KAPITOLA 1

LEBESGUEOVA MÍRA A LEBESGUEŮV INTEGRÁL

1.1. Míra

Na začátku našeho století zavedl francouzský matematik *Henri Lebesgue* (1875-1941) obecnější integrál, než je integrál Riemannův. Nejenže geniálně zlepšil proces integrace, ale uvědomil si také, že teorii integrálu musí předcházet obecná teorie míry, která dá patřičný smysl pojmu míry pro co nejobecnější (a přitom rozumné) množiny a tak se přirozeným způsobem zobecní pojem délky intervalu, obsahu mnohoúhelníka apod.

Definice. Řekneme, že neprázdný systém Σ podmnožin množiny X je *okruh*, jestliže platí:

$$A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma, A \setminus B \in \Sigma.$$

Řekneme, že Σ je *σ-okruh*, jestliže navíc platí

$$A_i \in \Sigma,\, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma.$$

Je-li navíc $X \in \Sigma$, pak Σ nazýváme *σ-algebrou* na X.

Označení. Množinu všech podmnožin množiny X značíme $\exp X$. Potom pro Σ z předchozí definice můžeme psát $\Sigma \subset \exp X$.

Příklady. Triviálním příkladem σ-algebry na X je $\exp X$.

Systém $\mathscr{A}$ všech těch podmnožin množiny X, které jsou buď samy konečné nebo mají konečný doplněk, je příkladem okruhu. Systém $\mathscr{B}$ všech těch podmnožin množiny X, které jsou buď samy nejvýše spočetné anebo mají nejvýše spočetný doplněk je příkladem σ-algebry.

Systém všech intervalů v $\mathbb{R}$ není okruhem.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Systém $\mathscr{E}_1$ všech podmnožin v $\mathbb{R}$, které se dají vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha omezených intervalů, je okruhem, ale není σ-okruhem na $\mathbb{R}$.

Úmluva. V celé této kapitole budeme uvažovat posloupnosti a funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definice. Nechť Σ je neprázdný systém množin, $\Sigma \subset \exp X$. Řekneme, že funkce $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^*$ je *aditivní* na Σ, jestliže platí

$$A,\, B \in \Sigma,\ A \cup B \in \Sigma,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B).$$

Řekneme, že φ je σ-*aditivní* na Σ, jestliže

$$A_i \in \Sigma \text{ pro } i \in \mathbb{N},\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma,\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i).$$

Pozorný čtenář si uvědomí, že platnost rovností na pravých stranách uvedených implikací zahrnuje to, že $\varphi(A) + \varphi(B)$ resp. $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$ jsou v $\mathbb{R}^*$ definovány. To je splněno samozřejmě pro taková φ, která mohou nabývat nejvýše jednoho nekonečna, jak tomu je například v následující definici.

Definice. *Mírou* budeme nazývat nezápornou σ-aditivní funkci na nějakém σ-okruhu Σ.

Příklady. Zřejmě je $\exp \mathbb{N}$ σ-algebra na $\mathbb{N}$. Pro každé $A \in \exp \mathbb{N}$ položme $\varphi(A)$ rovné počtu prvků množiny A, je-li A konečná a $\varphi(A) = +\infty$, je-li A nekonečná. Pak je φ míra na $\exp \mathbb{N}$.

Přiřadíme-li každému $n \in \mathbb{N}$ kladné číslo h_n a položíme-li pro $A \in \exp \mathbb{N}$ $\psi(A) = \sum_{n \in A} h_n$, je-li $A \neq \emptyset$ a $\psi(\emptyset) = 0$, pak je opět ψ mírou na $\exp \mathbb{N}$.

Definice. Míra μ na σ-okruhu Σ se nazývá *úplnou*, jestliže platí:

$$A \in \Sigma,\ \mu(A) = 0,\ B \subset A \Rightarrow B \in \Sigma,\ \mu(B) = 0.$$

Poznámka. Je-li I interval v $\mathbb{R}$ s krajními body a, b, $a < b$, pak délkou (mírou) intervalu I běžně rozumíme číslo $m_1(I) = b - a$. Je-li $A \subset \mathbb{R}$

sjednocením nepřekrývajících se intervalů I_1 a I_2, je vhodné prohlásit za délku (míru) množiny A součet délek intervalů I_1 a I_2, tj.

$$m_1(A) = m_1(I_1) + m_1(I_2).$$

Nechť nyní obecněji je množina $B \subset \mathbb{R}$ tvořena spočetně mnoha nepřekrývajícími se intervaly, například $B = \cup_{k=0}^{\infty} I_k$, kde $I_k = (1/2^{k+1}, 1/2^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Tuto množinu můžeme zapsat následovně:

$$B = (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\},$$

odkud je vidět, že B nelze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu intervalů; přesto ale považujeme za přirozené přiřadit ji délku (míru)

$$m_1(B) = m_1(I_0) + m_1(I_1) + m_1(I_2) + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$

Množina B tedy bude mít stejnou míru jako celý interval $(0,1)$.

Takto definovaná míra je tzv. *Lebesgueovou mírou* uvedených množin.

Lebesgueova r-rozměrná míra m_r je úplná míra na jisté σ-algebře $\Sigma_r \subset \exp \mathbb{R}_r$. Prvky této algebry se nazývají *lebesgueovsky měřitelné.* Její definici nebudeme uvádět (zájemci ji najdou například v [KIII]), neboť pro počítání nám bude stačit znát jen její vlastnosti.[1]

Označení. Označme $\mathscr{B}_r \subset \mathbb{R}_r$ nejmenší σ-okruh, obsahující všechny otevřené množiny z $\mathbb{R}_r$, tj. je-li $\mathscr{K} \subset \exp \mathbb{R}_r$ libovolný σ-okruh, do kterého patří všechny otevřené množiny v $\mathbb{R}_r$, pak $\mathscr{B}_r \subset \mathscr{K}$. Množiny z $\mathscr{B}_r$ se nazývají *borelovské.* Zřejmě $\mathscr{B}_r$ obsahuje všechny uzavřené množiny, všechny množiny, které lze napsat jako průnik spočetně mnoha otevřených množin nebo jako sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin, atd.

Platí

Věta. *Každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná.*

Budeme dále psát μ a Σ místo m_r a Σ_r ze dvou důvodů: předně je to kratší a za druhé proto, že mnohé vlastnosti platí i pro obecnou míru (viz například [K3]). V příkladech dále vždy jde o Lebesgueovu míru.

Základní vlastnosti lebesgueovy míry shrneme do následující věty:

---

[1] Řekněme zde jen, že Σ_r obsahuje všechny intervaly v $\mathbb{R}_r$ a a je $m_1(I)$ rovno délce intervalu $I \subset \mathbb{R}_1$, $m_r(J) = \prod_{i=1}^{r} m_1(J_i)$, kde I, J_i jsou intervaly v $\mathbb{R}_1$ a $J = \prod_{i=1}^{r} J_i$.

Věta. *Pro Lebesgueovu míru μ platí:*

(1) $A, B \in \Sigma,\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

(2) $A, B \in \Sigma \Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(3) $A_i \in \Sigma,\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

(4) *μ je σ-aditivní, tj.*
$A_i \in \Sigma,\ i \in \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset$ *pro* $i \neq j \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

(5) $A_i \in \Sigma,\ A_{i+1} \supset A_i,\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{i \to +\infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(6) $A_i \in \Sigma,\ A_{i+1} \subset A_i,\ i \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, *že* $\mu(A_{n_0}) < \infty \Rightarrow \lim_{i \to +\infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$.

(7) *μ je úplná míra,*[1] *tj.*
$A \in \Sigma,\ \mu(A) = 0,\ B \subset A \Rightarrow B \in \Sigma,\ \mu(B) = 0$.

Upozornění. V bodě (6) je předpoklad o konečnosti míry podstatný a nelze ho vynechat, jak ukazuje následující příklad: je-li $A_i = \langle i, +\infty)$, $i \in \mathbb{N}$, pak je $m_1(A_i) = +\infty \to +\infty$, zatímco $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ a tedy $m_1(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.

Úmluva. Nechť M je měřitelná množina. Říkáme, že nějaké tvrzení platí *skoro všude na M* (zkráceně *s.v. na M*), jestliže existuje taková množina $K \subset M$, $\mu(K) = 0$, že toto tvrzení platí na $M \setminus K$. Kupříkladu, jsou-li f, g dvě funkce, pak

$$f = g \text{ s.v. na } M,$$

jestliže existuje $K \subset M$, $\mu(K) = 0$ taková, že

$$f(x) = g(x) \text{ pro } x \in M \setminus K.$$

Věta. *Lebesgueova míra je invariantní vůči translaci a rotaci, tzn. je-li E lebesgueovsky měřitelná množina a množina H vznikne posunutím nebo otočením množiny E, pak je také H měřitelná a $\mu(H) = \mu(E)$.*

[1] Tvrzení (7) pro obecnou míru neplatí, ale každou míru lze zúplnit – viz například [K3].

Věta. *Existuje podmnožina intervalu $\langle 0,1\rangle$, která není lebesgueovsky měřitelná.*

Důkaz této věty podal italský matematik Vitali nedlouho potom, co Lebesgue zavedl pojem měřitelnosti. Protože je poučný, uvádíme jej pro zájemce petitem.

Důkaz. Na množině A bodů intervalu $\langle 0,1\rangle$ zavedeme ekvivalenci: dva body z A nazveme ekvivalentní, jestliže se jejich souřadnice liší o racionální číslo. Vezmeme-li v úvahu, že množina racionálních čísel je spočetná, dostaneme, že každá třída ekvivalence je spočetná množina. Protože ale A je nespočetná, musí být nespočetná také množina tříd ekvivalence (protože sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je zase spočetná množina). Předpokládejme, že v každé třídě ekvivalence byla zavedena určitá vzájemně jednoznačná korespondence s množinou přirozených čísel a označme A_n tu množinu, která obsahuje z každé třídy právě ten prvek, který odpovídá přirozenému číslu n. Z toho plyne, že každá množina A_n je nespočetná a přitom je $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Ukážeme, že mezi množinami A_n je alespoň jedna, která není lebesgueovsky měřitelná. Tento důkaz provedeme sporem. Předně vyloučíme možnost, že je pro každé n $m_1(A_n) = 0$. Kdyby tomu tak bylo, pak na základě σ-aditivity Lebesgueovy míry bychom dostali $\mu_1(A) = 0$, což je zřejmě ve sporu s tím, že $m_1(A) = m_1(\langle 0,1\rangle) = 1$. Existuje proto takové přirozené p, že $m_1(A_p) > 0$. Pro zjednodušení zápisu označme B toto A_p. Je tedy $m_1(B) > 0$. Označme dále pro n přirozené B_n množinu, která vznikne translací B o $1/n$, tj. $B_n = \{y;\ y = x + 1/n,\ x \in B\}$. Díky invarianci lebesgueovy míry vzhledem k translaci víme, že každá B_n je měřitelná a $m_1(B_n) = m_1(B)$. Ukážeme, že tyto B_n jsou po dvou disjunktní, tj. $B_s \cap B_t = \emptyset$ pro $s \neq t$. Mají-li B_s a B_t společný prvek b, pak z toho, že $b \in B_s$ plyne existence $c \in B$, že $b = c + 1/s$ a analogicky existence takového $d \in B$, že $b = d + 1/s$. Potom ale $c - d = 1/t - 1/s$ je racionální, a tedy c a d patří do stejné třídy ekvivalence. Ale podle konstrukce $B = A_p$ víme, že v ní z každé třídy ekvivalence existuje právě jeden prvek, a tedy je $c = d$ a $t = s$, což dokazuje požadované. Nakonec si všimněme, že $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset \langle 0,2\rangle$, a tedy musí být $m_1(D) \leq m_1(\langle 0,2\rangle) = 2$. Na druhé straně ze σ-aditivity máme

$$m_1(D) = m_1(B_1) + m_1(B_2) + \cdots = m_1(B) + m_1(B) + \cdots = +\infty,$$

což je spor s měřitelností B.

Dodatek. *Všimněte si, že jsme sice dokázali existenci neměřitelné množiny A_p, ale nevíme, která z množin A_n, $n \in \mathbb{N}$ to je – důkaz není konstruktivní.*

Vidíme, že tedy ne všechny množiny jsou lebesgueovsky měřitelné, ale prakticky na neměřitelnou množinu nenarazíme. Množiny, se kterými běžně pracujeme, vznikají z intervalů opakovaným použitím operací sjednocení nebo průniku spočetně mnoha množin či operace množinového rozdílu a všechny takové množiny jsou borelovské a tedy měřitelné.