a, tj. množina indexů a, pro které leží x_a v daném okolí, je konfinální v A.

Charakterizace topologie pomocí konvergence není příliš vhodná k použití a nebude v tomto textu používána. Uvedeme nyní jen základní vlastnosti konvergence, které ji však necharakterizují.

TVRZENÍ (Vlastnosti konvergence)

Nechť X je topologický prostor, pak platí:

1. *Konstantní usměrněný soubor konverguje ke své hodnotě.*
2. *Jestliže usměrněný soubor v X konverguje k bodu x, konverguje k témuž bodu i každý usměrněný podsoubor.*
3. *Jestliže každý usměrněný podsoubor usměrněného souboru S má usměrněný podsoubor konvergující k x, pak S konverguje k x.*

DEFINICE (Konvergence)

Nechť X je topologický prostor a $S = \{x_a\}_A$ je usměrněný soubor v X. S konverguje k $x \in X$ (značení $S \to x$), jestliže každé okolí U bodu x obsahuje skoro všechny body x_a, tj. existuje $a_0 \in A$ tak, že všechna $x_a \in U$, jakmile $a > a_0$.
Místo *S konverguje k x* se též říká, že *S má limitu x* a tato situace se značí $\lim S = x$.

Bod $x \in X$ je hromadným bodem usměrněného souboru S, jestliže každé okolí bodu x obsahuje konfinálně mnoho bodů x_a, tj. množina indexů a, pro které leží x_a v daném okolí, je konfinální v A.

TVRZENÍ (Vlastnosti konvergence)

Nechť X je topologický prostor. pak platí:

1. *Konstantní usměrněný soubor konverguje ke své hodnotě.*
2. *Jestliže usměrněný soubor v X konverguje k bodu x, konverguje k témuž bodu i každý usměrněný podsoubor.*
3. *Jestliže každý usměrněný podsoubor usměrněného souboru S má usměrněný podsoubor konvergující k x, pak S konverguje k x.*
4. *Je-li x hromadným bodem usměrněného souboru S, pak existuje usměrněný podsoubor souboru S, který k x konverguje.*

Důkaz

DEFINICE (Konvergence)

Nechť X je topologický prostor a $S = \{x_a\}_A$ je usměrněný soubor v X. S konverguje k $x \in X$ (značení $S \to x$), jestliže každé okolí U bodu x obsahuje skoro všechny body x_a, tj. existuje $a_0 \in A$ tak, že všechna $x_a \in U$, jakmile $a > a_0$.
Místo *S konverguje k x* se též říká, že *S má limitu x* a tato situace se značí $\lim S = x$.

Bod $x \in X$ je hromadným bodem usměrněného souboru S, jestliže každé okolí bodu x obsahuje konfinálně mnoho bodů x_a, tj. množina indexů a, pro které leží x_a v daném okolí, je konfinální v A.

TVRZENÍ (Vlastnosti konvergence)

Nechť X je topologický prostor. pak platí:

1. *Konstantní usměrněný soubor konverguje ke své hodnotě.*
2. *Jestliže usměrněný soubor v X konverguje k bodu x, konverguje k témuž bodu i každý usměrněný podsoubor.*
3. *Jestliže každý usměrněný podsoubor usměrněného souboru S má usměrněný podsoubor konvergující k x, pak S konverguje k x.*
4. *Je-li x hromadným bodem usměrněného souboru S, pak existuje usměrněný podsoubor souboru S, který k x konverguje.*

Důkaz

DEFINICE (Konvergence)

Nechť X je topologický prostor a $S = \{x_a\}_A$ je usměrněný soubor v X. S konverguje k $x \in X$ (značení $S \longrightarrow x$), jestliže každé okolí U bodu x obsahuje skoro všechny body x_a, tj. existuje $a_0 \in A$ tak, že všechna $x_a \in U$, jakmile $a > a_0$.
Místo *S konverguje k x* se též říká, že *S má limitu x* a tato situace se značí $\lim S = x$.

Bod $x \in X$ je hromadným bodem usměrněného souboru S, jestliže každé okolí bodu x obsahuje konfinálně mnoho bodů x_a, tj. množina indexů a, pro které leží x_a v daném okolí, je konfinální v A.

TVRZENÍ (Vlastnosti konvergence)

Nechť X je topologický prostor. pak platí:

1. *Konstantní usměrněný soubor konverguje ke své hodnotě.*
2. *Jestliže usměrněný soubor v X konverguje k bodu x, konverguje k témuž bodu i každý usměrněný podsoubor.*
3. *Jestliže každý usměrněný podsoubor usměrněného souboru S má usměrněný podsoubor konvergující k x, pak S konverguje k x.*
4. *Je-li x hromadným bodem usměrněného souboru S, pak existuje usměrněný podsoubor souboru S, který k x konverguje.*

Důkaz

DEFINICE (Konvergence)

Nechť X je topologický prostor a $S = \{x_a\}_A$ je usměrněný soubor v X. S konverguje k $x \in X$ (značení $S \longrightarrow x$), jestliže každé okolí U bodu x obsahuje skoro všechny body x_a, tj. existuje $a_0 \in A$ tak, že všechna $x_a \in U$, jakmile $a > a_0$.
Místo *S konverguje k x* se též říká, že *S má limitu x* a tato situace se značí $\lim S = x$.

Bod $x \in X$ je hromadným bodem usměrněného souboru S, jestliže každé okolí bodu x obsahuje konfinálně mnoho bodů x_a, tj. množina indexů a, pro které leží x_a v daném okolí, je konfinální v A.

TVRZENÍ (Vlastnosti konvergence)

Nechť X je topologický prostor. pak platí:

1. *Konstantní usměrněný soubor konverguje ke své hodnotě.*
2. *Jestliže usměrněný soubor v X konverguje k bodu x, konverguje k témuž bodu i každý usměrněný podsoubor.*
3. *Jestliže každý usměrněný podsoubor usměrněného souboru S má usměrněný podsoubor konvergující k x, pak S konverguje k x.*
4. *Je-li x hromadným bodem usměrněného souboru S, pak existuje usměrněný podsoubor souboru S, který k x konverguje.*

Důkaz

Některé předchozí pojmy lze vhodně popsat konvergencí, např. uzávěr.

TVRZENÍ (Uzávěr pomocí konvergence)

V topologickém prostoru X pro libovolné $A \subset X$ je

$$\overline{A} = \{x;\ \textit{existuje usměrněný soubor } S \textit{ v } A,\ \textit{který konverguje k } x\}\ .$$

Důkaz

DEFINICE (Vytváření topologie pomocí konvergence)

Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Říkáme, že topologie $\mathcal{G}$ na X je vytvořena konvergencí $\mathcal{K}$, jestliže je to nejjemnější topologie na X, ve které každý soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje k x.

TVRZENÍ (Uzávěr pomocí konvergence)

V topologickém prostoru X pro libovolné $A \subset X$ je

$$\overline{A} = \{x;\ \textit{existuje usměrněný soubor } S \textit{ v } A,\ \textit{který konverguje k } x\}\ .$$

▸ Důkaz

DEFINICE (Vytváření topologie pomocí konvergence)

Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Říkáme, že topologie $\mathcal{G}$ na X je vytvořena konvergencí $\mathcal{K}$, jestliže je to nejjemnější topologie na X, ve které každý soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje k x.

TVRZENÍ (Uzávěr pomocí konvergence)

V topologickém prostoru X pro libovolné $A \subset X$ je

$$\overline{A} = \{x;\ \textit{existuje usměrněný soubor } S \textit{ v } A,\ \textit{který konverguje k } x\}\ .$$

▸ Důkaz

Množina A je tedy uzavřená právě když limity usměrněných souborů z A leží v A.
Množina A je otevřená právě když žádný usměrněný soubor z doplňku A nekonverguje k bodu z A.

DEFINICE (Vytváření topologie pomocí konvergence)

Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x;\, x \in X\}$. Říkáme, že topologie $\mathcal{G}$ na X je vytvořena konvergencí $\mathcal{K}$, jestliže je to nejjemnější topologie na X, ve které každý soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje k x.

TVRZENÍ (Uzávěr pomocí konvergence)

V topologickém prostoru X pro libovolné $A \subset X$ je

$$\overline{A} = \{x;\ \textit{existuje usměrněný soubor } S \textit{ v } A,\ \textit{který konverguje k } x\}\,.$$

Důkaz

Už jsme dříve naznačili, že je obtížné charakterizovat vlastnosti konvergence tak, aby jednoznačně určovaly topologie. Co přesně znamená ono slovo „určovaly"?

DEFINICE (Vytváření topologie pomocí konvergence)

Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Říkáme, že topologie $\mathcal{G}$ na X je vytvořena konvergencí $\mathcal{K}$, jestliže je to nejjemnější topologie na X, ve které každý soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje k x.

TVRZENÍ (Uzávěr pomocí konvergence)

V topologickém prostoru X pro libovolné $A \subset X$ je

$$\overline{A} = \{x;\ \textit{existuje usměrněný soubor } S \textit{ v } A,\ \textit{který konverguje k } x\}\,.$$

Důkaz

DEFINICE (Vytváření topologie pomocí konvergence)

Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Říkáme, že topologie $\mathcal{G}$ na X je vytvořena konvergencí $\mathcal{K}$, jestliže je to nejjemnější topologie na X, ve které každý soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje k x.

TVRZENÍ (Uzávěr pomocí konvergence)

V topologickém prostoru X pro libovolné $A \subset X$ je

$$\overline{A} = \{x;\ \textit{existuje usměrněný soubor } S \textit{ v } A,\ \textit{který konverguje k } x\}\ .$$

Důkaz

DEFINICE (Vytváření topologie pomocí konvergence)

Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{K}_x$ je nějaká třída usměrněných souborů v X. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_x; x \in X\}$. Říkáme, že topologie $\mathcal{G}$ na X je vytvořena konvergencí $\mathcal{K}$, jestliže je to nejjemnější topologie na X, ve které každý soubor z $\mathcal{K}_x$ konverguje k x.

Někdy budeme též říkat, že *topologie je určena* danou konvergencí.
Existence a popis topologie vytvořené nějakou konvergencí je ve Cvičeních.

Uvedeme nyní několik základních vlastností topologických prostorů, které se často používají a usnadňují formulace.

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^{\circ} = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

DEFINICE (Hromadný bod)

Bod x topologického prostoru X se nazývá hromadný bod množiny $A \subset X$, jestliže $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Existují historické termíny, které nebudeme používat. Např. prostory splňující *1.axiom spočetnosti* jsou ty, které mají nejvýše spočetnou lokální bázi (tj. v každém bodě nejvýše spočetnou bázi okolí) – my je budeme nazývat *prostory s lokální spočetnou bází* (později budeme používat i jisté funkce, označující tuto situaci).

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

DEFINICE (Hromadný bod)

Bod x topologického prostoru X se nazývá hromadný bod množiny $A \subset X$, jestliže $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Podobně prostory splňující *2.axiom spočetnosti* jsou ty, které mají spočetnou otevřenou (nebo uzavřenou) bázi – my je budeme nazývat *prostory se spočetnou bází*.

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^{\circ} = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

DEFINICE (Hromadný bod)

Bod x topologického prostoru X se nazývá hromadný bod množiny $A \subset X$, jestliže $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

DEFINICE (Hromadný bod)

Bod x topologického prostoru X se nazývá hromadný bod množiny $A \subset X$, jestliže $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

Např. množina racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$ a tedy $\mathbb{R}$ je separabilní. Každá neprázdná podmnožina indiskrétního prostoru je hustá a tedy každý indiskrétní prostor je separabilní.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

DEFINICE (Hromadný bod)

Bod x topologického prostoru X se nazývá hromadný bod množiny $A \subset X$, jestliže $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

DEFINICE (Hromadný bod)

Bod x topologického prostoru X se nazývá hromadný bod množiny $A \subset X$, jestliže $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^{\circ} = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

Množiny, které nejsou 1.kategorie, se někdy nazývají množiny 2.kategorie. Baireova věta pro metrické prostory říká, že každý úplný metrický prostor je 2.kategorie. Protože se jedná o topologické tvrzení, stačí předpokládat, že metrický prostor má ekvivalentní úplnou metriku, tj. je úplně metrizovatelný (např. metrický prostor iracionálních čísel není úplný, ale je úplně metrizovatelný). Existují příklady metrických prostorů 2.kategorie, které nejsou úplně metrizovatelné. Takové příklady lze sestrojit i v rovině.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^o = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

Každá spočetná podmnožina $\mathbb{R}$ je množinou 1.kategorie; může být řídká (např. $\mathbb{N}$), ale nemusí (např. $\mathbb{Q}$). V diskrétním a indiskrétním prostoru jsou jen prázdné řídké množiny.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

DEFINICE (Hromadný bod)

Bod x topologického prostoru X se nazývá hromadný bod množiny $A \subset X$, jestliže $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^{\circ} = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

DEFINICE (Hromadný bod)

Bod x topologického prostoru X se nazývá hromadný bod množiny $A \subset X$, jestliže $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

Každý bod diskrétního prostoru je izolovaný (tato vlastnost charakterizuje diskrétní prostory), žádný bod aspoň dvoubodového indiskrétního prostoru není izolovaný. Euklidovské prostory kladné dimenze nemají izolované body.

DEFINICE (Hromadný bod)

Bod x topologického prostoru X se nazývá hromadný bod množiny $A \subset X$, jestliže $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Nechť X je topologický prostor.

DEFINICE (Hustá množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá hustá, jestliže $\overline{A} = X$.
X se nazývá separabilní, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

DEFINICE (Řídká množina)

Podmnožina $A \subset X$ se nazývá řídká, jestliže $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.
Spočetná sjednocení řídkých množin se nazývají množinami 1.kategorie.

DEFINICE (Izolovaný bod)

Bod $x \in X$ se nazývá izolovaný, jestliže množina $\{x\}$ je otevřená.

DEFINICE (Hromadný bod)

Bod x topologického prostoru X se nazývá hromadný bod množiny $A \subset X$, jestliže $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Topologické prostory samy o sobě by užitečné nebyly, kdyby mezi nimi nebyly nějaké vazby. V algebraických strukturách se definují homomorfizmy mezi těmito strukturami, obvykle jako zobrazení, které zachovávají algebraické operace. Co má zachovávat zobrazení mezi topologickými prostory?

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X,\mathcal{G}),(Y,\mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*

Z názoru je zřejmé, že by se měla zachovávat konvergence. Z toho vyplývá, že pokud leží bod v uzávěru nějaké množiny, bude jeho obraz ležet v uzávěru obrazu oné množiny. Odtud již vyplyne vztah pro zachovávání otevřených a uzavřených množin, ale nikoli v daném směru, ale inverzně.

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{G}), (Y, \mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{G}), (Y, \mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *pro každou podmnožinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
6. *pro každou podmnožinu $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\overline{B}$.*

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{G}), (Y, \mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *pro každou podmnožinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
6. *pro každou podmnožinu $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\overline{B}$.*

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{G}), (Y, \mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

Tato definice je zcela nepodobná definici spojitosti známé z teorie reálných funkcí reálné proměnné. Navíc má nevýhodu, že je to definice globální a na první pohled není jasné, jak by se definice upravila na definici spojitosti v bodě. Nicméně je elegantní a pro abstraktní použití vhodná. Samozřejmě je nutné charakterizovat spojitost pomocí dalších pojmů charakterizujících topologické prostory.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{G}), (Y, \mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *pro každou podmnožinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
6. *pro každou podmnožinu $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\overline{B}$.*

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{G}), (Y, \mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *pro každou podmnožinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
6. *pro každou podmnožinu $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\overline{B}$.*

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{G}), (Y, \mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *pro každou podmnožinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
6. *pro každou podmnožinu $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\overline{B}$.*

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{G}), (Y, \mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *pro každou podmnožinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
6. *pro každou podmnožinu $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\overline{B}$.*

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{G}), (Y, \mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *pro každou podmnožinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
6. *pro každou podmnožinu $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\overline{B}$.*

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X, \mathcal{G}), (Y, \mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *pro každou podmnožinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
6. *pro každou podmnožinu $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\overline{B}$.*

DEFINICE (Spojitost zobrazení)

Nechť $(X,\mathcal{G}),(Y,\mathcal{H})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité, jestliže $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$, tj. vzor množiny otevřené v Y je množina otevřená v X.

Zřejmě je každé konstantní zobrazení spojité. Na diskrétním prostoru je každé zobrazení spojité. Každé zobrazení do indiskrétního prostoru je spojité. Spojité zobrazení indiskrétního prostoru do $\mathbb{R}$ je konstantní.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *pro každou podmnožinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
6. *pro každou podmnožinu $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\overline{B}$.*

Některé uvedené ekvivalentní podmínky spojitosti lze snadno použít pro definici spojitosti v bodě a z nich je vidět příslušná úprava i pro definici pomocí otevřených množin.

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.

Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.

Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

Je zřejmé, že pro ověření spojitosti stačí ověřit, že vzory z otevřené nebo uzavřené subbáze v Y jsou otevřené (resp. uzavřené) v X, a podobně pro okolí bodů.

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.
Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

Je zřejmé, že pro ověření spojitosti stačí ověřit, že vzory z otevřené nebo uzavřené subbáze v Y jsou otevřené (resp. uzavřené) v X, a podobně pro okolí bodů.

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.
Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

Stejným postupem jako u předchozí charakterizace spojitosti lze nyní dokázat následující charakterizace spojitosti v bodě. Pozor na rozdíl mezi spojitostí na podmnožině a spojitostí zúžení zobrazení na podmnožinu (viz příklad).

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.
Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

Je zřejmé, že pro ověření spojitosti stačí ověřit, že vzory z otevřené nebo uzavřené subbáze v Y jsou otevřené (resp. uzavřené) v X, a podobně pro okolí bodů.

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.
Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

Je zřejmé, že pro ověření spojitosti stačí ověřit, že vzory z otevřené nebo uzavřené subbáze v Y jsou otevřené (resp. uzavřené) v X, a podobně pro okolí bodů.

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.
Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

Je zřejmé, že pro ověření spojitosti stačí ověřit, že vzory z otevřené nebo uzavřené subbáze v Y jsou otevřené (resp. uzavřené) v X, a podobně pro okolí bodů.

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.
Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

Je zřejmé, že pro ověření spojitosti stačí ověřit, že vzory z otevřené nebo uzavřené subbáze v Y jsou otevřené (resp. uzavřené) v X, a podobně pro okolí bodů.

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.
Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

Je zřejmé, že pro ověření spojitosti stačí ověřit, že vzory z otevřené nebo uzavřené subbáze v Y jsou otevřené (resp. uzavřené) v X, a podobně pro okolí bodů.

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.
Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

Je zřejmé, že pro ověření spojitosti stačí ověřit, že vzory z otevřené nebo uzavřené subbáze v Y jsou otevřené (resp. uzavřené) v X, a podobně pro okolí bodů.

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.
Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

Je zřejmé, že pro ověření spojitosti stačí ověřit, že vzory z otevřené nebo uzavřené subbáze v Y jsou otevřené (resp. uzavřené) v X, a podobně pro okolí bodů.

DEFINICE (Spojitost v bodě)

Řekneme, že zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité v bodě $x \in X$, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y obsahující $f(x)$ je otevřená množina v X.
Řekneme, že f je spojité na množině $A \subset X$, jestliže je spojité v každém bodě množiny A.

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y a $x \in X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité v bodě x;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y neobsahující $f(x)$ je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_a)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *je-li $A \subset X$ a $x \in \overline{A}$, pak $f(x) \in \overline{f(A)}$;*
6. *jestliže uzávěr podmnožiny $B \subset Y$ neobsahuje $f(x)$, pak uzávěr množiny $f^{-1}(B)$ neobsahuje bod x.*

Je zřejmé, že pro ověření spojitosti stačí ověřit, že vzory z otevřené nebo uzavřené subbáze v Y jsou otevřené (resp. uzavřené) v X, a podobně pro okolí bodů.

Mezi nejdůležitější základní vlastnosti vhodných zobrazení mezi strukturami, ať topologickými nebo algebraickými, patří uzavřenost na skládání a zahrnutí identického zobrazení. Důkaz následujícího tvrzení je velmi jednoduchý.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

Spojitost složení zobrazení lze snadno lokalizovat (zformulujte).

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

V teorii reálných funkcí reálné proměnné byly důležité spojité funkce, které měly inverzní funkci na nějakém intervalu (a ta pak byla automaticky spojitá). V obecnějších prostorech (ani v metrických) nemusí být inverzní funkce (k danému spojitému zobrazení) spojitá. Je proto nutné spojitost inverzního zobrazení dodat.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

$\mathbb{R}$ a $(0, 2)$ jsou homeomorfní prostory, které nejsou homeomorfní s $[0, 1]$. $\mathbb{R}$ a prostor iracionálních čísel nejsou homeomorfní. $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ (obecněji $\mathbb{R}^n$) nejsou homeomorfní (důkaz, že např. $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ nejsou homeomorfní, je složitější).

Topologická vlastnost

Vlastnost topologického prostoru se nazývá topologická, jestliže zůstává v platnosti přechodem k homeomorfním prostorům.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

Následující metadefinice bude jasná z příkladů.

Topologická vlastnost

Vlastnost topologického prostoru se nazývá topologická, jestliže zůstává v platnosti přechodem k homeomorfním prostorům.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

Topologická vlastnost

Vlastnost topologického prostoru se nazývá topologická, jestliže zůstává v platnosti přechodem k homeomorfním prostorům.

Často budeme zaměňovat topologickou vlastnost s třídou prostorů majících tuto vlastnost. Tyto třídy určené nějakou topologickou vlastností jsou charakterizovány uzavřeností na homeomorfizmy, tj. jsou-li prostory X, Y homeomorfní a jeden z nich náleží do této třídy, náleží

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

Topologická vlastnost

Vlastnost topologického prostoru se nazývá topologická, jestliže zůstává v platnosti přechodem k homeomorfním prostorům.

Např. metrizovatelnost, separabilita nebo mít spočetnou bází nebo mít lokální spočetnou bázi, jsou topologické vlastnosti. Být metrizovatelný úplnou metrikou není topologická vlastnost.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

Topologická vlastnost

Vlastnost topologického prostoru se nazývá topologická, jestliže zůstává v platnosti přechodem k homeomorfním prostorům.

Dá se říci, že teorie topologických prostorů je studiem topologických vlastností a nehledí na tvary množin (pro topologa je přímka nebo otevřený interval nebo sinusoida stále totéž, stejně jako koule je totéž co kvádr).

TVRZENÍ (Základní vlastnosti spojitosti)

Složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.
Identické zobrazení topologického prostoru je spojité.

DEFINICE (Homeomorfizmy)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá homeomorfizmus, jestliže je spojité a existuje inverzní spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají homeomorfní.

Je zřejmé, že je-li f homeomorfizmus, je i jeho inverzní zobrazení homeomorfizmus. Dále je zřejmě, že homeomorfizmus musí být prosté zobrazení, které zobrazuje množinu X na množinu Y.

Topologická vlastnost

Vlastnost topologického prostoru se nazývá topologická, jestliže zůstává v platnosti přechodem k homeomorfním prostorům.

Často budeme zaměňovat topologickou vlastnost s třídou prostorů majících tuto vlastnost. Tyto třídy určené nějakou topologickou vlastností jsou charakterizovány uzavřeností na homeomorfizmy, tj. jsou-li prostory X, Y homeomorfní a jeden z nich náleží do této třídy, náleží tam i druhý.