KAPITOLA 1

INTEGRÁL PO CESTĚ. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Na dva užívané typy integrálu po cestě resp. křivkového integrálu vedou následující dvě vzorové úlohy:

Úloha 1. Máme spočítat délku drátu, známe-li jeho tvar, obecněji: máme spočítat hmotu drátu, známe-li jeho tvar a lineární hustotu rozložení hmoty.

Úloha 2. Máme spočítat práci proti silovému poli, pohybujeme-li v něm hmotným bodem po nějaké dráze. Tady nám nestačí tvar dráhy, ale musíme také vědět, jak se po této dráze pohybujeme.

1.1. Cesty a křivky v $\mathbb{R}_r$

Předně si musíme ujasnit, co budeme pod cestou resp. křivkou rozumět. Připomeňme, že body v $\mathbb{R}_r$ budeme značit $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, v $\mathbb{R}_2$ resp. $\mathbb{R}_3$ také (x, y) resp. (x, y, z). Pro definici integrálů po cestě resp. křivkových integrálů je vhodná následující definice:

Definice 1.1. *Cestou třídy* C^1 v $\mathbb{R}_r$ nazveme zobrazení φ nějakého intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}_1$ do $\mathbb{R}_r$, které je na tomto intervalu spojitě derivovatelné (v koncových definičního intervalu jde o jednostranné derivace) a má na něm nenulovou derivaci $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi'(t), \dots, \varphi_r'(t))$. *Cestou po částech třídy* C^1 nazveme spojité zobrazení φ nějakého intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}_1$ takové, že tento interval lze rozložit na sjednocení konečného počtu intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$, každé dva z nichž mají společné nejvýše příslušné krajní body a to tak, že zúžení $\varphi_{|\langle a_i, b_i\rangle}$ zobrazení φ na intervaly $\langle a_i, b_i\rangle$ jsou cesty třídy C^1. Budeme-li chtít explicitně u zobrazení zachytit jeho definiční interval I, budeme psát (φ, I) místo φ. Množinu $\langle\varphi\rangle = \langle(\varphi, I)\rangle \overset{\text{def}}{=} \varphi(I)$ nazýváme *geometrickým obrazem* cesty (φ, I). Vektor $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \dots, \varphi_r'(t))$ a každý jeho nenulový násobek nazýváme *tečným vektorem* k cestě třídy C^1 (přesněji k jejímu geometrickému obrazu) v bodě $\varphi(t)$, vektor $\tau(t) = \varphi'(t)/||\varphi'(t)||$ *jednotkovým tečným vektorem*. (Bereme v $\mathbb{R}_r$ normu generovanou skalárním součinem $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r \alpha_i\beta_i$, tj. $||\alpha|| = \sqrt{\sum_{i=1}^r \alpha_i^2}$ pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_r$). *Křivkou třídy* C^1 resp. *křivkou po částech třídy* C^1 nazýváme takovou množinu $K \subset \mathbb{R}_r$, pro kterou existuje cesta φ třídy C^1 resp. po částech třídy C^1 v $\mathbb{R}_r$, taková, že $K = \langle\varphi\rangle$. Každou takovou cestu nazýváme *parametrizací* nebo *parametrickým zadáním* křivky K.

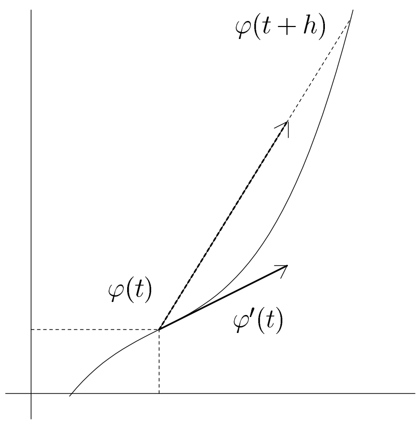
Pokud nebude řečeno jinak, budeme pod cestou resp. křivkou vždy rozumět cestu resp. křivku po částech třídy C^1.

Poznámka 1.1. Někteří autoři nazývají křivkou to, co jsme nazvali cestou. Je vidět, že naše definice cesty zachycuje jednak její tvar - geometrický obraz, ale také způsob probíhání po něm: body odpovídající menším t se probíhají před body s t větším.

Poznámka 1.2. V této souvislosti podotkněme, že často máme zadanou nějakou množinu $K \subset \mathbb{R}_r$ a máme najít nějakou její parametrizaci φ. Takových parametrizací je obecně mnoho (pokud existuje aspoň jedna); potom se snažíme vybrat takovou, abychom byli schopni něco spočítat. Například elipsu $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ můžeme parametrizovat zobrazením $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ s $\varphi_1(t) = a\cos t$, $\varphi_2(t) = b\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Poznámka 1.3. Tečný vektor ke křivce K, parametrizované cestou φ v bodě $\varphi(t)$ je podle definice limitou (vzhledem k normě v $\mathbb{R}_r$) sečných vektorů

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}.$$



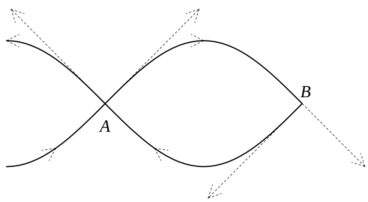
Obr. 1.1

Viz obr. 1.1, na němž je tučně přerušovaně a se šipkou vyznačen vektor $(\varphi(t+h) - \varphi(t))/h$. Tečný vektor má tu vlastnost, že ze všech vektorů, vycházejících z bodu $\varphi(t)$ se ke křivce nejvíce přimyká ve smyslu

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + h\varphi'(t) + o(h) \text{ pro } h \to 0.$$

V bodech, v nichž existují pouze jednostranné derivace zobrazení φ máme fakticky dva jednostranné tečné vektory (viz bod B na obrázku 1.2). V bodech, které dostaneme při různých hodnotách t_1, t_2 ($\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$) (jsou to body, v nichž se křivka protíná) máme fakticky také dva tečné vektory, každý je tečný k příslušnému kousku křivky odpovídajícímu t blízkým k t_1 resp. t_2. Viz bod A na obr. 1.2. Na tomto obrázku i na dalších obrázcích je šipkami vyznačen způsob probíhání po křivce při zvětšování parametru.

V mechanické interptetaci cesty, kdy t má význam času a $\varphi(t)$ značí souřadnice pohybujícího se bodu v okamžiku t, má $\varphi'(t)$ význam vektoru rychlosti pohybu tohoto bodu v okamžiku t. Připomeňme, že obecně parametr může mít i jiný význam než čas, jak je tomu u příkladu parametrizace jednotkové kružnice se středem v počátku: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, kde t má význam úhlu mezi průvodičem bodu (x, y) této kružnice a kladnou x-ovou poloosou. U příkladu parametrizace elipsy z poznámky 1.2. s $a \neq b$ už t nemá tento význam.

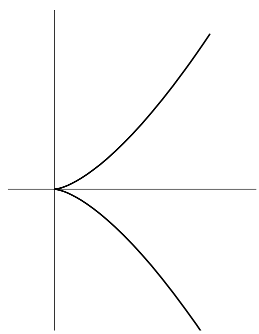


Obr. 1.2

Poznámka 1.4. Ukažme si na příkladech význam požadavku $\varphi' \neq 0$:

1) $\varphi(t) = A$, $t \in \mathbb{R}$, kde A je daný bod z $\mathbb{R}_r$. Pak je $\varphi'(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ a $\langle \varphi \rangle = \{A\}$, tj. jednobodová množina.

2) $x = \varphi_1(t) = t^2$, $y = \varphi_2(t) = t^3$, $t \in \mathbb{R}$. Je $\varphi'(t) = (2t, 3t^2)$, což je nulový vektor pro $t = 0$. Geometrický obraz této cesty je na obrázku 1.3: $t \geq 0$ odpovídají body $(x, x^{3/2})$, $x \geq 0$, $t \leq 0$ body $(x, -x^{3/2})$, $x \geq 0$. Bod $(0,0)$ je tzv. *bod vratu.*



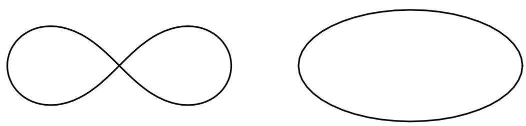
Obr. 1.3

3) $\varphi_1(t) = \cos t^3$, $\varphi_2(t) = \sin t^3$, $t \in (-\delta, \delta)$. Geometrickým obrazem této cesty je kousek kružnice $x^2 + y^2 = 1$ okolo bodu $(1, 0)$. Je to „hezká” křivka, přestože je $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$.

4) $\varphi_1(t) = \cos t^2$, $\varphi_2(t) = \sin t^2$, $t \in (-\delta, \delta)$ dává dvakrát proběhnutý oblouček jednotkové kružnice $x^2 + y^2 = 1$ – jednou zhora do bodu $(1, 0)$, podruhé opačně od tohoto bodu nahoru. Opět je $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$.

Definice 1.2. Cesta $(\varphi, \langle a,b\rangle)$ se nazývá *jednoduchou*, je-li φ prosté na $\langle a,b\rangle$. Cesta $(\varphi, \langle a,b\rangle)$ se nazývá *uzavřenou*, je-li $\varphi(a)=\varphi(b)$ a *jednoduchou uzavřenou*, je-li uzavřená a φ je prosté na $\langle a,b)$. Křivka se nazývá *jednoduchou* resp. *uzavřenou* resp. *jednoduchou uzavřenou*, jestliže existuje taková její parametrizace, která je jednoduchá resp. uzavřená resp. jednoduchá uzavřená.

Křivka na obrázku 1.2. není jednoduchá, protože zobrazení φ ji zadávající není prosté (bod A se nabývá při různých hodnotách t_1, t_2 parametru t). Na obrázku 1.4. je nalevo uzavřená křivka, která není jednoduchá, napravo je jednoduchá uzavřená křivka.



Obr. 1.4

Příklad 1.1. (explicitní zadání cesty resp. křivky) Je-li g spojitě derivovatelná funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, pak $x=\varphi_1(t) \overset{\text{def}}{=} t$, $y=\varphi_2(t) \overset{\text{def}}{=} g(t)$, $t\in\langle a,b\rangle$ je jednoduchá cesta v $\mathbb{R}_2$. Jejím geometrickým obrazem je graf funkce g. Podobně máme-li na $\langle a,b\rangle$ dvě spojitě derivovatelné funkce g_2 a g_3, pak $x=\varphi_1(t)\overset{\text{def}}{=} t$, $y=\varphi_2(t)\overset{\text{def}}{=} g_2(t)$, $z=\varphi_3(t)\overset{\text{def}}{=} g_3(t)$ je jednoduchá cesta v $\mathbb{R}_3$.

Stojí za to si uvědomit, že v jistém smyslu opačná implikace neplatí, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.1a. Uvažme funkci $g(t)=\sqrt{1-t^2}$, $t\in\langle -1,1\rangle$. Pak zřejmě g není spojitě derivovatelná na $\langle -1,1\rangle$, a tedy ani zobrazení $\varphi(t)=(t,g(t))$, $t\in\langle -1,1\rangle$ není třídy C^1. Ale křivku $\langle\varphi\rangle$ (což je graf funkce g, a tedy to je horní jednotková polokružnice se středem v počátku) můžeme dostat jako geometrický obraz cesty $\psi(u)=(\cos u,\sin u)$, $u\in\langle 0,\pi\rangle$, která je třídy C^1.

Příklad 1.1c. (implicitní zadání křivky) Křivku K v $\mathbb{R}_r$ je možné také zadat jako množinu těch $x\in\mathbb{R}_r$, která vyhovují rovnicím

$$F_i(x)=0,\ i=1,2,\dots,r-1,$$

kde F_i jsou spojitě derivovatelné funkce, pro něž je hodnost matice

$$\frac{\mathcal{D}(F_1,F_2,\dots,F_{r-1})}{\mathcal{D}(x_1,x_2,\dots,x_r)}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_r}(x) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_r}(x) \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial F_{r-1}}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_{r-1}}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_{r-1}}{\partial x_r}(x) \end{pmatrix}$$

rovná $r-1$ pro každé $x \in K$. Tečný vektor k takto zadané křivce se dá určit jako formální determinant

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_r \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_r}(x) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_r}(x) \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial F_{r-1}}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_{r-1}}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_{r-1}}{\partial x_r}(x) \end{pmatrix},$$

kde $e_1, e_2, \dots, e_r$ je kanonická báze v $\mathbb{R}_r$, který si myslíme rozložený podle prvního řádku. Tak v $\mathbb{R}_2$ stačí jedna rovnice, například $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ je rovnice přímky, $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ je rovnice elipsy. V $\mathbb{R}_3$ potřebujeme dvě rovnice, například soustava rovnic $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ určuje křivku (elipsu), v níž rovina $x + y + z = 0$ protíná válcovou plochu $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Nakonec budeme potřebovat ještě následující dva pojmy:

Definice 1.3. *Součtem* dvou cest $(\varphi, \langle a_1, b_1 \rangle)$ a $(\psi, \langle a_2, b_2 \rangle)$, pro které platí $\varphi(b_1) = \psi(a_2)$ nazýváme cestu $(\chi, \langle a_1, b_1 + (b_2 - a_2) \rangle)$, kde zobrazení χ je definováno předpisem

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{pro } t \in \langle a_1, b_1 \rangle, \\ \psi(a_2 + t - b_1), & \text{pro } t \in \langle b_1, b_1 + (b_2 - a_2) \rangle. \end{cases}$$

Součet dvou cest označujeme $\varphi \oplus \psi$.

Opačnou cestou k cestě $(\varphi, \langle a, b \rangle)$ nazýváme cestu $(\ominus\varphi, \langle -b, -a \rangle)$, kde zobrazení $\ominus\varphi$ je definováno předpisem

$$\ominus\varphi(t) = \varphi(-t) \text{ pro } t \in \langle -b, -a \rangle.$$

Součtem příslušných křivek $\langle \varphi \rangle$ a $\langle \psi \rangle$ pak rozumíme křivku $\langle \varphi \oplus \psi \rangle$.

Poznámka 1.5. Při součtu se obě cesty resp. křivky napojí přes společný bod $\varphi(b_1) = \psi(a_2)$. Opačná cesta má stejný geometrický obraz jako daná cesta, jen se jeho body probíhají v opačném pořadí (*v opačném smyslu*). V oddílu 1.4. dále zavedeme pojem orientované křivky jako křivky, na níž je zvolen jeden z možných smyslů probíhání. Potom daná cesta a cesta k ní opačná budou zadávat opačně orientované křivky.

1.2. Dva druhy integrálu po cestě

Pokud nebude řečeno jinak, bude cesta znamenat cestu po částech třídy C^1.

Definice 1.4. Nechť $(\varphi, \langle a, b \rangle)$ je cesta.

I. Je-li $f : \langle \varphi, \langle a, b \rangle \rangle \to \mathbb{R}$, pak definujeme *integrál 1. druhu* z funkce f po cestě φ předpisem

$$\int_\varphi f\, ds \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\|\, dt,$$ [1]