# OBECNÁ TOPOLOGIE

## 8. PROSTORY FUNKCÍ

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2008

Prostory funkcí s různými topologiemi nebo uniformitami se používají v mnoha oborech matematiky. Můžeme jmenovat alespoň funkcionální analýzu (např. duální prostory), algebru (např. grupy charakterů), v harmonické analýze (prostory skoro periodických funkcí) a topologickou dynamiku (akce na grupách).

Zatím jste se na množinách zobrazení z jednoho prostoru do jiného seznámili s topologií bodové konvergence a s kompaktně otevřenou topologií a z metrických prostorů znáte topologii stejnoměrné konvergence. Nyní dáme tyto topologie do souvislosti a ukážeme, že to jsou (důležité) speciální případy obecnějších popisů topologií na prostorech funkcí.

Máme možnost zobecnit popis kompaktně otevřené topologie použitím jiných soustav množin než kompaktních, nebo zobecnit popis topologie stejnoměrné konvergence. Tato druhá možnost je v jistém smyslu bohatší.

Prostory funkcí s různými topologiemi nebo uniformitami se používají v mnoha oborech matematiky. Můžeme jmenovat alespoň funkcionální analýzu (např. duální prostory), algebru (např. grupy charakterů), v harmonické analýze (prostory skoro periodických funkcí) a topologickou dynamiku (akce na grupách).

Zatím jste se na množinách zobrazení z jednoho prostoru do jiného seznámili s topologií bodové konvergence a s kompaktně otevřenou topologií a z metrických prostorů znáte topologii stejnoměrné konvergence. Nyní dáme tyto topologie do souvislosti a ukážeme, že to jsou (důležité) speciální případy obecnějších popisů topologií na prostorech funkcí.

Máme možnost zobecnit popis kompaktně otevřené topologie použitím jiných soustav množin než kompaktních, nebo zobecnit popis topologie stejnoměrné konvergence. Tato druhá možnost je v jistém smyslu bohatší.

Prostory funkcí s různými topologiemi nebo uniformitami se používají v mnoha oborech matematiky. Můžeme jmenovat alespoň funkcionální analýzu (např. duální prostory), algebru (např. grupy charakterů), v harmonické analýze (prostory skoro periodických funkcí) a topologickou dynamiku (akce na grupách).

Zatím jste se na množinách zobrazení z jednoho prostoru do jiného seznámili s topologií bodové konvergence a s kompaktně otevřenou topologií a z metrických prostorů znáte topologii stejnoměrné konvergence. Nyní dáme tyto topologie do souvislosti a ukážeme, že to jsou (důležité) speciální případy obecnějších popisů topologií na prostorech funkcí.

Máme možnost zobecnit popis kompaktně otevřené topologie použitím jiných soustav množin než kompaktních, nebo zobecnit popis topologie stejnoměrné konvergence. Tato druhá možnost je v jistém smyslu bohatší.

Stejnoměrnou konvergenci zobrazení na metrických prostorech na topologické prostory nezobecníme. Musíme použít uniformní prostory.

**DEFINICE** (Topologie stejnoměrné konvergence na množinách)

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Pro $U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}$ označíme

$$E_{U,S} = \{(f,g); f,g : X \to Y, \forall x,y \in S : (f(x), g(x)) \in U\} .$$

Soustava $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ je subbáze uniformity na $Y^X$, která se nazývá uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$ a její topologie se nazývá topologie stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$.

Je-li $F \subset Y^X$, značí se zúžení této uniformity na $F$ jako $F_{\mathcal{S}}$.

Je-li $F = C(X, Y)$ množina všech spojitých zobrazení z $X$ do $Y$, pak se index $\mathcal{S}$ (a i dále uvedené indexy) přidává hned za písmeno $C$, tj. $C_{\mathcal{S}}(X, Y)$. Stejně tomu tak je i pro jiné podobné množiny zobrazení.

V důležitých speciálních případech existuje pro $F_{\mathcal{S}}$ i speciální značení:

1. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech konečných podmnožin množiny $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_p$ (bodová konvergence).
2. Obsahuje-li $\mathcal{S}$ množinu $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_u$ (stejnoměrná konvergence).
3. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech kompaktních podmnožin prostoru $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_k$.

Stejnoměrnou konvergenci zobrazení na metrických prostorech na topologické prostory nezobecníme. Musíme použít uniformní prostory.

Protože množina $Y^X$ je prázdná je-li $Y = \emptyset$ a $X \neq \emptyset$ nebo jednobodová je-li $X = \emptyset$, budeme v této kapitole předpokládat, že definiční obory i obory hodnot zkoumaných zobrazení jsou neprázdné (pokud nebude výslovně řečeno jinak).

**DEFINICE** (Topologie stejnoměrné konvergence na množinách)

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Pro $U \in \mathcal{U}$, $S \in \mathcal{S}$ označíme

$$E_{U,S} = \{(f,g); f,g : X \to Y, \forall x,y \in S : (f(x), g(x)) \in U\} .$$

Soustava $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ je subbáze uniformity na $Y^X$, která se nazývá uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$ a její topologie se nazývá topologie stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$.
Je-li $F \subset Y^X$, značí se zúžení této uniformity na $F$ jako $F_{\mathcal{S}}$.

Je-li $F = C(X,Y)$ množina všech spojitých zobrazení z $X$ do $Y$, pak se index $\mathcal{S}$ (a i dále uvedené indexy) přidává hned za písmeno $C$, tj. $C_{\mathcal{S}}(X,Y)$. Stejně tomu tak je i pro jiné podobné množiny zobrazení.

V důležitých speciálních případech existuje pro $F_{\mathcal{S}}$ i speciální značení:

Protože množina $Y^X$ je prázdná je-li $Y = \emptyset$ a $X \neq \emptyset$ nebo jednobodová je-li $X = \emptyset$, budeme v této kapitole předpokládat, že definiční obory i obory hodnot zkoumaných zobrazení jsou neprázdné (pokud nebude výslovně řečeno jinak).

**DEFINICE** (Topologie stejnoměrné konvergence na množinách)

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Pro $U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}$ označíme

$$E_{U,S} = \{(f,g); f,g : X \to Y, \forall x, y \in S : (f(x), g(x)) \in U\} .$$

Soustava $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ je subbáze uniformity na $Y^X$, která se nazývá uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$ a její topologie se nazývá topologie stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$.

Je-li $F \subset Y^X$, značí se zúžení této uniformity na $F$ jako $F_{\mathcal{S}}$.

Je-li $F = C(X, Y)$ množina všech spojitých zobrazení z $X$ do $Y$, pak se index $\mathcal{S}$ (a i dále uvedené indexy) přidává hned za písmeno $C$, tj. $C_{\mathcal{S}}(X, Y)$. Stejně tomu tak je i pro jiné podobné množiny zobrazení.

V důležitých speciálních případech existuje pro $F_{\mathcal{S}}$ i speciální značení:

**DEFINICE** (Topologie stejnoměrné konvergence na množinách)

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Pro $U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}$ označíme

$$E_{U,S} = \{(f,g); f,g : X \to Y, \forall x,y \in S : (f(x), g(x)) \in U\}.$$

Soustava $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ je subbáze uniformity na $Y^X$, která se nazývá uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$ a její topologie se nazývá topologie stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$.
Je-li $F \subset Y^X$, značí se zúžení této uniformity na $F$ jako $F_{\mathcal{S}}$.

Je-li $F = C(X, Y)$ množina všech spojitých zobrazení z $X$ do $Y$, pak se index $\mathcal{S}$ (a i dále uvedené indexy) přidává hned za písmeno $C$, tj. $C_{\mathcal{S}}(X, Y)$. Stejně tomu tak je i pro jiné podobné množiny zobrazení.

V důležitých speciálních případech existuje pro $F_{\mathcal{S}}$ i speciální značení:

**DEFINICE** (Topologie stejnoměrné konvergence na množinách)

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Pro $U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}$ označíme

$$E_{U,S} = \{(f,g); f,g : X \to Y, \forall x,y \in S : (f(x), g(x)) \in U\}.$$

Soustava $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ je subbáze uniformity na $Y^X$, která se nazývá uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$ a její topologie se nazývá topologie stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$.
Je-li $F \subset Y^X$, značí se zúžení této uniformity na $F$ jako $F_{\mathcal{S}}$.

Je-li $F = C(X, Y)$ množina všech spojitých zobrazení z $X$ do $Y$, pak se index $\mathcal{S}$ (a i dále uvedené indexy) přidává hned za písmeno $C$, tj. $C_{\mathcal{S}}(X, Y)$. Stejně tomu tak je i pro jiné podobné množiny zobrazení.

V důležitých speciálních případech existuje pro $F_{\mathcal{S}}$ i speciální značení:

1. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech konečných podmnožin množiny $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_p$ (bodová konvergence).
2. Obsahuje-li $\mathcal{S}$ množinu $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_u$ (stejnoměrná konvergence).
3. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech kompaktních podmnožin prostoru $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_c$.
4. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech prekompaktních podmnožin uniformního prostoru $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_{pc}$.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Topologie stejnoměrné konvergence na množinách)

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y,\mathcal{U})$ je uniformní prostor. Pro $U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}$ označíme

$$E_{U,S} = \{(f,g); f,g : X \to Y, \forall x,y \in S : (f(x),g(x)) \in U\}\,.$$

Soustava $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ je subbáze uniformity na $Y^X$, která se nazývá uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$ a její topologie se nazývá topologie stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$.
Je-li $F \subset Y^X$, značí se zúžení této uniformity na $F$ jako $F_{\mathcal{S}}$.

Je-li $F = C(X, Y)$ množina všech spojitých zobrazení z $X$ do $Y$, pak se index $\mathcal{S}$ (a i dále uvedené indexy) přidává hned za písmeno $C$, tj. $C_{\mathcal{S}}(X, Y)$. Stejně tomu tak je i pro jiné podobné množiny zobrazení.

V důležitých speciálních případech existuje pro $F_{\mathcal{S}}$ i speciální značení:

1. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech konečných podmnožin množiny $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_p$ (bodová konvergence).
2. Obsahuje-li $\mathcal{S}$ množinu $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_u$ (stejnoměrná konvergence).
3. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech kompaktních podmnožin prostoru $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_c$.
4. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech prekompaktních podmnožin uniformního prostoru $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_{pc}$.

$\Rightarrow$

## DEFINICE (Topologie stejnoměrné konvergence na množinách)

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Pro $U \in \mathcal{U}$, $S \in \mathcal{S}$ označíme

$$E_{U,S} = \{(f,g); f,g : X \to Y, \forall x, y \in S : (f(x), g(x)) \in U\}\,.$$

Soustava $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ je subbáze uniformity na $Y^X$, která se nazývá uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$ a její topologie se nazývá topologie stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$.

Je-li $F \subset Y^X$, značí se zúžení této uniformity na $F$ jako $F_{\mathcal{S}}$.

Je-li $F = C(X, Y)$ množina všech spojitých zobrazení z $X$ do $Y$, pak se index $\mathcal{S}$ (a i dále uvedené indexy) přidává hned za písmeno $C$, tj. $C_{\mathcal{S}}(X, Y)$. Stejně tomu tak je i pro jiné podobné množiny zobrazení.

V důležitých speciálních případech existuje pro $F_{\mathcal{S}}$ i speciální značení:

1. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech konečných podmnožin množiny $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_p$ (bodová konvergence).
2. Obsahuje-li $\mathcal{S}$ množinu $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_u$ (stejnoměrná konvergence).
3. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech kompaktních podmnožin prostoru $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_c$.
4. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech prekompaktních podmnožin uniformního prostoru $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_{pc}$.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Topologie stejnoměrné konvergence na množinách)

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y,\mathcal{U})$ je uniformní prostor. Pro $U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}$ označíme

$$E_{U,S} = \{(f,g); f,g : X \to Y, \forall x,y \in S : (f(x),g(x)) \in U\}.$$

Soustava $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ je subbáze uniformity na $Y^X$, která se nazývá uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$ a její topologie se nazývá topologie stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$.
Je-li $F \subset Y^X$, značí se zúžení této uniformity na $F$ jako $F_{\mathcal{S}}$.

Je-li $F = C(X,Y)$ množina všech spojitých zobrazení z $X$ do $Y$, pak se index $\mathcal{S}$ (a i dále uvedené indexy) přidává hned za písmeno $C$, tj. $C_{\mathcal{S}}(X,Y)$. Stejně tomu tak je i pro jiné podobné množiny zobrazení.

V důležitých speciálních případech existuje pro $F_{\mathcal{S}}$ i speciální značení:

1. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech konečných podmnožin množiny $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_p$ (bodová konvergence).
2. Obsahuje-li $\mathcal{S}$ množinu $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_u$ (stejnoměrná konvergence).
3. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech kompaktních podmnožin prostoru $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_c$.
4. Je-li $\mathcal{S}$ složeno ze všech prekompaktních podmnožin uniformního prostoru $X$, značíme $F_{\mathcal{S}}$ jako $F_{pc}$.

$\Rightarrow$

Následující pozorování jsou jednoduchá, ale je vhodné si tyto výsledky uvědomit. Připomeňme, že *ideál podmnožin* množiny $X$ je dědičná konečně aditivní soustava (tj. uzavřená na podmnožiny a konečná sjednocení) – je to duální pojem k filtru. Ideál vytvořený soustavou podmnožin je nejmenší ideál tuto soustavu obsahující.
Další vlastnosti jsou uvedeny ve cvičení.

### Některé vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

### Další vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor, který není indiskrétní. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

## Některé vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y,\mathcal{U})$ je uniformní prostor. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

## Další vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $(Y,\mathcal{U})$ je uniformní prostor, který není indiskrétní. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

## Některé vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Ideál $\mathcal{T}$ vytvořený soustavou $\mathcal{S}$ vytváří stejnou uniformitu na $Y^X$ jako soustava $\mathcal{S}$.
2. Je-li $\mathcal{S}$ konečně aditivní, je subbáze $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ bází.
3. Prostor $Y^X$ je slabě vytvořen všemi projekcemi $\mathrm{pr}_S : Y^X \to (Y^S)_u$, takže usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje k $f$ v $Y^X$ právě když konverguje stejnoměrně na každé množině $S \in \mathcal{S}$.

## Další vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor, který není indiskrétní. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

## Některé vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y,\mathcal{U})$ je uniformní prostor. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Ideál $\mathcal{T}$ vytvořený soustavou $\mathcal{S}$ vytváří stejnou uniformitu na $Y^X$ jako soustava $\mathcal{S}$.
2. Je-li $\mathcal{S}$ konečně aditivní, je subbáze $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ bází.
3. Prostor $Y^X$ je slabě vytvořen všemi projekcemi $\mathrm{pr}_S : Y^X \to (Y^S)_u$, takže usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje k $f$ v $Y^X$ právě když konverguje stejnoměrně na každé množině $S \in \mathcal{S}$.

## Další vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $(Y,\mathcal{U})$ je uniformní prostor, který není indiskrétní. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

## Některé vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Ideál $\mathcal{T}$ vytvořený soustavou $\mathcal{S}$ vytváří stejnou uniformitu na $Y^X$ jako soustava $\mathcal{S}$.
2. Je-li $\mathcal{S}$ konečně aditivní, je subbáze $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ bází.
3. Prostor $Y^X$ je slabě vytvořen všemi projekcemi $\mathrm{pr}_S : Y^X \to (Y^S)_u$, takže usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje k $f$ v $Y^X$ právě když konverguje stejnoměrně na každé množině $S \in \mathcal{S}$.

## Další vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor, který není indiskrétní. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

## Některé vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Ideál $\mathcal{T}$ vytvořený soustavou $\mathcal{S}$ vytváří stejnou uniformitu na $Y^X$ jako soustava $\mathcal{S}$.
2. Je-li $\mathcal{S}$ konečně aditivní, je subbáze $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ bází.
3. Prostor $Y^X$ je slabě vytvořen všemi projekcemi $\mathrm{pr}_S : Y^X \to (Y^S)_u$, takže usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje k $f$ v $Y^X$ právě když konverguje stejnoměrně na každé množině $S \in \mathcal{S}$.

V následujících vlastnostech budeme pro jednoduchost předpokládat netriviálnost situace. Ve cvičeních najdete některé situace, které zde vynecháváme.

## Další vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor, který není indiskrétní. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

## Některé vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Ideál $\mathcal{T}$ vytvořený soustavou $\mathcal{S}$ vytváří stejnou uniformitu na $Y^X$ jako soustava $\mathcal{S}$.
2. Je-li $\mathcal{S}$ konečně aditivní, je subbáze $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ bází.
3. Prostor $Y^X$ je slabě vytvořen všemi projekcemi $\mathrm{pr}_S : Y^X \to (Y^S)_u$, takže usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje k $f$ v $Y^X$ právě když konverguje stejnoměrně na každé množině $S \in \mathcal{S}$.

## Další vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor, který není indiskrétní. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

## Některé vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Ideál $\mathcal{T}$ vytvořený soustavou $\mathcal{S}$ vytváří stejnou uniformitu na $Y^X$ jako soustava $\mathcal{S}$.
2. Je-li $\mathcal{S}$ konečně aditivní, je subbáze $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ bází.
3. Prostor $Y^X$ je slabě vytvořen všemi projekcemi $\mathrm{pr}_S : Y^X \to (Y^S)_u$, takže usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje k $f$ v $Y^X$ právě když konverguje stejnoměrně na každé množině $S \in \mathcal{S}$.

## Další vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor, který není indiskrétní. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Je-li $Z$ podmnožina v $Y$, je $(Z^X)_{\mathcal{S}}$ podprostor prostoru $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ (hustý nebo uzavřený, má-li $Z$ stejnou vlastnost).
2. $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je hrubší než $(Y^X)_u$ a jemnější než $(Y^X)_p$.
3. Je-li $\mathcal{S} \neq \{\emptyset\}$, pak zobrazení, které bodu $y \in Y$ přiřadí konstantní zobrazení $X \to Y$ s hodnotou $y$ je uniformní vnoření $Y \to U(X, Y)_{\mathcal{S}}$. Je-li navíc $Y$ Hausdorffův a $\bigcup \mathcal{S} = X$, je toto vnoření na uzavřenou podmnožinu v $Y^X$.

## Některé vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y,\mathcal{U})$ je uniformní prostor. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Ideál $\mathcal{T}$ vytvořený soustavou $\mathcal{S}$ vytváří stejnou uniformitu na $Y^X$ jako soustava $\mathcal{S}$.
2. Je-li $\mathcal{S}$ konečně aditivní, je subbáze $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ bází.
3. Prostor $Y^X$ je slabě vytvořen všemi projekcemi $\mathrm{pr}_S : Y^X \to (Y^S)_u$, takže usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje k $f$ v $Y^X$ právě když konverguje stejnoměrně na každé množině $S \in \mathcal{S}$.

## Další vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $(Y,\mathcal{U})$ je uniformní prostor, který není indiskrétní. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Je-li $Z$ podmnožina v $Y$, je $(Z^X)_\mathcal{S}$ podprostor prostoru $(Y^X)_\mathcal{S}$ (hustý nebo uzavřený, má-li $Z$ stejnou vlastnost).
2. $(Y^X)_\mathcal{S}$ je hrubší než $(Y^X)_u$ a jemnější než $(Y^X)_p$.
3. Je-li $\mathcal{S} \neq \{\emptyset\}$, pak zobrazení, které bodu $y \in Y$ přiřadí konstantní zobrazení $X \to Y$ s hodnotou $y$ je uniformní vnoření $Y \to U(X,Y)_\mathcal{S}$. Je-li navíc $Y$ Hausdorffův a $\bigcup \mathcal{S} = X$, je toto vnoření na uzavřenou podmnožinu v $Y^X$.

## Některé vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný systém podmnožin množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Ideál $\mathcal{T}$ vytvořený soustavou $\mathcal{S}$ vytváří stejnou uniformitu na $Y^X$ jako soustava $\mathcal{S}$.
2. Je-li $\mathcal{S}$ konečně aditivní, je subbáze $\{E_{U,S}; U \in \mathcal{U}, S \in \mathcal{S}\}$ bází.
3. Prostor $Y^X$ je slabě vytvořen všemi projekcemi $\mathrm{pr}_S : Y^X \to (Y^S)_u$, takže usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje k $f$ v $Y^X$ právě když konverguje stejnoměrně na každé množině $S \in \mathcal{S}$.

## Další vlastnosti uniformit prostorů funkcí

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $(Y, \mathcal{U})$ je uniformní prostor, který není indiskrétní. Prostor $Y^X$ má uniformitu stejnoměrné konvergence na $\mathcal{S}$.

1. Je-li $Z$ podmnožina v $Y$, je $(Z^X)_\mathcal{S}$ podprostor prostoru $(Y^X)_\mathcal{S}$ (hustý nebo uzavřený, má-li $Z$ stejnou vlastnost).
2. $(Y^X)_\mathcal{S}$ je hrubší než $(Y^X)_u$ a jemnější než $(Y^X)_p$.
3. Je-li $\mathcal{S} \neq \{\emptyset\}$, pak zobrazení, které bodu $y \in Y$ přiřadí konstantní zobrazení $X \to Y$ s hodnotou $y$ je uniformní vnoření $Y \to U(X, Y)_\mathcal{S}$. Je-li navíc $Y$ Hausdorffův a $\bigcup \mathcal{S} = X$, je toto vnoření na uzavřenou podmnožinu v $Y^X$.

Podíváme se nyní na složitější vlastnosti prostorů funkcí.

**TVRZENÍ** (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)

*Nechť $S$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

*Nechť $S$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

Důležitější než celá mocnina $Y^X$ jsou však její podmnožiny, hlavně množina $C(X, Y)$ všech spojitých zobrazení na topologickém prostoru $X$ do uniformního prostoru $Y$ a množina $U(X, Y)$ všech stejnoměrně spojitých zobrazení na uniformním prostoru $X$ do uniformního prostoru $Y$ (a ponejvíce případ $Y = \mathbb{R}$).
V případech podprostorů $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ lze z předchozí věty odvodit jejich vlastnosti na základě dědičnosti. Uvědomte si, že $Y$ je podprostor prostorů $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$ a $C_{\mathcal{S}}(X, Y)$. Proto podmínky v předchozím tvrzení postačující pro vlastnosti $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ v prvních třech tvrzeních, jsou postačitelné i pro stejné vlastnosti $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$ a $C_{\mathcal{S}}(X, Y)$. Pro úplnost ale potřebujeme uzavřené podprostory.

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Prostory $U_u(X, Y)$ a $C_u(X, Y)$ jsou uzavřené v $(Y^X)_u$ a tedy jsou úplné, pokud je $Y$ úplný.*
2. *Nechť $\mathcal{F} = \{f : X \to Y; f$ je stejnoměrně spojité na každém $S \in \mathcal{S}\}$. Pak $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ je uzavřený v $(Y^X)_u$ a tedy je úplný, pokud je $Y$ úplný.*
3. *Je-li $X$ lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $Y$ je úplný uniformní prostor, pak $C_c(X, Y)$ je úplný.*

Důkaz

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_\mathcal{S}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_\mathcal{S}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_\mathcal{S}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_\mathcal{S}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Prostory $U_u(X,Y)$ a $C_u(X,Y)$ jsou uzavřené v $(Y^X)_u$ a tedy jsou úplné, pokud je $Y$ úplný.*
2. *Nechť $\mathcal{F} = \{f : X \to Y; f$ je stejnoměrně spojité na každém $S \in \mathcal{S}$. Pak $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ je uzavřený v $(Y^X)_u$ a tedy je úplný, pokud je $Y$ úplný.*
3. *Je-li $X$ lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $Y$ je úplný uniformní prostor, pak $C_c(X,Y)$ je úplný.*

Důkaz

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_\mathcal{S}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_\mathcal{S}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_\mathcal{S}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_\mathcal{S}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Prostory $U_u(X, Y)$ a $C_u(X, Y)$ jsou uzavřené v $(Y^X)_u$ a tedy jsou úplné, pokud je $Y$ úplný.*
2. *Nechť $\mathcal{F} = \{f : X \to Y; f$ je stejnoměrně spojité na každém $S \in \mathcal{S}$. Pak $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ je uzavřený v $(Y^X)_u$ a tedy je úplný, pokud je $Y$ úplný.*
3. *Je-li $X$ lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $Y$ je úplný uniformní prostor, pak $C_c(X, Y)$ je úplný.*

Důkaz

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je pseudometrizovatelný právě když je $Y$ pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je prekompaktní právě když je $Y$ prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je $Y$ uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je úplný právě když je $Y$ úplný.*

Důkaz

**DŮSLEDEK (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)**

*Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí množiny $X$ a $Y$ je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.*

1. *Prostory $U_u(X,Y)$ a $C_u(X,Y)$ jsou uzavřené v $(Y^X)_u$ a tedy jsou úplné, pokud je $Y$ úplný.*
2. *Nechť $\mathcal{F} = \{f : X \to Y; f$ je stejnoměrně spojité na každém $S \in \mathcal{S}$. Pak $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ je uzavřený v $(Y^X)_u$ a tedy je úplný, pokud je $Y$ úplný.*
3. *Je-li $X$ lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $Y$ je úplný uniformní prostor, pak $C_c(X,Y)$ je úplný.*

Důkaz

$\Rrightarrow$

Ve 4.kapitole byla na prostorech zobrazení definována tzv. kompaktně otevřená topologie označovaná indexem „co". Jak souvisí tato topologie s topologiemi definovanými v této kapitole?

**TVRZENÍ (Kompaktně otevřená topologie)**

*Topologické prostory $C_c(X, Y)$ a $C_{co}(X, Y)$ jsou totožné pro libovolný uniformní prostor $Y$ a úplně regulární prostor $X$.*

Důkaz

Důsledkem předchozí věty jsou aplikace na kompaktně otevřené topologie tvrzení dokázaných v této kapitole pro topologii stejnoměrné konvergence.
Některé další obdobné vztahy jsou uvedeny ve cvičeních.

**TVRZENÍ (Kompaktně otevřená topologie)**

*Topologické prostory $C_c(X,Y)$ a $C_{co}(X,Y)$ jsou totožné pro libovolný uniformní prostor $Y$ a úplně regulární prostor $X$.*

Důkaz

Důsledkem předchozí věty jsou aplikace na kompaktně otevřené topologie tvrzení dokázaných v této kapitole pro topologii stejnoměrné konvergence.
Některé další obdobné vztahy jsou uvedeny ve cvičeních.

**TVRZENÍ (Kompaktně otevřená topologie)**

*Topologické prostory $C_c(X, Y)$ a $C_{co}(X, Y)$ jsou totožné pro libovolný uniformní prostor $Y$ a úplně regulární prostor $X$.*

Důkaz

Důsledkem předchozí věty jsou aplikace na kompaktně otevřené topologie tvrzení dokázaných v této kapitole pro topologii stejnoměrné konvergence.
Některé další obdobné vztahy jsou uvedeny ve cvičeních.

Mohou v netriviálních případech všechny nebo aspoň některé důležité uniformity či topologie na prostorech zobrazení být totožné? Těžko můžeme chtít, aby na $Y^X$ byla uniformita stejnoměrné konvergence totožná s topologií bodové konvergence. Na některých podmnožinách v $Y^X$ to však už tak triviální být nemusí.
Jedny z možných takových podmnožin budou nyní definovány.

**DEFINICE** (Ekviuniformní množiny)

Nechť $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$ jsou uniformní prostory. Podmnožina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekviuniformní, jestliže pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $(f \times f)(U) \subset V$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

**TVRZENÍ (Vlastnosti ekviuniformních množin)**

**DEFINICE** (Ekviuniformní množiny)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory. Podmnožina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekviuniformní, jestliže pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $(f \times f)(U) \subset V$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

**DEFINICE** (Ekviuniformní množiny)

Nechť $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$ jsou uniformní prostory. Podmnožina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekviuniformní, jestliže pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $(f \times f)(U) \subset V$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

Zřejmě je každá konečná podmnožina $U(X, Y)$ je ekviuniformní. Je-li $X$ uniformně diskrétní, je každá podmnožina $U(X, Y)$ ekviuniformní.

**TVRZENÍ** (Vlastnosti ekviuniformních množin)

**DEFINICE** (Ekviuniformní množiny)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory. Podmnožina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekviuniformní, jestliže pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $(f \times f)(U) \subset V$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

**TVRZENÍ (Vlastnosti ekviuniformních množin)**

1. *Soustava všech ekviuniformních množin je aditivní a dědičná.*
2. *Množina $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je ekviuniformní právě když je zobrazení (tzv. evaluace) $e = \{(x,f) \rightsquigarrow f(x)\} : X \times \mathcal{F} \to Y$ stejnoměrně spojité, přičemž $\mathcal{F}$ má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita stejnoměrné konvergence.*
3. *Množina $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je ekviuniformní právě když je zobrazení $j_{\mathcal{F}} = \{x \rightsquigarrow \{f \rightsquigarrow f(x)\}\} : X \to U_u(\mathcal{F},Y)$ stejnoměrně spojité, přičemž $\mathcal{F}$ má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita bodové konvergence.*
4. *Každá prekompaktní podmnožina v $U_u(X,Y)$ je ekviuniformní.*
5. *Uzávěr ekviuniformní množiny v topologii bodové konvergence na $Y^X$ je ekviuniformní.*

Důkaz

$\Longrightarrow$

**DEFINICE** (Ekviuniformní množiny)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory. Podmnožina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekviuniformní, jestliže pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $(f \times f)(U) \subset V$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

**TVRZENÍ (Vlastnosti ekviuniformních množin)**

1. *Soustava všech ekviuniformních množin je aditivní a dědičná.*
2. *Množina $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je ekviuniformní právě když je zobrazení (tzv. evaluace) $e = \{(x,f) \rightsquigarrow f(x)\} : X \times \mathcal{F} \to Y$ stejnoměrně spojité, přičemž $\mathcal{F}$ má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita stejnoměrné konvergence.*
3. *Množina $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je ekviuniformní právě když je zobrazení $j_{\mathcal{F}} = \{x \rightsquigarrow \{f \rightsquigarrow f(x)\}\} : X \to U_u(\mathcal{F},Y)$ stejnoměrně spojité, přičemž $\mathcal{F}$ má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita bodové konvergence.*
4. *Každá prekompaktní podmnožina v $U_u(X,Y)$ je ekviuniformní.*
5. *Uzávěr ekviuniformní množiny v topologii bodové konvergence na $Y^X$ je ekviuniformní.*

Důkaz

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Ekviuniformní množiny)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory. Podmnožina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekviuniformní, jestliže pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $(f \times f)(U) \subset V$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

**TVRZENÍ (Vlastnosti ekviuniformních množin)**

1. *Soustava všech ekviuniformních množin je aditivní a dědičná.*
2. *Množina $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je ekviuniformní právě když je zobrazení (tzv. evaluace) $e = \{(x,f) \rightsquigarrow f(x)\} : X \times \mathcal{F} \to Y$ stejnoměrně spojité, přičemž $\mathcal{F}$ má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita stejnoměrné konvergence.*
3. *Množina $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je ekviuniformní právě když je zobrazení $j_{\mathcal{F}} = \{x \rightsquigarrow \{f \rightsquigarrow f(x)\}\} : X \to U_u(\mathcal{F},Y)$ stejnoměrně spojité, přičemž $\mathcal{F}$ má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita bodové konvergence.*
4. *Každá prekompaktní podmnožina v $U_u(X,Y)$ je ekviuniformní.*
5. *Uzávěr ekviuniformní množiny v topologii bodové konvergence na $Y^X$ je ekviuniformní.*

Důkaz

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Ekviuniformní množiny)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory. Podmnožina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekviuniformní, jestliže pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $(f \times f)(U) \subset V$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

**TVRZENÍ (Vlastnosti ekviuniformních množin)**

1. *Soustava všech ekviuniformních množin je aditivní a dědičná.*
2. *Množina $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je ekviuniformní právě když je zobrazení (tzv. evaluace) $e = \{(x,f) \rightsquigarrow f(x)\} : X \times \mathcal{F} \to Y$ stejnoměrně spojité, přičemž $\mathcal{F}$ má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita stejnoměrné konvergence.*
3. *Množina $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je ekviuniformní právě když je zobrazení $j_{\mathcal{F}} = \{x \rightsquigarrow \{f \rightsquigarrow f(x)\}\} : X \to U_u(\mathcal{F},Y)$ stejnoměrně spojité, přičemž $\mathcal{F}$ má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita bodové konvergence.*
4. *Každá prekompaktní podmnožina v $U_u(X,Y)$ je ekviuniformní.*
5. *Uzávěr ekviuniformní množiny v topologii bodové konvergence na $Y^X$ je ekviuniformní.*

Důkaz

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Ekviuniformní množiny)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory. Podmnožina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekviuniformní, jestliže pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $(f \times f)(U) \subset V$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

**TVRZENÍ (Vlastnosti ekviuniformních množin)**

1. *Soustava všech ekviuniformních množin je aditivní a dědičná.*
2. *Množina $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je ekviuniformní právě když je zobrazení (tzv. evaluace) $e = \{(x,f) \rightsquigarrow f(x)\} : X \times \mathcal{F} \to Y$ stejnoměrně spojité, přičemž $\mathcal{F}$ má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita stejnoměrné konvergence.*
3. *Množina $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je ekviuniformní právě když je zobrazení $j_{\mathcal{F}} = \{x \rightsquigarrow \{f \rightsquigarrow f(x)\}\} : X \to U_u(\mathcal{F},Y)$ stejnoměrně spojité, přičemž $\mathcal{F}$ má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita bodové konvergence.*
4. *Každá prekompaktní podmnožina v $U_u(X,Y)$ je ekviuniformní.*
5. *Uzávěr ekviuniformní množiny v topologii bodové konvergence na $Y^X$ je ekviuniformní.*

Důkaz

$\Rightarrow$

Důležitou roli při zkoumání rovnosti různých uniformit na množinách zobrazení hraje prekompaktnost, což částečně naznačila předchozí 4.vlastnost.

**TVRZENÍ** (Stejnoměrná konvergence na prekompaktních množinách)

*Je-li $\mathcal{F}$ ekviuniformní množina v $Y^X$, pak uniformity $\mathcal{F}_{pc}$ a $\mathcal{F}_p$ jsou stejné.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Prekompaktní množiny zobrazení)

**TVRZENÍ (Stejnoměrná konvergence na prekompaktních množinách)**

*Je-li $\mathcal{F}$ ekviuniformní množina v $Y^X$, pak uniformity $\mathcal{F}_{pc}$ a $\mathcal{F}_p$ jsou stejné.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Prekompaktní množiny zobrazení)

**TVRZENÍ (Stejnoměrná konvergence na prekompaktních množinách)**

*Je-li $\mathcal{F}$ ekviuniformní množina v $Y^X$, pak uniformity $\mathcal{F}_{pc}$ a $\mathcal{F}_p$ jsou stejné.*

Důkaz

Můžeme nyní uvést několik důsledků předchozích tvrzení.

**DŮSLEDEK** (Prekompaktní množiny zobrazení)

**TVRZENÍ (Stejnoměrná konvergence na prekompaktních množinách)**

*Je-li $\mathcal{F}$ ekviuniformní množina v $Y^X$, pak uniformity $\mathcal{F}_{pc}$ a $\mathcal{F}_p$ jsou stejné.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Prekompaktní množiny zobrazení)

1. *Je-li $Y$ prekompaktní, pak každá ekviuniformní množina v $Y^X$ je prekompaktní podmnožinou $(Y^X)_{pc}$.*
2. *Je-li $X$ prekompaktní a $\mathcal{F} \subset U(X, Y)$ je $\mathcal{F}_u$ je prekompaktní právě když je $\mathcal{F}_p$ prekompaktní a $\mathcal{F}$ je ekviuniformní.*
3. *Jsou-li $X$ i $Y$ prekompaktní, pak $\mathcal{F} \subset Y^X$ je ekviuniformní právě když je $\mathcal{F}_u$ prekompaktní.*
4. *Uzávěry ekviuniformní množiny v topologii bodové konvergence a v topologii stejnoměrné konvergence na prekompaktních množinách jsou stejné.*

**TVRZENÍ (Stejnoměrná konvergence na prekompaktních množinách)**

*Je-li $\mathcal{F}$ ekviuniformní množina v $Y^X$, pak uniformity $\mathcal{F}_{pc}$ a $\mathcal{F}_p$ jsou stejné.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Prekompaktní množiny zobrazení)

1. *Je-li $Y$ prekompaktní, pak každá ekviuniformní množina v $Y^X$ je prekompaktní podmnožinou $(Y^X)_{pc}$.*
2. *Je-li $X$ prekompaktní a $\mathcal{F} \subset U(X, Y)$ je $\mathcal{F}_u$ je prekompaktní právě když je $\mathcal{F}_p$ prekompaktní a $\mathcal{F}$ je ekviuniformní.*
3. *Jsou-li $X$ i $Y$ prekompaktní, pak $\mathcal{F} \subset Y^X$ je ekviuniformní právě když je $\mathcal{F}_u$ prekompaktní.*
4. *Uzávěry ekviuniformní množiny v topologii bodové konvergence a v topologii stejnoměrné konvergence na prekompaktních množinách jsou stejné.*

**TVRZENÍ (Stejnoměrná konvergence na prekompaktních množinách)**

*Je-li $\mathcal{F}$ ekviuniformní množina v $Y^X$, pak uniformity $\mathcal{F}_{pc}$ a $\mathcal{F}_p$ jsou stejné.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Prekompaktní množiny zobrazení)

1. *Je-li $Y$ prekompaktní, pak každá ekviuniformní množina v $Y^X$ je prekompaktní podmnožinou $(Y^X)_{pc}$.*
2. *Je-li $X$ prekompaktní a $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ je $\mathcal{F}_u$ je prekompaktní právě když je $\mathcal{F}_p$ prekompaktní a $\mathcal{F}$ je ekviuniformní.*
3. *Jsou-li $X$ i $Y$ prekompaktní, pak $\mathcal{F} \subset Y^X$ je ekviuniformní právě když je $\mathcal{F}_u$ prekompaktní.*
4. *Uzávěry ekviuniformní množiny v topologii bodové konvergence a v topologii stejnoměrné konvergence na prekompaktních množinách jsou stejné.*

**TVRZENÍ (Stejnoměrná konvergence na prekompaktních množinách)**

*Je-li $\mathcal{F}$ ekviuniformní množina v $Y^X$, pak uniformity $\mathcal{F}_{pc}$ a $\mathcal{F}_p$ jsou stejné.*

Důkaz

**DŮSLEDEK** (Prekompaktní množiny zobrazení)

1. *Je-li $Y$ prekompaktní, pak každá ekviuniformní množina v $Y^X$ je prekompaktní podmnožinou $(Y^X)_{pc}$.*
2. *Je-li $X$ prekompaktní a $\mathcal{F} \subset U(X, Y)$ je $\mathcal{F}_u$ je prekompaktní právě když je $\mathcal{F}_p$ prekompaktní a $\mathcal{F}$ je ekviuniformní.*
3. *Jsou-li $X$ i $Y$ prekompaktní, pak $\mathcal{F} \subset Y^X$ je ekviuniformní právě když je $\mathcal{F}_u$ prekompaktní.*
4. *Uzávěry ekviuniformní množiny v topologii bodové konvergence a v topologii stejnoměrné konvergence na prekompaktních množinách jsou stejné.*

Spojením předchozích úvah se dostane následující velmi důležité obecné tvrzení, jehož různé speciální varianty jsou známé jako Ascoliho věty.

**TVRZENÍ (Ascoliho věta)**

*Nechť $X$ je úplně regulární Hausdorffův prostor, $Y$ je úplný Hausdorffův prostor a $\mathcal{C}$ je množina všech zobrazení $X \to Y$ spojitých na kompaktních podmnožinách $X$. Pak uzavřená podmnožina $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c$ je kompaktní právě když je ekviuniformní na kompaktních množinách a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ je prekompaktní.*

**DŮSLEDEK** (Speciální tvary Ascoliho věty)

*Nechť $X$ je Hausdorffův prostor, který je buď lokálně kompaktní nebo má spočetné lokální báze v každém svém bodě. Nechť $Y$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.*

**TVRZENÍ (Ascoliho věta)**

*Nechť* $X$ *je úplně regulární Hausdorffův prostor,* $Y$ *je úplný Hausdorffův prostor a* $\mathcal{C}$ *je množina všech zobrazení* $X \to Y$ *spojitých na kompaktních podmnožinách* $X$*. Pak uzavřená podmnožina* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c$ *je kompaktní právě když je ekviuniformní na kompaktních množinách a pro každé* $x \in X$ *je množina* $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ *je prekompaktní.*

**DŮSLEDEK** (Speciální tvary Ascoliho věty)

*Nechť* $X$ *je Hausdorffův prostor, který je buď lokálně kompaktní nebo má spočetné lokální báze v každém svém bodě. Nechť* $Y$ *je uniformní prostor a* $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$*.*

**TVRZENÍ (Ascoliho věta)**

*Nechť $X$ je úplně regulární Hausdorffův prostor, $Y$ je úplný Hausdorffův prostor a $\mathcal{C}$ je množina všech zobrazení $X \to Y$ spojitých na kompaktních podmnožinách $X$. Pak uzavřená podmnožina $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c$ je kompaktní právě když je ekviuniformní na kompaktních množinách a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ je prekompaktní.*

**DŮSLEDEK** (Speciální tvary Ascoliho věty)

*Nechť $X$ je Hausdorffův prostor, který je buď lokálně kompaktní nebo má spočetné lokální báze v každém svém bodě. Nechť $Y$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.*

**TVRZENÍ (Ascoliho věta)**

*Nechť $X$ je úplně regulární Hausdorffův prostor, $Y$ je úplný Hausdorffův prostor a $\mathcal{C}$ je množina všech zobrazení $X \to Y$ spojitých na kompaktních podmnožinách $X$. Pak uzavřená podmnožina $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c$ je kompaktní právě když je ekviuniformní na kompaktních množinách a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ je prekompaktní.*

**DŮSLEDEK** (Speciální tvary Ascoliho věty)

*Nechť $X$ je Hausdorffův prostor, který je buď lokálně kompaktní nebo má spočetné lokální báze v každém svém bodě. Nechť $Y$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.*

1. *$\mathcal{F}_c$ je kompaktní právě když je uzavřený v $C_p(X, Y)$, je ekviuniformní a pro každé $x \in X$ má množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ kompaktní uzávěr.*
2. *Je-li $X$ kompaktní a $Y$ je úplný, je množina $\mathcal{F}_u$ kompaktní právě když je uzavřená v $C_p(X, Y)$, je ekviuniformní a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ kompaktní.*
3. *Je-li $X = [0, 1]$ a $Y = \mathbb{R}$, je $\mathcal{F} \subset C_u([0, 1])$ kompaktní právě když je ekviuniformní a omezená.*

**TVRZENÍ (Ascoliho věta)**

*Nechť $X$ je úplně regulární Hausdorffův prostor, $Y$ je úplný Hausdorffův prostor a $\mathcal{C}$ je množina všech zobrazení $X \to Y$ spojitých na kompaktních podmnožinách $X$. Pak uzavřená podmnožina $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c$ je kompaktní právě když je ekviuniformní na kompaktních množinách a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ je prekompaktní.*

**DŮSLEDEK** (Speciální tvary Ascoliho věty)

*Nechť $X$ je Hausdorffův prostor, který je buď lokálně kompaktní nebo má spočetné lokální báze v každém svém bodě. Nechť $Y$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.*

1. *$\mathcal{F}_c$ je kompaktní právě když je uzavřený v $C_p(X, Y)$, je ekviuniformní a pro každé $x \in X$ má množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ kompaktní uzávěr.*
2. *Je-li $X$ kompaktní a $Y$ je úplný, je množina $\mathcal{F}_u$ kompaktní právě když je uzavřená v $C_p(X, Y)$, je ekviuniformní a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ kompaktní.*
3. *Je-li $X = [0, 1]$ a $Y = \mathbb{R}$, je $\mathcal{F} \subset C_u([0, 1])$ kompaktní právě když je ekviuniformní a omezená.*

**TVRZENÍ (Ascoliho věta)**

*Nechť $X$ je úplně regulární Hausdorffův prostor, $Y$ je úplný Hausdorffův prostor a $\mathcal{C}$ je množina všech zobrazení $X \to Y$ spojitých na kompaktních podmnožinách $X$. Pak uzavřená podmnožina $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c$ je kompaktní právě když je ekviuniformní na kompaktních množinách a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ je prekompaktní.*

**DŮSLEDEK** (Speciální tvary Ascoliho věty)

*Nechť $X$ je Hausdorffův prostor, který je buď lokálně kompaktní nebo má spočetné lokální báze v každém svém bodě. Nechť $Y$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.*

1. *$\mathcal{F}_c$ je kompaktní právě když je uzavřený v $C_p(X, Y)$, je ekviuniformní a pro každé $x \in X$ má množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ kompaktní uzávěr.*
2. *Je-li $X$ kompaktní a $Y$ je úplný, je množina $\mathcal{F}_u$ kompaktní právě když je uzavřená v $C_p(X, Y)$, je ekviuniformní a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ kompaktní.*
3. *Je-li $X = [0, 1]$ a $Y = \mathbb{R}$, je $\mathcal{F} \subset C_u([0, 1])$ kompaktní právě když je ekviuniformní a omezená.*

**TVRZENÍ (Ascoliho věta)**

*Nechť $X$ je úplně regulární Hausdorffův prostor, $Y$ je úplný Hausdorffův prostor a $\mathcal{C}$ je množina všech zobrazení $X \to Y$ spojitých na kompaktních podmnožinách $X$. Pak uzavřená podmnožina $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c$ je kompaktní právě když je ekviuniformní na kompaktních množinách a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ je prekompaktní.*

**DŮSLEDEK** (Speciální tvary Ascoliho věty)

*Nechť $X$ je Hausdorffův prostor, který je buď lokálně kompaktní nebo má spočetné lokální báze v každém svém bodě. Nechť $Y$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.*

1. *$\mathcal{F}_c$ je kompaktní právě když je uzavřený v $C_p(X, Y)$, je ekviuniformní a pro každé $x \in X$ má množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ kompaktní uzávěr.*
2. *Je-li $X$ kompaktní a $Y$ je úplný, je množina $\mathcal{F}_u$ kompaktní právě když je uzavřená v $C_p(X, Y)$, je ekviuniformní a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ kompaktní.*
3. *Je-li $X = [0, 1]$ a $Y = \mathbb{R}$, je $\mathcal{F} \subset C_u([0, 1])$ kompaktní právě když je ekviuniformní a omezená.*

**TVRZENÍ (Ascoliho věta)**

*Nechť $X$ je úplně regulární Hausdorffův prostor, $Y$ je úplný Hausdorffův prostor a $\mathcal{C}$ je množina všech zobrazení $X \to Y$ spojitých na kompaktních podmnožinách $X$. Pak uzavřená podmnožina $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c$ je kompaktní právě když je ekviuniformní na kompaktních množinách a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ je prekompaktní.*

**DŮSLEDEK** (Speciální tvary Ascoliho věty)

*Nechť $X$ je Hausdorffův prostor, který je buď lokálně kompaktní nebo má spočetné lokální báze v každém svém bodě. Nechť $Y$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$.*

1. *$\mathcal{F}_c$ je kompaktní právě když je uzavřený v $C_p(X, Y)$, je ekviuniformní a pro každé $x \in X$ má množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ kompaktní uzávěr.*
2. *Je-li $X$ kompaktní a $Y$ je úplný, je množina $\mathcal{F}_u$ kompaktní právě když je uzavřená v $C_p(X, Y)$, je ekviuniformní a pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x); f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ kompaktní.*
3. *Je-li $X = [0, 1]$ a $Y = \mathbb{R}$, je $\mathcal{F} \subset C_u([0, 1])$ kompaktní právě když je ekviuniformní a omezená.*

V této části se podíváme na speciální případ prostorů reálných funkcí, tj. na $\mathbb{R}^X$. V kapitole o konstrukcích byly definovány algebraické operace a uspořádání na množině $\mathbb{R}^X$. Tamtéž bylo i ukázáno, že $C(X)$ a $C^*(X)$ jsou podalgebry a podsvazy v $\mathbb{R}^X$. Uvedeme následující podobné tvrzení.

**TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $U(X)$ a $U^*(X)$)**

*Nechť $X$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset U(X)$.*

1. *$U(X)$ a $U^*(X)$ jsou lineární podprostory a podsvazy v $\mathbb{R}^X$, $U^*(X)$ je i podalgebra v $\mathbb{R}^X$.*
2. *Je-li $\mathcal{F}$ lineární podprostor v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr lineární prostor.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ podsvaz v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr svaz.*
4. *Uzavřená podalgebra v $U^*(X)$ je podsvaz v $U^*(X)$.*

Důkaz

V této části se podíváme na speciální případ prostorů reálných funkcí, tj. na $\mathbb{R}^X$. V kapitole o konstrukcích byly definovány algebraické operace a uspořádání na množině $\mathbb{R}^X$. Tamtéž bylo i ukázáno, že $C(X)$ a $C^*(X)$ jsou podalgebry a podsvazy v $\mathbb{R}^X$. Uvedeme následující podobné tvrzení.

**TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $U(X)$ a $U^*(X)$)**

*Nechť $X$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset U(X)$.*

1. *$U(X)$ a $U^*(X)$ jsou lineární podprostory a podsvazy v $\mathbb{R}^X$, $U^*(X)$ je i podalgebra v $\mathbb{R}^X$.*
2. *Je-li $\mathcal{F}$ lineární podprostor v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr lineární prostor.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ podsvaz v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr svaz.*
4. *Uzavřená podalgebra v $U^*(X)$ je podsvaz v $U^*(X)$.*

Důkaz

V této části se podíváme na speciální případ prostorů reálných funkcí, tj. na $\mathbb{R}^X$. V kapitole o konstrukcích byly definovány algebraické operace a uspořádání na množině $\mathbb{R}^X$. Tamtéž bylo i ukázáno, že $C(X)$ a $C^*(X)$ jsou podalgebry a podsvazy v $\mathbb{R}^X$. Uvedeme následující podobné tvrzení.

**TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $U(X)$ a $U^*(X)$)**

*Nechť $X$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset U(X)$.*

1. *$U(X)$ a $U^*(X)$ jsou lineární podprostory a podsvazy v $\mathbb{R}^X$, $U^*(X)$ je i podalgebra v $\mathbb{R}^X$.*
2. *Je-li $\mathcal{F}$ lineární podprostor v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr lineární prostor.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ podsvaz v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr svaz.*
4. *Uzavřená podalgebra v $U^*(X)$ je podsvaz v $U^*(X)$.*

Důkaz

V této části se podíváme na speciální případ prostorů reálných funkcí, tj. na $\mathbb{R}^X$. V kapitole o konstrukcích byly definovány algebraické operace a uspořádání na množině $\mathbb{R}^X$. Tamtéž bylo i ukázáno, že $C(X)$ a $C^*(X)$ jsou podalgebry a podsvazy v $\mathbb{R}^X$. Uvedeme následující podobné tvrzení.

**TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $U(X)$ a $U^*(X)$)**

*Nechť $X$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset U(X)$.*

1. $U(X)$ *a* $U^*(X)$ *jsou lineární podprostory a podsvazy v* $\mathbb{R}^X$, $U^*(X)$ *je i podalgebra v* $\mathbb{R}^X$.
2. *Je-li* $\mathcal{F}$ *lineární podprostor v* $U_u(X)$, *je i jeho uzávěr lineární prostor.*
3. *Je-li* $\mathcal{F}$ *podsvaz v* $U_u(X)$, *je i jeho uzávěr svaz.*
4. *Uzavřená podalgebra v* $U^*(X)$ *je podsvaz v* $U^*(X)$.

Důkaz

V této části se podíváme na speciální případ prostorů reálných funkcí, tj. na $\mathbb{R}^X$. V kapitole o konstrukcích byly definovány algebraické operace a uspořádání na množině $\mathbb{R}^X$. Tamtéž bylo i ukázáno, že $C(X)$ a $C^*(X)$ jsou podalgebry a podsvazy v $\mathbb{R}^X$. Uvedeme následující podobné tvrzení.

**TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $U(X)$ a $U^*(X)$)**

*Nechť $X$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset U(X)$.*

1. *$U(X)$ a $U^*(X)$ jsou lineární podprostory a podsvazy v $\mathbb{R}^X$, $U^*(X)$ je i podalgebra v $\mathbb{R}^X$.*
2. *Je-li $\mathcal{F}$ lineární podprostor v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr lineární prostor.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ podsvaz v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr svaz.*
4. *Uzavřená podalgebra v $U^*(X)$ je podsvaz v $U^*(X)$.*

Důkaz

V této části se podíváme na speciální případ prostorů reálných funkcí, tj. na $\mathbb{R}^X$. V kapitole o konstrukcích byly definovány algebraické operace a uspořádání na množině $\mathbb{R}^X$. Tamtéž bylo i ukázáno, že $C(X)$ a $C^*(X)$ jsou podalgebry a podsvazy v $\mathbb{R}^X$. Uvedeme následující podobné tvrzení.

**TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $U(X)$ a $U^*(X)$)**

*Nechť $X$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset U(X)$.*

1. *$U(X)$ a $U^*(X)$ jsou lineární podprostory a podsvazy v $\mathbb{R}^X$, $U^*(X)$ je i podalgebra v $\mathbb{R}^X$.*
2. *Je-li $\mathcal{F}$ lineární podprostor v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr lineární prostor.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ podsvaz v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr svaz.*
4. *Uzavřená podalgebra v $U^*(X)$ je podsvaz v $U^*(X)$.*

Důkaz

V této části se podíváme na speciální případ prostorů reálných funkcí, tj. na $\mathbb{R}^X$. V kapitole o konstrukcích byly definovány algebraické operace a uspořádání na množině $\mathbb{R}^X$. Tamtéž bylo i ukázáno, že $C(X)$ a $C^*(X)$ jsou podalgebry a podsvazy v $\mathbb{R}^X$. Uvedeme následující podobné tvrzení.

**TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $U(X)$ a $U^*(X)$)**

*Nechť $X$ je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset U(X)$.*

1. *$U(X)$ a $U^*(X)$ jsou lineární podprostory a podsvazy v $\mathbb{R}^X$, $U^*(X)$ je i podalgebra v $\mathbb{R}^X$.*
2. *Je-li $\mathcal{F}$ lineární podprostor v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr lineární prostor.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ podsvaz v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr svaz.*
4. *Uzavřená podalgebra v $U^*(X)$ je podsvaz v $U^*(X)$.*

Důkaz

Snadno najdete reálnou stejnoměrně spojitou (neomezenou) funkci $f$ na $\mathbb{R}$, jejíž čtverec $f^2$ není stejnoměrně spojitý.
Je-li $X$ jemný prostor, je $U(X) = C(X)$ a $U^*(X) = C^*(X)$, takže předchozí věta platí i pro prostory spojitých reálných funkcí, navíc je i $C(X)$ algebrou.

Následující tvrzení je základní větou této části.

**TVRZENÍ (Aproximace funkcí)**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je lineární podprostor a podsvaz v $U_u^*(X)$, který obsahuje všechna konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustý v $U^*(X)$.*

Důkaz

**DŮSLEDEK**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $U_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Stoneova-Weierstrassova věta)**

*Nechť $X$ je kompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $C_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a odděluje body $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace v kompaktně otevřené topologii)**

*Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $U(X)$ obsahující nenulové konstantní zobrazení a oddělující body $X$. Pak $\mathcal{F}$ je hustá v $U_c(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace funkcí)**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je lineární podprostor a podsvaz v $U_u^*(X)$, který obsahuje všechna konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustý v $U^*(X)$.*

Důkaz

**DŮSLEDEK**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $U_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Stoneova-Weierstrassova věta)**

*Nechť $X$ je kompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $C_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a odděluje body $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace v kompaktně otevřené topologii)**

*Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $U(X)$ obsahující nenulové konstantní zobrazení a oddělující body $X$. Pak $\mathcal{F}$ je hustá v $U_c(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace funkcí)**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je lineární podprostor a podsvaz v $U_u^*(X)$, který obsahuje všechna konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustý v $U^*(X)$.*

Důkaz

Protože každá uzavřená podalgebra v $U^*(X)$ je podsvaz, můžeme předchozí tvrzení upravit na následující tvar:

**DŮSLEDEK**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $U_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Stoneova-Weierstrassova věta)**

*Nechť $X$ je kompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $C_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a odděluje body $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace v kompaktně otevřené topologii)**

*Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $U(X)$ obsahující nenulové konstantní zobrazení a oddělující body $X$. Pak $\mathcal{F}$ je hustá v $U_c(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace funkcí)**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je lineární podprostor a podsvaz v $U_u^*(X)$, který obsahuje všechna konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustý v $U^*(X)$.*

Důkaz

**DŮSLEDEK**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $U_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Stoneova-Weierstrassova věta)**

*Nechť $X$ je kompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $C_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a odděluje body $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace v kompaktně otevřené topologii)**

*Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $U(X)$ obsahující nenulové konstantní zobrazení a oddělující body $X$. Pak $\mathcal{F}$ je hustá v $U_c(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace funkcí)**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je lineární podprostor a podsvaz v $U^*_u(X)$, který obsahuje všechna konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustý v $U^*(X)$.*

Důkaz

**DŮSLEDEK**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $U^*_u(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

Předchozí tvrzení lze chápat jako uniformní varianta Stoneovy-Weierstrassovy věty:

**TVRZENÍ (Stoneova-Weierstrassova věta)**

*Nechť $X$ je kompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $C^*_u(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a odděluje body $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace v kompaktně otevřené topologii)**

*Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $U(X)$ obsahující nenulové konstantní zobrazení a oddělující body $X$. Pak $\mathcal{F}$ je hustá v $U_c(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace funkcí)**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je lineární podprostor a podsvaz v $U_u^*(X)$, který obsahuje všechna konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustý v $U^*(X)$.*

▸ Důkaz

**DŮSLEDEK**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $U_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Stoneova-Weierstrassova věta)**

*Nechť $X$ je kompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $C_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a odděluje body $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace v kompaktně otevřené topologii)**

*Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $U(X)$ obsahující nenulové konstantní zobrazení a oddělující body $X$. Pak $\mathcal{F}$ je hustá v $U_c(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace funkcí)**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je lineární podprostor a podsvaz v $U_u^*(X)$, který obsahuje všechna konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustý v $U^*(X)$.*

Důkaz

**DŮSLEDEK**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $U_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Stoneova-Weierstrassova věta)**

*Nechť $X$ je kompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $C_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a odděluje body $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

Jako důsledky předchozí uniformní verze lze uvést např. následující tvrzení:

**TVRZENÍ (Aproximace v kompaktně otevřené topologii)**

*Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $U(X)$ obsahující nenulové konstantní zobrazení a oddělující body $X$. Pak $\mathcal{F}$ je hustá v $U_c(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace funkcí)**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je lineární podprostor a podsvaz v $U_u^*(X)$, který obsahuje všechna konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustý v $U^*(X)$.*

Důkaz

**DŮSLEDEK**

*Nechť $X$ je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $U_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a slabě vytváří $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Stoneova-Weierstrassova věta)**

*Nechť $X$ je kompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je podalgebra v $C_u^*(X)$, která obsahuje nenulové konstantní zobrazení a odděluje body $X$. Potom $\mathcal{F}$ je hustá v $U^*(X)$.*

**TVRZENÍ (Aproximace v kompaktně otevřené topologii)**

*Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $U(X)$ obsahující nenulové konstantní zobrazení a oddělující body $X$. Pak $\mathcal{F}$ je hustá v $U_c(X)$.*

Stoneova-Weierstrassova věta má různorodá použití i v jiných oblastech matematiky než jen v topologii. My tu uvedeme jen několik aplikací v topologii. První z nich se týká rozšiřování zobrazení, a to spojitých i stejnoměrně spojitých.

**TVRZENÍ (Rozšiřování z kompaktního podprostoru)**

*Je-li $Y$ kompaktní podmnožina úplně regulárního Hausdorffova prostoru $X$, pak každá spojitá reálná funkce na $Y$ lze spojitě rozšířit na celé $X$.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Katětovova věta)**

*Každá omezená stejnoměrně spojitá reálná funkce definovaná na podprostoru uniformního prostoru lze rozšířit na stejnoměrně spojitou reálnou funkci definovanou na celém prostoru.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)**

*Nechť $X$ je normální Hausdorffův prostor, $A$ je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na $A$ shoduje s $f$.*

Důkaz

Stoneova-Weierstrassova věta má různorodá použití i v jiných oblastech matematiky než jen v topologii. My tu uvedeme jen několik aplikací v topologii. První z nich se týká rozšiřování zobrazení, a to spojitých i stejnoměrně spojitých.

Nejdříve uvedeme rozšiřování spojitých zobrazení z kompaktního podprostoru. V tomto případě nemusí být celý prostor normální, ale daný podprostor musí být kompaktní.

**TVRZENÍ (Rozšiřování z kompaktního podprostoru)**

*Je-li $Y$ kompaktní podmnožina úplně regulárního Hausdorffova prostoru $X$, pak každá spojitá reálná funkce na $Y$ lze spojitě rozšířit na celé $X$.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Katětovova věta)**

*Každá omezená stejnoměrně spojitá reálná funkce definovaná na podprostoru uniformního prostoru lze rozšířit na stejnoměrně spojitou reálnou funkci definovanou na celém prostoru.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)**

*Nechť $X$ je normální Hausdorffův prostor, $A$ je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na $A$ shoduje s $f$.*

**TVRZENÍ (Rozšiřování z kompaktního podprostoru)**

*Je-li $Y$ kompaktní podmnožina úplně regulárního Hausdorffova prostoru $X$, pak každá spojitá reálná funkce na $Y$ lze spojitě rozšířit na celé $X$.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Katětovova věta)**

*Každá omezená stejnoměrně spojitá reálná funkce definovaná na podprostoru uniformního prostoru lze rozšířit na stejnoměrně spojitou reálnou funkci definovanou na celém prostoru.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)**

*Nechť $X$ je normální Hausdorffův prostor, $A$ je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na $A$ shoduje s $f$.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Rozšiřování z kompaktního podprostoru)**

*Je-li $Y$ kompaktní podmnožina úplně regulárního Hausdorffova prostoru $X$, pak každá spojitá reálná funkce na $Y$ lze spojitě rozšířit na celé $X$.*

Důkaz

Předchozí tvrzení (nazývané Čechovou větou), které je čistě topologické, dá následující uniformní tvrzení.

**TVRZENÍ (Katětovova věta)**

*Každá omezená stejnoměrně spojitá reálná funkce definovaná na podprostoru uniformního prostoru lze rozšířit na stejnoměrně spojitou reálnou funkci definovanou na celém prostoru.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)**

*Nechť $X$ je normální Hausdorffův prostor, $A$ je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na $A$ shoduje s $f$.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Rozšiřování z kompaktního podprostoru)**

*Je-li $Y$ kompaktní podmnožina úplně regulárního Hausdorffova prostoru $X$, pak každá spojitá reálná funkce na $Y$ lze spojitě rozšířit na celé $X$.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Katětovova věta)**

*Každá omezená stejnoměrně spojitá reálná funkce definovaná na podprostoru uniformního prostoru lze rozšířit na stejnoměrně spojitou reálnou funkci definovanou na celém prostoru.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)**

*Nechť $X$ je normální Hausdorffův prostor, $A$ je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na $A$ shoduje s $f$.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Rozšiřování z kompaktního podprostoru)**

*Je-li $Y$ kompaktní podmnožina úplně regulárního Hausdorffova prostoru $X$, pak každá spojitá reálná funkce na $Y$ lze spojitě rozšířit na celé $X$.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Katětovova věta)**

*Každá omezená stejnoměrně spojitá reálná funkce definovaná na podprostoru uniformního prostoru lze rozšířit na stejnoměrně spojitou reálnou funkci definovanou na celém prostoru.*

Důkaz

Jestliže si uvědomíte, že v normálním Hausdorffově prostoru tvoří všechna konečná otevřená pokrytí bázi uniformity, snadno se z předchozího tvrzení dostane Urysonova věta. Následující tvrzení je formulováno pro Hausdorffovy prostory, ale lehko se ukáže, že pro obecné normální prostory je tvrzení snadným důsledkem tvrzení pro normální $T_1$-prostory.

**TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)**

*Nechť $X$ je normální Hausdorffův prostor, $A$ je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na $A$ shoduje s $f$.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Rozšiřování z kompaktního podprostoru)**

*Je-li $Y$ kompaktní podmnožina úplně regulárního Hausdorffova prostoru $X$, pak každá spojitá reálná funkce na $Y$ lze spojitě rozšířit na celé $X$.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Katětovova věta)**

*Každá omezená stejnoměrně spojitá reálná funkce definovaná na podprostoru uniformního prostoru lze rozšířit na stejnoměrně spojitou reálnou funkci definovanou na celém prostoru.*

Důkaz

**TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)**

*Nechť $X$ je normální Hausdorffův prostor, $A$ je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na $A$ shoduje s $f$.*

Důkaz

Znáte jednoznačný vztah mezi kompaktifikacemi prostoru a jeho prekompaktními uniformitami. Stoneova-Weierstrassova věta v tomto vztahu nahradí prekompaktní uniformity uzavřenými algebrami funkcí.

**TVRZENÍ (Kompaktifikace a algebry funkcí)**

*Hausdorffovy kompaktifikace úplně regulárního Hausdorffova prostoru $X$ jsou (až na ekvivalenci kompaktifikací) ve vzájemně jednoznačném vztahu s uzavřenými podalgebrami $C_u^*(X)$ obsahujícími konstantní zobrazení a oddělující body a uzavřené množiny v $X$.*

Je zřejmé, že Čechově-Stoneově kompaktifikaci $\beta X$ odpovídá algebra $C^*(X)$.
Nechť $X$ je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $\mathcal{F} = \{f \in C^*(X); \forall \varepsilon > 0\ \exists$ kompaktní podmnožina $K \subset X (x \in X \setminus K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)\}$. Pak množina všech posunutí $\mathcal{F}$ o konstanty (tj. $\{c + f; c \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}\}$) odpovídá jednobodové kompaktifikaci prostoru $X$. (Uvedeným funkcím se říká, že mají limitu v nekonečnu.)

**TVRZENÍ (Kompaktifikace a algebry funkcí)**

*Hausdorffovy kompaktifikace úplně regulárního Hausdorffova prostoru* $X$ *jsou (až na ekvivalenci kompaktifikací) ve vzájemně jednoznačném vztahu s uzavřenými podalgebrami* $C_u^*(X)$ *obsahujícími konstantní zobrazení a oddělující body a uzavřené množiny v* $X$.

Je zřejmé, že Čechově-Stoneově kompaktifikaci $\beta X$ odpovídá algebra $C^*(X)$. Nechť $X$ je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $\mathcal{F} = \{f \in C^*(X); \forall \varepsilon > 0\ \exists$ kompaktní podmnožina $K \subset X (x \in X \setminus K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)\}$. Pak množina všech posunutí $\mathcal{F}$ o konstanty (tj. $\{c + f; c \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}\}$) odpovídá jednobodové kompaktifikaci prostoru $X$. (Uvedeným funkcím se říká, že mají limitu v nekonečnu.)

**TVRZENÍ (Kompaktifikace a algebry funkcí)**

*Hausdorffovy kompaktifikace úplně regulárního Hausdorffova prostoru $X$ jsou (až na ekvivalenci kompaktifikací) ve vzájemně jednoznačném vztahu s uzavřenými podalgebrami $C_u^*(X)$ obsahujícími konstantní zobrazení a oddělující body a uzavřené množiny v $X$.*

Je zřejmé, že Čechově-Stoneově kompaktifikaci $\beta X$ odpovídá algebra $C^*(X)$.
Nechť $X$ je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $\mathcal{F} = \{f \in C^*(X); \forall \varepsilon > 0\ \exists$ kompaktní podmnožina $K \subset X (x \in X \setminus K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)\}$. Pak množina všech posunutí $\mathcal{F}$ o konstanty (tj. $\{c + f; c \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}\}$) odpovídá jednobodové kompaktifikaci prostoru $X$. (Uvedeným funkcím se říká, že mají limitu v nekonečnu.)