数学分析　第一章
实数集与函数

§2 数集 · 确界原理

确界原理本质上体现了实数的完备性，是本节学习的重点与难点.

*点击以上标题可直接前往对应内容

记号与术语

$U(a;\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$：点 a 的 δ 邻域；

$U^{\circ}(a;\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$：点 a 的 δ 空心邻域；

$U_{+}(a;\delta)=\{x \mid 0\le x-a<\delta\}$：点 a 的 δ 右邻域；

$U_{-}(a;\delta)=\{x \mid 0\le a-x<\delta\}$：点 a 的 δ 左邻域；

$U(\infty;M)=\{x \mid |x|>M\}$：$\infty$ 的 M 邻域；

$U(+\infty;M)=\{x \mid x>M\}$：$+\infty$ 的 M 邻域；

$U(-\infty;M)=\{x \mid x<-M\}$：$-\infty$ 的 M 邻域；

$\max S$：数集 S 的最大值；$\min S$：数集 S 的最小值.

有界集

定义1

设$S \subset \mathbf{R}, S \neq \varnothing$.

(1) 若$\exists M \in \mathbf{R}$, 使得$\forall x \in S$, $x \leq M$, 则称M为S的一个上界, 称S为有上界的数集.

(2) 若$\exists L \in \mathbf{R}$, 使得$\forall x \in S$, $x \geq L$, 则称L为S的一个下界, 称S为有下界的数集.

(3) 若S既有上界又有下界, 则称S为有界集.

其充要条件为: $\exists M > 0$, 使$\forall x \in S$, 有$|x| \leq M$.

(1′) 若 S 不是有上界的数集, 则称 S 无上界, 即

$\forall M \in \mathbf{R}, \exists\, x_0 \in S,$ 使得 $x_0 > M.$

(2′) 若 S 不是有下界的数集, 则称 S 无下界, 即

$\forall L \in \mathbf{R}, \exists\, x_0 \in S,$ 使得 $x_0 < L.$

(3′) 若 S 不是有界的数集, 则称 S 无界集, 即

$\forall M > 0, \exists\, x_0 \in S,$ 使得 $|\, x_0 \,| > M.$

例1 证明数集 $S=\{2^n \mid n\in \mathrm{N}_+\}$ 无上界, 有下界.

证 取 $L=1$, 则 $\forall x=2^n\in S$, $x\ge L$, 故 S 有下界.

$\forall M\in R$, 若 $M<1$, 取 $x_0=2^1>M$; 若 $M\ge 1$,

取 $x_0=2^{[M]+1}>[M]+1>M$, 因此 S 无上界.

例2 证明数集 $S=\left\{\dfrac{n^2-1}{2n^3}\,\middle|\, n\in \mathrm{N}_+\right\}$ 有界.

证 $\forall n\in \mathrm{N}_+$, $\left|\dfrac{n^2-1}{2n^3}\right|\le\left|\dfrac{n^2}{2n^3}\right|+\left|\dfrac{1}{2n^3}\right|\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1,$

因此 S 有界.

确界

若数集 S 有上界，则必有无穷多个上界，而其中最小的一个具有重要的作用．最小的上界称为上确界．同样，若 S 有下界，则最大的下界称为下确界．

定义2

设 $S\subset \mathbf{R}, S\neq\varnothing$. 若 $\eta\in\mathbf{R}$ 满足：

(i) $\forall x\in S, x\le\eta$; (ii) $\forall\alpha<\eta, \exists x_0\in S$, 使得 $x_0>\alpha$,

则称 η 是 S 的上确界, 记为 $\eta=\sup S$.

定义3

设 $S \subset \mathbf{R}$, $S \neq \varnothing$. 若 $\xi \in \mathbf{R}$ 满足:

(i) $\forall x \in S,\ x \geq \xi$;

(ii) $\forall \beta > \xi,\ \exists\, x_0 \in S,\ x_0 < \beta$;

则称 ξ 是 S 的下确界, 记为 $\xi = \inf S$.

注1 由定义, 下确界是最大的下界.

注2 下确界定义中的(ii)亦可换成

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in S, x_0 < \xi + \varepsilon.$$

注3 条件(i) 说明 η 是 S 的一个上界, 条件(ii) 说明比 η 小的数都不是 S 的上界, 从而 η 是最小的上界, 即上确界是最小的上界.

注4 显然, 条件 (ii) 亦可换成:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in S, x_0 > \eta - \varepsilon.$$

例3 设 $S=\left\{x \,\middle|\, x=1-\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots\right\}$，证明

$$\sup S=1,\ \inf S=0.$$

证 先证 $\sup S=1$.

(i) $\forall x\in S,\ x=1-\dfrac{1}{n}\le 1$;

(ii) 设 $\alpha<1$. 若 $\alpha\le 0$，则取 $x_0=1-\dfrac{1}{2}\in S,\ x_0>\alpha$.

若 $\alpha>0$, 令 $\varepsilon=1-\alpha>0$, 由阿基米德性, $\exists n_0$,

使得 $\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$. 取 $x_0=1-\dfrac{1}{n_0}\in S$, 则 $x_0>1-\varepsilon=\alpha$.

因此，$\sup S=1$.

再证 $\inf S = 0$.

(i) $\forall x \in S,\ x = 1 - \dfrac{1}{n} \geq 0$;

(ii) $\forall \alpha > 0, \exists\, x_0 = 0 \in S,\ x_0 < \alpha$.

因此 $\inf S = 0$.

虽然我们定义了上确界，但并没有证明上确界的存在性，这是由于上界集是无限集， 而无限数集不一定有最小值，例如 $(0, \infty)$ 无最小值.

以下确界原理作为公理，不予证明.

确界存在性定理

定理1.1（确界原理）

设$S \subset \mathbf{R}$, $S \neq \varnothing$. 若 S 有上界, 则 S 必有上确界;

若 S 有下界, 则 S 必有下确界.

例4 设 A, B 为非空数集 满足:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, 有 x \le y.$$

证明：数集 A 有上确界，数集 B 有下确界，

且 $\sup A \le \inf B.$

证 由假设, B 中任一数 y 都是 A 的上界, A 中的任一数 x 都是 B 的下界. 因此由确界原理, A 有上确界, B 有下确界.

由定义, 上确界 $\sup A$ 是最小的上界, 因此, 任意 $y \in B$; $\sup A \le y$. 这样, $\sup A$ 又是 B 的一个下界, 而 $\inf B$ 是最大的下界, 因此 $\sup A \le \inf B$.

例5 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中非空有上界的数集,

(i) 若 $a\in\mathbf{R}$, 定义 $S+a=\{x+a\mid x\in S\}$,则

$$\sup\{S+a\}=\sup S+a;$$

(ii) 若 $b>0$, 定义 $bS=\{bx\mid x\in S\}$, 则

$$\sup\{bS\}=b\cdot\sup S.$$

证 (i) $\forall x+a\in S+a$, 其中 $x\in S$, 必有 $x\le\sup S$,

于是 $$x+a\le\sup S+a.$$

对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, x_0\in S$, 使 $x_0>\sup S-\varepsilon$, 从而

$$x_0+a\in S+a,$$

且 $$x_0+a>(\sup S+a)-\varepsilon,$$

因此 $$\sup(S+a)=\sup S+a.$$

(ii) $\forall\, bx \in bS$, 其中 $x \in S$, 必有 $x \le \sup S$, 于是

$$bx \le b\sup S.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b} > 0$, 则存在 $x_0 \in S$, 使

$$x_0 > \sup S - \varepsilon',$$

因此

$$bx_0 > b\sup S - b\varepsilon' = b\sup S - \varepsilon.$$

这就证明了

$$\sup\{bS\} = b\sup S.$$

非正常确界

1. 规定 (i) $\forall a \in \mathbf{R}, -\infty < a < +\infty$;

(ii) 若 S 无上界, 记 $\sup S = +\infty$.

若 S 无下界, 记 $\inf S = -\infty$.

2. 推广的确界原理：非空数集必有上、下确界.

例1　$\sup \mathbf{N} = +\infty, \ \inf\{-2^n \mid n \in \mathbf{N}_+\} = -\infty.$

例2　设数集 $A \subset \mathbf{R}_+, B = \left\{ \dfrac{1}{x} \,\middle|\, x \in A \right\}$.

求证: $\sup A = +\infty$ 的充要条件是 $\inf B = 0$.

求证：$\sup A = +\infty$ 的充要条件是 $\inf B = 0$.

证 设若 $\sup A = +\infty$. 显然 $\forall\, x \in B,\ x > 0$. $\forall \varepsilon > 0$,

令 $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 则由于 $\sup A = +\infty$, $\exists\, x_0 \in A,\ x_0 > M$.

于是

$$y_0 = \frac{1}{x_0} \in B, \text{且 } y_0 < \varepsilon.$$

因此 $\inf B = 0$.

反之, 若 $\inf B = 0$, 则 $\forall M > 0$,

令 $\varepsilon = 1/M$, $\exists\, x_0 \in B,\ x_0 < \varepsilon$. 于是

$$y_0 = \frac{1}{x_0} \in A, \text{且 } y_0 > M.$$

因此 $\sup A = +\infty$.

复习思考题

1. 数集 S 有上界，则 S 的所有上界组成的集合是否一定为$[a,+\infty)$形式，其中 $a=\sup S$.

2. S_1 和 S_2 都是数集，且 $S_1 \subset S_2$，比较 $\sup S_1$ 和 $\sup S_2$ 及 $\inf S_1$ 和 $\inf S_2$ 的大小.

3. 在上确界的定义中，(ii) $\forall \alpha < \eta, \exists x_0 \in S$，使 $x_0 > \alpha$ 能否改为 (ii′) $\forall \alpha < \eta, \exists x_0 \in S$，使 $x_0 \geq \alpha$？或改为 (ii″) $\forall \alpha \leq \eta, \exists x_0 \in S$，使 $x_0 \geq \alpha$？