

GCG 2007

Geometry & Computer Graphics

Sborník příspěvků

27. mezinárodní konference

o geometrii a počítačové grafice

Nedvědice, 10. – 14. 9. 2007

Organizační výbor konference

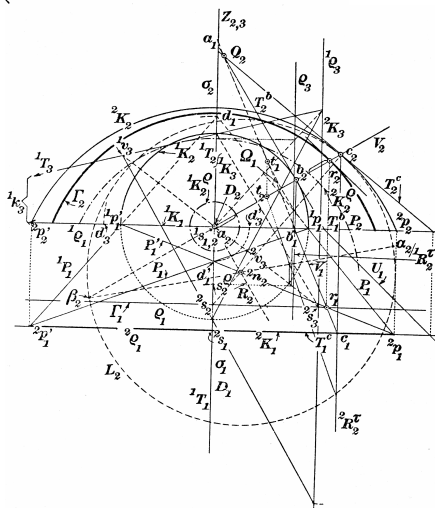
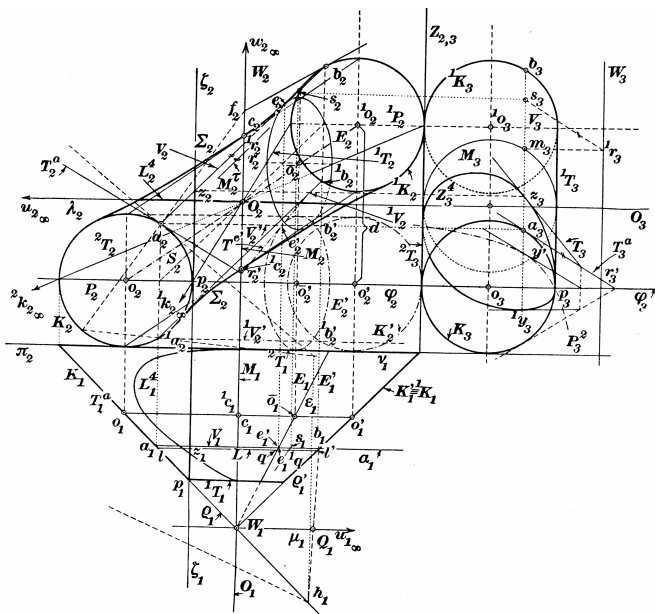
RNDr. Květoslava Borecká, FSI VUT v Brně,
RNDr. Mája Lovečková, FSI VUT v Brně,
Doc. PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D., FSI VUT v Brně,
Mgr. Jana Procházková, Ph.D., FSI VUT v Brně,
Mgr. Jan Šafařík, FAST VUT v Brně,
RNDr. Hana Šafářová, FAST VUT v Brně,
Ing. Pavel Štarha, Ph.D., FSI VUT v Brně,
Mgr. Lucie Zrůstová, FAST VUT v Brně.

ISBN 978-80-85763-41-6

Motto

Kdo nerozumí jednomu pohledu,
nepochopí ani dlouhé vysvětlování.

(arabské přísloví)



Předmluva

Předkládáme Vám sborník příspěvků, které zazněly na 27. konferenci z geometrie a počítačové grafiky, která se konala ve dnech 10. – 14. září 2007 v Nedvědicích. Konference probíhala pod vedením České společnosti pro geometrii a grafiku Jednoty českých matematiků a fyziků.

Jednání probíhala v hotelu Myslivna, který poskytl účastníkům vhodné a příjemné prostředí.

Konference se zúčastnili kromě učitelů vysokých a středních škol České republiky též kolegové ze Slovenska, Polska a Německa. 70 účastníků vyslechlo 45 přednášek a referátů. Na konferenci zazněly příspěvky z geometrie a počítačové grafiky a z jejich aplikací. Některé referáty měly metodický charakter.

Účastníci zvláště ocenili vysokou úroveň obou zvaných přednášek. Konferenci zahájil prof. Horst Martini z Fakulty matematiky Technické univerzity v Chemnitz, který přednesl přednášku s názvem „Elementary geometry today“. Druhou plenární přednášku „Historie a užití kvaternionů v geometrii“ pronesl prof. Adolf Karger z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Organizaci konference zajistili kolegyně a kolegové z Fakulty strojního inženýrství a Fakulty stavební VUT v Brně. Za námahu a úsilí jim patří srdečný dík.

Programový výbor konference pracoval ve složení:

- Doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc., FSv ČVUT v Praze
- Doc. RNDr. František Ježek, CSc., FAV ZČU v Plzni
- Prof. RNDr. Adolf Karger, DrSc., MFF UK Praha
- Doc. RNDr. Marie Kargerová, CSc., FS ČVUT v Praze
- RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU v Plzni
- Prof. RNDr. Pavel Pech, CSc., PF JČU České Budějovice
- Prof. Dr. Hellmuth Stachel, Vienna University of Technology, Wien
- Doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc., Slovenská technická univerzita, Bratislava
- Prof. Dr. Gunter Weiss, Dresden University of Technology, Dresden

Dovolte mi, abych Vás pozval na příští 28. konferenci z geometrie a počítačové grafiky, která se bude konat ve dnech pondělí 8. – čtvrtek 11. září 2007 v areálu Zahradnické fakulty MZLU v Lednici na Moravě. Organizace se laskavě ujali kolegyně a kolegové z Ústavu matematiky Mendelovy zemědělské a lesnické univerzity v Brně.

České Budějovice 19. listopadu 2007

Pavel Pech
předseda ČSGG

Úvodník

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

dovoďte mi, abych náš letošní sborník začal nedávnou osobní vzpomínkou na svoje první cvičení předmětu Konstruktivní geometrie v tomto akademickém školním roce. Čerství vysokoškoláci zasedli ke svému prvnímu cvičení v počítačové učebně a seznamovali se s jednoduchým geometrickým modelářem. Netrvalo dlouho a zaslechl jsem několik uštěpačných poznámek o primitivnosti, prkennosti, dokonce o nějakém století a opicích. Moji noví studenti hodnotili totiž grafický software zásadně podle kvality záře zapadajícího slunce, odrážejícího se v helmách vojáků, a kadence uživatelského kulometu určeného k jejich likvidaci. Nic takového v našem modeláři nenašli a nějaké přímký, kružnice a jednoduché planimetrické úlohy skvělým bojovkám opravdu nemohly konkurovat.

Nad konstrukcí společné tečny dvou kružnic, kterou uživatel v modeláři „řeší“ dvojným kliknutím myši, jsem zdrcující odsudky nevydržel: „Možná máte pravdu, ono je to asi skutečně primitivní. Vy ale jistě primitivní nejste, a tak mi odpustíte primitivní otázku: Jak to ten modelář ve skutečnosti asi dělá?“

I když jsem si nedělal velké iluze, byl jsem dalším vývojem událostí inspirován natolik, že jsem tento „pedagogický pokus“ opakovat ve všech dalších skupinách, které jsem cvičil. Výsledek se dal vždy shrnout zhruba takto:

Správná, ale poněkud mlhavá odpověď „ono se to tam nějak spočítá“, byla po mojí všetečné otázce „jak?“ opuštěna.

„Tak zkusme přijít aspoň na to, jak bychom to řešili pravítkem a kružítkem,“ snažil jsem se studenty navést a načrtl na tabuli dvě kružnice a společnou tečnu. Po dosti dlouhém tichu spojuji středy kružnic. Nic.

Protahuji a vyznačím průsečík středné se společnou tečnou: „A nepomohl by nám tento bod?“

„Ale ten přece nemáme – přece nevíme, kudy vede ta tečna,“ brání se.

Snažím se vysvětlit rozdíl mezi konstrukcí a rozbořem úlohy. Dost dlouho a mám pocit, že marně. Tuto fázi pokusu jsem tedy ukončil dvěma otázkami:

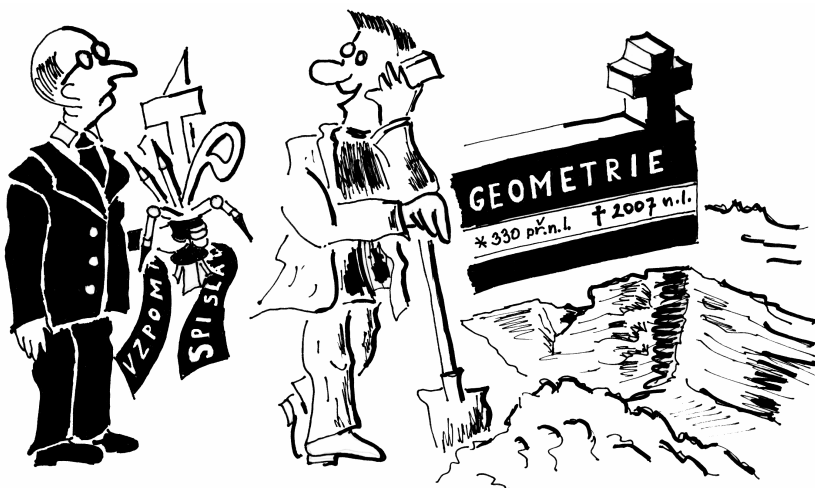
„Kdo maturoval z matematiky?“

Zvedne se asi polovina rukou.

„Kdo někdy slyšel pojem stejnolehlost?“

Počet rukou je podstatně menší. Zopakovali jsme společně definici stejnolehlosti, její základní vlastnosti a vrátili se k našemu rozboru. Po této „těžké dělostřelecké přípravě“ se v pěti studijních skupinách našli dva studenti (slovy **dva**), kteří úlohu vyřešili. I když konstrukci formulovali stylem „toto spojím s tímto a protnu to tady“, pochválil jsem je za správný postup a řešení úlohy jsem odřikal v odborné češtině. Jako odměny se mi dostalo několika polohlasných povzdechů typu „proč já jsem raději nešel na úředníka...“

Devatenácté století bylo stoletím páry. Ve dvacátém století člověk pronikl hluboko do nitra hmoty, odstartoval do vesmíru a celou planetu sešněroval neviditelnou pavučinou informací. Století jedenadvacáté bylo zahájeno tvrdým a nevybíravým útokem proti samotným základům tohoto pokroku – proti přírodovědnému a technickému vzdělání. Kdo neměl ve škole potíže s matematikou, je dnes ve „vyšších kruzích“ společensky odepsán. Studenti byli zbaveni povinnosti z matematiky maturovat, je-li potřeba někde ušetřit hodiny, je matematika vždy první na řadě. A je-li třeba ořezat matematiku, ukrajuje se v první řadě z geometrie.



námět: Pavel Šarha kreslil: Dalibor Martišek

**TAK JEŠTĚ OKAMŽÍK. PŘÁVĚ VOLAJÍ
Z NEDVĚDICE, ŽE MADAM JE TEPRVE V AGÓNII...**

Jak svědčí ubohá společná tečna, výsledky těchto bezduchých „reform“ na sebe nenechávají dlouho čekat. O to více je třeba cenit snahy těch, kteří se nehodlají smířit se skutečností, že jedenadvacáté století má být zřejmě stoletím

likvidace geometrie. Je třeba vážít si snahy stovek a tisíců učitelů, kteří svou každodenní práci před tabulí i u počítačů geometrii hájí a kteří považují za užitečné vyměňovat si „bojové zkušenosti“. Díky tedy patří i účastníkům naší letošní konference, kteří svým sborníkem chtějí přispět k tomu, aby se geometrie dožila lepších časů.

Dalibor Martišek

Obsah

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY/PLENARY LECTURES	11
ADOLF KARGER	
<i>Historie a užití kvaternionů v geometrii</i>	13
REFERÁTY/CONFERENCE PAPERS	19
TOMÁŠ BAYER	
<i>Detekce kartografického zobrazení z množiny</i>	21
EVA BARANOVÁ, KAMIL MALEČEK	
<i>Úpätnicovo-skrutkové plochy</i>	27
JAROSLAV BUŠEK	
<i>Použití VRML modelů</i>	33
SYLWIA CICHACZ, TOMASZ WIEJA	
<i>Assesment of the Properties of the Flash MX Program in Presentation of Solid Geometry Problems.</i>	37
JERZY DIETRICH, MAREK GAWRON, TOMASZ WIEJA	
<i>Computer Visualisation of Same Geometrical Problems</i>	45
JAROMÍR DOBRÝ	
<i>Reversibility of Minkowski Difference via Generalized Laguerre Geometry</i>	51
JIŘÍ DOLEŽAL	
<i>Studijní opory deskriptivní a konstruktivní geometrie</i>	57
ŠÁRKA GERGELITSOVÁ, TOMÁŠ HOLAN	
<i>Počítačová podpora výuky stereometrie</i>	61
TOMÁŠ GREGAR, RADKA POSPÍŠILOVÁ	
<i>Zvýšení využitelnosti obrazových dat ve výuce pomocí získaných sémantických informací</i>	67
ROMAN HAŠEK, PAVEL PECH	
<i>Interaktivní geometrie.</i>	73
JANA HROMADOVÁ	
<i>Inovace studijních předmětů Deskriptivní geometrie na MFF UK</i>	79

OLDŘICH HYKŠ

Geometrie fullerových bání a možnosti jejich praktického využití

81

JIŘÍ CHMELÍK

Interakční techniky pro modelování ve virtuálním prostředí 87

MÁRIA KMEŤOVÁ

O tvorbe priamkových plôch 93

MILADA KOČANDRLOVÁ, HANA LAKOMÁ

Dvě metody určení stanoviska snímku 99

ALEXEJ KOLCUN

Konvolučné vyhladzovanie štrukturovaných triangulácií. 105

BOŽENA KOREŇOVÁ

Zlatý rez v geometrii 111

ANNA KOVÁŘOVÁ, KAMIL MALEČEK, JAROSLAV ŘÍMAL

Lineární operátory dané symetrickou maticí. 117

MIROSLAV LÁVIČKA, BOHUMÍR BASTL

Exact Offsets of Quadratic Bezier Triangles. 123

PAVEL LEISCHNER

Strategie středoškoláků při řešení geometrické úlohy MO 129

IVANA LINKEOVÁ

Singularity rotačních obalových ploch 135

DALIBOR MARTIŠEK

Software pro předmět Konstruktivní a počítačová geometrie 141

KATARÍNA MONKOVÁ

Creating of 3D Model with Difficult Shapes without the Parameters and Dimensions of Real Part 145

MARTIN NĚMEC

Možnosti testování geometrických postupů 151

ANNA PORAZILOVÁ

The Geodesic Shortest Path 157

RADKA POSPÍŠILOVÁ, TOMÁŠ GREGAR

Detekce ploch v částečně rekonstruované scéně. 163

LENKA POSPÍŠILOVÁ <i>Maplety v diferenciální geometrii křivek a ploch</i>	169
JANA PRÍVRATSKÁ <i>Compatible walls</i>	175
JANA PROCHÁZKOVÁ <i>Výuka počítačové grafiky a geometrie s využitím flash animací</i>	181
MARIE PROVAZNÍKOVÁ <i>Projektivní rovina nad algebrou oktáv</i>	185
JANA PUCHÝŘOVÁ <i>Některá specifika výuky deskriptivní geometrie na oboru Ar- chitektura pozemních staveb</i>	191
ADAM RUŽYCZKA <i>Chosen subjects of exercises from geometry realized in pro- cess of engineers education on Faculty of Environmental En- gineering and Land Surveying at the Agricultural University of Cracow</i>	195
JAN ŠAFAŘÍK, HANA ŠAFAŘOVÁ <i>Tvorba studijních materiálů za podpory ESF</i>	199
ARNOŠT ŠARMAN <i>Polární reciprocita</i>	205
IVO SERBA <i>Hyperbolické mozaiky na počítači</i>	211
ZUZANA ŠTUDENCOVÁ <i>O warpingu v škole.</i>	217
DAGMAR SZARKOVÁ, DANIELA VELICHOVÁ <i>Európske virtuálne laboratórium matematiky</i>	223
ZUZANA TEREŇOVÁ <i>Plochy 4. stupňa s trojnásobnou priamkou</i>	225
MIROSLAVA TIHLAŘÍKOVÁ <i>Applications of Hyperbolic Geometry: Gyrovector Spaces . . .</i>	231
JÚLIA TOMANOVÁ <i>Blossoming a jeho využitie pri konštrukcii Bézierovej krivky .</i>	235
SVĚTLANA TOMICZKOVÁ <i>Packing and containment problems</i>	239

DANA TRKOVSKÁ	
<i>Meranský program a geometrické transformace.</i>	245
DANIELA VELICHOVÁ	
<i>Zauzlené anuloidy</i>	251
ŠÁRKA VORÁČOVÁ	
<i>Calibration of the Camera for the Pure Translation Motion</i>	257
EDITA VRANKOVÁ	
<i>Other properties of monotone rectangular polygons</i>	263

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

HISTORIE A UŽITÍ KVATERNIONŮ V GEOMETRII

Adolf Karger

MFF UK

Sokolovská 83, 186 00 Praha 8

Adolf.Karger@mff.cuni.cz

Abstrakt. Přehledný článek o historii, vlastnostech a aplikacích kvaternionů. Elementárně ukážeme, že reálná čísla, komplexní čísla a kvaterniony jsou jediná možná asociativní rozšíření tělesa reálných čísel na těleso (ne nutně komutativní).

Klíčová slova: Kvaterniony, počítačová geometrie.

1 Úvod

Definice kvaternionů

Pro čtenářovo pohodlí uvedeme nejdříve definici kvaternionů.

Kvaterniony jsou čtveřice reálných čísel, které se obvykle zapisují ve tvaru $\alpha = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, kde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou komplexní jednotky, tj. $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ a kde $\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}$, a dále cyklicky pro ostatní jednotky, $\mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}$. Pro sečítání a násobení platí obvyklá pravidla, násobení je asociativní, ale není komutativní. V kvaternionech lze bez omezení dělit nenulovým číslem. To znamená, že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso.

Pro ilustraci máme na příklad

$$(2 + 3\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{i}^2 + \mathbf{j}\mathbf{i} - 2\mathbf{k} - 3\mathbf{i}\mathbf{k} - \mathbf{j}\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3 - \mathbf{k} - 2\mathbf{k} + 3\mathbf{j} - \mathbf{i} = -3 + \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Historické poznámky

Kvaterniony objevil v roce 1843 Sir William Rowan Hamilton, irský matematik. Údajně k tomu došlo 16. října při procházce kolem Royal Canal v Dublinu, kdy ho poblíž Brougham Bridge napadl definující vztah pro kvaterniony a to

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1.$$

Tyto vztahy podle svého vyprávění z nadšení nad svým objevem okamžitě vyryl do mostu. Současní svědkové říkají, že tam už nic vyryto není, nicméně je tam pamětní plaketa. Hamilton svou teorii dále propracoval a shrnul ve svém díle *Elements of Quaternions*, které má 800 stran a vyšlo krátce po jeho smrti. Hamilton zapisoval quaterniony jako čtveřice reálných čísel a rozlišoval první složku jako skalární část kvaternionu a zbývající tři složky nazval vektorovou částí kvaternionu a vlastně tak zavedl skalární a vektorový součin vektorů. Kvaternionová symbolika byla pak v průběhu 20-ho století opuštěna a zvítězila vektorová analýza. Veliká nevýhoda kvaternionů je v nemožnosti zobecnění do vyšších dimenzí. Te-

prve v poslední době se opět začínají kvaterniony užívat, o tom se zmíníme později.

Nyní se ještě krátce zdržíme u Hamiltonovy motivace, kterou měl pro hledání kvaternionů a proč svůj objev považoval za něco velice významného. Po objevu komplexních čísel Gaussem (1777-1855) (a dalšími, na př. Caspar Wessel, 1799, Wallis 1685 a jiní, podrobný popis není účelem tohoto článku, viz např. [1]). Speciálně po objevu možnosti užití komplexních čísel k popisu geometrie roviny hledali matematikové něco podobného pro prostor, tj. hledali podobné rozšíření reálných čísel k získání aparátu k popsání geometrie v prostoru. Později se ukázalo, že to možné je, ale jinak, než při popisu roviny komplexními čísly.

2 Odvození tělesa kvaternionů

2.1 Hyperkomplexní systémy

Zobecněním komplexních čísel (hyperkomplexními čísly) budeme nazývat systém všech n -tic reálných čísel, která budeme zapisovat ve tvaru

$\alpha = a_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n$, pro která jsou předepsány součiny $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_s = \Sigma c_{rs}^m \mathbf{e}_m$. Předpokládáme, že násobení je asociativní, lze dělit nenulovým číslem, násobení nemusí být komutativní.

Platí věta: Existují pouze tři hyperkomplexní systémy čísel : reálná čísla, komplexní čísla a kvaterniony.

Důkaz této věty údajně pochází od Frobenia (Ferdinand Georg Frobenius) z roku 1878 z článku Ueber lineare Substitutionen and bilineare Formen, Journal fuer die reine und angewandte Mathematik **84**, 1-63.

Pokusíme se k problému přistoupit elementárně.

Nejdříve se podíváme na dimenzi dvě.

Mějme čísla tvaru $\alpha = a + ib$, kde $i^2 = m + in$. Pak

$$\alpha^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 + 2abi + b^2(m + in) = a^2 + b^2 m + ib(2a + bm).$$

Položíme-li $a = -bn/2$, je $\alpha^2 = b^2(m + n^2/4)$, kde můžeme libovolně zvolit nenulové b . Ukázali jsme, že existuje prvek j tak, že $j^2 = 1, -1, 0$.

Připadají tedy v úvahu tři systémy, $j^2 = -1$, komplexní čísla, $j^2 = 0$, takzvaná duální čísla a $j^2 = 1$, takzvaná čísla dvojná. Poslední mají také dělitele nuly, protože $(j + 1)(j - 1) = j^2 - 1 = 0$.

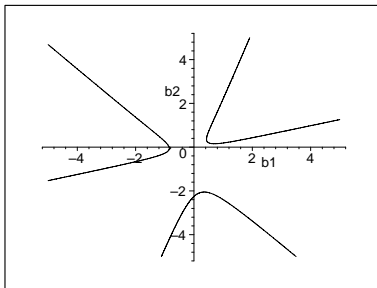
Nyní to zkusíme obecněji:

Mějme $e_r e_s = \Sigma c_{rs}^m e_m$, $a = \Sigma a_r e_r$, $b = \Sigma b_r e_r$ a řešme rovnici

$$a \cdot b = \Sigma a_r b_s c_{rs}^m e_m = 0,$$

což je soustava n homogenních rovnic $\Sigma a_r b_s c_{rs}^m = 0$ o n neznámých a_r .

Ta má netriviální řešení právě tehdy, když je její determinant rovný nule. Tento determinant je homogenní výraz v proměnných b_s . Je-li tedy



Obrázek 1: Kubika děliteľů nuly

n -liché, můžeme zvolit libovolně $n - 1$ z b_s a dostáváme rovnici lichého stupně, která má vždycky alespoň jedno řešení.

Příklad.

Uvažujme $n=3$, $a = a_0 + a_1e + a_2f$, $b = b_0 + b_1e + b_2f$, $e^2 = f$, $f^2 = 1 + 2e$, $ef = 2 + e - 4f$, $fe = 3 - f$.

Pak rovnice pro dělitele nuly je

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0 + a_1e + a_2f) \cdot (b_0 + b_1e + b_2f) \\ &= a_0(b_0 + b_1e + b_2f) + a_1[b_0e + b_1f + b_2(2 + e - 4f)] + \\ &\quad a_2[b_0f + b_1(3 - f) + b_2(1 + 2e)] = 0. \end{aligned}$$

To je soustava lineárních homogenních rovnic pro neznámé a_0, a_1, a_2 . Její matice je

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ 2b_2 & b_0 + b_2 & b_1 - 4b_2 \\ b_2 + 3b_1 & 2b_2 & b_0 - b_1 \end{pmatrix}.$$

Její determinant je roven

$$K = b_0^3 + 3b_1^3 + 3b_2^3 + b_0^2(b_2 - b_1) - 9b_1^2b_2 + 7b_2^2(b_0 - b_1) - 8b_0b_1b_2.$$

Množina $K = 0$ je kubika, kterou vidíme na obrázku 1. Jsou to obrazy prvků systému, které mají dělitele nuly.

Tvrzení. Hyperkomplexní systém lichého stupně má dělitele nuly.

2.2 Cyklické systémy.

Mějme hyperkomplexní systém S , buď $a \in S$, a nezávislé na 1. Označme k takové největší číslo, že prvky $1, a, a^2, \dots, a^k$ jsou nezávislé, řijeme mu stupeň prvku a . Pak platí $a^{k+1} = m_0 + m_1a + \dots + m_ka^k$ pro reálná čísla m_j . Kombinace prvků $1, a, a^2, \dots, a^k$ vytváří komutativní podsystém systému S . Nemá-li systém dělitele nuly, je polynom

$$P(x) = x^{k+1} - m_kx^k - \dots - m_0$$

sudého stupně a rozkládá se na lineární a kvadratické kořenové činitele. Jelikož je $P(a) = 0$, musí jeden z kvadratických činitelů být nulový pro a a stupeň každého prvku nezávislého na 1 je právě 1.

Uvažujme nyní případ, kdy $1, i, j$ v S jsou nezávislé. Dostáváme

$$\begin{aligned}(i+j)^2 &= -2 + (ij + ji) = m_0 + m_1(i+j), \\ (i-j)^2 &= -2 - (ij + ji) = s_0 + s_1(i-j).\end{aligned}$$

Sečtením dostáváme

$$-4 = m_0 + s_0 + (m_1 + s_1)i + (m_1 - s_1)j,$$

což dává $m_1 = s_1 = 0$.

Je tedy $ij + ji = u$, a protože $-2 + u < 0$, $-2 - u < 0$, je $u^2 < 4$. V opačném případě bychom měli dělitele nuly. To znamená, že i prvky $1, i, j, ij$ jsou nezávislé, neboť jinak bychom měli systém dimenze tři.

Hledejme nyní prvky $I = ai + bj, J = ci + dj$ tak, aby

$$I^2 = J^2 = -1, IJ + JI = 0.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 - abu &= 1, \\ c^2 + d^2 - cdu &= 1, \\ (ad + bc)u - 2(ac + bd) &= 0.\end{aligned}$$

Tato soustava má vždy řešení. Označíme-li $t = \sqrt{1 - u^2/4}$, je to na příklad $a = 1, b = 0, c = u/(2t), d = 1/t$. Tím jsme ukázali, že jediná čtyřdimensionální hyperkomplexní soustava čísel je algebra kvaternionů. Je totiž

$$IJJJ = (IJ)^2 = -IJJJ = -1.$$

Označíme $IJ = K$, a dostáváme určující vztahy pro kvaterniony.

Zbývá ukázat, že pro dimenzi větší než čtyři žádná řešení neexistuje. Předpokládejme tedy, že v hyperkomplexní soustavě máme prvky $1, i, j, ij$, které dávají kvaterniony a nechť existuje prvek r na nich nezávislý. Můžeme předpokládat, že $r^2 = -1$ a že platí $ri + ir = s_1$, $rj + jr = s_2$, kde s_1, s_2 jsou reálná čísla. Pak

$$\begin{aligned}(ijr)^2 &= ijr \cdot ijr = ij(ri)jr = ij(-ir + s_1)jr = -ijirjr + s_1ij^2r = \\ &= -iji(rj)r - s_1ir = -iji(-jr + s_2)r - s_1ir = ijijr^2 - s_2i(ji)r - s_1ir = \\ &= (ij)^2r^2 + s_2i^2jr - s_1ir = 1 - s_2jr - s_1ir = s_3 + s_4ijr\end{aligned}$$

pro nějaká reálná s_3, s_4 . Vynásobení poslední rovnosti zprava prvkem k dává

$$r + s_2j + s_1i = s_3r - s_4ij \text{ a z nezávislosti prvků } i, j, ij, r \text{ plyne } s_1 = s_2 = s_4 = 0, s_3 = 1, \text{ tj. } (ijr)^2 = 1.$$

Nemáme-li mít dělitele nuly, musí být $ijr = 1$ nebo $ijr = -1$, můžeme předpokládat první možnost. Pak ale násobení zprava prvkem r dává $r = -ij$, a to je spor. To znamená, že žádný další nezávislý prvek v hyperkomplexním systému neexistuje a dostáváme pouze kvaterniony.

3 Další vlastnosti kvaternionů a jejich aplikace

Pro přehlednější počítání s kvaterniony zavedeme jednodušší zápis kvaternionu. Kvaternion

$$\alpha = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

zapišeme ve tvaru $\alpha = a_0 + \vec{a}$, kde $\vec{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ je vektorová část kvaternionu, a_0 je jeho skalární část. Pro další kvaternion $\beta = b_0 + \vec{b}$ je

$$\alpha \cdot \beta = a_0 b_0 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}.$$

Kvaternion s nulovou skalární částí se nazývá ryze imaginární, kvaternion $\bar{\alpha} = a_0 - \vec{a}$, se nazývá imaginárně sdružený k α .

Zásadní vlastností kvaternionů je to, že mají součinovou normu, tj. že norma součinu se rovná součinu norem.

Norma $|\alpha|$ kvaternionu α se definuje jako

$$|\alpha|^2 = \alpha \cdot \bar{\alpha} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Snadno ukážeme, že $\alpha\bar{\beta} = \bar{\beta}\alpha$.

$$\text{Pak } |\alpha\beta|^2 = |(\alpha\beta) \cdot \overline{(\alpha\beta)}| = |\alpha\beta\bar{\beta}\bar{\alpha}| = |\alpha|(|\beta|^2\bar{\alpha}) = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2.$$

Inverzní kvaternion ke kvaternionu α je kvaternion $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}/|\alpha|$.

Kvaternion s normou rovnou jedné se nazývá jednotkový kvaternion, součin dvou jednotkových kvaternionů je opět jednotkový kvaternion.

Označme U množinu jednotkových kvaternionů, V prostor ryze imaginárních kvaternionů.

Pro ryze imaginární kvaterniony platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \vec{u} \times \vec{v}.$$

Označme $Int(\alpha)(\beta) = \alpha\beta\bar{\alpha}$ zobrazení prostoru kvaternionů do prostoru kvaternionů, určené kvaternionem α . Toto zobrazení zachovává číslo 1, protože

$$Int(\alpha)(1) = \alpha \cdot 1 \cdot \bar{\alpha} = 1.$$

Z toho plyne, že toto zobrazení zachovává i prostor V ryze imaginárních kvaternionů, protože ten je kolmý k číslu 1.

Toto zobrazení také zachovává normu vektorů (ryze imaginárních kvaternionů) a tedy je to shodnost.

Poznamenejme, že kvaterniony α a $-\alpha$ dávají totéž zobrazení.

Zbývá najít shodnost, která odpovídá danému kvaternionu.

Zapišme jednotkový kvaternion α ve tvaru

$$\alpha = \cos \phi + \vec{u} \sin \phi,$$

kde \vec{u} je jednotkový vektor. Pak platí

$$Int(\alpha)(\vec{u}) = (\cos \phi + \vec{u} \sin \phi) \cdot \vec{u} \cdot (\cos \phi - \vec{u} \sin \phi) = \vec{u} \sin \phi = \vec{u}.$$

Kvaternionu α tedy odpovídá otočení kolem osy určené vektorem \vec{u} .

Ted' je ještě třeba najít úhel otočení.

Doplňme vektor \vec{u} vektory \vec{v} a \vec{w} do pravotočivé báze. Pak $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{w}$ a podobně cyklicky pro ostatní. Dále je

$$\begin{aligned} & (\cos \phi + \vec{u} \sin \phi) \vec{v} (\cos \phi - \vec{u} \sin \phi) = \\ & (\cos \phi \vec{v} + \sin \phi \vec{w}) (\cos \phi - \vec{u} \sin \phi) = \cos(2\phi) \vec{v} + \sin(2\phi) \vec{w}. \end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že se jedná o otočení o úhel 2ϕ .

Necháme-li nyní kvaternion α působit na vektory báze snadno získáme matici otočení kolem osy

$$\vec{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

o úhel ϕ . Pro její prvky a_{rs} dostaneme

$$a_{rs} = \delta_{rs} \cos \phi + (1 - \cos \phi) u_r u_s + \epsilon_{rst} u_t \sin \phi.$$

Zde δ_{rs} je Kroneckerovo delta, ϵ_{rst} je znaménkový tenzor, ϵ_{rst} je rovno znaménku permutace čísel rst , ve formuli se sčítá podle t .

Jak již bylo zmíněno, v první polovině dvacátého století zcela převládla vektorová symbolika a od kvaternionů bylo upuštěno. Kvaterniony najdeme v pracích W. Blaschkeho a H. R. Müllera o sférické kinematice. V poslední době nacházejí kvaterniony uplatnění v počítačové geometrii u problému interpolace pohybů.

Myšlenka je následující: Chceme najít pohyb interpolující dané polohy objektu. Tyto polohy vyjádříme pomocí kvaternionů a interpolující křivku v prostoru kvaternionů interpolujeme. Tím se dostaneme mimo oblast jednotkových kvaternionů, po dělení normou dostaneme jednotkové kvaterniony a ty převedeme zpět na pohyb. Jako příklad uvádím práci [2], kde se čtenář může dovědet další podrobnosti. Kvaterniony se používají také pro konstrukci tzv. PH křivek. To jsou křivky, jejichž element délky se dá vyjádřit pomocí polynomiální funkce. Ty jsou pak důležité při tvorbě ekvidistant např. při obrábění. Podrobnosti může čtenář najít v např. v [3] nebo [4].

Poděkování

Článek vznikl za podpory VZ 0021620839 MŠMT ČR

Literatura

- [1] Wikipedia, internetová encyklopedie.
- [2] L. Kavan, Real-time Skeletal Animation, PhD Thesis, ČVUT, 2007.
- [3] Z. Šír, B. Juettler, C^2 Hermite interpolation by Pythagorean hodograph space curves, Math. Comput. 76, No. 259, 1373-1391 (2007).
- [4] Z. Šír, B. Juettler, Euclidean and Minkowski Pythagorean hodograph curves over planar cubics, Comput. Aided Geom. Des. 22, No. 8, 753-770 (2005).

REFERÁTY

Detekce kartografického zobrazení z množiny bodů

Tomáš Bayer

Katedra aplikované geoinformatiky

Albertov 6, Praha 2

bayertom@natur.cuni.cz

Abstrakt. Detekce kartografického zobrazení z množiny bodů o známých rovinných souřadnicích představuje poměrně zajímavý a nepříliš často řešený problém. Níže uvedený postup používá k detekci kartografického zobrazení srovnání množiny bodů P v mapě s množinou Q korespondujících bodů ve známém kartografickém zobrazení. Nad oběma množinami jsou zkonstruovány Voronoiovy diagramy, parametry jednotlivých Voronoiových buněk následně analyzujeme. Praktické využití této problematiky lze nalézt při kartometrické analýze historických map.

Klíčová slova: Matematická kartografie, kartografické zobrazení, Voronoiova teselace.

1 Úvod

Kartografické zobrazení K zobrazuje referenční plochu R_1 na referenční plochu R_2 , lze ho popsat prostřednictvím zobrazovacích rovnic v explicitním vyjádření

$$x = f(\varphi, \lambda) \quad (1)$$

$$y = g(\varphi, \lambda) \quad (2)$$

O zobrazovacích funkcích f , g se předpokládá, že jsou spojitě a snadno diferencovatelné, vzájemně nezávislé. Proměnné φ , λ jsou zeměpisné souřadnice bodu na referenční ploše R_1 , x , y pravouhlé souřadnice téhož bodu na referenční ploše R_2 .

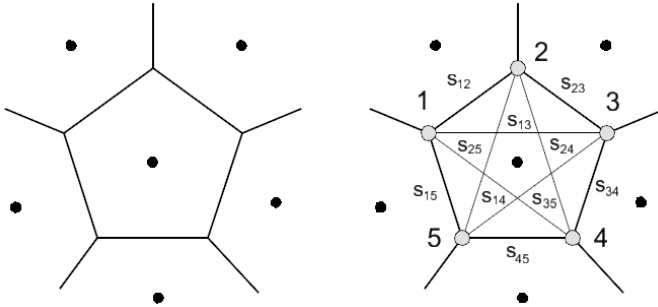
Voronoiova teselace VT přiřazuje každému bodu množiny $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ uzavřenou či otevřenou oblast, tj. $V(P) = \{V(P_1), V(P_2), \dots, V(P_N)\}$, takovou, že libovolný bod $X \in V(P_i)$ je blíže k bodu P_i než k jakémukoliv bodu P_j . Platí

$$d(X, V(P_i)) \leq d(X, V(P_j)).$$

Uzavřenou oblast $V(P_i)$ nazýváme Voronoiovou buňkou.

2 Proces analýzy

První krok zahrnuje rozvalu týkající se výběru množiny vstupních bodů P , nad kterými budou generovány VD. Vzhledem k faktu, že kartografické dílo může být (a většinou i bývá) z hlediska obsahového poměrně obsáhlé, není únosné při analýze pracovat se všemi jeho prvky (resp. s jejich číselnou reprezentací), ale pouze s podmnožinou těchto prvků. V tomto



Obrázek 1: Převod Voronoiovy buňky na úplný neorientovaný graf.

příspěvku předpokládáme existenci kartografického podkladu se sítí poledníků a rovnoběžek, pro detekci lze použít body ležící v uzlových bodech poledníků a rovnoběžek tvořící množinu P . Prvky množiny Q představují obrazy bodů množiny P v jednotlivých kartografických zobrazeních.

2.1 Podobnost $V(P)$ a $V(Q)$

Posouzení podobnosti $V(P)$ a $V(Q)$ je klíčovým krokem analýzy. Vzhledem k faktu, že VD jsou značně citlivé k poloze generátorů, lze tvrdit: $V(P)$ je podobné $V(Q)$ právě když jsou podobné i jejich geometrické parametry. Pokud nalezneme takové zobrazení ξ , které představuje lineární operátor (tj. vyjadřuje existenci lineárního vztahu mezi $V(P)$ a $V(Q)$), jsou obě množiny P a Q podobné (tj. vzájemně posunuté, otočené, zvětšené či zmenšené).

Základním zprostředkujícím parametrem sloužícím pro výpočet vzájemného vztahu obou množin bude vztah vzdálenosti s mezi dvojicí bodů náležejících $V(P_i)$ a jí odpovídající vzdálenosti s' mezi dvojicí bodů náležející $V(Q_i)$. Konkrétněji se bude jednat o dvojice bodů ležících na hraně libovolné Voronoiovy buňky. Takových dvojic lze pro Voronoiovu buňku s n uzly nalézt $\binom{n}{2}$.

Pro tento účel převedeme Voronoiovu buňku na strukturu představovanou úplným neorientovaným grafem, viz obr. 1.

Úplný graf. Graf $G = (H, U, \rho)$, mezi jehož každými dvěma uzly $u_i, u_j \in U$ existuje právě jedna hrana, nazýváme úplným grafem. Prvky množiny H představují hrany, prvky množiny U uzly grafu G , ρ pak incidenci grafu. Každá hrana $h_{ij} \in H$ má přiřazeno ohodnocení $w_{ij} \in \mathbb{R}$, vyjadřující kvalitativní resp. kvantitativní hodnotu nějakého jevu.

Matice W . Ohodnocení hran grafu budou v tomto případě představovat euklidovské vzdálenosti s . Graf G lze popsat čtvercovou maticí W řádu

n , jejíž prvky w_{ij} jsou definovány následujícím vztahem.

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i = j, \\ s(u_i, u_j), & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

Matici W nad množinou $V(P_i)$ označíme W_{P_i} , $u_i \approx P_i$,

$$W_P = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

matici W nad množinou $V(Q_i)$ označíme W_{Q_i} , $u_i \approx Q_i$.

$$W_Q = \begin{pmatrix} s'_{11} & s'_{12} & \dots & s'_{1n} \\ s'_{12} & s'_{22} & \dots & s'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s'_{1n} & s'_{2n} & \dots & s'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Je-li ξ lineární operátor, zřejmě platí

$$\xi(W_{P_i}) = W_{Q_i}.$$

Charakteristická rovnice ξ . Vydeme z charakteristické rovnice lineárního operátoru ξ . Skalár λ představuje vlastní číslo lineárního operátoru ξ , pokud existuje vektor v , $v \neq 0$, pro který platí

$$\xi(v) = \lambda v.$$

Říkáme, že v je vlastní vektor operátoru ξ . Charakteristickou rovnici lze zapsat ve tvaru

$$\det(\lambda E - \xi) = 0.$$

Kořeny rovnice s neznámou λ označíme λ_i ,

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

představují vlastní čísla lineárního operátoru ξ .

Podobnost matic a vlastní čísla. Analýza je založena na faktu, že podobné matice mají stejná vlastní čísla. Čtvercové matice B, C nazýváme podobnými, existuje-li taková regulární matice M , aby platilo

$$C = M^{-1}BM.$$

Sloupce matice M pak tvoří vlastní vektory. Pro vlastní čísla matic B, C platí

$$\lambda_B = \lambda_C.$$

Jestliže pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$C = \alpha M^{-1} B M,$$

pro vlastní čísla matic B, C platí

$$\lambda_C = \alpha \lambda_B.$$

Matice W je invariantní vůči úhlu natočení množin P a Q . V tomto případě je $M = E$, matice W_{Q_i} je α -násobkem matice W_{P_i} . Zřejmě platí

$$W_{Q_i} = \alpha W_{P_i} \quad (4)$$

$$\lambda_{Q_i} = \alpha \lambda_{P_i}. \quad (5)$$

Pro stopy matic lze psát

$$tr(W_{Q_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_{Q_i},$$

$$tr(W_{P_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_{P_i}.$$

Pak platí

$$tr(W_{Q_i}) = \alpha tr(W_{P_i}).$$

Jako testovací kritérium detekující, zda W_{Q_i} je α -násobkem W_{P_i} , použijeme

$$t_{Q_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_{Q_i}^2,$$

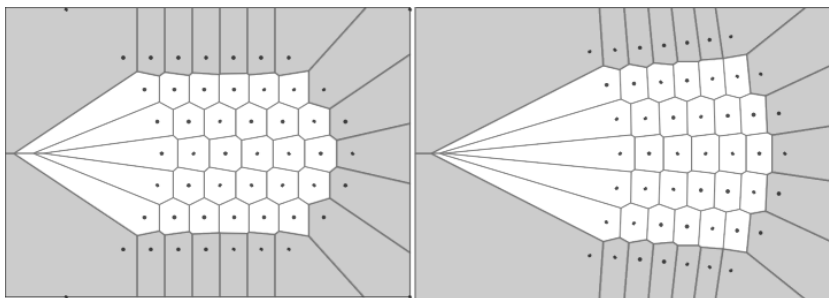
$$t_{P_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_{P_i}^2.$$

Pro vztah mezi t_{Q_i} a t_{P_i} platí

$$t_{Q_i} = \alpha^2 t_{P_i}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

2.2 Selekce $V(P)$ a $V(Q)$

Před vlastním výpočtem testovacího kritéria je nutno provést selekci množin $V(P)$ a $V(Q)$. Podobnost nebudeme posuzovat mezi všemi $V(P_i)$ a $V(Q_i)$, množinu dvojic omezíme. Z výpočtu vyloučíme takové buňky $V(P_i)$ a $V(Q_i)$:



Obrázek 2: Selektce $V(P_i)$ a $V(Q_i)$, u kterých alespoň jeden z generátorů leží na konvexní obálce.

- u kterých je počet hran různý. Neexistuje -li žádná dvojice buněk $V(P_i)$ a $V(Q_i)$ se stejným počtem hran, je hodnota testovacího kritéria $m_\alpha = \infty$.
- alespoň jeden z dvojice parametrů se vztahuje ke generátoru P_i nebo Q_i ležícímu na konvexní obálce. Těmto geometrickým parametrům byla přiřazena hodnota 0. Uvedeným krokem odstraníme všechny neuzavřené buňky obou množin.

2.3 Výpočet testovacího kritéria.

Po selekci buněk VD můžeme provést vlastní výpočet testovacího kritéria. Počet takto vzniklých Voronoiových buněk označme N' . Pro zbylé buňky $V(P_i)$ a $V(Q_i)$ naplníme matice $t_Q(1, N')$ a $t_P(1, N')$. V dalším kroku určíme prvky matice $\alpha(1, N')$

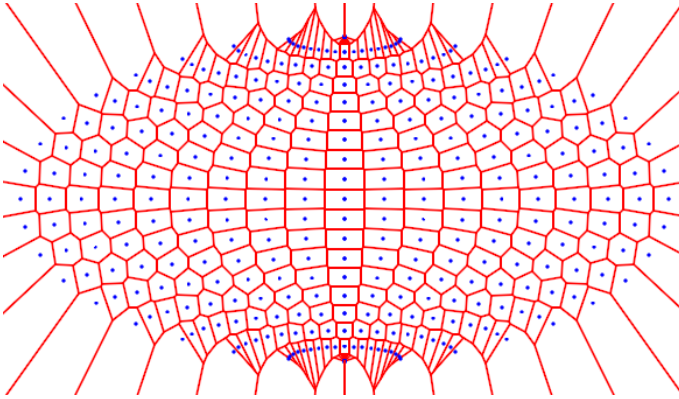
$$\alpha = \sqrt{\frac{t_Q}{t_P}}.$$

V praxi díky náhodným či systematickým chybám nebudou hodnoty α_{1i} stejné, budou se lišit. Jako kritérium přesnosti a tím pádem i hodnotu ilustrující podobnost $V(P)$ a $V(Q)$ resp. množin P a Q lze použít směrodatnou odchylku

$$m_\alpha = \sqrt{\frac{\sum v_\alpha v_\alpha}{N' - 1}}. \quad (7)$$

Čím je hodnota m_α nižší, tím podobnější jsou si množiny P a Q . Provádíme -li srovnání $P^{(k)}$ s více množinami $Q^{(k,j)}$ představujícími různá kartografická zobrazení, nejpodobnější bude množina s m_α^{min} .

$$m_\alpha^{min} = \min(m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2}, \dots, m_{\alpha_{N'}}) \quad (8)$$



Obrázek 3: Voronoiův diagram nad množinou P Hammerova zobrazení.

3 Závěr

Tento příspěvek se snažil nastínit možnost detekce kartografického zobrazení z množiny bodů srovnáním s množinou korespondujících bodů ve známém kartografickém zobrazení. Článek poukazuje na souvislost matematické kartografie, výpočetní geometrie a teorie grafů.

Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu grantu GAČR č. 42-440045: „Kartometrická a semiotická analýza a vizualizace starých map českých zemí z období 1518-1720“.

Reference

- [1] J. Boehm, J. Radouch, V. Hampacher: *Teorie chyb a vyrovnávací počet*, Geodetický a kartografický podnik, Praha, 1990
- [2] P. Buchar, V. Hojovec: *Matematická kartografie*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1996
- [3] J. P. Snyder, L. M. Bugayevskiy: *Map projections*, Taylor and Francis, London, 1995

Úpätnicovo-skrutkové plochy

Eva Baranová, Kamil Maleček*

*Katedra aerodynamiky a simulácií, Letecká fakulta TU
Rampová 7, 040 01 Košice, SR
email:eva.baranova@tuke.sk*

**Katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT
Thákurova 7, 166 29 Praha 6, ČR
email:kamil@mat.fsv.cvut.cz*

Abstrakt. V príspevku sa zaoberáme špeciálnymi skrutkovými plochami a to úpätnicovo-srutkovými. Ukážeme geometrický spôsob vytvorenia úpätnicovej skrutkovice a odvodíme jej parametrické rovnice. Ďalej odvodíme parametrické rovnice úpätnicovo - skrutkových plôch priamkových a cyklických. V závere ukážeme možnosť využitia takýchto plôch.

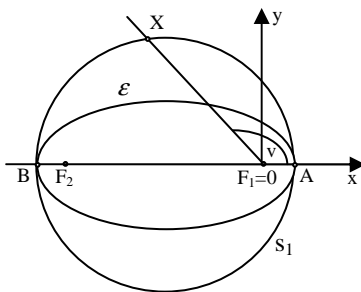
Kľúčové slová: úpätnicová skrutkovica, úpätnicovo – skrutkové plochy

1 Úpätnicová skrutkovica

1.1 Geometrický spôsob vytvorenia úpätnicovej skrutkovice

V rovine π majme danú elipsu ε ohniskami F_1, F_2 a hlavnými vrcholmi A, B . Veľkosť hlavnej poloosi je a , excentricita e .

Označme s_1 úpätnicu elipsy ε pre pól v jednom ohnisku, napr. F_1 . Pohyb bodu A po úpätnici s_1 popíšeme pomocou uhla ν otáčania polpriamky F_1A A okolo jej začiatočného bodu F_1 , obr.1.



Obr. 1: Úpätnica elipsy pre pól F_1

Nech zároveň s pohybom po úpätnici s_1 sa bod A posúva v smere kolmom na rovinu π , pričom rýchlosť posúvania je priamo úmerná veľkosti uhlu otáčania. Potom bod A vytvára v priestore úpätnicovú skrutkovicu s . Pretože úpätnica s_1 elipsy pre pól v ohnisku je vrcholová kružnica elipsy, obr.1, tak úpätnicová skrutkovica s leží na rotačnej valcovej ploche danej kružnicou s_1 .

Rovnako ako pri obvyklej skrutkovici definujeme úpätnicovú skrutkovicu s buď pravo- alebo ľavotočivú.

1.2 Parametrizácia úpätnicovej skrutkovice

Zvoľme v priestore pravouhlú súradnicovú sústavu $[O,x,y,z]$ tak, aby začiatok $O=F_1$ a hlavná os elipsy bola os x , obr.1. Potom úpätnica s_l má v polárnych súradniciach so začiatkom $O=F_1$ a polárnou osou x rovnicu

$$r(v) = \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 v} - e \cos v, \quad v \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

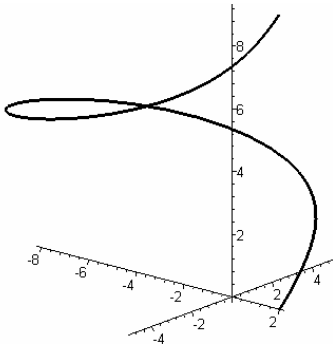
a parametrické vyjadrenie

$$x = r(v)\cos v, \quad y = r(v)\sin v, \quad z = 0, \quad v \in [0, 2\pi]. \quad (2)$$

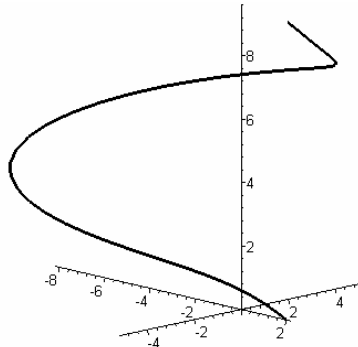
Úpätnicová skrutkovica s je parametrizovaná vektorovou funkciou

$$\mathbf{y}(v) = (r(v)\cos v, r(v)\sin v, v_0 v), \quad v \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

kde v_0 je nenulová reálna konštanta, ktorej absolútna hodnota vyjadruje rýchlosť posúvania. Jeden závit úpätnicovej skrutkovice sme zobrazili na obr.2 a obr.3. Na obr.2 je pravotočivá a na obr.3 ľavotočivá úpätnicová skrutkovica.



Obr. 2



Obr. 3

2 Priamkové úpätnicovo – skrutkové plochy

Priamková skrutková plocha vznikne skrutkovým pohybom priamky, v našom prípade skrutkovým pohybom popísaným v odstavci 1.1. Klasifikácia týchto úpätnicových priamkových plôch je rovnaká ako klasifikácia obvyklých priamkových skrutkových plôch. Uvedieme dva príklady.

2.1 Plocha dotyčníc úpätnicovej skrutkovice s

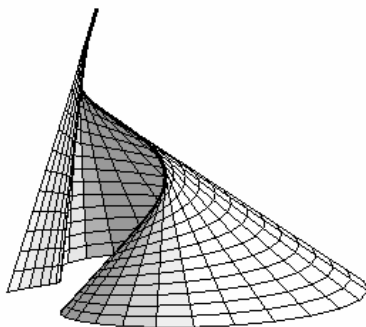
Smerové vektory dotyčníc úpätnicovej skrutkovice s sú dané vektorovou funkciou

$$\dot{\mathbf{y}}(v) = (\dot{r}(v)\cos v - r(v)\sin v, \dot{r}(v)\sin v + r(v)\cos v, v_0), \quad v \in R, \quad (4)$$

ktorá je deriváciou vektorovej funkcie (3) podľa parametra v . Plocha dotyčníc úpätnicovej skrutkovice s má parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned} x &= r(v)\cos v + t(\dot{r}(v)\cos v - r(v)\sin v), \\ y &= r(v)\sin v + t(\dot{r}(v)\sin v + r(v)\cos v), \\ z &= v_0 v + t v_0, \quad t \in R, \quad v \in R. \end{aligned} \quad (5)$$

Na obr.4 sme zobrazili jeden závit časti plochy dotyčníc úpätnicovej skrutkovice medzi skrutkovicou a rovinou xy .

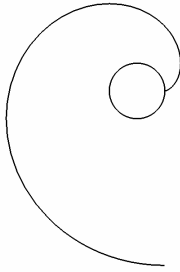


Obr. 4: Plocha dotyčníc úpätnicovej skrutkovice

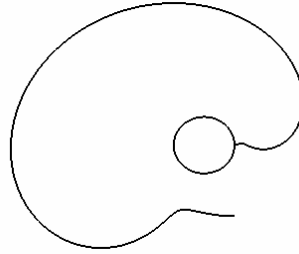
Krivka, ktorá je rezom plochy rovinou xy o rovnici $z=0$ má parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned} x &= r(v)\cos v - v(\dot{r}(v)\cos v - r(v)\sin v), \\ y &= r(v)\sin v - v(\dot{r}(v)\sin v + r(v)\cos v), \\ z &= 0, \quad v \in R. \end{aligned} \quad (6)$$

Krivka má podobný tvar špirály ako evolventa kružnice. Pre porovnanie sme zobrazili na obr.5 časť evolventy kružnice s_1 a na obr.6 časť krivky s parametrizáciou (6).



Obr. 5



Obr. 6

2.2 Priamy skrutkový konoid

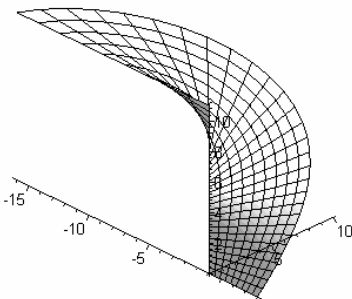
Priamy skrutkový konoid (priama uzavretá priamková skrutková plocha) tvorí systém priamok, ktoré pretínajú úpätnicovú skrutkovicu s , os z – tzv. riadiace krivky konoidu a sú rovnobežné s rovinou xy – riadiacou rovinou.

Smerové vektory tvoriacich priamok sú dané vektorovou funkciou $\mathbf{u}(v) = (r(v)\cos v, r(v)\sin v, 0)$ resp. $r(v)(\cos v, \sin v, 0)$. Plocha má parametrické vyjadrenie

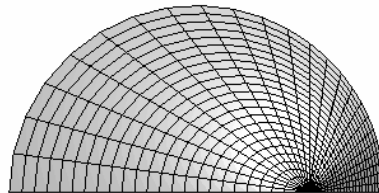
$$x = t \cos v, \quad y = t \sin v, \quad z = v_0 v, \quad t \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

ktorá je rovnaká ako pri obvyklom priamom skrutkovom konoide. Na obr.7 sme zobrazili polovicu závitú časť plochy, ktorá má parametrické vyjadrenie

$$x = 2tr(v)\cos v, \quad y = 2tr(v)\sin v, \quad z = v_0 v, \quad t \in [0,1], \quad v \in [0,2\pi]. \quad (8)$$



Obr. 7



Obr. 8

Plocha je geometrickým modelom základu rozširujúceho sa skrutkového schodiska nad kruhovým pôdorysom, ktorý je ohraničený riadiacou kružnicou elipsy ε . Pôdorys plochy je na obr.8.

3 Cyklické úpätnicovo-skrutkové plochy

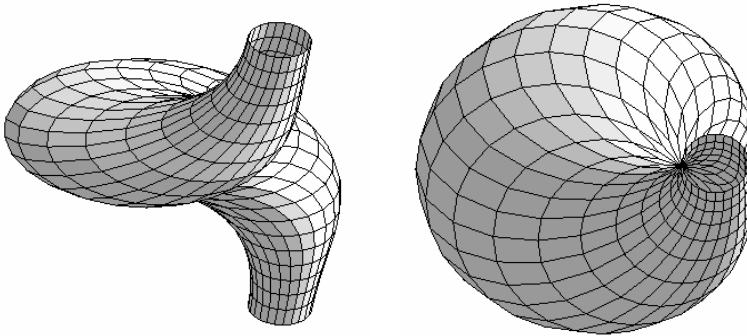
Cyklické skrutkové plochy vznikajú skrutkovým pohybom kružnice a opäť uvažujeme skrutkový pohyb z odst. 1.1. Uvedieme dva prípady cyklických skrutkových plôch.

3.1 Analógia vinutého stĺpa

Plocha, ktorá je analógiou uzavretého vinutého stĺpa má parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned}x &= r(v)\cos v + r(v)\cos t, \\y &= r(v)\sin v + r(v)\sin t, \\z &= v_0 v, \quad t \in [0, 2\pi], \quad v \in R.\end{aligned}\tag{9}$$

Jeden závit aj s pôdorysom sme zobrazili na obr.9.



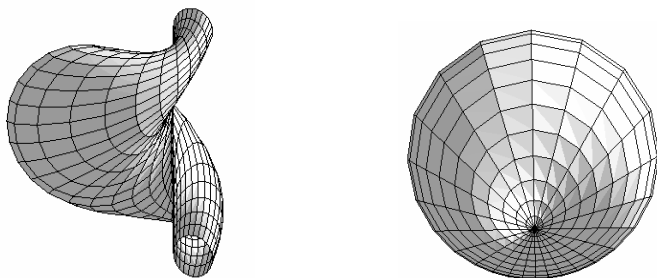
Obr. 9

3.2 Analógia plochy klenby sv. Jiljí

Plocha, ktorá je analógiou uzavretej plochy klenby sv. Jiljí má parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned}x &= r(v)\cos v + r(v)\cos t \cos v, \\y &= r(v)\sin v + r(v)\cos t \sin v, \\z &= v_0 v + r(v)\sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad v \in R.\end{aligned}$$

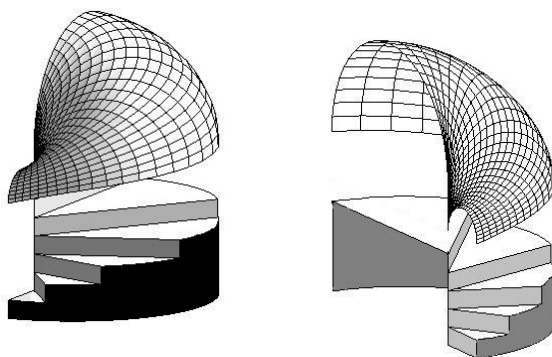
Jeden závit aj s pôdorysom sme zobrazili na obr.10.



Obr. 10

4 Záver

Na záver ako aplikáciu uvádzame polovicu závitú rozširujúceho sa schodiska a jeho zastrešenie plochou klenby sv. Jiljí, viď. obr.11.



Obr. 11

Pod'akovanie

Tento článok vznikol za podpory agrantovej agentúry VEGA pri riešení projektu 1/4002/07.

Literatúra

- [1] Bydžovský, B. *Úvod do analytickej geometrie*. Praha: JČSMF, 1926
- [2] Budinský, B., Kepr, B. *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi*. Praha: SNTL, 1970
- [3] Granát, L., Sechovský, H.. *Počítačová grafika*. Praha: SNTL, 1980
- [4] Medek, V., Zámožník, J. *Konstruktívna geometria pre technikov*. Bratislava: ALFA, 1974

Použití VRML modelů

Jaroslav Bušek

*Student, Strojní fakulta, České vysoké učení technické
Technická 4, 166 07 Praha 6, Česká republika
email: jaroslav.busek@fs.cvut.cz*

Abstrakt. V příspěvku je prezentován soubor interaktivních prostorových modelů přímkových a cyklických šroubových ploch umožňující animaci šroubového pohybu význačných křivek na ploše. Modely jsou využívány jako didaktické pomůcky při výuce předmětu Konstruktivní geometrie v zimním semestru prvního ročníku na Strojní fakultě ČVUT.

Klíčová slova: VRML modely, konstruktivní geometrie, šroubová plocha.

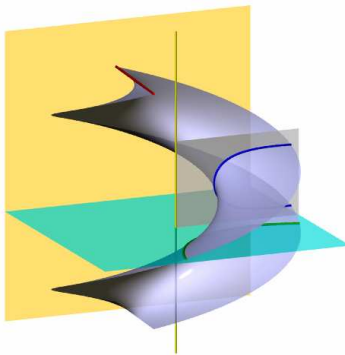
1 Možnosti zobrazení modelů šroubových ploch

Šroubové plochy jsou jedním ze základních geometrických prvků používaných při navrhování strojních částí. Tvar a princip vzniku jsou ale pro některé studenty natolik složité, že pouhá vlastní představa plochy jim nestačí. Proto byly vytvořeny virtuální prostorové modely těchto ploch pro podporu výuky předmětu Konstruktivní geometrie.

Pro zobrazení modelů byl hledán takový způsob, který by byl nezávislý na platformě a programovém vybavení PC. Modely byly vytvořeny pomocí programu Rhinoceros – NURBS modelling for Windows (Rhino) a následně exportovány do vhodného formátu pro zobrazení.

1.1 Statický obrazový model

Nejjednodušší způsob zobrazení modelu je statický obrazový model vyrenderovaný v programu Rhino.

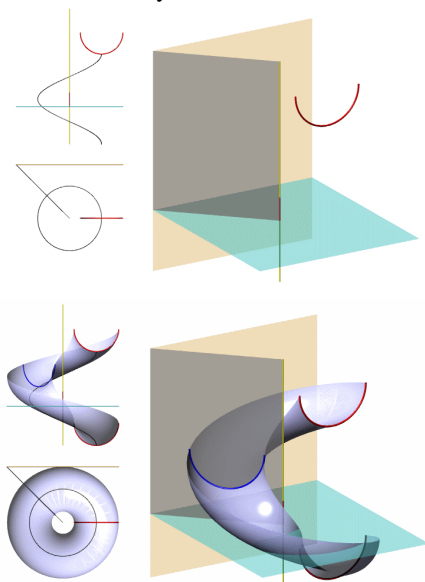


Obr. 1: Statický obrazový model

Tento model není dostatečně názorný, protože neumožňuje manipulovat s pohledem. Při vytváření je nutné vhodně nastavit pohled pro rendering a průhlednost prvků modelu, aby bylo dosaženo správného pochopení prostorového uspořádání celého modelu.

1.2 Animovaný obrazový model

Hlavní výhodou tohoto způsobu zobrazení modelu je možnost animace vzniku šroubové plochy. K animaci se používají obrázky vyrenderované v programu Rhino, které tvoří jednotlivé snímky obrázku ve formátu GIF.

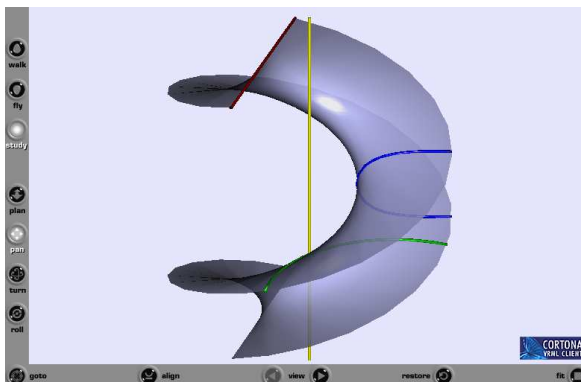


Obr. 2: Animovaný obrazový model

Nevýhodou tohoto způsobu zobrazení jsou vyšší nároky na pracnost, neboť vytvoření modelu je spojené s pořízením velkého počtu snímků. Ani toto zobrazení nedovoluje manipulaci s pohledem, což může být ale částečně vykompenzováno možností animace vzniku šroubové plochy v několika pohledech najednou.

2 VRML modely

VRML modely jsou zobrazeny ve virtuálním světě s možností manipulace s objekty a pohledy v prostředí, které je součástí většiny dnešních internetových prohlížečů. Nebo je případně možné podporu jazyka VRML jednoduše doinstalovat (např.: Cortona VRML Client). Díky těmto vlastnostem se z VRML modelů stává nejvhodnější způsob zobrazení prostorových úloh.



Obr. 3: Prohlížeč VRML modelů

2.1 Vytvoření

Vytvoření VRML modelu je složeno z několika jednoduchých úkonů, které nejsou časově náročné a dají se částečně automatizovat.

V programu RHINO se vytvoří model dané šroubové plochy, který se následně pomocí funkce exportu zapíše v jazyce VRML do zvoleného souboru. Do takto vytvořeného souboru se v libovolném textovém editoru ručně doplní do zdrojového kódu zbývající prvky modelu – osy, význačné plochy, řezy atd. Na závěr se zkompletovaný soubor zkomprimuje. Tímto postupem vznikne soubor o velikosti řádově desítek kB s vysokou kvalitou zobrazení.

Ruční zásahy do zdrojového kódu lze vynechat a celý model včetně všech prvků vymodelovat v programu Rhino a exportovat do VRML. Výsledný soubor je ale mnohonásobně větší než vytvořený ruční kompletací.

2.2 Přidání animace

Možnost manipulace s objekty VRML modelu lze snadno využít pro animaci vzniku šroubových ploch.

Základem pro animaci je již vytvořený VRML model, který se rozšíří o definici trajektorií pohybu a časové základny. Úpravy se provádí v textovém editoru zapisováním do zdrojového kódu VRML modelu, nebo je možné zobecnit tyto operace definováním tzv. prototypů - šablon s několika parametry, což celý postup výrazně zjednoduší.

3 Závěr

Modely v jazyce VRML jsou díky svým možnostem vhodné k použití jako didaktické pomůcky při výuce a demonstraci řešení konstrukčních úloh.

Ruční kompletací VRML modelu a komprimací je možné docílit velikosti souboru řádově v desítkách kB, což umožňuje publikaci modelů na internetu a zpřístupnění i mimo výuku. Galerii šroubových ploch je možné shlédnout na

internetové adrese (Konstruktivní geometrie → Interaktivní modely pro Konstruktivní geometrii)

<http://marian.fsik.cvut.cz/~linkeova>

Literatura

- [1] J. Bušek: *Animované modely šroubových ploch*, Konference studentské tvůrčí činnosti STČ 2007, ČVUT v Praze, Strojní fakulta.
- [2] Š. Gergelitsová: *VRML v příkladech*, BEN – technická literatura, 2004, ISBN 80-7300-138-1
- [3] M. Kargerová, P. Mertl: *Konstruktivní geometrie*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2005

Assesment of the Properties of the Flash MX Program in Presentation of Solid Geometry Problems

Sylwia Cichacz, Tomasz Wieja

*Faculty of Applied Mathematics AGH University of Science and Technology
30-059 Kraków, al.Mickiewicza 30, Poland
email: twieja@poczta.fm*

Abstract. In the article we present analysis of the animation and visualization construction methods of selected spatial problems by means of the Flash MX computer program. The program makes it possible to place the active computer presentations on the websites, which allows the internet users to track individual stages of the geometrical construction. The selected problems of descriptive geometry have been demonstrated in the Monge, mapping and central projections. The presentations and visualizations are of dynamic or static character. The separate stages of construction making have been shown in axonometry as a visual drawing, and in other chosen projections. It is required by teaching descriptive geometry that the spatial model of a given geometrical problem be presented and the construction put down in the drawing. Demonstration of the above – mentioned issues in the form of interactive presentation is one of the elements which are helpful in understanding a concrete spatial problem. As the Flash MX computer program is not meant for geometrical constructions recording we have shown an optimal method of transferring the said constructions into the graphics of Flash MX . We have also assessed the individual program tools.

Key words: Flash, internet, Monge projection, axonometry, animation, visualization, vectorial picture

1 Introduction

It is required that teaching descriptive geometry apply interactive forms to present space problems solved during the course of descriptive geometry and engineering graphics. Using of contemporary mass media allows to utilize in an optimal way the time meant to teaching particular space problems and, in addition, makes it possible for the students to analyze individually the procedure algorithm while making the above-mentioned geometrical constructions. Moreover, the worked out interactive didactic aids favour to include computer visualizations, available by means of www pages, into the teaching process. Accessibility and popularity of Internet nowadays makes it possible to present permanently selected computer visualizations. Owing to it the teaching process can be carried on at any time and individually by the students.

2 Visualizations of space geometrical problems in the Flash MX program

The Flash MX program can be successfully used for visualization of complex spatial problems and for presentations which can clearly explain constructions made by means of various projection methods. It is difficult to make geometrical drawings in Flash MX because it is not a graphical program of the AutoCAD or Cabri type meant for drawing. To prepare a presentation it is essential to have a previously made drawing of a geometrical construction and then a scan of the construction. The demonstrated presentations are computer made by means of the Flash MX program and concern geometrical problems drawn on the previously made scan of the construction. The program tools available within the Flash program allow to use graphics (lines, points, planes etc.) typical of the construction geometrical drawing. The scan of the drawing can be substituted for the lack of program tools to make metric constructions. Demonstration of the above – mentioned questions in the form of interactive presentation is one of the elements allowing us to understand a given concrete spatial problem. Application of the Flash program as a tool makes it possible to analyze particular stages of the construction. Presentations and visualizations are of dynamic or static character. Individual stages of construction making are shown in the form of axonometric recording as a pictorial drawing and in the various projection methods. Particular constructions recorded in the Flash program create an interactive computer graphics in which elements of the axonometric drawing are correlated with the recording of a given geometrical problem in the various projection methods. In addition, it is possible to present subsequent stages of the carried out construction, which makes it possible not only to understand the principles of projection but also to watch simultaneously particular elements introduced into the diagram, which make the final solution of the problem. The constructions are presented by means of the “step by step” method. Thus the whole teaching program concerning a concrete spatial problem can be accomplished. The presented examples consist of two diagrams interactively connected. By means of adequately chosen palette of colors for points, lines and planes the axonometric drawing preserves 3D character. Coordination of spatial drawings with a plane recording in assumed projection consists on simultaneous construction of particular elements making the drawing. The coordination also comprises technical parameters typical of animation i.e. speed, direction and time. As the result of it is a possibility of simultaneous checking on particular stages of the coming into being construction with application of the animation option. The animation is controlled by system of switches which have been located between the diagrams. Owing to the switches the presentation can be individually steered by the user of the software. Below presented examples of visualization of geometrical problems in the Flash program clearly show the complex problems of spatial geometry. Application of interactive animation of particular stages of

the spatial solution of a given problem makes it possible to carry out an independent analysis of the used method. In addition, due to the Flash program we can make advantage of the geometrical presentation as a component of the web pages designed for the spatial geometry problems.

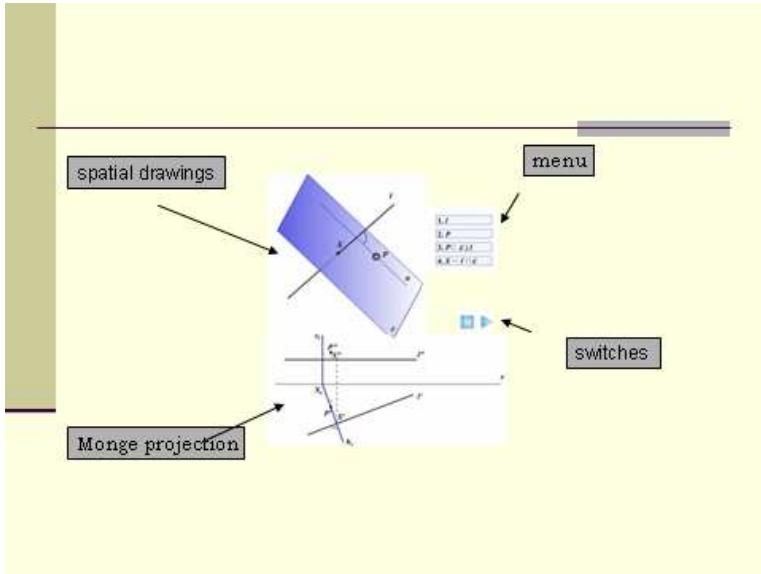


Fig. 1: Method of presentation space geometrical problems in the Flash MX program

3 Examples of selected visualizations of space geometrical problems in the Flash MX program

Presentation 1 – the mapping projection method. Geometrical problem – find a cross-section of pyramid by plane α with the use of collineation (fig.2).

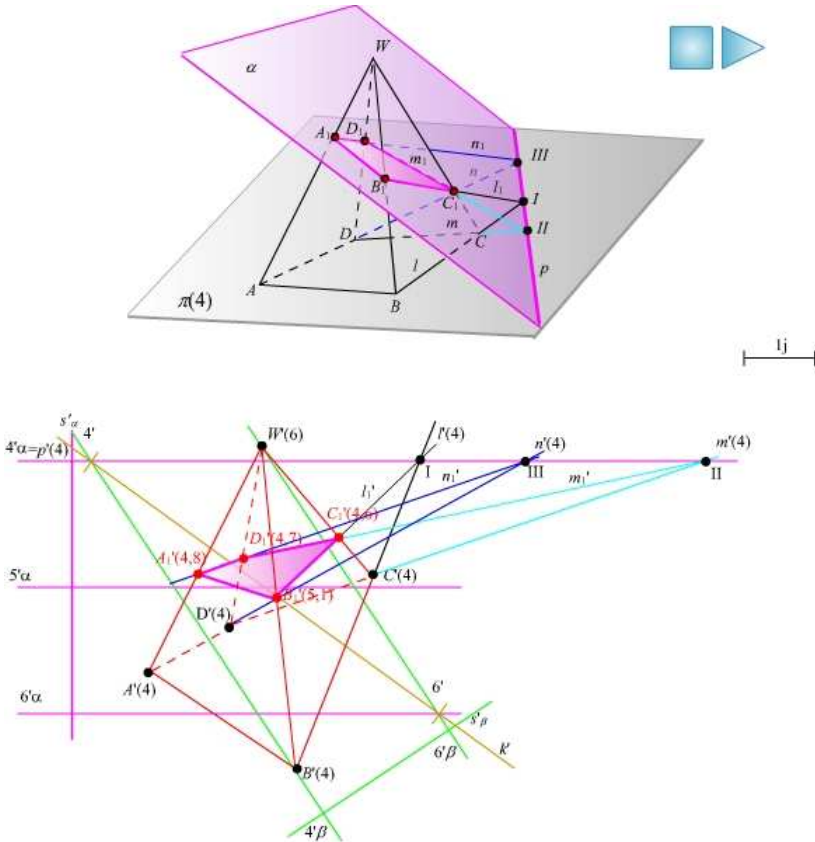


Fig. 2

Presentation 2 – the mapping projection method. Geometrical problem – find a cross-section of pyramid by plane α with the use of transformation (fig.3).

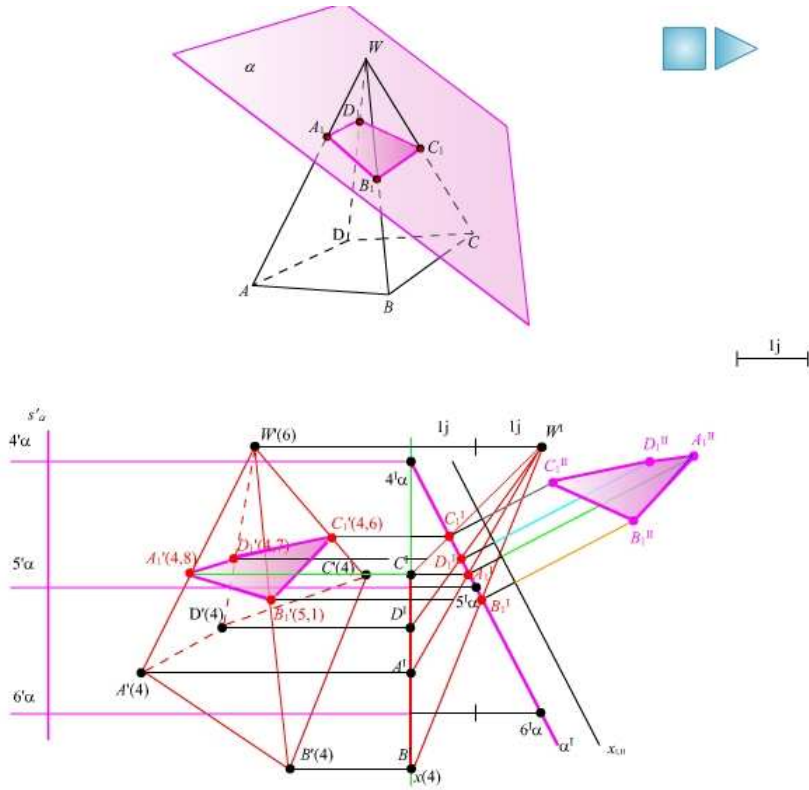


Fig. 3

Presentation 3 – the Monge projection method. Geometrical problem – finding a real magnitude of the dihedral angle between planes α and β (fig.4).

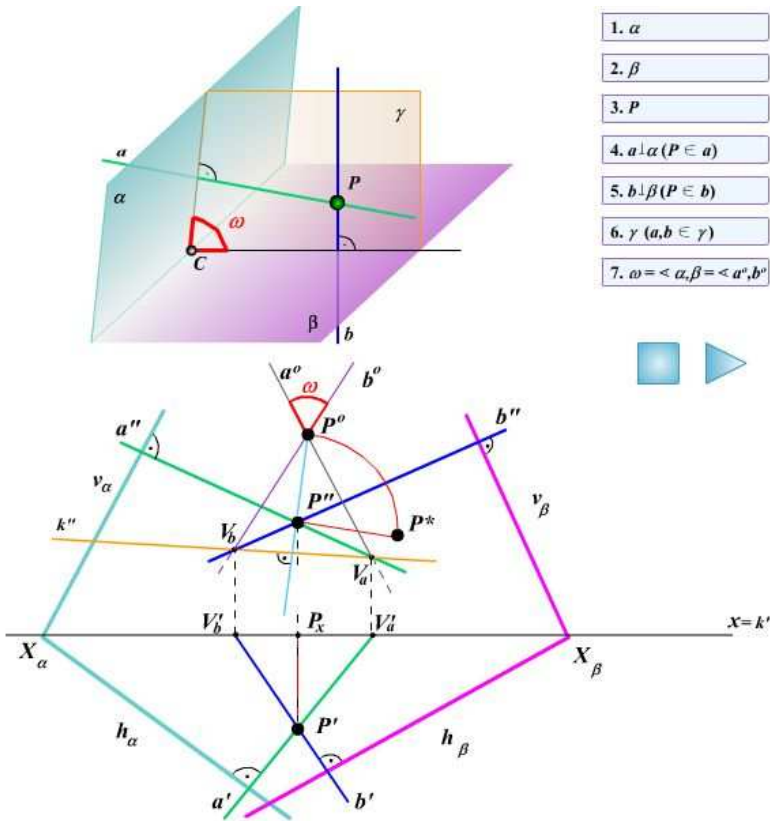


Fig. 4

4 Conclusion

Application of the Flash MX program to visualize selected geometrical space problems make it possible to realize the teaching process by means of interactive analysis of the selected issue. In addition, owing to the *Flash* program we can take advantage of the geometrical presentations as a component of the web pages designed for spatial geometry problems. It is not a tool to make geometrical graphic constructions. The scan of the construction of the selected problem can be substituted for the lack of program tools characteristic of the popular graphic programs.

The above-shown examples of visualization of geometrical problems in the *Flash* program clearly show the complex problems of spatial geometry. Application of the interactive animation of the separate construction stages of the spatial solution of the assumed problem makes it possible to analyze in an independent way the method that has been used.

References

- [1] S.Cichacz, T.Sulima-Samujłło, T.Wieja. *Application of the Flash MX Program to Visualization of Selected Metric Problems*. Kocovce: Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG, 2005
- [2] Program Flash MX 2004
- [3] *Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną* , Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995

Computer Visualisation of Same Geometrical Problems

Jerzy Dietrich, Marek Gawron, Tomasz Wieja

*Faculty of Applied Mathematics AGH University of Science and Technology
30-059 Kraków, al.Mickiewicza 30, Poland
email: twieja@poczta.fm*

Abstract. Application of computer graphic programs makes it possible to solve and visualize spatial geometrical constructions. Selection of an appropriate graphic program like AutoCAD or Cabri 3D for construction recording requires both an expertise in the software and a knowledge of geometry. In the paper we present selected geometrical problems worked out graphically and from structural point of view by means of assumed computer programs. The shown examples of application of computer graphics contain the following problems: inscribing tetrahedron into an oblique pyramid of triangular base, inscribing regular tetrahedron into a sphere, a cone of revolution, a cylinder of revolution and a cube. The constructions have been made in 3D graphic programs, namely in AutoCAD or Cabri. A vivid visualization of the solved geometrical problem has been carried out in the Corel Draw graphic program. The 3D notation of the solutions of the above – singled out spatial problems in AutoCAD and Cabri 3D allows us to visualize the construction methods as well as to carry on a simultaneous record of the solution in orthographic (the Monge method) or in parallel (axonometry) projections.

Key words: Auto CAD, Cabri 3D, tetrahedron, cube, cylinder, construction, technical drawing, visualization

1 Introduction

The subject of the article is the problem of inscribing a regular tetrahedron within:

a cube (Fig.1)

a cylinder (Fig.2)

any irregular tetrahedron (Fig.3)

a cone. (Fig.4)

Two computer programs Cabri 3D and Auto CAD have been used. We have shown differences in the ways of constructions building and capabilities of the programs.

Cabri 3D possesses tools of theoretical apparatus and possibility to visualize objects in perspective and axonometric projection. It has theoretical tools such as e.g. “a plane” but does not possess, and that also applies to AutoCAD, a tool that could draw a ready tetrahedron as a polygon. The construction, despite some tool facilitations, causes a lot of specific difficulties. AutoCAD as a program used to technical drawings and space modeling of objects, does not have tools related to the theory of space such as the above – mentioned “plane”. That is why we have used more difficult ways to build a given construction.

The final result have been shown in a chosen position by means of visual elements such as hatching, filling with colors, fragment of a surface etc.

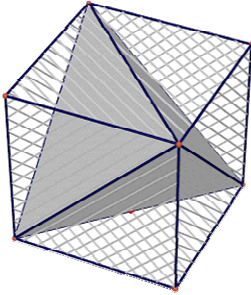


Fig. 1

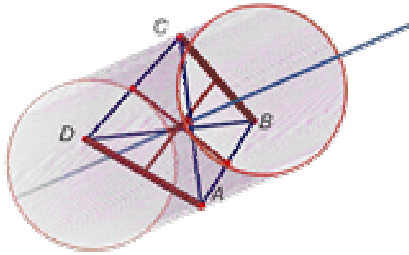


Fig. 2

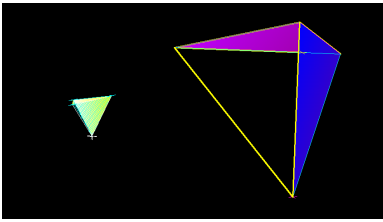


Fig. 3

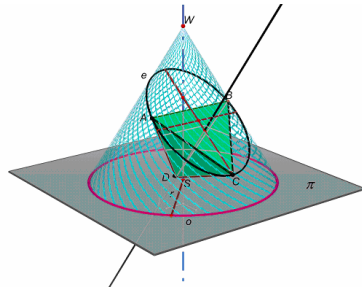


Fig. 4

2 Examples of selected visualizations and constructions of inscribing a regular tetrahedron within various solids by means of the Auto CAD and Cabri 3D programs

Application of both programs have been looked into with the use of example 3.

Given: irregular tetrahedron (I)

Find: inscribe a regular tetrahedron within the given one.

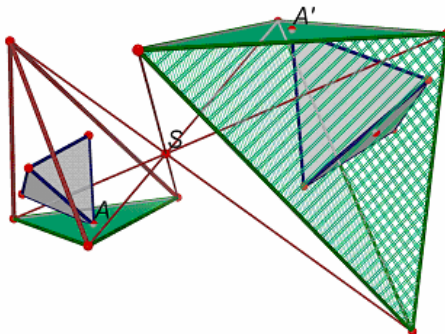
2.1 Stereometric solution

- draw auxiliary regular tetrahedron (II) ABCD smaller than the given irregular one (I) K'L'M'W'.
- through vertex A of the auxiliary tetrahedron (II) pass a plane parallel to the base M'L'K' of the irregular tetrahedron (I) K'L'M'.

- Do the same for points B, C and D of the regular tetrahedron (II) with respect to the sides of the irregular tetrahedron (I) $K'L'M'W'$.
- Intersecting edges of the planes parallel to the sides of the given tetrahedron (I) $K'L'M'W'$ result in a similar irregular tetrahedron (III) KLMW circumscribed around the auxiliary regular tetrahedron (II) ABCD.
- Connecting corresponding vertices of the given tetrahedron (I) $K'L'M'W'$ and the circumscribed one (III) KLMW get a homothety point at the intersection of the connecting lines.
- By means of the point find points of a regular inscribed tetrahedron (IV) $A'B'C'D'$ on the segments : vertex – point of tangency – side.

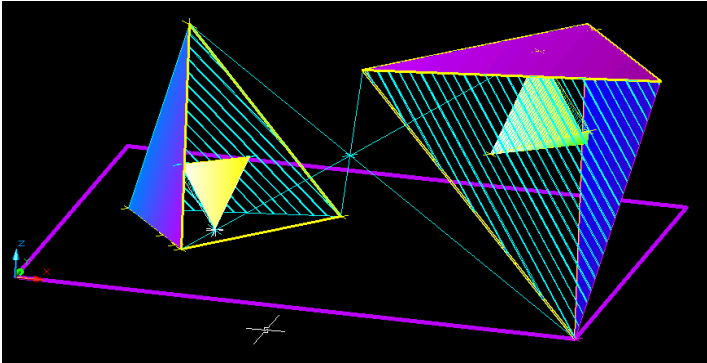
2.2 Solution in the Cabri 3D program

- pass plane $K'L'M'$ through point A' and parallel to plane K,L,M using the tool “parallel”.
- pass plane $M'L'W'$ through point B' and parallel to plane MLW
- pass plane $K'L'W'$ through point C and parallel to plane KLW
- pass plane $K'M'W'$ through point D' and parallel to plane KMW
- by means of the tool “edge”(common points) find common lines between the planes belonging to points A',B',C' and D'
- find points $K'L'M'W'$ (being vertices of tetrahedron) by means of the tool “common point”
- connect corresponding vertices of the tetrahedron: K and K' , L and L' , M and M' , W and W' finding point S which is the homothety point
- through point S and the vertices of the tetrahedron $A'B'C'D'$ pass the lines to pierce corresponding planes of the given irregular tetrahedron KLMW. The piercing points are the vertices of a regular tetrahedron inscribed within the given one.



2.3 Construction in AutoCAD

- on account of the favorable visual position of Cabri 3D in operations with the AutoCAD program we have followed the example of the magnitudes and situation of the drawing elements that have been made in Cabri3D. An approximate “background” for the elements is a rectangle of A-4 size from point $x=0, y=0, z=0$.
- in the opposite corners make a construction of a regular and irregular tetrahedron so that the vertices touch the background rectangle and the base of the irregular tetrahedron be parallel to the background.
- set up LUW(UCS) 3p on plane $W'K'M'$ of the irregular tetrahedron and through point 1 draw a rectangle smaller than the background.
- through point B move parallel the copy of the rectangle
- locate LUW(UCS) 3p on the plane of the moved rectangle 1. Shift the rectangle so that it is inside of the background rectangle.
- set up LUW(UCS) 3p on the background plane and then turn LUW(UCS) through an angle of 90° about Z axis – command - PLAN. Now it is possible to find apparent points of intersection between the background plane and the rectangle. The points found in this way determine a first construction line of the side of the irregular tetrahedron circumscribed around the regular tetrahedron. The same can be done with the other sides.



3 Conclusion

Visual effects that are presented by the Cabri 3D program are simple and easy in reception. They are in the form of perspective or axonometric views in selected positions. While working with the program not all the stages are easy to construct.

To demonstrate constructions concerning theoretical problems in AutoCAD is considerably more difficult. It results from the lack of the elements (e.g. “plane”) needed for simple visualization of theoretical problems. Here the use of the pattern of solution that is shown by Cabri 3D can be helpful. Such utilization of both programs results in more communicative solutions.

References

- [1] Program AutoCAD 2007, Cabri 3D
- [2] *Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną* , Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995

Reversibility of Minkowski Difference via Generalized Laguerre Geometry

Jaromír Dobrý

*Department of Mathematics, University of West Bohemia
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
dobry@kma.zcu.cz*

Abstract. In the article, there has been studied the problem of reversibility of Minkowski difference (also called Pontryagin difference). The problem of reversibility means whether there holds or not the identity $(A-M)+M=A$ for a given pair of sets A, M . In the article there has been used the generalized Laguerre geometry defined at former conferences GCG. Moreover there has been introduced the characterization theorem giving the relationship between the reversibility of Minkowski Difference and existence of a representation satisfying certain conditions.

Keywords: Minkowski sum, Minkowski difference, Pontryagin difference, reversibility, generalized Laguerre geometry, representation, GMAT, medial axis transform

1 Minkowski Operations

In this section, we will discuss basic properties of Minkowski Sum and Minkowski Difference. In the subsection 1.3, there will be introduced the problem of reversibility of these operations.

1.1 Minkowski Sum

In this section we will define the operation of Minkowski sum and study its basic properties. We will present the properties that will be important in future for our purposes. For more detailed study see e.g. [4, 7].

Definition 1 Consider a linear space \mathbf{V} over the field \mathbb{R} , $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. The set $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{x + y : x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\}$ will be called Minkowski sum of \mathbf{A} and \mathbf{B} , $\lambda \cdot \mathbf{A} = \{\lambda x : x \in \mathbf{A}\}$ will be called λ -multiple of \mathbf{A} .

Lemma 1 Let \mathbf{V} be a linear space over the field \mathbb{R} , $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \subseteq \mathbf{V}$, $x \in \mathbf{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$. Then we have

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
3. $\mathbf{A} + \{o\} = \mathbf{A}$
4. $\{x\} + \{-x\} = \{o\}$
5. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{C} \subseteq \mathbf{B} + \mathbf{C}$
6. $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

7. $(\alpha + \beta)\mathbf{A} \subseteq \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ whereas if \mathbf{A}, \mathbf{B} are convex, then the equality holds

One of the most significant properties of the convex theory is the order cancelation property for compact convex sets, or in slightly modified version for closed bounded convex sets in [6]. This property is the consequence of the separation theorem. One of the simplest forms of separation theorem is the following separation lemma. For more general issues, see e.g. [7].

Lemma 2 (Separation) *Let \mathbf{X} be an Hilbert space, let \mathbf{A} be a non-empty convex compact subset of \mathbf{X} , $b \in \mathbf{X}$, $b \notin \mathbf{A}$. Then there exists a continuous linear functional f satisfying*

$$\max_{a \in \mathbf{A}} f(a) < f(b).$$

Functional f can be chosen of the form $f(x) = \langle x, n \rangle$ for some $n \in S_{\mathbf{X}}$ where $S_{\mathbf{X}}$ is the unit sphere in \mathbf{X} .

Theorem 1 *Let \mathbf{V} be a Hilbert space over the field \mathbb{R} , $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \subseteq \mathbf{V}$, \mathbf{B} non-empty compact convex and \mathbf{C} non-empty compact, then $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{C} \subseteq \mathbf{B} + \mathbf{C}$.*

Proof: The direction \subseteq follows from Lemma 1. Let us prove $\mathbf{A} \not\subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{C} \not\subseteq \mathbf{B} + \mathbf{C}$. If $\mathbf{A} \not\subseteq \mathbf{B}$, we have $a \in \mathbf{A}$, $a \notin \mathbf{B}$. By Lemma 2 we have a continuous linear functional f such that $\forall b \in \mathbf{B} : f(b) < f(a)$. As \mathbf{C} is non-empty compact, we have (by Weierstrass theorem) an element $c \in \mathbf{C}$ such that $f(c)$ is maximal. Then

$$\forall c' \in \mathbf{C} : f(c') \leq f(c),$$

$$\forall b \in \mathbf{B}, \forall c' \in \mathbf{C} : f(b) + f(c') < f(a) + f(c).$$

By linearity:

$$\forall b \in \mathbf{B}, \forall c' \in \mathbf{C} : f(b + c') < f(a + c)$$

Then we have $a + c \in \mathbf{A} + \mathbf{C}$, but from above $a + c \notin \mathbf{B} + \mathbf{C}$ (equality is not admitted), together: $\mathbf{A} + \mathbf{C} \not\subseteq \mathbf{B} + \mathbf{C}$. ■

1.2 Minkowski Difference

In [3, 4], there has been defined an operation of Minkowski Difference as an effort to get some kind of inverse operation to the Minkowski sum. This operation is also called Pontryagin Difference (e.g. [6]).

Definition 2 *Consider a linear space \mathbf{V} over the field \mathbb{R} , $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{V}$. The set $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{x \in \mathbf{V} : \forall b \in \mathbf{B} : x + b \in \mathbf{A}\}$ will be called Minkowski difference of \mathbf{A} and \mathbf{B} .*

To describe the relation between Minkowski sum and Minkowski difference, we use the notation of complement to a set: $\mathbf{A}' = \{x \in \mathbf{V} : x \notin \mathbf{A}\}$. It is obvious that $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}$. We will also denote \mathbf{A}^- the image of \mathbf{A} in a symmetry with respect to origin: $\mathbf{A}^- = \{-a : a \in \mathbf{A}\}$. Also the obvious property $(\mathbf{A}^-)^- = \mathbf{A}$ holds.

Lemma 3 *Let \mathbf{V} be a linear space over the field \mathbb{R} , $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{V}$, then we have*

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (\mathbf{A}' + \mathbf{B}^-)'$$

Proof: We will rewrite the right-hand side in terms of elements

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' + \mathbf{B}^- &= \{a - b : a \in \mathbf{A}', b \in \mathbf{B}\} \\ (\mathbf{A}' + \mathbf{B}^-)' &= \{x \in \mathbf{V} : \forall a \in \mathbf{A}', b \in \mathbf{B} : a - b \neq x\} = \\ &= \{x \in \mathbf{V} : \forall b \in \mathbf{B} : x + b \in \mathbf{A}\} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \end{aligned}$$

■

1.3 Reversibility

In applications, a frequent question reads whether the Minkowski sum or difference is reversible or not for a given pair of sets $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{V}$, in other words whether the following identities hold or not:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{B} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B} = \mathbf{A}$$

One of the inclusions is trivial by the following lemma, we will study the conditions whether the equality holds.

Lemma 4 *Let \mathbf{V} be a linear space over the field \mathbb{R} , $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{V}$. Then*

1. $\mathbf{A} \subseteq (\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{B}$
2. $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$

Proof:

1. Let $a \in \mathbf{A}$, then for all $b \in \mathbf{B}$ we have $a + b \in \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Therefore by definition of Minkowski difference, $a \in (\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{B}$.
2. Let $x \in (\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B}$, then there are $c \in \mathbf{A} - \mathbf{B}$ and $b \in \mathbf{B}$ such that $c + b = x$. But then by definition of Minkowski difference $x = c + b \in \mathbf{A}$.

■

The following lemma gives us the relationship between the reversibility of Minkowski Sum and the reversibility of Minkowski Difference.

Lemma 5 *Let \mathbf{V} be a linear space over the field \mathbb{R} , $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{V}$. Then*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{B} = \mathbf{A} \Leftrightarrow (\mathbf{A}' - \mathbf{B}^-) + \mathbf{B}^- = \mathbf{A}'$$

Proof: Follows from Lemma 3. ■

The last theorem has been found in [4] and is presented here in a little improved form:

Theorem 2 *Let \mathbf{X} be an inner product space, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{X}$ be compact and moreover let \mathbf{A} be convex. Then*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{B} = \mathbf{A}.$$

Proof: If \mathbf{A} is empty, then the statement is obviously satisfied. Denote $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{B}$. Let the assumptions are satisfied, but $\mathbf{X} \neq \mathbf{A}$. We know that $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}$, so there is a point $x \in \mathbf{X} : x \notin \mathbf{A}$. From separation Lemma 2 there exists a continuous linear functional f such that

$$\max_{a \in \mathbf{A}} f(a) < f(x)$$

From Weierstrass extreme value theorem, there is a point $b \in \mathbf{B}$ such that $f(b)$ is maximal. Then we have a point $x + b \in \{x\} + \mathbf{B}$ such that

$$\max_{a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}} f(a + b) = f(a) + f(b) < f(x) + f(b) = f(x + b)$$

Therefore $\{x\} + \mathbf{B} \not\subseteq \mathbf{A} + \mathbf{B}$ yields a contradiction with the definition of Minkowski difference. ■

2 Set Representations

In this section, we define mappings that are useful for representation of set $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$ that does not belong to \mathfrak{M} . One of the most powerful tools will be GMAT which may be interpreted as generalized medial axis transform.

In [1, 2], there have been defined spaces of the form $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$. These spaces are some kind of generalization of Laguerre's space of oriented spheres. It is assumed that the reader has studied these two preliminary articles. Note that definition of representation is different to that in [2] and the two terms do not coincide. The new term of representation is generalization of the older one.

2.1 Graphic Mapping

In this chapter we define a Graphic Mapping that connects the space $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$ with the original space \mathbf{V} . This mapping may be defined in more ways that will be discussed. If the image of a set will be the given set $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$, then the original set will be called the representation of \mathbf{A} , as follows.

Definition 3 Define a mapping $\mathfrak{G} : \mathcal{P}(\mathcal{V}(\mathfrak{M})) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{V})$,

$$\mathfrak{G}(\mathbf{A}) = \bigcup \varphi^{-1}(\downarrow \mathbf{A})$$

The mapping \mathfrak{G} will be called graphic mapping of sets or simply graphic mapping.

The name of the mapping has been chosen accordingly to the cyclographic mapping from Laguerre geometry. In the oriented ball space, these mappings have very similar properties.

It is also possible to define the graphic mapping of elements $A \in \mathcal{V}(\mathfrak{M})$ in at least three equivalent ways, $g(A) = \bigcup \varphi^{-1}(\downarrow \{A\})$, $g(A) = \{x \in \mathbf{V} : \vartheta(x) \preceq A\}$, $g([\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]) = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$. Then it holds for any set \mathbf{A} :

$$\mathfrak{G}(\mathbf{A}) = \bigcup_{A \in \mathbf{A}} g(A)$$

Definition 4 Let \mathbf{V} be a linear space, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$. By representation of the set \mathbf{A} we mean any set $\mathbf{R} \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{M})$ such that $\mathfrak{G}(\mathbf{R}) = \mathbf{A}$.

Note that for any set $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$, the set $\{\varphi(\mathbf{M})\}$ is the representation of \mathbf{M} , also for every point $x \in \mathbf{V}$, the set $\{\vartheta(x)\}$ is the representation of $\{x\}$. If $\mathbf{R} \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{M})$ is a representation of \mathbf{A} , then also $\downarrow \mathbf{R}$ is representation of \mathbf{A} .

This definition of representation gives us a simple criteria to say when Minkowski difference is reversible. The idea of this criteria is to detect if every point of the set \mathbf{A} is contained in some translated image of the set \mathbf{M} .

Theorem 3 Let $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$. Then $(\mathbf{A} - \mathbf{M}) + \mathbf{M} = \mathbf{A}$ if and only if there is a representation $\mathbf{R} \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{M})$ of \mathbf{A} , such that

$$\forall x \in \mathbf{A} : \exists v \in \mathbf{V} : \vartheta(x) \preceq \varphi(\mathbf{M}) + \vartheta(v) \in \mathbf{R},$$

Proof: If $(\mathbf{A} - \mathbf{M}) + \mathbf{M} = \mathbf{A}$, there is a representation of \mathbf{A} :

$$\mathbf{R} = \downarrow \{\varphi(\mathbf{M}) + \vartheta(v) : v \in \mathbf{A} - \mathbf{M}\}.$$

For every $x \in \mathbf{A}$ there is $v \in \mathbf{A} - \mathbf{M}$ such that $x \in \{v\} + \mathbf{M}$. Then the condition is trivially satisfied.

Let the condition is satisfied. We will prove that $(\mathbf{A} - \mathbf{M}) + \mathbf{M} = \mathbf{A}$. The inclusion $(\mathbf{A} - \mathbf{M}) + \mathbf{M} \subseteq \mathbf{A}$ is trivial, we will show that $\mathbf{A} \subseteq (\mathbf{A} - \mathbf{M}) + \mathbf{M}$. Let $x \in \mathbf{A}$. From the condition we have $v \in \mathbf{V}$ such that $\vartheta(x) \preceq \varphi(\mathbf{M}) + \vartheta(v) \in \mathbf{R}$. By applying the graphic mappings g , \mathfrak{G} we get $\{x\} \subseteq \mathbf{M} + \{v\} \subseteq \mathbf{A}$. But then $v \in \mathbf{A} - \mathbf{M}$ and finally $x \in (\mathbf{A} - \mathbf{M}) + \mathbf{M}$. ■

3 Conclusion and Future Work

In the article, there has been found the relationship between properties of representation of a set $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$ in the space $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$ and the problem of reversibility of Minkowski Difference. There has been formulated Theorem 3. These theorems will be useful to translate the problem of reversibility of Minkowski operations to the problem of verification of certain condition for the representation or its GMAT.

In future work, I will concentrate on applying this theory and constructing of algorithms to find some particular representations (including GMAT from [2]). I will deal with the question of rational parametrizations and rationally parametrized GMAT. The rational parametrizations are very important because of their simplicity and applicability to today's computer aided geometric design systems. The problem of finding the GMAT sometimes becomes simpler than finding the ordinary MAT because the ordinary MAT is based on the sphere, that is not a GRC surface – see e.g. [5].

References

- [1] DOBRÝ J.: *Generalization of Laguerre Geometry*, Proceedings of 25th Conference on Geometry and Computer Graphics (2005), ISBN 80-7015-013-0
- [2] DOBRÝ J.: *Generalization of Laguerre Geometry*, Proceedings of 26th Conference on Geometry and Computer Graphics (2006), ISBN 80-7040-902-9
- [3] GHOSH, P. K. *A Unified Computational Framework for Minkowski Operations*, Pergamon Press Ltd. 1993, 357-378.
- [4] TOMICZKOVÁ, S. *Minkowského operace a jejich aplikace: disertační práce*. Plzeň: ZČU v Plzni, 2006. 82 s.
- [5] LÁVIČKA, M.; BASTL, B. *Rational parametrized curves and surfaces with rational convolutions*. In Algebraic geometry and geometric modelling. Barcelona : Institut of Mathematics of Barcelona, 2006. s. 74-79.
- [6] PALLASCHKE, D.; URBANSKI, R. *Pairs of Compact Convex Sets - Fractional Arithmetic with Convex Sets*, Springer; 1 edition (December 31, 1899), ISBN 978-1402009389
- [7] SCHNEIDER R.: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press (February 26, 1993), ISBN 978-0521352208

Studijní opory deskriptivní a konstruktivní geometrie

Jiří Doležal

*Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava
17. listopadu, 708 33 Ostrava-Poruba
email: jiri.dolezal@vsb.cz*

Abstrakt. Příspěvek představuje základní rysy studijních materiálů pro předměty konstruktivní a deskriptivní geometrie; k základním vlastnostem vytvořených materiálů patří volná dostupnost na webu, řešení konstrukčních úloh „krok po kroku“, a v neposlední řadě možnost porovnání situace v průmětu a v prostoru prostřednictvím interaktivních virtuálních 3D modelů...

Klíčová slova: deskriptivní geometrie, konstruktivní geometrie, konstrukce „krok po kroku“, virtuální 3D model.

1 Úvod

Představované studijní materiály vznikly v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016 pod názvem „**Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia**“; tento projekt, který v roce 2006 získala VŠB-TU Ostrava, je dvouletý a je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Cílem projektu je, jak napovídá jeho název, zpracování studijních opor pro předměty teoretického základu studia, tj. hlavně pro matematiku, fyziku a chemii, a to tak, aby byly využitelné především k samostudiu s minimálním počtem kontaktních hodin studenta a učitelem.

Výstupy projektu jsou přístupné na jeho webových stránkách, kde lze najít také příslušné odkazy a další aktuální informace (viz [1]); pro předměty deskriptivní a konstruktivní geometrie byly vytvořeny studijní materiály agregovány manažerem projektu do dvou předmětů s názvy **Základy geometrie** a **Geometrie**.

2 Problematika předmětů

Tradičně jsou řešení geometrických úloh (planimetrických či stereometrických) podávána formou jediného obrázku, v němž jsou provedeny konstrukce od samotného zadání až po konečné řešení; k tomu je připojen doprovodný text, který popisuje postup jednotlivých konstrukčních kroků.

U složitějších úloh je tedy dosti obtížné najít v obrázku „začátek a konec“, sledovat, v jakém pořadí jednotlivé konstrukce přibývaly (a proč), nehledě na to, že vysvětlující popis je často na jiné stránce atp.

Další fatální problém vzniká obvykle u stereometrických konstrukčních úloh řešených metodami deskriptivní geometrie – pro většinu studentů je velkým problémem chápat, sledovat, uvědomovat a představovat si vztahy mezi konstrukcemi prováděnými v prostoru a jejich zobrazením v průmětu při zvolené zobrazovací metodě.

3 Nástin řešení

Většinu poznatků a zkušeností získáváme pomocí analogií s vzorovými situacemi, proto jsou stěžejní částí vytvořených studijních opor právě řešené úlohy.

Výše uvedené problémy jsou v rámci projektu a v soulasu s jeho filozofií řešeny pomocí multimediálních prvků, krokováním řešení jednotlivých úloh a přidáním interaktivních virtuálních 3D modelů.

4 Použití technologie

Řešení každé geometrické úlohy je zasazeno do multimediálně laděné HTML stránky, v níž jsou uživateli k dispozici ovládací prvky, které pomocí skriptovacího jazyka JavaScript umožňují interaktivně procházet jednotlivé kroky řešení spojené s výměnou příslušných obrázků a zvýrazněním patřičné části postupu.

Legendy - Fre - 27th Conference - Stejnolehlost - řeš

Úvod > Očien > Planimetrie > Geometrická zobrazení > Stejnolehlost >

Stejnolehlost - řešená úloha

Pappova úloha Bpk

Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky p v jejím bodě A a dané kružnice $k(S, r)$.

Rozebírá úlohu:

- úloha je vyřešena, tj. kružnice $k(S', r')$ se dotýká přímky p v bodě A a také se dotýká kružnice $k(S, r)$
- střed S' kružnice k' leží na normále n přímky p sestrojené v bodě A (viz $M\bar{O}$ v přehledu množin všech bodů dané vlastnosti)
- kružnice k a k' jsou stejnolehé, přičemž středem stejnolehlosti je bod T jejich dotyku, v této stejnolehlosti se tečna p ke kružnici k s bodem dotyku A zobrazí na tečnu p' ke kružnici k' s bodem dotyku A' , a bude platit $p' \parallel p$.

Konstrukce:

- zadání: přímka p a na ní bod A , a kružnice $k(S, r)$
- nejprve je bodem A vedena kolmice n k přímce p
- dále je sestrojena přímka p' , jako jediná ze dvou tečen kružnice k rovnoběžných s přímkou p , přímka AA_1 , kde A_1 je bodem dotyku přímky p' a kružnice k , protíná kružnici k ještě v bodě T_1 , ten je bodem dotyku dané kružnice k a hledané kružnice k_1
- přímka ST_1 protne přímku n ve středě S_1 , Hledaná kružnice $k_1(S_1, r_1) = [S_1, T_1] = [S, A]$
- podobně protíná přímka AA_2 , kde A_2 je bodem dotyku kružnice k a přímky p_2 , která je druhou tečnou kružnice k rovnoběžnou s přímkou p , kružnici k ještě v bodě T_2 , jenž je bodem dotyku dané kružnice k a hledané kružnice k_2
- střed S_2 je pak průsečíkem přímky ST_2 s normálou n , Hledaná kružnice $k_2(S_2, r_2) = [S_2, T_2] = [S, A]$ se dotýká dané přímky p v jejím daném bodě A a také se dotýká dané kružnice k

Diskuze:
Úloha může mít nekonečně mnoho, právě dvě, právě jedno nebo žádné řešení. Podrobnější diskuze je přenechána čtenáři jako cvičení.

Obr. 1: Ukázka vzhledu HTML stránky s vybranou řešenou úlohou

Pro malé rozlišení počítačových monitorů nejsou obrázky v HTML stránce příliš kvalitní – je pro ně použit rastrový formát GIF; také doprovodný text se snaží o co největší stručnost, aby nebylo nutno přiliš rolovat stránku „nahoru dolů“.

Tyto nevýhody jsou kompenzovány dvěma způsoby – po kliknutí na obrázek konstrukce se otevře nové okno s tímtež obrázkem, ovšem tentokrát ve vektorovém formátu SVG (je ovšem třeba mít na lokálním počítači nainstalovaný příslušný plug-in), dále je u každé úlohy připojen odkaz ke stažení tisknutelné verze stránky uložené ve formátu PDF.

V tomto PDF dokumentu jsou opět rozkresleny jednotlivé fáze řešení a ke každé z nich je připojen podrobný popis prováděných konstrukcí – podrobnější než na HTML stránce a preciznější z hlediska použití zavedené matematické symboliky.

U stereometrických úloh je navíc v HTML stránce přítomen virtuální model dané prostorové situace napsaný v jazyce VRML (pro jeho zobrazení je opět nutná instalace příslušného plug-inu, relevantní poznámky technického rázu jsou uvedeny na úvodní stránce materiálů), který prostřednictvím interaktivních animací přispívá k možnosti „osahat“ si danou 3D scénu.

Průnik rotačního vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysu (varianta různoběžných os - metoda soustředných kulových ploch)

Řešené úlohy

Příklad: V kolmém promítání na nárysu sestrojte průnik rotačního vejčitého elipsoidu s kulovou plochou; elipsoid má střed S , svíslou osu o a délky a, b hlavní a vedlejší poloosy; kulová plocha je dána středem S' a poloměrem r , $S(2,0,5)$, $a=5$, $b=3$, $S'(2,0,6)$, $r=4$.

- zadání úlohy: rotační vejčitý elipsoid protíná nárysu v hlavní meridiánové elipse m , která má střed S , hlavní poloosu délky a a svíslou přímce o a vedlejší poloosu délky b ; kulová plocha protíná nárysu v kružnici m' (S');
- nepříme jsou sestrojeny průsečky X, Y hlavní meridiánové elipsy m a hlavní meridiánové kružnice m' daných ploch; pro další postup je na ose o zvolen bod R a přímka $o \perp RS'$ nechť je osou rotace dané kulové plochy
- nyní je zvolena pomocná kulová plocha α , která má střed v bodě R a libovolný vhodný poloměr; tato kulová plocha protíná obě dané rotační plochy v rovnoběžkových kružnicích α, α' , jejichž průsečky A, A' jsou body hledaného průniku
- podobně je zvolena jiná kulová plocha β o středu R ; sestrojeny rovnoběžkové kružnice b, b' a jejich průsečky B, B'
- tento princip je aplikován ještě jednou pro kulovou plochu γ , která protne daný elipsoid a kulovou plochu v rovnoběžkách c, c' , jež se protínají v bodech C, C' ; průniková křivka r prochází sestrojennými body a je souměrná podle nárysu
- tečny l, l' v bodech C, C' křivky r musí být kolmé k příslušným normálovým rovinám $A \perp CSN$, $A' \perp CS'N$, kde bod N je průsečkem osy o a normály n elipsy m v jejím průsečku s kružnicí c

Obr. 2: HTML stránka s vybranou řešenou prostorovou úlohou

V rámci virtuálního modelu lze rovněž krokovat postup řešení dané úlohy, sledovat tak přibývající konstrukce přímo v prostoru i v průmětu a díky tomu si lépe ujasnit odpovídající vztahy.

Tímto způsobem bylo prozatím zpracováno asi 90 řešených příkladů, k nimž je také stručně a heslovitě doplněna příslušná teorie; přitom bylo vytvořeno celkem asi 75 virtuálních modelů a nakresleno zhruba 680 obrázků.

5 Závěr

Vytvořené studijní materiály se snaží přispět k vyplnění stále se zvětšujících mezer při výuce syntetické, především prostorové geometrie. Snaží se nabídnout možnost osahat si myšlenkové postupy při řešení konstrukčních úloh a prostřednictvím virtuálních 3D modelů je sledovat z různých úhlů pohledu.

Prozatímní kladné ohlasy jsou podnětem k pokračování v započaté práci, neboť je zde ještě řada zajímavých a zatím nezpracovaných témat, zejména těch, která mají blízký vztah k aplikacím v technických oborech a nesou tak v sobě tolik potřebný motivační prvek.

Reference

- [1] <http://www.studopory.vsb.cz>

Počítačová podpora výuky stereometrie

¹Šárka Gergelitsová, ²Tomáš Holan

¹*Gymnázium Benešov,
Husova 470
email: sarka@gbn.cz*

²*KSVI MFF UK Praha,
Malostranské náměstí 25, Praha
email: Tomas.Holan@mff.cuni.cz*

Abstrakt. Geometrické kurikulum na našich školách čelí novým nárokům na znalosti a schopnosti studentů. V posledních letech se objevily nové 3D modeláře a programy určené výhradně pro účely výuky. Při rozvoji prostorové představivosti mohou pomoci také různé hříčky, které žáky (nejen na základní škole) zaujmou a přimějí je představit si vzájemnou polohu prostorových objektů. Příspěvek ukáže využití takových jednoduchých výukových programů, které podporují schopnost orientace ve virtuální trojrozměrné scéně a pomohou pochopit význam soustavy souřadnic.

Klíčová slova: 3D scéna, VRML, zadávání prvků scény, souřadnice

1 Výukové programy

Pro účely výuky matematiky vzniká v poslední době řada počítačových programů. Některé z nich se orientují i na budování kompetencí, které se týkají prostorové představivosti. Jmenujme zde zejména produkt Cabri 3D, jehož poslední verze jsou již velice výkonným výukovým nástrojem. Pro nácvik práce s trojrozměrnou scénou mohou pomoci také jednodušší CAD systémy. Trojrozměrné prostředí virtuální scény je však pro mnohé studenty natolik nepřehledné, že nácvik práce v něm může vyžadovat nějaký čas.

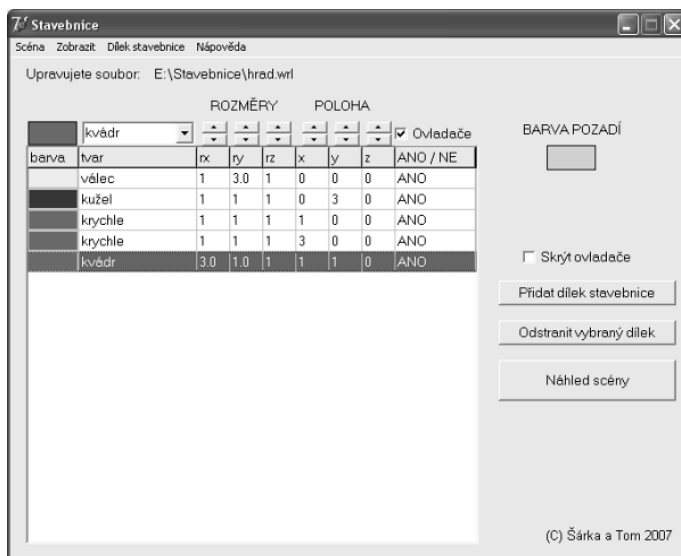
2 Podpora prostorové orientace jako hra pro žáky (nejen) nižšího gymnázia

Chtěli bychom představit čtyři jednoduché programy, které formou hry připraví studenty na práci v trojrozměrné scéně a pomohou jim orientovat se v prostoru pomocí pravouhlé soustavy souřadnic. Virtuálním prostředím, použitým v programech, je VRML scéna. K jejímu prohlížení je třeba mít na počítači nainstalovaný nějaký VRML prohlížeč. Například plug-in webového prohlížeče Cortona VRML Client, který můžete volně stáhnout z oficiálních stránek výrobce: <http://www.cortona3d.com/cortona>.

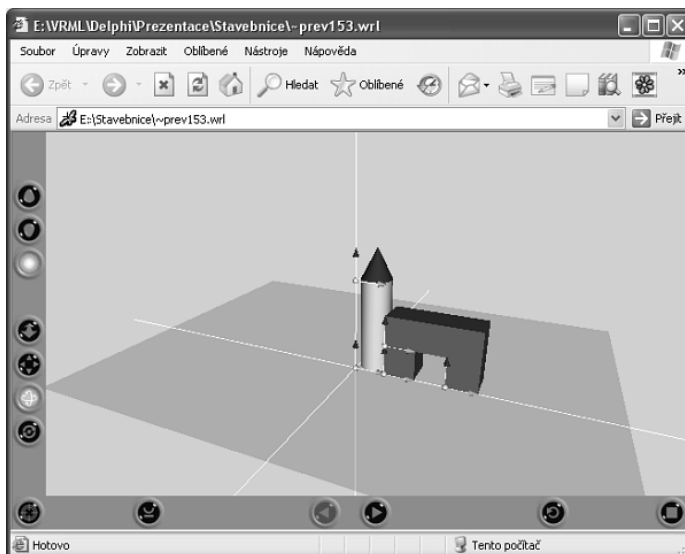
2.1 Stavebnice

Žáci se ve škole poprvé setkají se soustavou souřadnic při zakreslování bodů do roviny ortonormálních souřadnic Oxy . Přitom pohyb v prostoru (vlevo–vpravo,

dopředu–dozadu, nahoru–dolů) je pro děti zcela samozřejmý. Můžeme tedy využít jejich intuitivní znalosti a nechat je tvořit „hrady“ z kostek, ale v abstraktní, textové podobě (viz Obr. 1).



Obr. 1: Náhled prostředí programu



Obr. 2: Náhled sestavené scény ve VRML prohlížeči

Stavebnice umožňuje vkládat do trojrozměrné scény na dané pozice kostky různých tvarů, velikostí a barev, umožňuje náhled do sestavené trojrozměrné scény a následnou manipulaci s kostkami ve scéně (Obr. 2). Kostky se umísťují do dané soustavy souřadnic.

Pokud žákům předložíme k sestavení konkrétní předlohu, můžeme posuzovat správnost postupu. Můžeme však také nechat děti tvořit vlastní fantazie. S touto stavebnicí si hrají i studenti ve věku, ve kterém by manipulaci se skutečnou, dřevěnou stavebnicí ve škole považovali za nemístnou.

2.2 Hra

Hra navazuje na Stavebnici. Ve Hře dostane řešitel obrázek (případně několik obrázků – pohledů z různých stran) požadované sestavy, kterou však tentokrát nestaví z libovolných kostiček, ale pouze z těch, které dostane. Přitom smí měnit pouze polohu kostiček, nesmí je ani otáčet, ani měnit jejich rozměry či barvu.

Úloha

Sestava

Nastavte polohy kostiček tak, aby výsledkem byla konfigurace zobrazená na obrázcích. Velikost ani barvu kostiček nemůžete měnit, vyberte si z nabídnutých možností.

Vyhodnot

Počet pokusů: 0

Počet náhledů: 0

Rozměry dílku

barva	tvar	rx	ry	rz	x	y	z	NE
	hranol	2	2	1	0	0	0	NE
	hranol	2	2	1	0	0	0	NE
	hranol	2	1	2	0	0	0	NE
	hranol	2	1	2	0	0	0	NE
	hranol	1	2	2	0	0	0	NE
	hranol	1	2	2	0	0	0	NE

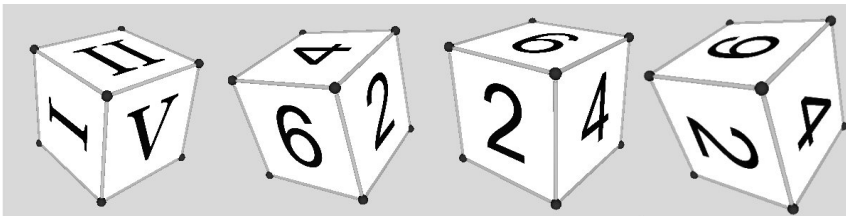
(C) Šárka a Tom 2007

Obr. 3: Náhled zadání úlohy

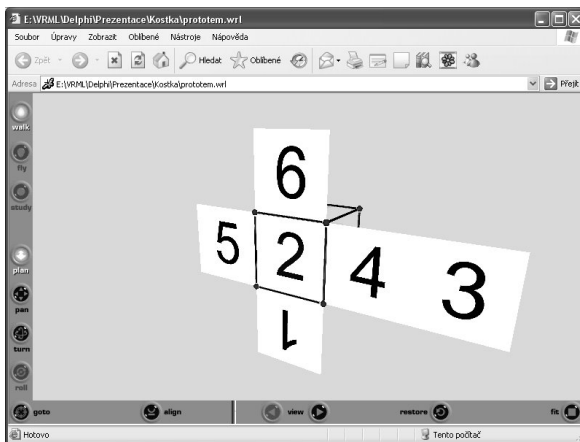
Program zapisuje informace o postupu řešení do textového souboru, který slouží učitelům pro hodnocení. Do tohoto souboru program zapíše čas, který uživatel potřeboval na řešení, počet neúspěšných pokusů včetně počtu pomocných náhledů, které řešitel k vyřešení úlohy potřeboval, případně i to, že úloha nebyla vyřešena. Hra obsahuje připravenou sadu úloh.

2.3 Síť krychle

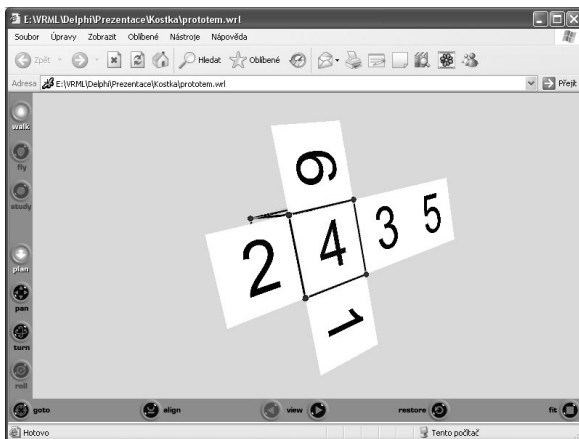
V mnohých kvízech či testech prostorové představivosti najdeme podobnou úlohu: v pohledu (pohledech) je zobrazena krychle (většinou hrací kostka) a děti mají nakreslit její rozvinutou síť se správnou orientací vzorů na stěnách krychle. Úloha patří mezi obtížnější a její správné vyřešení nutí k představě orientace v prostoru. Příprava takové nové úlohy je pro učitele časově náročná a zdůvodnění správnosti řešení bez existence skutečného modelu není snadné. Program, který předkládáme, v sobě zahrnuje tvorbu zadání (učitel může na stěny krychle umístit různé obrázky a zvolit jejich otočení), možnost prozkoumání virtuálního modelu a kontrolu správnosti řešení rozvinutím sítě.



Obr. 4: Různé kostky připravené k rozvinutí



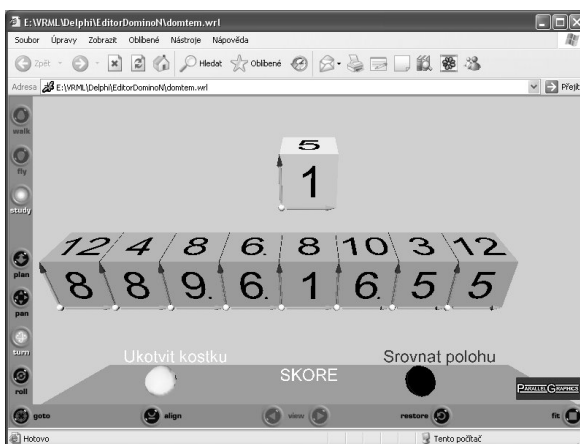
Obr. 5: Jedna rozvinutá síť kostky



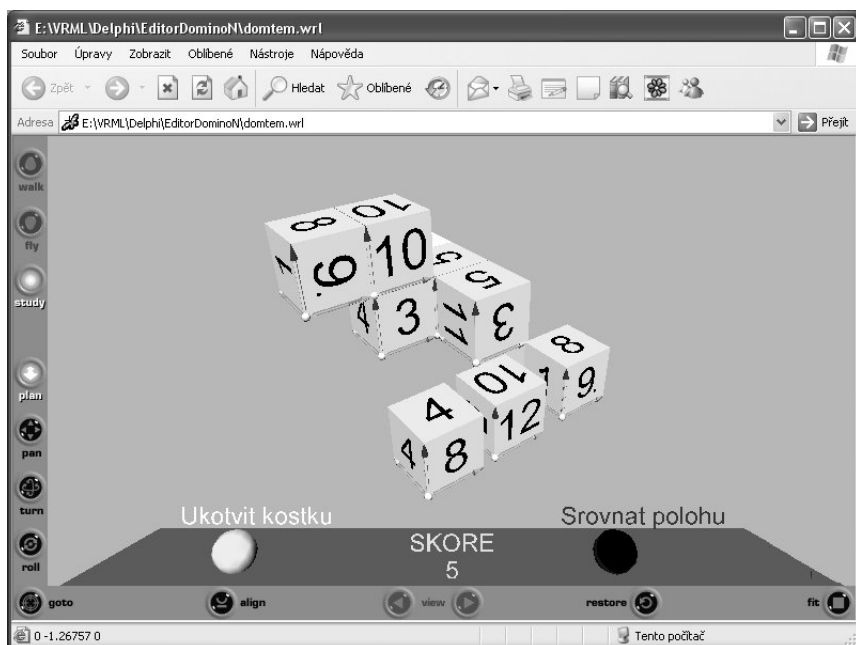
Obr. 6: Jinak rozvinutá síť těžé kostky

2.4 Domino

Inspirací k modelu virtuálního prostorového domina byly papírové skládačky dr. Šarounové z MFF UK a její námět domina v prostoru. Virtuální podoba dovoluje umisťovat krychličky libovolně do prostoru bez omezení fyzikálními zákony. Cílem hry je nasbírat co nejvíce bodů „slepením“ daných krychlí tak, aby se dotýkaly stěnami se stejným počtem bodů. Pokud se podaří umístit krychlí tak, že sousedí s více dalšími krychlemi a vícekrát se dotýká stěnami se shodným ohodnocením, dosažené skóre se násobí. Tato hra tedy motivuje k přípravě krychliček, jejich natočení a představě jejich následného umístění do scény.



Obr. 7: Výchozí pozice Domina



Obr. 8: Snímek obrazovky během hry

3 Závěr

Skutečné trojrozměrné modely dávají dětem nenahraditelnou možnost manipulace a zkoumání prostorové situace nejen zrakem, ale i hmatem. Jsou však omezené fyzikálními možnostmi a bývají obtížně modifikovatelné. Naproti tomu modely virtuální v sobě již zahrnují jistý stupeň abstrakce, nutí k manipulaci v prostoru pomocí myši, klávesnice a (rovinné) obrazovky. Mají velikou výhodu ve své variabilitě a v přitažlivosti, kterou pro děti práce s počítačem má.

Zvýšení využitelnosti obrazových dat ve výuce pomocí získaných sémantických informací

Tomáš Gregar a Radka Pospíšilová

*Faculty of Informatics, Masaryk University,
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
email: xgregar@fi.muni.cz, xpospis5@fi.muni.cz*

Abstrakt. Tento příspěvek představuje vyvíjený systém pro popis obsahu obrazových dat (fotografií) pro potřeby elektronické podpory výuky. Fotografie jsou segmentovány, a jednotlivým oblastem obrazu je pak poloautomaticky přidělen nejpravděpodobnější význam. Popisujeme zde algoritmus tohoto přidělení, kde se využívají jak vnější sémantické informace uložené v ontologiích, tak informace získané a uložené z předchozí práce algoritmu pomocí strojového učení.

Klíčová slova: ontologie, grafické popisovače, e-learning, strojové učení

1 Motivace

Kvůli počítačovému zpracování dat je tento typ výuky omezen hlavně na práci s textem. Vnímání obrazů je jednodušší, ve výuce se využívají jako příklady či pro vizualizaci složitých struktur. Cílem anotačního systému je umožnit podobné využití i ve výuce elektronické za použití existujících standardů v souvisejících oblastech (MPEG-7, XML, SCORM...).

2 Anotační systém

Kvůli obecně jakémukoli tématu výuky jsme byli nuceni navrhnout systém nespécializovaný na určitou doménu obrazů. Takový systém nemůže mít úspěšnost úzce specializovaných postupů; my ovšem nehledáme ideální řešení, ale zlepšení současného stavu.

Pro počítačové zpracování obrazu (vyhledávání, organizace...) je třeba mít uložena jeho metadata (popisná data). Pokud nejsou dodána ručně, je velký problém, jak je získat. Existují v zásadě dvě možnosti – buď je zkoumán *kontext* umístění, nebo je zkoumán grafický *obsah* obrazu. První možnost příliš závisí na vnějších datech; ta nemusí být pravdivá a nemusí být ani přítomna. Proto nemá příliš dobré výsledky (webové vyhledávače, např. Google).

Náš systém proto používá druhý postup [1], i když upravený. Z obrazu nezískáváme jen všeobecné, čistě grafické informace, ale snažíme se získat popis jeho struktury a význam jednotlivých nalezených oblastí. To umožňuje identifikaci pojmu s oblastí, která jej na obraze reprezentuje.

Získaná data pak umožňují:

- Pracovat se sémantickým kontextem pojmů – je možné zjistit nadpojmy či podpojmy; oblasti fotografie, kde jsou zobrazeny.

- Zkvalitnit vyhledávání – neboť vyhledáváme dle obsahu, můžeme uživateli nabízet rozšiřování či omezování dotazů, hledat příbuzná témata.
- Postupně zlepšovat výsledky systému – neboť získané informace se používají při další práci



Obr. 1: Identifikace objektu na fotografii

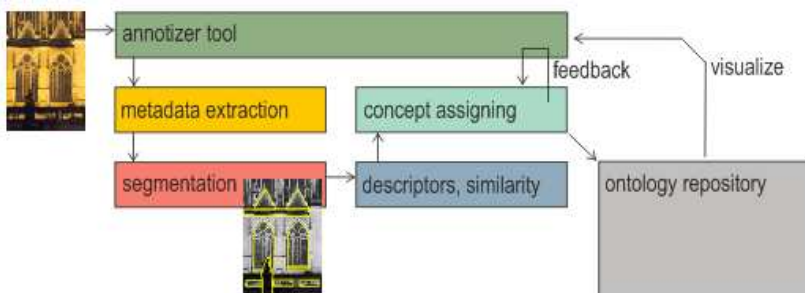
2.1 Ukládání informací

Metadata tedy musíme ukládat. Používáme XML reprezentaci, konkrétně jazyka RDFS, schopného popisovat ontologie (explicitní popis definice pojmů a vztahů v určité doméně vnějšího světa). Data, která ukládáme, můžeme rozdělit do čtyř kategorií [2]:

- Hodnoty různých vlastností pro určité grafické objekty, tzv. *grafické popisovače* (deskriptor), včetně definice povolených popisovačů. Zde jsme mohli vyjít ze standardu MPEG-7, který definuje metadata a popisovače audiovizuálních dat. Ontologii popisující použité popisovače nazýváme VDO (Visual descriptor ontology).
- Data definující strukturu obrazu. Oblasti jsou identifikovány pomocí jim přidělených vektorů hodnot grafických popisovačů. Ontologii a její prvky označujeme MSO (Media structure ontology).
- Popis domény, o které ve fotografiích sbíráme informace. Aby byla možná spolupráce mezi různými doménami, jsou formalizovány i základní pojmy pomocí ontologie DOLCE. Pro získání jazykově příbuzných pojmů používáme Wordnet.
- Částí doménové ontologie je pak technicky i *Index*, tj. seznam propojující pojem v doménové ontologii s instancemi objektů, které zobrazují daný pojem.

2.2 Anotační algoritmus

Algoritmus v hrubých rysech kopíruje vnímání obrazových informací zrakem. Proto potřebuje „dlouhodobou paměť“, tj. úložiště pro uložení ontologických struktur. Základem úložiště je RDF-databáze Sesame.



Obr. 2: Struktura systému

Fotografie, na které chceme identifikovat její sémantický obsah, je nejprve rozsegmentována, získána z ní explicitní metadata. Poté se systém pokusí na základě hodnot grafických popisovačů a uložených dat odvodit pravděpodobný význam. Ten zkontroluje uživatel. Výsledek je uložen (a případně použit při odvozování významu dalších obrazů).

Segmentace

Segmentace byla navržena tak, aby nejen dělila obraz do segmentů, ale navíc mezi nimi tvořila hierarchii. Je proto víceúrovňová (standardně počítáme se dvěma průchody). Fotografie je ze základního rozměru převedena do nižšího rozlišení, což snižuje detailnost.

Pokud stejný segmentační algoritmus spustíme nad těmito dvěma rozlišeními, najde různé oblasti. Můžeme ale nalézt inektivní zobrazení ze segmentace nižšího rozlišení do vyššího. To pak můžeme využít k získání informací o vnitřní prostorové struktuře pojmů.

Segmentace v sobě kombinuje prvky jak *region-based*, tak *edge-based* a aktuálně probíhá její testování.

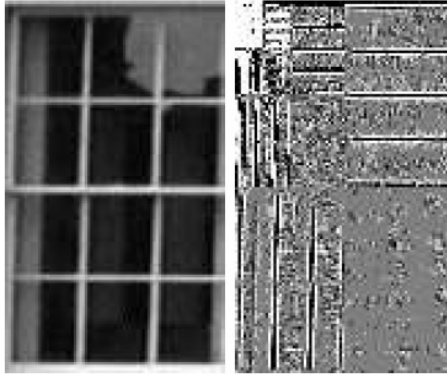
Grafické popisovače

Pro popis struktury a grafického obsahu určitého segmentu nám nestačí jedna hodnota. Segment je identifikován vektorem hodnot grafických popisovačů. Při jejich výběru jsme vycházeli ze standardu MPEG-7, vybrali jsme ovšem jen popisovače pro statický obraz.

Jedná se o tyto:

- *Dominantní barva* – jak jednotlivých oblastí, tak celého obrazu (střední hodnota a odchylka pro každou barevnou složku)

- *Textura* – popsána pomocí vlnkové transformace. Ta není závislá na měřítku, které může být na různých fotografiích různé. Výsledek transformace uložen v histogramu.



Obr. 3: Vlnková transformace na fotografii okna

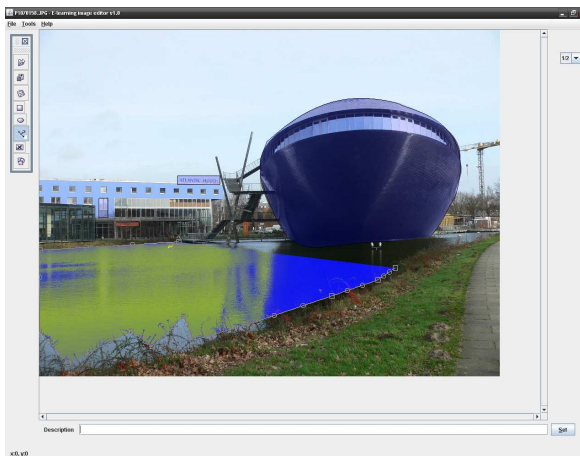
- *Tvar* – přesný popis tvaru by byl příliš prostorově náročný, proto se používají:
 - *Excentricita*
 - $Exc = a/b$
a = delší osy konvexní obalové elipsy, b = kratší
 - *Konvexnost*
 - $Conv = 4\pi A/O$
A = obsah oblasti, O = obvod
 - *Kompaktnost*
 - $Comp = A/H$
A = obsah oblasti, H = konvexní obal
- *Velikost oblasti* – procenta z plochy obrazu a procenta plochy nadřazeného segmentu
- *Pozice* – vzájemná prostorová poloha mezi oblastmi (brána pozice a vzdálenost těžišť oblastí)
- *Struktura* – nejedná se vlastně o „nízkourovňovou“ grafickou vlastnost, vzniká segmentací a následnými úpravami, umožňuje získat více informací o velikostech oblastí a pozic segmentů pomocí informací o nadoblastech a podoblastech.

Přidělování sémantiky

Segmentace připraví hierarchickou strukturu oblastí s definovanými vektory hodnot popisovačů.

Kvůli snížení časové náročnosti vyhledávání k pojmům ontologie ukládáme „typické hodnoty“ zkoumaných popisovačů. Tam kde je to možné, jsou tedy uloženy hraniční hodnoty popisovače, pomocí histogramu je popsána distribuce

hodnot daného popisovače mezi identifikovanými zobrazeními daného pojmu. Důležitá je také váha, určující „sílu“ daného popisovače pro identifikaci pojmu (fuzzy logika). To nám umožní snížit počet porovnáání, neboť dokážeme vyloučit některé pojmy před časově náročnou fází strojového učení.



Obr. 4: Vizualizační a segmentační editor

Pro všechny segmenty v nově přidaném obrazu. Segmenty jsou procházeny podle nalezené hierarchie od nejmenších po celý obraz.

- **Procházej doménovou ontologií** (tj. hierarchii pojmů, které chceme přidělit) od vrcholu hierarchie (tj. nejobecnějších pojmů)
 - **Porovnej vypočítané hodnoty popisovačů nového segmentu s uloženými „typickými“**
 - Pokud vektor hodnot neodpovídá uloženým metadatům (rozsah, váha popisovače...), je vyloučen z prohledávání nejen zkoumaný pojem, ale také celý strom podpojmů, které jsou jeho specializacemi.
- Získali jsme seznam pojmů v různé úrovni hierarchie domény, které by mohly být zobrazeny daným segmentem
 - **Nalezení nejvhodnějšího pojmu**
 - Mezi nalezenými blízkými pojmy (blízkost – míra odpovídání nalezené hodnoty s distribucí hodnot pro daný pojem kombinovaná s váhou popisovače)
 - Nelze již odvodit jen pomocí uložených metadat
 - Strojové učení, metoda SVM mezi **všemi instancemi** které zobrazují pojmy, které jsme v předchozích bodech identifikovali jako uchazeče; tj. klasifikace nového segmentu mezi X třídami.

Revize

- Mimo omezení kvůli grafickým vlastnostem je hledání pojmu upravováno také ontologií; při hledání významu nadstruktury je brán v potaz význam přidělený podsegmentům
- Celý postup je poloautomatický, poslední slovo má vždy nakonec uživatel

Modifikace „typických“ hodnot

- Základní část po zpracování jednoho obrazu (úprava váhy popisovačů, kontrola změn hraničních hodnot...)
- Podrobnější a časově náročnější transformace (bylo by například možné pokusit se pomocí automatických logických odvozovacích nástrojů nad daty nalézt nové informace) pak pravděpodobně v delších časových intervalech, tak, aby co nejméně rušily uživatele.

3 Závěr

V příspěvku byl představen algoritmus pro identifikaci sémantického významu obrazového segmentu. Při jeho návrhu byl dáván důraz na co největší obecnost. Ta na jednu stranu umožňuje jeho použití na jakoukoli doménu, a tedy využití v elektronické výuce, na druhou stranu nemůže dosahovat takových výsledků jako specializované postupy. Zaměřili jsem se na rychlost postupu pro možnost interaktivního využití [3].

Algoritmus je implementován v rámci projektu ELSW. Bylo pro něj naimplementováno ontologické úložiště, vyvíjí se editor/prohlížeč pro výukové účely, testujeme možnost využití postupů *human computing*. Aktuálně ještě upravujeme použitou segmentaci a provádíme experimenty ohledně nastavení a přenastavování vah popisovačů.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za podpory projektu Národního programu Informační společnost 'E-learning v kontextu sémantického webu', č. 1ET208050401.

Literatura

- [1] G. Stamou, S.Kollias (editors): *Multimedia Content and the Semantic Web: Standards, Methods and Tools*, ISBN: 978-0-470-85753-3, 414 pages, 2005
- [2] T. Gregar, R. Pospíšilová: *Tvorba a využití vizuálních ontologií v elektronické podpoře výuky*, DATAKON 2006, Sborník databázové konference, ISBN 80–210–4102–1, 2006, pages 169-178.
- [3] T. Pitner, S. Ivanaj: *E-learning 2.0 Adaptive and Intelligent Applications*. In iTET Joint Working Conference 2007. ISBN 978-80-254-0391-4, 2007, pages 94-111.

Interaktivní geometrie

Roman Hašek, Pavel Pech

*Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Č. Budějovicích
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
email: hasek@pf.jcu.cz, pech@pf.jcu.cz*

Abstrakt. Obsahem příspěvku je interaktivní geometrie a možnost jejího uplatnění ve škole. Jsou podány informace ohledně tvorby webových stránek interaktivní geometrie, které budou k dispozici ve všech zemích EU. Možnost spolupráce.

Klíčová slova: dynamický geometrický software, e-learning, výukové materiály

1 Úvod

V posledních letech jsme byli svědky rozkvětu interaktivních prostředků, které obohatily možnosti učitelů při výuce matematiky a celé řady dalších předmětů. Toto bohatství má však i své problémy - učitelé potřebují podporu jak se vyrovnat s různorodostí prostředků, které mají k dispozici: který software použít, kde mohu najít dostatek příkladů, je tento příklad vhodný pro mou třídu?

Programy dynamické geometrie (DGS), jako jsou například Cabri, Cinderella či Geonext, se stávají stále běžnějším prostředkem výuky nejenom matematiky, ale i dalších přírodních věd. V těchto interaktivních geometrických programech můžeme vytvářet dynamické konstrukce, tj. konstruovat body, přímky, trojúhelníky, kružnice, kuželosečky a jiné křivky daných vlastností s možností bezprostředně s těmito objekty pohybovat. Taková konstrukce je obecnější než tradiční postupy převzaté v nezměněné podobě z antické geometrie. DGS ale mají řadu dalších možností, které dovolují jejich využití i v jiných předmětech.

V Evropě je v současné době několik silných center tvorby řešených úloh a dalších výukových materiálů určených pro konkrétní programy dynamické geometrie, stručně řečeno e-learningových materiálů. Tato centra se soustředí především kolem tvůrců těchto programů, případně jejich uživatelů z řad učitelů či akademických pracovníků. Vedle těchto výrazných center existuje velké množství dalších zdrojů uvedených materiálů, pocházejících opět hlavně z řad učitelů a akademických institucí.

Cílem článku je informovat čtenáře o mezinárodním projektu Intergeo, jehož posláním je realizace vzájemné integrace evropských programů DGS a výukových materiálů v nich vytvořených.

2 Projekt Intergeo

Projekt Intergeo, jehož plný název zní „Interoperable Interactive Geometry for Europe“, byl zahájen 1. října 2007 a potrvá tři roky. Jeho oficiální webová stránka je dostupná na adrese <http://www.inter2geo.eu>.

Hlavním úkolem projektu je učinit digitální zdroje určené pro výuku matematiky v Evropě více dostupné a využitelné. Konkrétními reprezentanty těchto zdrojů byly zvoleny materiály vytvořené programy interaktivní geometrie. Důvodem je jednak výše uvedená široká základna již hotových materiálů, ale také to, že geometrické konstrukce jsou do jisté míry nezávislé na jazykovém prostředí. V neposlední řadě přispěla k tomuto výběru i skutečnost, že programy dynamické geometrie pomáhají stále více ilustrovat a vizualizovat i pojmy mimo matematiku, například z chemie, fyziky či biologie. Projekt má deset hlavních řešitelů a zatím tři externí řešitele (očekává se, že jejich počet poroste) dohromady ze sedmi evropských zemí.

2.1 Hlavní problémy integrace výukových materiálů

Hlavní problémy globálního využití programů DGS a souvisejících interaktivních e-learningových materiálů, jsou následující:

- roztržitost obsahu,
- chybějící standardizace datových formátů,
- chybějící kritéria kvality interaktivního obsahu,
- nedostatek metadat (klasifikace obsahu apod.),
- chybějící napojení na školní osnovy napříč různými zeměmi,
- otázka autorských práv (IPR - Intellectual property rights).

Zdroje příkladů by měly být standardizovány a centralizovány. Liší se kvalitou a specifickým využitím podle potřeb, proto by měly být testovány a metadata by měla odrážet výsledky testování. Každý konkrétní DGS má svá specifika. Školní osnovy obsahují témata, která by měla být dostupná v každém z těchto programů. Vytváření příslušných materiálů učiteli je časově velmi náročné a neehospodárné. Existující zdroje musí být nabídnuty ve formě, která umožní jejich užití bez ohledu na program, který škola vlastní.

2.2 Cíle projektu Intergeo

- A) Interoperabilita a metadata – společný popis základní struktury zdrojů interaktivní geometrie (ontologie a OpenMath XML formát).
- B) Obsah – vytvoření zdrojů. Uživatelé z různých zemí mohou použít svých zkušeností a pomohou vytvořit vhodný obsah.
- C) Ocenění kvality – vytvoření společných standardů kvality, které uživatelům umožní hodnocení obsahu vzhledem k situacím ve vyučovacím procesu.

2.3 Očekávané výsledky

Hlavním očekávaným výsledkem by měl být trvalý růst efektivního využití digitálních technologií a samozřejmě kvalitního software interaktivní geometrie ve třídách po celé Evropě. Tento růst by měl být kvantitativně postižen plánovanými měřeními, která se uskuteční na počátku a na konci projektu.

Další očekávané výsledky vzniknou realizací dílčích úkolů projektu. Patří mezi ně například:

- Databáze kvalitních pedagogických zdrojů, určených pro celou Evropu.
- Standardní souborový formát a specifikace rozhraní pro tvorbu aplikací, které dají základ pro budoucí softwarová řešení v e-learningu.
- Definice metadat, tj. jednotných kritérií posuzování a třídění výukových materiálů. Usnadní vyhledávání a využití pedagogických zdrojů. Obecně pak přispěje k tvorbě e-learningových standardů.
- Vytvoření on-line e-learningové komunity na evropské úrovni, která bude mít své národní (jazykové) větve.

2.4 Hlavní řešitelé projektu

University of Education Schwabisch Gmünd (Německo): Koordinátor projektu. Vývoj komerčního programu dynamické geometrie Cinderella.

Université Montpellier (Francie): Spojení několika subjektů: 1. Vývojáři a uživatelé programu dynamické geometrie Geoplan/Geospace. 2. Program TracEnPoche pro interaktivní výuku matematiky spolu s portálem MathEnPoche. 3. OFSET, francouzské společenství pro tvorbu a prezentaci volně šiřitelného výukového software. 4. IREM, výzkumný ústav pro výuku matematiky.

German research center for artificial intelligence, Saarbrücken (Německo): Podpora e-learningu. Skupina ActiveMath zkoumá a vyvíjí nástroje podpory matematické výuky prostřednictvím internetu. Centrum standardu OpenMath pro počítačovou reprezentaci matematiky.

Cabrilog SAS, Grenoble (Francie): Vývoj programů Cabri II+, Cabri Junior, Cabri 3D. Obrovská databáze hotových materiálů.

University of Bayreuth (Německo): Vývoj oceňovaného volně šiřitelného programu GEONExT. Velká skupina uživatelů a množství materiálů.

Université du Luxembourg (Luxembourg): Volně šiřitelný software GeoGebra. Výzkumná činnost v oblasti testování matematických znalostí.

University of Cantabria, Santander (Španělsko): Tři oblasti: 1) Spolupráce s učiteli ze základních a středních škol. 2) Příprava učitelů matematiky. 3) Tvorba dynamického geometrického software.

Technische universiteit Eindhoven (Holandsko): Vědecká skupina zaměřená na systémy počítačové algebry a dynamické geometrie a jejich propojení, dále pak na tvorbu interaktivních matematických materiálů a jejich vizualizaci. Tvůrci standardu OpenMath.

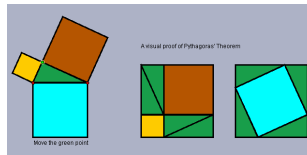
Maths for more, Barcelona (Španělsko): Komerční firma vyvíjející internetový matematický software WIRIS, který částečně spojuje možnosti algebraických a geometrických systémů.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (Česká republika): Dlouhodobý výzkum možnosti využití počítačů ve výuce matematiky. Užití systémů dynamické geometrie a tvorba výukových materiálů je součástí přípravy učitelů matematiky.

2.5 Ukázky výukových materiálů interaktivní geometrie

Příklad 1

Důkaz Pythagorovy věty užitím programu Cinderella (<http://cinderella.de>)



Další materiály, určené pro základní školu, jsou na <http://www.geomouse.ch>.

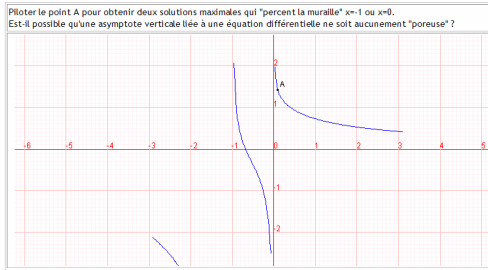
Příklad 2

Program Geoplan/Geospace na webu (<http://ens.math.univ-montp2.fr/SPIP>).
Možnost interaktivního vykreslení partikulárního řešení diferenciální rovnice.

Tracé de courbes intégrales de l'équation différentielle

$$(E) \quad 2x(x+1)y' + (2x+1)y = 1$$

passant par un point A pilotable à la souris (méthode numérique d'Euler)

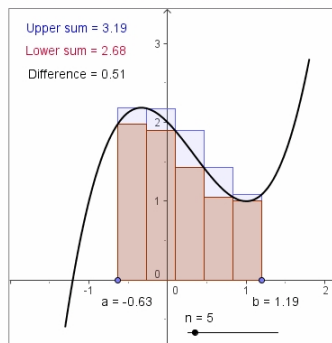


Příklad 3

Program GeoGebra v matematické analýze. Interaktivní materiál pro podporu výuky Riemannova integrálu (<http://www.geogebra.org>).

Lower- und Upper Sum of a Function

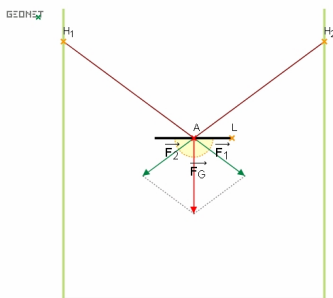
Here, you can see a function with its lower sum and upper sum on the interval $[a, b]$.



Příklad 4

Program GEONExT ve fyzice. Interaktivní materiál pro výuku rozkládání a skládání sil (<http://geonext.uni-bayreuth.de>).

Die Straßenlaterne



Situation

Zwischen zwei Häusern hängt eine Straßenlaterne, die an den Hauswänden mit Seilen befestigt ist.

Arbeitsaufträge

- Verschiebe die Laterne nach links. Wie verhalten sich die Kräfte F_1 , F_2 und F_G ?
- Klicke anschließend auf **GEONExT**, um die Abbildung wieder in die Ausgangssituation zu versetzen.
- Verändere den Haltepunkt H_2 . Wie wirkt sich dies auf die Kräfte aus?
- Klicke anschließend auf **GEONExT**, um die Abbildung wieder in die Ausgangssituation zu versetzen.
- In welcher Lage sind die Halteseile am kürzesten? Beschreibe diese Situation.

Mit dem roten Punkt A lässt sich die Laterne verschieben. Die beiden orangenen Haltepunkte H_1 und H_2 sind ebenfalls beweglich. Am orangenen Punkt L kann das Gewicht der Laterne variiert werden.

Lerntagebuch

Příklad 5

Program Cabri II+ v deskriptivní geometrii. Řez jehlanu rovinou. (Diplomová práce studenta PF JU v Č. Budějovicích).

The screenshot shows the Cabri II Plus software interface. The main window displays a 3D pyramid with vertices A, B, C, D and apex V. A cutting plane KLM is shown intersecting the pyramid. The intersection points are K on edge AV, L on edge BV, and M on edge CD. The base is a square ABCD. The text in the software window provides instructions for constructing the section and determining its shape.

Sestrojte řez pravoúhelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou KLM. K je bodem hrany AV, $AK/AV = 3/4$, L je bodem hrany BV, $BL/BV = 1/2$, M leží na prodloužení úsečky AB za bod B $AB/AM = 4/1$.

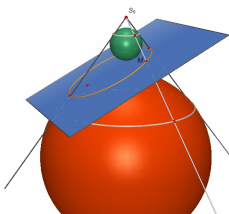
Máme sestříhat řez jehlanu rovinou určenou body KLM. Hledáme tedy přísečnice rovin stěn jehlanu s rovinou řezu.

Přímka vedoucí body KM je přísečnicí roviny řezu a roviny ABV. Přímka KM protne hranu BV v bodě N. Úsečka KN je jednou stranou řezu.

Další stranou řezu je přísečnice roviny řezu a stěny BCD úsečka NL.

Příklad 6

Queteletova-Dandelinova věta v Cabri 3D (<http://www.cabri.com>).



3 Závěr

Projekt Intergeo je na začátku. Výsledkem bude otevřená databáze výukových materiálů, které budou přehledně klasifikovány a které budou přenositelné na platformu jakéhokoli ze zúčastněných programů dynamické geometrie. Možnost příspěví do této databáze materiálů nebo alespoň do diskuse má každý. Doporučujeme čtenáři bedlivě sledovat webovou stránku projektu a v případě zájmu o spolupráci se zaregistrovat nebo kontaktovat autory článku. Nabízí se možnosti spolupráci při tvorbě výukových materiálů, při hodnocení jejich kvality, zjišťování současného stavu využití DGS a při klasifikaci jednotlivých úloh.

Literatura – internetové odkazy

Projekt Intergeo	www.inter2geo.eu
Cinderella	cinderella.de , doc.cinderella.de
GeoMouse	www.geomouse.ch
Geoplan/Geospace	ens.math.univ-montp2.fr/SPIP
TracenPoche	tracenpoche.sesamath.net , www.mathenpoche.net
OFSET	www.ofset.org
ActiveMath (Saarbrücken)	www.activemath.org
OpenMath	www.openmath.org
Cabrilog	www.cabri.com
Cabri – Český výukový portál	www.pf.jcu.cz/cabri
GEONExT	geonext.uni-beyreuth.de
GeoGebra	www.geogebra.org , www.geogebra.org/en/upload
University of Cantabria	www.unican.es
TU Eindhoven	w3.tue.nl
WIRIS	www.wiris.com
Pedagogická fakulta JU	www.pf.jcu.cz
DynaGeo	www.dynageo.de
C.a.R	www.z-u-l.de
Geometriagon	www.polarprof.org/geometriagon
Databáze interaktivních mat.	www.mathsnet.net/dynamic
Geometer's Sketchpad	www.dynamicgeometry.com

Inovace studijních předmětů Deskriptivní geometrie na MFF UK

Jana Hromadová

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

jole@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt. Obsahem příspěvku je stručné představení projektu, který vzniká v rámci grantu FRVŠ, jehož cílem je vytvořit nové pomocné studijní materiály pro výuku deskriptivní geometrie na Matematickofyzikální fakultě Univerzity Karlovy.

Klíčová slova: deskriptivní geometrie, sbírka úloh.

1 Úvod

Projekt řeší inovaci studijních předmětů Deskriptivní geometrie Ia, Ib a Deskriptivní geometrie IIa, IIb. Tyto předměty se na MFF UK vyučují v prvních dvou letech studia bakalářského studijního programu Matematika, obor Matematika zaměřená na vzdělávání, kombinace matematika - deskriptivní geometrie.

2 Inovace studijních předmětů

V současné době se na MFF učí deskriptivní geometrie pouze pomocí učebnic, které jsou mnohdy starší více než 50 let. Jsou sice většinou kvalitnější a mnohem rozsáhlejší než novější učebnice, ale často jsou nedostupné.

Vytvářené studijní materiály jsou zpřístupněny na internetových stránkách Katedry didaktiky matematiky (<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jole/deskriptiva/index.html>). Tyto materiály prezentují srozumitelnou a názornou formou vzorové geometrické úlohy a jsou důležitým doplňkem látky probírané na přednáškách a cvičeních. V současné době se jedná pouze o zadání úloh, časem budou doplněny i výsledky úloh případně i s postupem řešení.

Kromě hlavního cíle, kterým je vytvoření sbírky volně šiřitelných úloh si projekt klade další dva cíle:

- vytvoření databáze odkazů z oblasti deskriptivní geometrie,
- vytvoření virtuální knihovny studentských prací.

3 Struktura internetových stránek

Při tvorbě internetových stránek byl kladen důraz na přehlednost, interaktivní a jednoduché ovládání. Internetová aplikace je členěna do několika kapitol: úvodní kapitola, historie, náplň přednášek a cvičení inovovaných předmětů (zde jsou umístěny zadání úloh), odkazy. Zadání úloh jsou tvořena převážně v softwaru DesignCad, výjimečně v softwaru Rhinoceros.

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE na MFF UK

ÚVOD

Úvod
Historie
DGI
DGI
DGIII
Ostatní předměty
Ocázky

Úvod



Tyto stránky vznikají jako podpora výuky deskriptivní geometrie na MFF UK. Jsou určeny především studentům studijního oboru učitelství matematiky a deskriptivní geometrie pro střední školy. Materiály zde uveřejněné vznikají v rámci grantu FRVŠ určeného na invenci předmětu deskriptivní geometrie na MFF UK.

Zpočátku budou stránky sloužit spíše jako sbírka (neřešených) příkladů používaných ve výuce deskriptivní geometrie v prvním a druhém ročníku bakalářského studia. Zadané úlohy bude možné si stáhnout ve formátu pdf. Postupně budou doplňovány i řešené úlohy a doprovodné texty.



J. SOBOTKA; Deskriptivní geometrie promítání paralelního:

"Deskriptivní geometrie jest věda, která na základě konstrukce a pomocí rysův určuje útvary prostorové dle tvaru, velikosti a polohy jinými útvary prostoroými, vzájemné vztahy jejich zkoumá a úlohy k nim se vztahující řeší."

© 2007 Jana Hromadová · Olejníčková | jole@karlin.mff.cuni.cz | poslední změna proběhla 30.9.2007

Obrázek 1: Ukázka z internetové aplikace

4 Závěr

Projekt přispěje ke zkvalitnění a doplnění výuky, což umožní studentům hlouběji pochopit probíranou látku a získat znalosti a dovednosti, které budou moci využít nejen při zkoušce z deskriptivní geometrie. Interaktivní a veřejně přístupná forma prezentace projektu na internetové síti povede ke zlepšení podmínek dostupnosti informací v oboru.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za finančního přispění Fondu rozvoje vysokých škol 2007, projekt F1 d 893.

Literatura

- [1] F. Veselý, J. Filip: *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952
- [2] J. Hromadová: *webové stránky*,
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jole/deskriptiva/index.html>

Geometrie fullerových bání a možnosti jejich praktického využití

Oldřich Hykš

*Institute of Applied Mathematics, Fac. of Transportation Sciences, Czech Technical University
Na Florenci 25, 110 00 Praha 1, Czech Republic
hyks@mokropsy.com*

Abstrakt. Geometrie fullerových bání ve stavitelství a architektuře s ohledem na statické vlastnosti a minimalizaci druhovosti prvků, to jest kloubů, prutů a výplní. Fullerovy bání jiného než kulového tvaru, například rotačního elipsoidu a jiných.

Klíčová slova: Fulleren, geodetická kupole, geodetické dělení

1 Úvod

S konstrukcí kupolí a bání se setkáváme po celou dobu historie architektury. Od nejstarších časů až do počátku novověku ale tyto kupole, jakkoliv odvážné a velké, vycházejí z jediné společné materiální základny: kámen, cihly, výjimečně dřevo. Teprve nástup průmyslové revoluce znamená zcela nové materiály a také exaktní návrh konstrukce. Zpočátku litinové, později ocelové filigránské konstrukce vyplněné skleněnými tabulemi překlenují velké rozpony skleníků, nádraží a továren. Později pronikly z průmyslových a dopravních staveb do reprezentativních staveb bank, burz, univerzit a knihoven a zcela převládaly až do počátku dvacátého století, kdy podlehly levnějším a požárně bezpečnějším konstrukcím železobetonovým.

2 Fullerovy bání

Návrat k lehkým konstrukcím kleneb nastal až v šedesátých letech dvacátého století, ale na zcela jiné konstrukční úrovni. Je zajímavé, že vývoj a návrhy těchto takzvaných geodetických kupolí je spjat pouze s jediným člověkem: Richardem Buckminsterem Fullerem, a proto jsou tyto konstrukce také po právu nazývány *fullerény*. Nové možnosti počítačového návrhu a statického výpočtu odvážných organicky tvarovaných konstrukcí přivádějí problematiku geodetických kupolí opět na scénu. Zájem je navíc racionální reakcí na nastupující ekologickou a energetickou krizi a další exponenciální růst světové populace. Stavby užívající pro zastřešení nebo dokonce v celém svém tvaru geodetické konstrukce mají totiž několik právě v dnešní době tak důležitých výhod. Už jejich kulový nebo alespoň oblý tvar zajišťuje z principu maximální objem obestavěného prostoru při minimální ploše pláště. To znamená dvojnásobný přínos: minimální velikost ochlazené plochy budovy a také minimum stavebního materiálu pro konstrukci pláště. Neexistují rohy a kouty, které v tradičních budovách bývají nejslabším místem pláště z hlediska tepelných mostů a kondenzace. Oblý tvar umožňuje snadné laminární obtékání pláště

budovy proudícím vzduchem bez turbulencí a velkých rozdílů tlaku, což snižuje zatížení konstrukcí větrem a usnadňuje využití proudícího vzduchu pro přirozené větrání budovy. Oblý tvar uvnitř je příznivý pro přirozenou cirkulaci vzduchu v interiéru, což snižuje nároky na ventilaci a vytápění.

Budovu kulovitého tvaru nebo kupoli lze realizovat za použití různých materiálů a technologií. Například ji lze zkonstruovat jako skořepinu z předpjatého betonu nebo lepením dřevěných lamel a dnes už i vypěňováním z polyuretanu. Takové konstrukce je ale nutno vytvářet až přímo na místě za použití téměř řemeslné práce, s velkými nároky na čas, dopravu materiálu a zařízení staveniště. Nelze zajistit preciznost a kvalitu průmyslové výroby a nezávislost na počasí při realizaci. Ty zajistí pouze moderní průmyslová výroba jednotlivých částí stavby, které jsou po dopravení na místo jen zkompletovány jako jakýkoli jiný průmyslový výrobek. Má-li však takový postup být ekonomicky, ale i organizačně efektivní, je třeba navrhnout konstrukci vyžadující *minimum použitých druhů* průmyslově vyráběných konstrukčních prvků.

Právě těmto požadavkům nejlépe vyhoví *geodetická kupole*. Jejich plášť je sestaven zpravidla z tyčových prvků, takzvaných *prutů*, spojených na konci klouby, takzvanými *styčníky*. Tyčové prvky vytvářejí nejčastěji trojúhelníkovou síť. Ta je potom doplněna trojúhelníkovými výplněmi a tím je uzavřen celý objem stavby. Geodetická kupole je obvykle konvexní mnohostěn, jehož vrcholy tvoří kloubové styčníky, hrany tvoří tyčové prvky a stěny tvoří výplně, například skla. Je samozřejmě citlivostí konstruktéra, aby minimalizoval množství druhů tyčí, kloubů a výplní. To, společně se snahou o co nejmenší geometrické rozdíly mezi prvky konstrukce, způsobuje, že laik při pohledu na konkrétní geodetickou kupoli nabývá dojmu, že její plášť je pokryt samými identickými rovnostrannými trojúhelníky. To by znamenalo, že geodetická kupole je pravidelný mnohostěn, což jak víme není možné při množství stěn přesahujícím dvacet. Právě pravidelný dvacetistěn je poslední platónské těleso, tj. pravidelný mnohostěn s největším počtem vrcholů, hran a stěn. Takový počet stěn zejména při konstrukci větších kupolí je ale nedostatečný a z důvodů statických i vzhledových je třeba jemnějšího dělení.

Nejjednodušší možností, již použil například právě Fuller na kupoli Fordova mausolea v Detroitu, je prosté rozdělení stěn pravidelného dvacetistěnu na síť menších rovnostranných trojúhelníků, jež ale zůstávají v rovině původní stěny. Stěna tělesa je při velkých rozměrech rozdělena na menší části, což znamená menší nosníky a výplně. Ty je snazší vyrobit, dopravit i na místě smontovat. Rozdělená stěna je také odolnější a tužší. Dělicí nosníky vytvářejí ztužující žebra původní plochy. Výhodou takového řešení je, že si vystačíme s jedním typem prutů a výplní. Styčníky potřebujeme pouze ve třech variantách, v původních vrcholech mnohostěnu, na hranách a v dělené ploše. Nevýhody však převažují. Naší snahou při návrhu geometrie kupole je, aby všechny styčníky ležely na kulové ploše se společným středem. Usilujeme o to, aby mnohostěn, který kupoli vytváří, byl co „nejkulatější“. Nejde pouze o estetický účinek kupole, ale co největší přiblížení se kulatému tvaru zajišťuje výše uvedené výhodné

vlastnosti geosfér. Vysuneme-li navíc vrcholy trojúhelníků z roviny například promítnutím na kulovou plochu opsanou původnímu mnohostěnu, konstrukce se stane mnohem tužší a odolnější vůči lokálnímu nerovnoměrnému zatížení větrem, který by u rovných stěn snadno způsobil boulení a následné zřícení. Vysunutím vrcholů na kulovou plochu však dojde k deformaci původně rovnostranných trojúhelníků. Množství druhů prutů, styčníků a výplní se zvětší. Z důvodů estetických, užitných a statických je ale vysunutí vrcholů nezbytné. Proto je nutné nalézt takové dělení stěny a vysunutí styčníků na kulovou plochu, aby požadované efekty byly co nejlepší při zachování rozumného množství druhů prvků.

Zde je možná otázka, proč vůbec při návrhu kupole vycházet z pravidelného mnohostěnu? Proč jednoduše nepromítnout na sféru libovolnou trojúhelníkovou síť? Tato možnost se nabízí především tehdy, když nekonstruujeme celou geodetickou kupoli, ale jen plochou kalotu. Takový postup ale nevede k dobrým výsledkům. S největší pravděpodobností nezískáme ve výsledné síti žádnou symetrii, každý prvek bude jiný. To bude nejen ekonomicky neúnosné, ale i na pohled nehezké. Stěží najdeme více než dva různé vrcholy ležící na jedné společné hlavní kružnici. Přitom z hlediska přenosu napětí je velmi žádoucí, aby vrcholy ležely na společných hlavních kružnicích. Jinak řečeno, pruty by na sebe měly navazovat co možno nejděle bez výrazné změny směru, což je výhodné nejen staticky, ale také to dobře esteticky působí. Prostředkem pro hledání symetrií a co nejlépejší konstrukce je odvození kupole z pravidelného mnohostěnu.

Které z pravidelných mnohostěnu použít? Pravidelný dvanáctistěn vyloučíme, jeho stěny jsou pravidelné pětiúhelníky a ty nejsou staticky určité. Aby byl jejich tvar zajištěn, musely by styčnky přenášet i momentové síly a to by bylo velmi nevýhodné. Protože chceme, aby styčnky byly kloubové, byli bychom nuceni pravidelný pětiúhelník rozdělit na rovnostranné trojúhelníky. Styčnky ve středu stěny bychom vysunuli na kulovou plochu opisující původní vrcholy, ale tím bychom trojúhelníky deformovali na rovnoramenné. Použití dvanáctistěnu nám tedy nepřináší žádné výhody.

Zbývá pravidelný dvacetistěn a pravidelný osmistěn. Jaké to přináší výhody a nevýhody? Použití pravidelného dvacetistěnu při stejné výchozí velikosti kupole znamená menší výchozí trojúhelníky než při užití osmistěnu. Vystačíme tak s menší frekvencí, to jest dělením stěn při srovnatelné délce tetiv. Například pětinašobné dělení hrany osmistěnu odpovídá jen trojnásobnému dělení u dvacetistěnu. U dvacetistěnu vychází také menší rozdíly v délkách různých prvků (1,5:1 pro osmistěn a 1,18:1 pro dvacetistěn). Další výhodou je rovnoměrnější zakřivení a obecně lepší vzhled. Ale i použití osmistěnu přináší některé nezanedbatelné výhody. Osmistěn lze snadno rozdělit na jehlany se čtvercovou podstavou a použít ho pouze ke generování klenby polokulovitěho tvaru. Při jakémkoliv dělení má konstrukce přirozený rovník. Je jí možno snadno napojit na čtvercový, případně obdélníkový půdorys. Výhodou jsou také jednodušší výpočty. Zajímavou výhodou geodetické kupole generované z osmistěnu je

vznik čtverců v trojúhelníkové síti u vrcholů osmistěnu. Ty je možno výhodně využít u neprůhledné sféry k osazení tradičních čtvercových oken.

Geodetická dělení

Naším cílem je za použití pravidelného dvacetistěnu, případně osmistěnu rozdělením jeho stěn vytvořit trojúhelníkovou síť na sféře, obsahující co nejmenší počet různých prvků. Budeme to nazývat *geodetickým dělením*; jeho výstupem pro návrh konstrukce budou sférické souřadnice vrcholů (spojů) a určení délky třetiv (tyčových prvků). Prostředkem pro nalezení různých dělení stěn mnohostěnu budou symetrické systémy hlavních kružnic na sféře. Například rotací dvacetistěnu získáme celkem 31 hlavních kružnic, které nám celou sféru rozdělí na systém sférických trojúhelníků. Při tomto dělení však stačí uvažovat pouze dělení na jedné, případně dvou sousedních trojúhelníkových stěnách mnohostěnu, protože díky symetrii je situace na ostatních stěnách obdobná. To znamená ohromné zjednodušení návrhu a četnosti typů prvků. Četnost prvků s v jedné stěně odpovídá četnosti prvků na celé geodetické konstrukci.

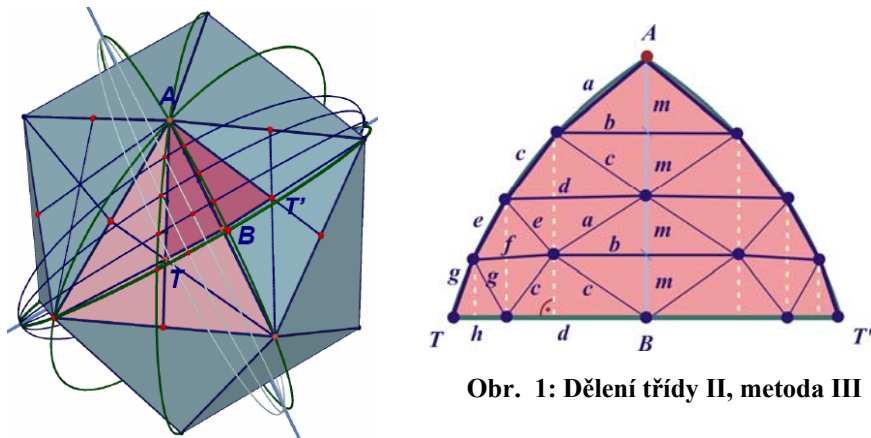
Rotací dvacetistěnu kolem os daných protilehlými vrcholy vznikne šest kružnic, které rozdělí každou stěnu středními příčkami na čtyři rovnostranné trojúhelníky. Ty pak můžeme dělit dále přímkami rovnoběžnými s příčkami; vzniklé dělení budeme nazývat *dělení třídy I*. Další možností je rotace dvacetistěnu kolem os daných dvojicí středů protilehlých hran. Tím vznikne na opsané sféře 15 hlavních kružnic, které jsou středovými průměty těžnic trojúhelníkových stěn. Těžnice každou stěnu rozdělí na šest pravouhlých trojúhelníků. Každé dělení stěny přímkami rovnoběžnými s těžnicemi pak budeme nazývat *dělení třídy II*.¹ Počet částí v , na které je strana trojúhelníka při daném dělení rozdělena, budeme nazývat *frekvence dělení*.

Zatím jsme stranu dělili na stejně dlouhé úseky. Nazýváme to *metoda I*. Získané body středově promítneme na opsanou sféru. Spojíme-li promítnuté body lomenou čarou, zjistíme, že zkonstruované hrany (tyčové prvky) geodetické kupole nejsou stejně dlouhé. Použijeme-li například metodu I pro dělení třídy I při frekvenci $v=3$, vznikne geodetická kupole se dvěma typy výplní (trojúhelníků) a třemi délkami tyčových prvků. Nestejná vzdálenost promítnutých vrcholů vede k úvaze upravit dělení hrany mnohostěnu tak, abychom po promítnutí získali na sféře stejně vzdálené body. Nazvěme to *metodou 2*. Toto nové dělení použité u třídy I však překvapivě nevede k příznivějšímu výsledku. Vznikne více různých trojúhelníků a navíc ještě odlišnějších od rovnostranných než u metody předchozí. Uvažujme nyní dělení třídy II. Při metodě I je strana trojúhelníkové stěny rozdělena na stejné části, které se však po promítnutí na sféru zobrazí jako různé, což vede ke vzniku více druhů výplní a tyčových prvků. Použijeme-li při dělení metodu II,

¹Další možností, v praxi však méně využívanou, je rotace dvacetistěnu kolem os určených středy protilehlých stran.

výsledek je značně problematický. Úpravou dělicího poměru na hraně mnohostěnu sice dosáhneme stejné délky úseků po promítnutí vrcholů na kulovou plochu, ale s nepříjemnými důsledky. Vedeme-li z bodů nového dělení hrany mnohostěnu kolmice jako v předchozím případě, potřebná síť trojúhelníků se vůbec nevytvoří. Přímkami vedené rovnoběžně s předchozím dělením se protnou v bodě, který neleží na straně děleného trojúhelníka. Úprava směru přímky tak, aby průsečíky na stranách děleného trojúhelníka existovaly, vede zase naopak k zániku společných průsečíků uvnitř sítě. Vzniká tak otázka, jaké body takto zkonstruované sítě vlastně promítat na sféru.

Naštěstí u dělení třídy II existuje ještě další, třetí metoda, která přináší příznivější výsledky. Z šesti pravoúhlých trojúhelníků vzniklých dělením třídy II, vybereme libovolný z nich. Dále už budeme dělit pouze tento trojúhelník a ostatní budou děleny symetricky. Trojúhelník promítneme na kulovou plochu. Vrcholy získaného sférického trojúhelníka označíme např. ABT . Bod A je současně vrcholem rovnostranného trojúhelníka stěny tělesa, bod B je promítnutý střed strany tohoto trojúhelníka a bod T je promítnuté těžiště trojúhelníkové stěny. Dále rozdělíme odvěsnu AB na několik stejně dlouhých částí, třeba čtyři, a vzniklými body vedeme hlavní kružnice kolmé na odvěsnu. Průsečíky těchto kružnic s přeponou AT vedeme hlavní kružnice kolmé na odvěsnu BT . V děleném trojúhelníku tak vznikne množina průsečíků hlavních kružnic. Abychom získali síť tvořenou trojúhelníky blízkými rovnostranným, připojíme k trojúhelníku ABT shodný trojúhelník ABT' (viz obr. 1 vlevo), který rozdělíme stejným způsobem. Body propojíme tak, jak je patrné z planárního grafu na obr. 1 vpravo. V každém pásu rovnoběžném s odvěsnou AB vzniknou shodné trojúhelníky; na jeden pás proto připadají dvě různé délky tyčí. Pokud tedy zvětšíme počet částí úsečky AB o jednu, tj. celkově zvýšíme frekvenci o 2, přibudou v celé konstrukci pouze dva nové prvky. Počet různých prvků kupole je proto přímo úměrný frekvenci dělení. Tato vlastnost má ohromný význam především při konstrukci kupolí velkých rozměrů. Aby bylo dosaženo rozdělení navrhované plochy na dostatečně malé trojúhelníky, je nutno použít vysoké frekvence při dělení stěny základního tělesa. Pokud bychom pro konstrukci velké kupole



Obr. 1: Dělení třídy II, metoda III

použili některou předchozích metod, množství druhů použitých prvků by vzrostlo geometrickou řadou na technicky neúnosnou úroveň. Proto je při návrhu konstrukcí velkých rozměrů výhradně používána popsána metoda III.

3 Nesférické kupole

Dosavadní úvahy se točily pouze kolem návrhu fullerenů, jejichž vrcholy leží na kulové ploše. V současné době v oblasti architektury dochází opět k renesanci fullerenů, ale kromě tradičních kupolí kulových jsou to různě deformované protáhlé tvary, např. na rotačním nebo nerotačním elipsoidu atd. Při jejich návrhu ale výše popsané metody příliš nefungují. Ty byly založeny na symetrických pravidelných archimédovských těles, které se zachovávají i při projekci na kulovou plochu. Při promítání na jiné těleso, např. elipsoid, máme však pouze tři roviny symetrie. To znamená, že i při vhodné projekci např. osmistěnu na rotační paraboloid vznikne na celé kupoli vždy pouze čtveřice stejných prvků. Je-li navíc hlavní osa orientována vodorovně (je to plochá kupole), je vzniklé dělení velmi nevýhodné staticky: síť je hustá u vrcholu a řídká v patě kupole. Proto existují různé metody jiných než středových projekcí, které tuto nevýhodu eliminují. Složitost návrhu a nároky na velké množství různých dílu vysvětlují, proč se kupole jiných než kulových tvarů vyskytují spíše v architektonických projektech než v realizacích.

Inspiraci pro různé organické tvary kupolí ve stavitelství a i pro jejich racionální řešení by mohli architekti hledat v bouřlivě se rozvíjejícím oboru organické chemie, zabývajícím se uhlíkovými klecovitými strukturami zvanými také fullereny. Zjistilo se, že se za zvláštních podmínek mohou z uhlíkových a případně doplňkově dalších atomů vytvářet trubicovité nebo kulovité struktury. První jsou nazývány nanovlákná, druhé – pro svou nepřehlédnutelnou podobu s Fullerovými báněmi – fullereny. Těch je dnes už nalezeno velké množství a mají nejroztodivnější tvary od téměř dokonale kulovitých (C_{60}), přes různé protáhlé (C_{72}) až po nedávno objevený fulleren vejčitého tvaru [4]. Možná, že tak jako architektura inspirovala chemiky k pojmenování těchto zvláštních molekul, tak naopak tvary nově a nově nalézáných molekul povedou k návrhům a racionálnímu statickému řešení nových fullerových konstrukcí v architektuře.

Literatura

- [1] Beavers, Ch. M. a kol.: *Tb3N@C84: An Improbable, Egg-Shaped Endohedral Fullerene that Violates the Isolated Pentagon Rule*, J. Am. Chem. Soc., Vol. 128, 2006, pp. 11352 – 11353.
- [2] Busemann, H.: *The Geometry of Geodesics*, Dover Publ., Dover, 2005.
- [3] Fuller, R. B.: *The Buckminster Fuller Reader* (J. Meller, ed.), Penguin Books, Harmondsworth, 1972.
- [4] Kenner, H.: *Geodesic Math and How to Use It*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1976.
- [5] <http://euler.fd.cvut.cz/predmety/geometrie/fuller> [prezentace]

Interakční techniky pro modelování ve virtuálním prostředí

Jiří Chmelík

*Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Česká republika
email: jchmelik@mail.muni.cz*

Abstrakt. Příspěvek popisuje současný stav v oblasti modelování ve virtuálním prostředí. Na několika existujících systémech budou demonstrovány různé možnosti využití HW a SW technik pro dosažení různých cílů a metod při modelování.

Klíčová slova: Modelování, Virtuální realita, Interakční techniky

1 Úvod

Co jsou to interakční techniky? Jedna z obecných definic říká: „Interakční techniky jsou metody použité pro splnění určitého úkolu pomocí rozhraní. Obsahují technické i programové součásti.“ [1]. V případě 2D interakce je situace poměrně přehledná. Na straně technického vybavení (HW) se jako vstupní zařízení používá nejčastěji myš a klávesnice, případně tablet. Jako výstupní zařízení pak slouží CRT monitor či LCD. Na straně programového vybavení (SW) jde nejčastěji o techniku zvanou WIMP (windows, icons, menus and pointers).

Ve virtuálním prostředí máme větší výběr vstupních i výstupních zařízení. Existuje zde také celá řada různých technik. Například jeden ze základních úkolů – výběr virtuálního objektu, existuje hned několik technik jako jsou „virtual hand“, „Go-Go“, „ray-casting“ nebo „aperture selection“. Výborný přehled interakčních technik pro VE lze nalézt v [1].

V našem případě je úkolem, který plníme modelování. Potřebujeme tedy určité nástroje a metody pro vytváření a editaci geometrie modelu; dále pak možnosti pro práci s barvami a také ovládání celé scény (funkce jako posun, rotace a zoom). Další části textu popisují existující systémy pro modelování a na těchto systémech ukazují různé interakční techniky.

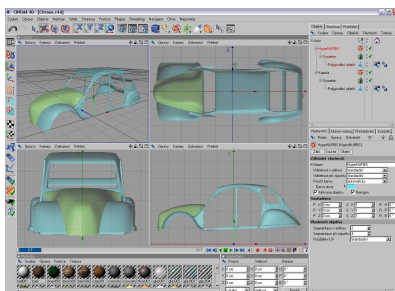
2 Modelování v nevirtuálním prostředí

Než se ponoříme do virtuálního světa, podívejme se na možnosti modelování s využitím klasických stolních počítačů.

Stejně jako osobní počítače, oblast 2D interakce mezi člověkem a počítačem existuje již desítky let a je dobře prozkoumána. Drtivá většina aplikací (nejen v oblasti modelování) na dnešních osobních počítačích je ovládána právě pomocí interakční techniky WIMP. Pomocí ukazatele (ovládaného nejčastěji myší či tabletem) může uživatel klikat na ikony, vybírat

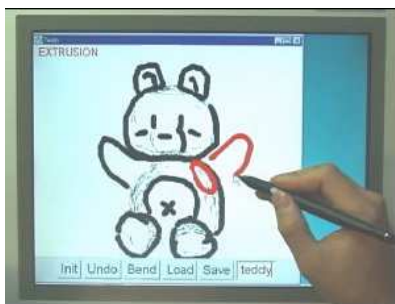
položky z menu či přepínat mezi pracovními okny. Klávesnice je používána nejčastěji pro zadávání znaků a čísel, případně pro zrychlení práce využitím klávesových zkratk.

Touto technikou jsou ovládány i „klasické“ modelovací nástroje, jako jsou AutoCad, 3Ds Max, Cinema4D, Z-brush a další. Většinu pracovní plochy tvoří typicky jedno nebo čtyři modelovací okna, která jsou obklopena ikonami a nabídkami. Výsledný model vzniká kombinováním primitivních těles, vytvářením křivkových povrchů či editací volně deformovatelné polygonální sítě.



Obr. 1: Modelovací plocha programu Cinema4D

Jiný přístup, který se v poslední době objevuje, je modelování skicováním (sketch-based modelling). Zástupcem této kategorie je například systém TEDDY [2]. Uživatel kreslí na obrazovku 2D tahy, ze kterých aplikace automaticky vytváří příslušné 3D polygonální povrchy. Aplikace samotná je ovládána pomocí klasické WIMP interakční techniky, ale proces modelování je řízen kreslením tahů – gest. Podle druhu tahu (uzavřený nebo otevřený; uvnitř, či vně povrchu) systém automaticky určuje operaci kterou provede (vytažení, řez, vyhlazení povrchu) a také automaticky vypočte novou geometrii modelu.

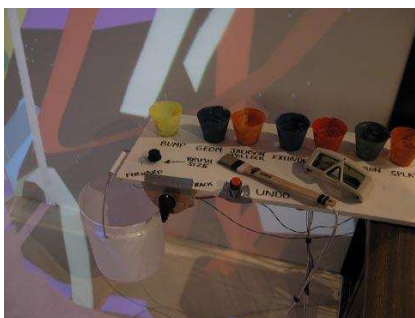


Obr. 2: Práce se systémem TEDDY

3 Modelování ve virtuálním prostředí

3.1 CavePainting

CavePainting [3] je umělecké médium, které využívá 3D tahy štětcem pro vytvoření uměleckých děl v plně obklopujícím virtuálním prostředí CAVE [1]. Pro zvýšení pohodlí uživatele a úrovně „ponoření“ do prostředí není v systému CavePainting využito sledování polohy rukou či hlavy uživatele. Místo toho je místnost vybavena stolem s pomůckami (u některých je snímána poloha a orientace v prostoru).



Obr. 3: Rozhraní „malířský stůl“.

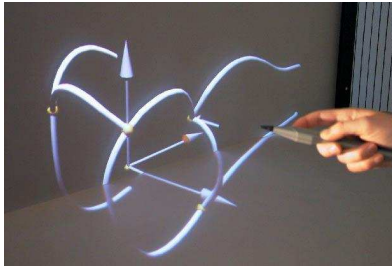
Většina interakce je prováděna pomocí malířského štětce, jenž je upraven tak, aby bylo možno sledovat jeho přesnou polohu a orientaci v místnosti. Je využíván především pro vytváření nových tahů v prostoru, dále pak pro změnu vlastností nových tahů, jako je typ, barva či tloušťka tahu. Ke změně typu uživatel jednoduše „ponoří“ štětec do jednoho z kelímků, které jsou také umístěny na stole. Každý z těchto kelímků reprezentuje jeden druh tahu štětcem.

Další funkce lze vyvolat pomocí gest štětcem. Jestliže uživatel například namíří štětec kolmo vzhůru a opíše štětcem kružnici, vyvolá tak nabídku pro výběr barvy. Podobným gestem, se štětcem mířícím kolmo dolů, vyvolá uživatel funkci rotace scény.

Systém CavePainting je založen na plně obklopujícím rozhraní, které by mělo být snadno zvládnutelné i uživateli bez předchozích zkušeností s virtuální realitou. Důraz je kladen na jednoduchost použití a uměleckou hodnotu výsledných děl. Interakční techniky jsou proto založeny na fyzicky přítomných pomůckách a jednoduchých gestech. Proces vytváření modelu je analogií 2D malířského procesu.

3.2 FreeDrawer

FreeDrawer [4] je systém pro skicování založený na volně deformovatelných křivkách určený pro Responsive Workbench [1]. Namísto tahů štětcem je zde vytvářena síť kubických křivek typu B-spline. Tyto křivky lze dále editovat kdykoli v průběhu modelování pomocí mechanismu kontrolních bodů, podobně jako u 2D vektorových editorů. Z uzavřených cyklů křivek lze vytvářet několik typů povrchů. I tyto povrchy mohou být dále upravovány.



Obr. 4: Práce s křivkami v programu FreeDrawer

Důležitou roli v interakci hraje stylus, který uživatel drží v dominantní (obvykle pravé) ruce. Jedná se o speciální pero s jedním či více tlačítky, jehož poloha a orientace v prostoru jsou snímány. Tento stylus je používán pro vytváření a modifikaci křivek a povrchů, podobně jako štětec v systému CavePainting. Zároveň jej lze také použít pro přepínání mezi virtuálními nástroji, a to pomocí jednoduchého virtuálního menu. Nedominantní rukou uživatel může ovládat polohu a orientaci celého modelu.

Účelem systému je vytváření a modifikace spíše geometricky přesných modelů než uměleckých děl. Tomu odpovídá náročnější postup práce (použití kontrolních bodů křivek, nepřímé vytváření povrchů). Kvůli přítomnosti většího počtu funkcí a jejich častému přepínání je zde použito virtuální menu s nástroji, namísto přítomnosti více různých fyzických nástrojů.

3.3 VRECKO - Modeller

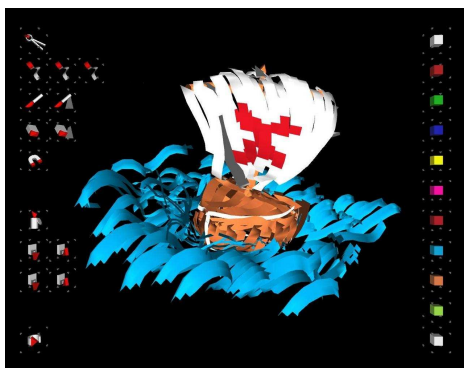
Modeller [5] je jedna z částí systému VRECKO, což je framework pro práci ve virtuálním prostředí vyvíjený v laboratoři HCI na Fakultě informatiky Masarykovy univerzity. Je založen na polygonálních površích, které jsou vytvářeny pomocí tahů štětcem (podobně jako u systému CavePainting). Tyto tahy jsou však i po vytvoření dále editovatelné – lze měnit jejich tvar i barvu.

Jako technické vybavení využívá Modeller jednu projekční stěnu (a příslušné brýle pro stereo projekci) a pár dotykových rukavic se snímáním polohy a orientace. Nepoužívá tedy žádné další pomůcky a interakce je prováděna formou čistě virtuálních nabídek a nástrojů.

Základní interakce s aplikací – vytváření a editování tahů je prováděna přímo pohybem dominantní ruky, pomocí dotyku příslušných prstů (palec a ukazováček).

Tato technika je také použita pro přepínání mezi jednotlivými nástroji a pro výběr barvy tahů (zde je použita kombinace palec a prostředníček). Pro tyto úkoly obsahuje aplikace jednoduché portálové menu. Na jedné straně je k dispozici jednoduchá paleta barev, na straně druhé pak jednotlivé nástroje (různé druhy štětců, magnet, guma, atd.) Pro výběr požadovaného nástroje či barvy uživatel jednoduše uchopí (stiskem příslušných prstů) příslušný symbol pomocí virtuální ruky.

Nedominantní ruka je (obdobně jako ve výše zmíněných systémech) použita pro pohyb a rotaci s celým modelem – uživatel uchopí model a pohyby či otáčení ruky jsou přímo převáděny na pohyby či otáčení celého modelu.



Obr. 5: Prostředí programu Modeller

Ke zmíněným základním technikám, které jsou již v systému implementovány, chceme přidat další interakční techniky rozšiřující možnosti modelování. Jde například o pomocnou 3D mřížku, která by zlepšovala orientaci v 3D prostoru a umožňovala by vytváření přesnějších modelů. Dále pak o možnost spojování blízkých tahů do celistvých ploch a výše zmíněnou techniku skicování, kdy by pomocí několika tahů byla vytvořena celá plocha či povrch. S využitím obou rukavic lze také použít složitější gesta pro zadání složitějších akcí jako je zrcadlení některé části modelu či vytváření rotačních povrchů.

Systém Modeller je určen pro hledání a testování nových technik v modelování. Proto byla dána přednost čistě virtuálním technikám. Ty jsou pro uživatele náročnější, ale lze je snadněji upravit, či rozšířit, podle měnících se potřeb aplikace.

4 Závěr

Zmínil jsem několik systémů pro modelování ve virtuálním prostředí. Každý pracuje s odlišným technickým vybavením a používá odlišné interakční techniky.

Jako v ostatních aplikacích v oblasti VE, i v modelování platí obecný vztah mezi účelem aplikace a použitými interakčními technikami. S rostoucími schopnostmi aplikace se rychle zvyšuje množství nabízených funkcí. S rostoucím počtem funkcí však roste i složitost a náročnost ovládacích prvků aplikace a s tím klesá její přehlednost a pohodlnost.

Při vytváření nových aplikací je tedy vždy třeba uvážit pro jaké úkoly budeme aplikaci využívat, kolik různých funkcí zahrneme a jaké interakční techniky použijeme pro přístup k těmto funkcím a splnění daných úkolů.

Kromě modelovacích systémů založených na křivkách a na jednotlivých tazích existují i další možnosti modelování ve virtuálním prostředí, především pak modelování založené na voxelch, případně CSG (Constructive Solid Geometry) systémy, o kterých se ve článku nezmiňuji. Více například viz [6] nebo [7].

Literatura

- [1] D. Bowman, E. Kruijff, J. Laviola, I. Poupyrev: *3D User Interfaces: theory and practice*, Addison-Wesley, ISBN 0-201-75867
- [2] Takeo Igarashi, Satoshi Matsuoka, Hidehiko Tanaka: *Teddy: a sketching interface for 3D freeform design*, Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques SIGGRAPH '99
- [3] Daniel F. Keefe, Daniel Acevedo Feliz, Tomer Moscovich, David H. Laidlaw, Joseph J. LaViola: *CavePainting: a fully immersive 3D artistic medium and interactive experience*, Proceedings of the 2001 symposium on Interactive 3D graphics I3D '01
- [4] Gerold Wesche, Hans-Peter Seidel: *Interaction: FreeDrawer: a free-form sketching system on the responsive workbench*, Proceedings of the ACM symposium on Virtual reality software and technology VRST '01
- [5] Filip Dostál: *Surface Modelling in VR*, diplomová práce, FI MUNI, 2006
- [6] Marie-Paule Cani, Alexis Angelidis: *Interactive shape editing: Towards virtual clay*, ACM SIGGRAPH 2006 Courses SIGGRAPH '06
- [7] André Stork, Martin Maidhof: *Efficient and precise solid modelling using a 3D input device*, Proceedings of the fourth ACM symposium on Solid modeling and applications

O tvorbe priamkových plôch

Mária Kmet'ová

*Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantina Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra, Slovakia
email: mkmetova@ukf.sk*

Abstrakt. V článku je opísaný spôsob tvorby priamkových plôch, ktorých Kleinov obraz leží na dvojrozsmernej variete homeomorfnéj s torusom. Príklady takýchto plôch sú vykreslené programom Maple.

Kľúčové slová: Priamková plocha Kleinovo zobrazenie, priamková kongruencia

1 Úvod

K tvorbe priamkových plôch pristúpime metódou postupného špecifikovania prvkov Grassmanniánu v trojrozmernom euklidovskom priestore. Priamkové plochy opíšeme ako jednoparametrické množiny priamok ležiacich na priamkových kongruenciách použitím Kleinovho zobrazenia. Podrobnejší matematický výklad o používanom matematickom aparáte, t.j. o Plückerových súradniciach v trojrozmernom projektívnom priestore, Kleinovom zobrazení, priamkových komplexoch a priamkových kongruenciách sa nachádza v článku [1].

V ďalšej časti sa budeme zaoberať tvorbou priamkových plôch, ktoré sú podmnožinami jednej špeciálnej priamkovej kongruencie. Priamková kongruencia bude daná priamkami pretínajúcimi dve uzavreté rovinné krivky ležiace v dvoch rôznych rovinách. Podľa vzájomnej polohy dvoch daných kriviek vzniknú priamkové kongruencie s rôznymi topologickými charakteristikami. Úplnú klasifikáciu týchto priamkových kongruencií uvidíme v inej práci. Teraz sa budeme venovať najjednoduchšej triede, ktorú dostaneme ak určujúce krivky majú prázdny prienik so spoločnou priamkou ich rovín. Kleinov obraz takto určenej priamkovej kongruencie je topologicky ekvivalentný s torusom na Kleinovej kvadrike.

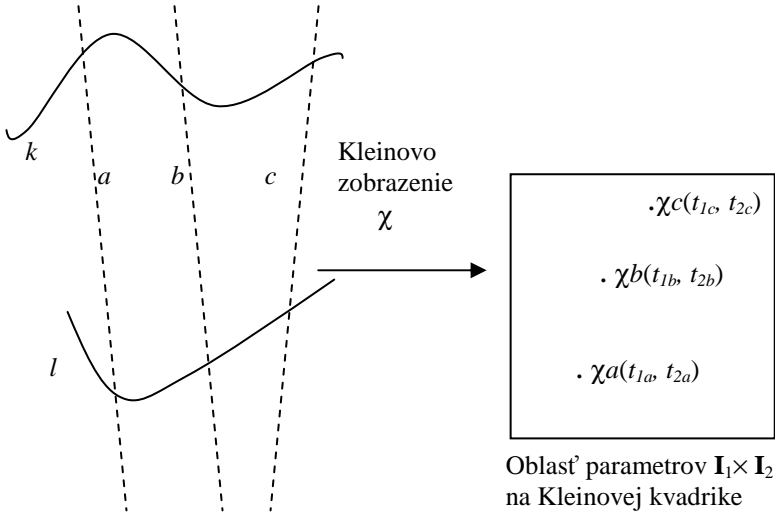
2 Kleinov obraz Grassmanniánu $Gr_1(E^3)$

Grassmannián $Gr_1(E^3)$ je priestor všetkých priamok trojrozmerného euklidovského priestoru E^3 . Každá priamka $l \in E^3$ je jednoznačne určená bodom $P \in l$ a jednotkovým smerovým vektorom $\mathbf{d}(p_1, p_2, p_3)$. Potom priamka l je daná šesticou $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = (\mathbf{d}; (P - O) \times \mathbf{d})$, takzvanými Plückerovými súradnicami. Takýmto spôsobom sme dostali zobrazenie množiny priamok $Gr_1(E^3)$ na množinu bodov na Kleinovej kvadrike v 5-rozmernom projektívnom priestore P^5 , ktorá je daná rovnicou $p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$.

3 Kleinov obraz priamkovej kongruencie

Priamková kongruencia je dvojparametrická množina priamok. Jej Kleinov obraz je teda dvojparametrická varieta na Kleinovej kvadrike. Budeme skúmať dvojrozmerné variety, priamkové kongruencie dané ako bisekanty dvoch kriviek (t.j. priamky, ktoré spájajú bod jednej krivky s bodom druhej krivky). Nech sú dané dve nepretínajúce sa rovinné krivky k, l vyjadrené parametricky: $k(t_1), l(t_2)$, $t_1 \in \mathbf{I}_1$, $t_2 \in \mathbf{I}_2$ v trojrozmernom euklidovskom priestore. Kleinov obraz priamkovej kongruencie $L(k, l)$ určenej týmito krivkami je dvojrozmerná varieta, kde Kleinovo zobrazenie zobrazí každú priamku do bodu daného dvojicou parametrov $(t_1, t_2) \in \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2$ na Kleinovej kvadrike.

Pozri obrázok 1.



Obr. 1: Kleinovo zobrazenie

4 Špeciálna priamková kongruencia

Zoberme teraz namiesto kriviek k, l z predchádzajúcej kapitoly dve nepretínajúce sa kružnice k, l ležiace v dvoch rôznych rovinách. Špeciálna priamková kongruencia vytvorená bisekantmi týchto kružníc je topologicky ekvivalentná s priamkovou kongruenciou ktorú tvoria bisekanty dvoch nepretínajúcich sa uzavretých rovinných kriviek. Predpokladajme, že ani jedna z kružníc nemá spoločný bod s priesečnicou rovín (ak existuje), v ktorých kružnice ležia. Potom roviny môžeme otočiť do vzájomne rovnobežnej polohy bez zmeny topologickej štruktúry ich bisekant, teda priamkovej kongruencie ktorú určujú. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme teda predpokladať, že kružnice k a l sú jednotkové a ležia v dvoch rôznych rovnobežných rovinách $\alpha \parallel \beta$. Do trojrozmerného euklidovského priestoru zavedieme karteziánsku

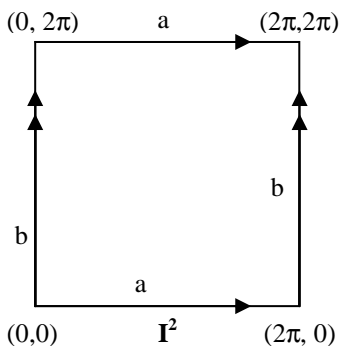
súradnicovú sústavu $\langle O; x, y, z \rangle$ tak, že počiatok O leží v rovine α a roviny sú dané rovnicami $\alpha: z = 0$ a $\beta: z = 1$. Jednotkové kružnice k a l sú potom dané parametricky nasledovne:

$$k: x = \cos t_1, y = \sin t_1, z = 0; t_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle = \mathbf{I}$$

$$l: x = \cos t_2, y = \sin t_2, z = 1; t_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle = \mathbf{I}.$$

Kleinov obraz priamkovej kongruencie $C(k,l)$ množiny všetkých bisekant dvoch kružníc je parametrický štvorec \mathbf{I}^2 , ktorého oproti ležiace strany majú byť stotožnené (zlepené), lebo body určené dvojicami parametrov $(t_1, 0)$ a $(t_1, 2\pi)$ resp. $(0, t_2)$ a $(2\pi, t_2)$ pre všetky $t_1 \in \mathbf{I}$ a $t_2 \in \mathbf{I}$ sú totožné.

Dostaneme parametrickú plochu, ktorej CW-rozklad sa dá charakterizovať symbolom $aba^{-1}b^{-1}$ [2], a to je torus (obrázok 2). Vidíme teda, že obraz priamkovej kongruencie $C(k,l)$ v Kleinovom zobrazení χ je dvojrozmerná varieta homeomorfná s torusom.

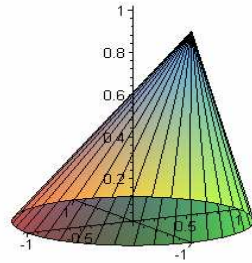
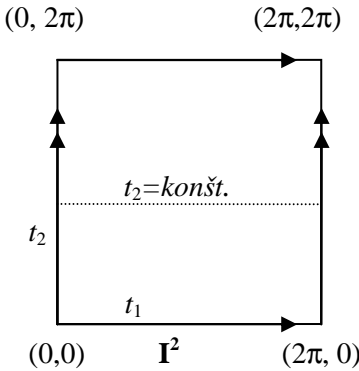


Obr. 2: CW-rozklad variety homeomorfné s torusom

5 Priamkové plochy na priamkovej kongruencii $C(k,l)$

Krivky na toruse $\chi C(k,l)$ sú Kleinovým obrazom priamkových plôch na priamkovej kongruencii $C(k,l)$. Rôzne priamkové plochy môžeme určiť definovaním rôznych kriviek na toruse, pričom každá krivka na toruse je jednoznačne daná vzťahom medzi parametrami t_1 a t_2 v parametrickom štvorci \mathbf{I}^2 .

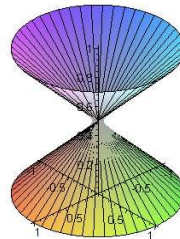
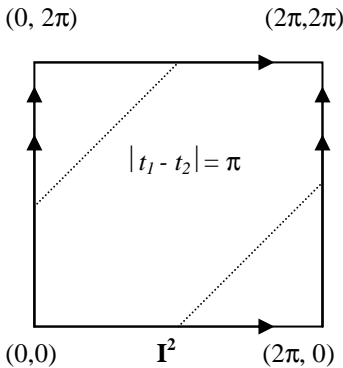
Na obrázku 3 je ilustrovaný Kleinov obraz jednoduchej priamkovej plochy na schéme torusa a zodpovedajúca priamková plocha. Krivke $t_2 = \text{konštanta}$ (napr. hrdlová kružnica) na toruse zodpovedá kužeľová plocha, ktorej tvoriace priamky prechádzajú bodmi kružnice k pre všetky parametre $t_1 \in \mathbf{I}$ a jediným bodom $V = (\cos c, \sin c, 1)$ kružnice l pre parameter $t_2 = c$, kde c je konštanta.



Obr. 3: Kleinov obraz plochy a príslušná plocha

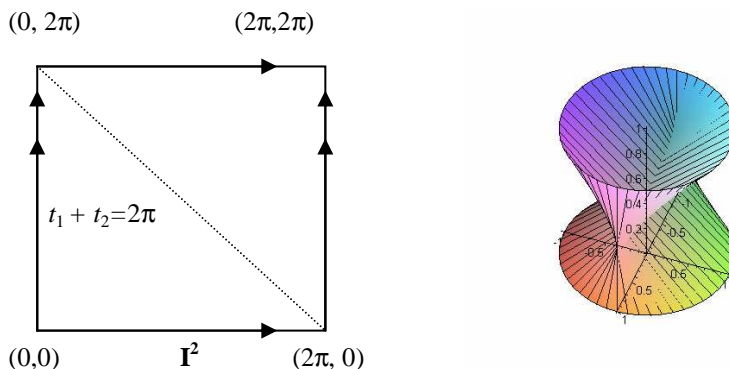
Ak $t_1=t_2$ dostaneme valcovú plochu, ak $|t_1 - t_2| = \pi$, $(t_1, t_2) \in \mathbf{I}^2$ tak opäť kužeľovú plochu (obrázok 4), ale teraz jej vrchol V leží v bode so súradnicami $(0, 0, \frac{1}{2})$.

Pre vzťah $t_1 + t_2 = 2\pi$ dostaneme osovo súmernú priamkovú plochu, kde os súmernosti je priamka s rovnicami $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$ (obrázok 5).



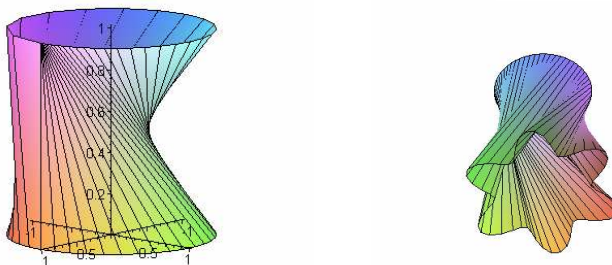
Obr. 4: Kužeľová plocha

K určeniu ľubovoľnej priamkovej plochy prechádzajúcej kružnicami k a l stačí definovať vzťah ϕ medzi premennými t_1 a t_2 (obrázok 7 vľavo).



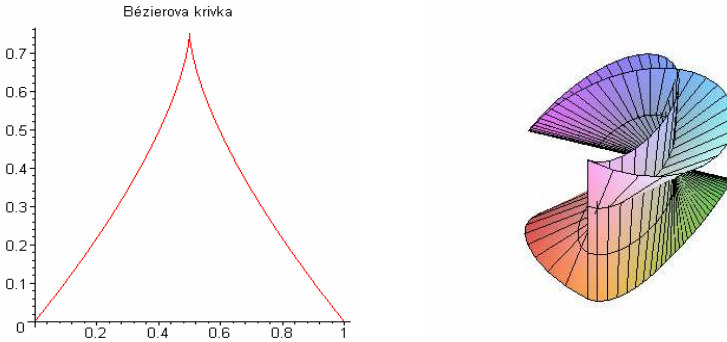
Obr. 5: Úsečka na parametrickom štvorci a zodpovedajúca plocha

V predchádzajúcich prípadoch vzťah medzi parametrami bol lineárny. Na obrázku 6a je pomocou programu Maple vykreslená priamková plocha prechádzajúca kružnicami k a l , daná vzťahom $t_2 = t_1^3$. Na obrázku 6b je plocha daná lineárnym vzťahom $t_2 = t_1 + \pi/2$, ale kružnica v súradnicovej rovine $z=0$ je nahradená uzavretou nepretínajúcou sa krivkou.



Obr. 6a, 6b

Vzťah medzi parametrami môžeme zadať rôznymi spôsobmi. Zaujímavé plochy dostaneme napríklad ak vychádzame z rôznych Béziových kriviek ako Kleinovho obrazu priamkovej plochy na parametrickom štvorci čiže na toruse. Na obrázku 7 je krivka a zodpovedajúca priamková plocha.



Obr. 7: Bézierova krivka a príslušná plocha

6 Záver

Metóda tvorby priamkových plôch ako podmnožín priamkovej kongruencie dáva možnosť generovať širokú škálu rozličných priamkových plôch. Priamkovú kongruenciu môžeme určiť dvomi krivkami, ktorými má plocha prechádzať. Vzťah medzi parametrami vyjadrujúcimi polohu bisekant dvoch kriviek určíme na schéme Kleinovho obrazu priamkovej kongruencie. Definujeme krivku (Kleinov obraz priamkovej plochy) s požadovanými vlastnosťami a nakoniec v inverznom Kleinovom zobrazení zostrojíme príslušnú plochu. V tomto článku sme nevyčerpali všetky možnosti definovania kriviek na schéme Kleinovho obrazu priamkovej kongruencie, ktoré dávajú ďalšiu množinu priamkových plôch odzrkadľujúcich niektoré vlastnosti príslušných kriviek.

PodĎakovanie

Tento článok vznikol za podpory grantu VEGA 1/4007/07

Literatúra

- [1] Kmeťová, M. *An introduction to line congruencies*, Proceedings of Symposium on Computational Geometry, SCG`2002, Bratislava / Kočovce 2002, ISBN 80-227-1773-8, pp. 25-28,
- [2] Mendelson, B. *Introduction to Topology*, Dover Publications, INC., 1990, ISBN 0-486-66352-3
- [3] Peternell, M., Pottmann, H., Ravani, B. *On the computational geometry of ruled surfaces*, Computer-Aided Design 31, 1999, pp. 17-32

Dvě metody určení stanoviska snímku

Milada Kočandrlová, Hana Lakomá

*Dept. of mathematics, Fac. of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague
Thákurova 7, 166 29 Praha 6, Czech Republic
email: kocandrlova@mat.fsv.cvut.cz, lakoma@mat.fsv.cvut.cz*

Abstrakt. Příspěvek obsahuje dvě metody určení prostorové informace z jednoho rovinného snímku. První metoda je založena na analýze vlastností homomorfismu vektorových prostorů. Metodou druhou je přímá lineární transformace.

Klíčová slova Středové promítání, homogenní souřadnice, homomorfismus, DLT

1 Úvod

Trendem poslední doby jsou speciální aplikace pozemní fotogrammetrie, které lze najít v řadě odlišných oborů (lékařství, design, strojírenství, dokumentace památkové péče, apod.). Celá tato oblast se nazývá Close Range Photogrammetry, [2,3]. Její principy a techniky vychází z metod klasické pozemní fotogrammetrie. Tyto metody potřebují znát pro vyhodnocení rovinných snímků tzv. prvky vnitřní orientace snímku. Jsou-li známy tzv. prvky vnější orientace snímku - poloha stanoviska a orientace osy záběru - další zpracování dat se značně zjednodušuje. V pozemní fotogrametrii při odborném pořizování snímků můžeme prvky vnější orientace přesně nastavit nebo změřit. Z důvodu kontroly tohoto nastavení nebo při rekonstrukci neodborně pořizovaných snímků musí existovat metody, jak prvky vnější orientace určit výpočtem.

2 Formulace problému

Úkolem metod je získání prostorové informace z jednoho rovinného snímku objektu. Hledanou informací jsou prostorové souřadnice stanoviska, které se určí ze znalosti rovinných a objektových souřadnic šesti bodů. Jestliže je rovinný snímek např. fotografie, stanovisko je střed vstupní pupily objektivu fotoaparátu, kterým byl snímek pořízen. Je-li snímkem např. výstup z počítačové vizualizace, je stanovisko zadaná poloha oka pozorovatele.

Matematická formulace zadání a řešení úlohy tedy zní:

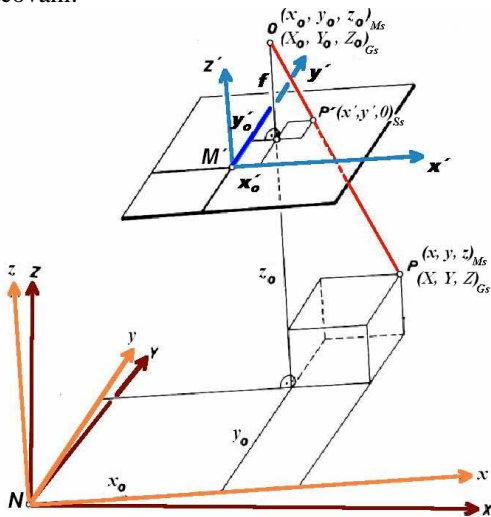
V prostoru E_3 je dána rovina E_2' a dvě množiny $M, M' \subset E_2'$. Předpokládejme, že je množina M' středovým průmětem množiny M při středovém promítání o středu $O, O \notin E_2'$.

Pro popis polohy bodu v prostoru E_3 užijeme několik standardizovaných kartézských souřadnicových soustav, znázorněných na Obr.1. Soustava snímkových souřadnic $S_s = \{M'; x', y', z'\}$ je určena rovinou snímku E_2' , jež je jeho souřadnicovou rovinou $x'y'$. Soustava modelových souřadnic

$M_S = \{N; x, y, z\}$, $x \parallel x'$, $y \parallel y'$ a soustava geodetických souřadnic $G_S = \{N; X, Y, Z\}$ mají společný počátek.

Úkolem úlohy je určit geodetické souřadnice $[X_0, Y_0, Z_0]_{G_S}$ bodu O, jestliže známe snímkové a geodetické souřadnice šesti bodů, tj. $M = \{P_i = [X_i, Y_i, Z_i]_{G_S}, i=1, \dots, 6\}$, $M' = \{P'_i = [x'_i, y'_i, 0]_{S_S}, i=1, \dots, 6\}$.

Uvedeme dva různé teoretické přístupy k řešení úlohy a z nich vyplývající i odlišné numerické postupy při realizaci výpočtem. Jedna z teorií zavádí do problému homogenní souřadnice, projektivní rozšíření \bar{E}_3, \bar{E}_2' prostorů E_3, E_2' a homomorfismus jejich příslušných aritmetických základů W_4, W_3' . Hledaný bod O je jednoznačně určen jádrem tohoto homomorfismu. Jiný přístup k řešení problému určení O se nazývá přímá lineární transformace (DLT). Tato metoda využívá lineární algebry k popisu základních geometrických vztahů vyplývajících ze zadání úlohy a numerické metody lineární algebry k jejich následnému zpracování.



Obr. 1: Geodetická, modelová a snímková soustava souřadnic

2.1 Výpočet O určením jádra homomorfismu

Zobrazení, které představuje středové promítání o středu O, $O \notin E_2'$, množiny M na množinu M' , označme $\bar{\omega}$, tj. $\bar{\omega}(P_i) = P'_i, i=1, \dots, 6$.

Zobrazení $\bar{\omega}$ je v \bar{E}_3, \bar{E}_2' kolineární, proto existuje homomorfismus $\bar{\omega}$ v jejich příslušných aritmetických základech, tj. $\bar{\omega}: W_4 \rightarrow W_3'$, a platí $\bar{\omega}(\mathbf{p}_i) = a_i \mathbf{p}'_i, i=1, \dots, 6$, kde $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}'_i$ jsou aritmetičtí zástupci bodů P_i, P'_i a $a_i \in \mathfrak{R}, a_i \neq 0$. Aritmetický zástupce \mathbf{o} hledaného bodu O je vektor, který se při homomorfismu $\bar{\omega}$ zobrazí na nulový vektor, tedy $\bar{\omega}(\mathbf{o}) = (0, 0, 0)$.

Nechť body P_1, \dots, P_5 tvoří geometrickou bázi prostoru \bar{E}_3 a body P_1', \dots, P_4' geometrickou bázi prostoru \bar{E}_2' . Nechť vektory $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4$ tvoří bázi prostoru W_4 a vektory $\mathbf{p}_1', \dots, \mathbf{p}_3'$ bázi prostoru W_3' . Potom platí $\mathbf{o} = o_1\mathbf{p}_1 + o_2\mathbf{p}_2 + o_3\mathbf{p}_3 + o_4\mathbf{p}_4$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\mathbf{o}) &= o_1\bar{\omega}(\mathbf{p}_1) + o_2\bar{\omega}(\mathbf{p}_2) + o_3\bar{\omega}(\mathbf{p}_3) + o_4\bar{\omega}(\mathbf{p}_4) = \\ &= o_1\mathbf{a}_1\mathbf{p}_1' + o_2\mathbf{a}_2\mathbf{p}_2' + o_3\mathbf{a}_3\mathbf{p}_3' + o_4\mathbf{a}_4\mathbf{p}_4'. \end{aligned} \quad (1)$$

Homogenní souřadnice vektoru \mathbf{p}_4' mohou být zvoleny tak, že platí $\mathbf{p}_4' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' + \mathbf{p}_3'$. Dosazením této závislosti do (1) vychází

$$\bar{\omega}(\mathbf{o}) = (o_1\mathbf{a}_1 + o_4\mathbf{a}_4)\mathbf{p}_1' + (o_2\mathbf{a}_2 + o_4\mathbf{a}_4)\mathbf{p}_2' + (o_3\mathbf{a}_3 + o_4\mathbf{a}_4)\mathbf{p}_3',$$

a tedy rovnice

$$o_1\mathbf{a}_1 + o_4\mathbf{a}_4 = 0, \quad o_2\mathbf{a}_2 + o_4\mathbf{a}_4 = 0, \quad o_3\mathbf{a}_3 + o_4\mathbf{a}_4 = 0$$

určují souřadnice bodu O až na nenulový násobek jednoznačně. Všechna čísla

a_1, \dots, a_4 jsou nenulová, proto např. $o_4 = -\frac{1}{a_4}$, potom $\mathbf{o} = \frac{1}{a_1}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{a_2}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{a_3}\mathbf{p}_3 -$

$\frac{1}{a_4}\mathbf{p}_4$. Pro souřadnice bodu O platí $X_0 = o_2/o_1, Y_0 = o_3/o_1, Z_0 = o_4/o_1$.

2.1.1 Výpočet koeficientů a_1, \dots, a_4

K výpočtu všech koeficientů a_1, \dots, a_6 sestavíme soustavu homogenních lineárních rovnic. Jednotlivé rovnice jsou odvozeny z vyjádření několika lineárních závislostí – závislosti vektorů $\mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6$ na bázevých vektorech $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4$ a závislosti vektorů $\mathbf{p}_4', \mathbf{p}_5'$ na vektorech $\mathbf{p}_1', \dots, \mathbf{p}_3'$ – a z využití znalosti šesti daných bodů $\bar{\omega}(P_i) = P_i'$, jejichž aritmetičtí zástupci, jako bázevé vektory a jejich obrazy, určují homomorfismus $\bar{\omega}$. Podrobněji je sestavení rovnic uvedeno v [1]. Získaná soustava

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -p_{51}' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -p_{52}' & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -p_{53}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{64} - p_{61} & p_{61}p_{51}' & -p_{61}' \\ 0 & 0 & 0 & p_{64} - p_{62} & p_{62}p_{52}' & -p_{62}' \\ 0 & 0 & 0 & p_{64} - p_{63} & p_{63}p_{53}' & -p_{63}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

musí mít řešení, které je až na nenulový násobek určeno jednoznačně.

2.2 Výpočet O metodou DLT

Je-li v daném středovém promítání se středem $O = [x_0', y_0', f]_{S_S} = [x_0, y_0, z_0]_{M_S}$ bod $P' = [x', y', 0]_{S_S}$ průmětem bodu $P = [x, y, z]_{M_S}$, jak znázorňuje Obr.1, jsou body

O, P', P kolineární a pro vektory $\overrightarrow{OP'}$, \overrightarrow{OP} tedy platí $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$, $k \in \mathfrak{R}, k \neq 0$.

Dosazením souřadnic bodů O, P', P získáme rovnost $(x' - x_0', y' - y_0', -f) =$

$= k \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ a z porovnání jednotlivých složek vychází dvojice rovnic

$$\frac{x' - x_0'}{f} = \frac{x - x_0}{z_0 - z}, \quad \frac{y' - y_0'}{f} = \frac{y - y_0}{z_0 - z}, \quad (3)$$

jež vyjadřují vztah mezi modelovými souřadnicemi bodu a snímkovými souřadnicemi jeho průmětu při daném středovém promítání.

Rotacemi kolem tří os lze transformovat modelové souřadnice bodu P na

geodetické. Je-li matice této transformace $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$, potom platí

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)^T = \mathbf{R}^T (X - X_0, Y - Y_0, Z - Z_0)^T, \quad (4)$$

kde $[X_0, Y_0, Z_0]_G$ jsou hledané geodetické souřadnice bodu O. Dosazením (4) do (3) získáme přímý vztah mezi geodetickými souřadnicemi bodu a snímkovými souřadnicemi jeho středového průmětu:

$$x' = x_0' - f \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} \quad (5)$$

$$y' = y_0' - f \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} \quad (6)$$

Jestliže pravé strany rovnic (5), (6) převedeme na společné jmenovatele, čitatele upravíme a zavedeme substituce

$$h = -(r_{13}X_0 + r_{23}Y_0 + r_{33}Z_0), \quad c_1 = r_{13}/h, \quad c_2 = r_{23}/h, \quad c_3 = r_{33}/h,$$

$$a_1 = (r_{13}x_0' - r_{11}f)/h, \quad a_2 = (r_{23}x_0' - r_{21}f)/h, \quad a_3 = (r_{33}x_0' - r_{31}f)/h,$$

$$a_4 = [(r_{11}f - r_{13}x_0')X_0 + (r_{21}f - r_{23}x_0')Y_0 + (r_{31}f - r_{33}x_0')Z_0]/h,$$

$$b_1 = (r_{13}y_0' - r_{12}f)/h, \quad b_2 = (r_{23}y_0' - r_{22}f)/h, \quad b_3 = (r_{33}y_0' - r_{32}f)/h,$$

$$b_4 = [(r_{12}f - r_{13}y_0')X_0 + (r_{22}f - r_{23}y_0')Y_0 + (r_{32}f - r_{33}y_0')Z_0]/h,$$

vztahy (5), (6) se zjednoduší na

$$x' = \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4}{c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + 1} = \frac{\mathbf{aX}^T + a_4}{\mathbf{cX}^T + 1}, \quad y' = \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4}{c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + 1} = \frac{\mathbf{bX}^T + b_4}{\mathbf{cX}^T + 1}. \quad (7)$$

Pro výpočet X_0, Y_0, Z_0 pak využijeme soustavu tří nehomogenních lineárních rovnic, které získáme vyjádřením vzájemné závislosti koeficientů a_1, \dots, a_4 , koeficientů b_1, \dots, b_4 a koeficientů c_1, \dots, c_3 :

$$a_1 X_0 + a_2 Y_0 + a_3 Z_0 = -a_4$$

$$b_1X_0 + b_2Y_0 + b_3Z_0 = -b_4$$

$$c_1X_0 + c_2Y_0 + c_3Z_0 = -1.$$

2.2.1 Výpočet koeficientů a_1, \dots, c_3

K výpočtu koeficientů a_1, \dots, c_3 sestavíme soustavu lineárních rovnic dosazením do (7). Výrazy (7) nejprve upravíme na tvar

$$x' = a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4 - c_1Xx' - c_2Yx' - c_3Zx' \quad (8)$$

$$y' = b_1X + b_2Y + b_3Z + b_4 - c_1Xy' - c_2Yy' - c_3Zy'. \quad (9)$$

Dosazením známých souřadnic $[x', y', 0] \leftrightarrow [X, Y, Z]$ šesti bodů do rovnic (8), (9) získáme dvanáct nehomogenních rovnic o jedenácti neznámých a_1, \dots, c_3 ,

$$(x_1', y_1', \dots, x_6', y_6')^T = \mathbf{A}(a_1, a_2, \dots, c_2, c_3)^T, \text{ kde} \quad (10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1'X_1 & -x_1'Y_1 & -x_1'Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1'X_1 & -y_1'Y_1 & -y_1'Z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_6'X_6 & -x_6'Y_6 & -x_6'Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & -y_6'X_6 & -y_6'Y_6 & -y_6'Z_6 \end{pmatrix}.$$

2.3 Realizace řešení soustav, chyby a jejich vyrovnání

Obě metody určení $O=[X_0, Y_0, Z_0]$ jsou prezentované jako teoretické modely, předpokládající, že dané hodnoty – snímkové a geodetické souřadnice šesti bodů – jsou bezchybné. Praktické úlohy jen zřídkakdy vedou k podobné situaci. Je zřejmé, že i výchozí dané veličiny jsou určeny s jistou přesností. Tyto měřické chyby pak v obou metodách při řešení soustav způsobí buď neexistenci řešení (metoda DLT) nebo existenci pouze řešení triviálního (metoda Ker $\bar{0}$). Abychom co nejoptimálněji odstranili vliv zmíněných chyb a byli schopni úlohu dořešit a dosáhnout přitom uspokojivé přesnosti výsledku, je třeba doplnit obě metody vyrovnáním hodnot závislých na zmíněných chybách.

2.3.1 Metoda DLT

Podle teoretických předpokladů má soustava (10) právě jedno řešení. Při praktickém výpočtu však mají matice soustavy a rozšířená matice soustavy různé hodnoty. Abychom získali aproximaci $\bar{a}_1, \dots, \bar{c}_3$ neznámého řešení

a_1, \dots, c_3 , splňující aproximační kritérium MNC, sestavíme rovnice oprav $v_{x'}, v_{y'}$ koeficientů a_1, \dots, c_3 , $v_{x'} = (\bar{a}_1X + \bar{a}_2Y + \bar{a}_3Z + \bar{a}_4 - \bar{c}_1Xx' - \bar{c}_2Yx' - \bar{c}_3Zx') - x'$,

$v_{y'} = (\bar{b}_1X + \bar{b}_2Y + \bar{b}_3Z + \bar{b}_4 - \bar{c}_1Xy' - \bar{c}_2Yy' - \bar{c}_3Zy') - y'$, a vyrovnané řešení

$\bar{a}_1, \dots, \bar{c}_3$ hledáme metodou vyrovnání zprostředkujících měření. Platí

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{c}_2, \bar{c}_3)^T = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (x_1', y_1', \dots, x_6', y_6')^T.$$

2.3.2 Metoda Ker $\bar{\omega}$

Z vlastností teoretického modelu vyplývá, že soustava (2) musí mít netriviální řešení, určené jednoznačně až na nenulový násobek. Matice soustavy tedy musí mít hodnotu pět. Vzhledem k tvaru prvních tří řádků této matice je patrné, že soustava (2) bude mít požadované řešení, právě tehdy, když matice

$$\begin{pmatrix} p_{64} - p_{61} & p_{61}p_{51}' & -p_{61}' \\ p_{64} - p_{62} & p_{62}p_{52}' & -p_{62}' \\ p_{64} - p_{63} & p_{63}p_{53}' & -p_{63}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^T & \beta^T & \gamma^T \end{pmatrix} \quad (11)$$

bude mít hodnotu dva. Při praktickém výpočtu má však matice soustavy (2) hodnotu šest, a to kvůli omezené přesnosti měření souřadnic daných bodů. Vyrovnáme koeficienty matice (11), aby co nejlépe splňovaly požadované matematické vztahy, při zachování jejich významu pro řešenou úlohu.

Z geometrického uspořádání řešené situace vyplývá existence projektivního zobrazení vybrané přímky P_5P_6 na přímkou $P_5'P_6'$. S ohledem na vlastnosti této projektivity pak pro homogenní souřadnice aritmetických zástupců bodů P_6, P_5', P_6' musí platit, že první dva sloupce matice (11) jsou lineárně nezávislé. Existují tedy nenulové koeficienty d_1, d_2 , takové, že $d_1\alpha + d_2\beta = \gamma$. Metodou MNČ určíme optimální odhady \hat{d}_1, \hat{d}_2 koeficientů d_1, d_2 . Vyrovnané hodnoty $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3), \bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3)$ původních α, β hledáme metodou vyrovnání podmínkových měření. Zavedeme opravy $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_6)$, $\bar{\alpha}_i = \alpha_i + v_{2i-1}$, $\bar{\beta}_i = \beta_i + v_{2i}$, $i = 1, \dots, 3$, vázané podmínkami $\hat{d}_1\bar{\alpha} + \hat{d}_2\bar{\beta} - \gamma = (0, 0, 0)$. Určíme \mathbf{v} a vyrovnané hodnoty $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ získáme dosazením \mathbf{v} do zavedených oprav.

3 Závěr

Uvedené metody určení stanoviska O rovinného snímku mají odlišné teoretické pozadí, odtud pak i různou početní realizaci a z ní vyplývající i různé způsoby oprav a vyrovnání zpracovávaných hodnot. Při zpracovávání omezeného množství snímků (amatérské snímky, řídké kontroly) je použitelnost obou metod srovnatelná, při zpracovávání většího množství snímků může být méně kroková metoda DLT výhodnější. Jisté omezení metody Ker $\bar{\omega}$ spočívá i v tom, že žádné čtyři ze zadaných šesti bodů nesmí ležet v jedné rovině.

Literatura

- [1] M.Kočandrlová: *Jednosnímková fotogrammetrie*, Proceedings of Symposium on Computer Geometry, STU Bratislava, 2006, pp.79-84
- [2] K. Pavelka: *Fotogrammetrie 10*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2003
- [3] Š. Voráčová: *Aplikace epipolární geometrie*, Sborník 24. Konference o geometrii a počítačové grafice, Barborka, 2004, pp.236-242

Konvolučné vyhladzovanie štrukturovaných triangulácií

Alexej Kolcun

*Štredisko aplikovanej matematiky a informatiky ÚGN AVČR, v.v.i.
Studentská 1768, 708 00 Ostrava, Česká republika
email: kolcun@ugn.cas.cz*

Abstrakt. Štrukturovanou trianguláciou rozumieme sieť, ktorá vznikne posunom uzlov pravidelnej mriežky a rozdelením takto vzniknutej štvoruholníkovej siete na trojuholníky. V príspevku sú analyzované stratégie lokálneho priemerovania uzlov generovanej siete v kontexte uhlových kritérií kvality.

Kľúčové slová: Štrukturovaná sieť, transport mapping algoritmus, lokálna deformácia siete, barycentrické vyhladzovanie

1 Úvod

Rozklad oblasti s definovanou geometriou na štvor-, resp. trojuholníky je dôležitým krokom pri numerickej simulácii fyzikálnych javov. Existuje veľa prístupov, ako takéto rozklady realizovať, napr. [2], [7]. Dôležitou triedou rozkladov sú *štrukturované* triangulácie, ktoré sú výsledkom „deformácie“ pravidelnej ortogónnej mriežky a následným delením štvoruholníkových buniek na trojuholníky jednou z uhlopriečok. V 3D prípade v druhom kroku delíme bunky na 5, resp. 6 štvorstenov. Možnosť delenia je tentokrát podstatne viac (72 rôznych delení na 6 štvorstenov, resp. 2 delenia na 5 štvorstenov, [5]). Hlavné dôvody pre použitie štrukturovaných sietí sú nasledujúce.

- Efektívny spôsob uloženia dát – matica susednosti uzlov siete je riedka pásová matica s minimálnou možnou šírkou pásu, [1], [6].
- Relatívna jednoduchosť použitých algoritmov. Napr. dá sa využiť aparát pre parametrické modelovanie plôch: pri zvolenom stupni polynómu n a triede aproximčných (interpoláčnych) kriviek definovaných maticou B , príslušnú parametrickú plochu vyjadříme vztáhom

$$P(t, s) = (1, t, t^2, \dots, t^n) B \Pi_m B^T (1, s, s^2, \dots, s^n)^T \quad 0 \leq t, s \leq 1, \quad (1)$$

kde Π_m je matica $(n+1) \times (n+1)$ riadiacich uzlov.

Pre fixované hodnoty $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m_1} = 1$ a s , ktorá prebieha celý interval $0 \leq s \leq 1$, resp. $0 \leq t \leq 1$ a $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{m_2} = 1$, tak dostávame štrukturovanú sieť s $(m_1 + 1) \times (m_2 + 1)$ uzlami.

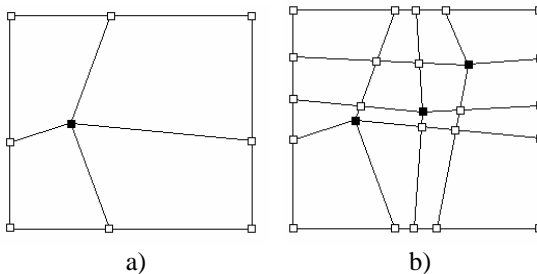
- Existuje dostatočne široká trieda geometrických tvarov, ktoré sa dajú štrukturovane triangularizovať tak, že spĺňujú vlastnosť Delaunayovských triangulácií [3].

2 Dva jednoduché algoritmy

Vychádzajúc z [2] obmedzíme sa na dva typy algoritmov pre štrukturované štvoruholníkové siete. Pre generovanie výslednej triangulácie použijeme kratšie uhlopriečky. Snahou pritom je, aby výsledné siete neobsahovali ani príliš ostré, ani príliš tupé uhly.

2.1 Algoritmus typu „Transport mapping“ [2]

Pri obmedzení sa na bilineárnu interpoláciu v (1) dostávame jednoduchý algoritmus, ilustrovaný na obr. 1.



Obr. 1: Generovanie po častiach bilineárnej siete s a) jedným zadávaným uzlom, b) s tromi zadávanými uzlami.

1. Zadáme uzly typu ■ (tj. zadáme ich súradnice a indexy).
2. Určíme uzly typu □. (Súradnice týchto uzlov sa buď zadávajú interaktívne, alebo sa vhodným spôsobom dopočítavajú. Indexy sú determinované uzlami typu ■.)
3. Vo vzniknutých oblastiach generujeme siete na základe bilineárnej interpolácie.
4. Výsledná sieť je zjednotením dielčích sietí.

V [4] sú analyzované rôzne stratégie dopočítavania uzlov typu □. Zo skúseností s takto koncipovaným generátorom možno povedať, že stratégie, ktoré vedú k sieťam s dobrými geometrickými vlastnosťami (neobsahujú trojuholníky s veľmi ostrými alebo veľmi tupými uhlami, susedné trojuholníky sa príliš nelíšia svojim obsahom) spravidla vyžadujú zadať viac uzlov typu ■, ako vyplýva z priamych požiadavkov na geometriu.

V prípade, že by sme uvažovali obecnjšiu interpoláciu (1) ako bilineárnu, vyžadovalo by to dodefinovať veľké množstvo ďalších uzlov, čo by zneprehľadnilo celý proces generovania siete. Preto obmedzenie sa na bilineárny prípad je opodstatnené.

Z pohľadu [2] možno tento prístup chápať aj ako špeciálny prípad pre “multiblock method”.

2.2 Lokálna deformácia

1. Vygenerujeme pravidelnú ortogonálnu sieť (alebo vychádzame z už vygenerovanej siete).
2. Zadáme súradnice bodov B_1, \dots, B_n definujúcich požadovanú geometriu.
3. Ku každému bodu B_i nájdeme najbližší uzol siete U_i .
4. Uzlu U_i priradíme súradnice bodu B_i .

V prípade, že požadovaná geometria je zadaná analyticky, napr. explicitným vyjadrením uzavretej krivky κ , algoritmus modifikujeme:

- 1'. Identický s 1.
- 2'. Nájdeme najbližší uzol U siete k požadovanej krivke κ .
- 3'. Uzol U siete presunieme na krivku κ .
- 4'. V 8-okolí uzla U hľadáme dvojicu susedných uzlov siete U_1, U_2 takých, že úsečka U_1U_2 pretína krivku κ .
- 5'. Bližší z uzlov U_1, U_2 označíme U .
- 6'. Návrat na krok 3'.

Cyklus 3'–6' ukončíme, keď sa dostaneme k už upravenej časti siete. V prípade otvorenej krivky κ v kroku 2' nájdeme príslušné uzly k začiatku a koncu krivky a celý cyklus ukončíme pri dosiahnutí koncového uzla.

Túto metódu možno považovať za najtriviálnejšiu možnú upravu siete tak, aby vyhovovala dodatočne predpísanej geometrii κ . Napriek tomu metóda generuje dostatočne kvalitné siete. Napr. v [3] je dokázané, že pre

- geometriu danú lineárne lomenou čiarou s koncovými bodami v uzloch siete,
 - východziu sieť so štvorcovými elementami,
- výsledná triangulácia (delenie kratšou uhlopriečkou) je Delaunayovská.

3 Konvolučné vyhladenie

V snahe zlepšiť geometrické vlastnosti výslednej triangulácie je možné sa inšpirovať prístupami vyhladzovania rastrového obrazu prostou (váženou) aritmetickou konvolúciou. Nasledujúce experimenty demonštrujú tri rôzne priemerovacie techniky:

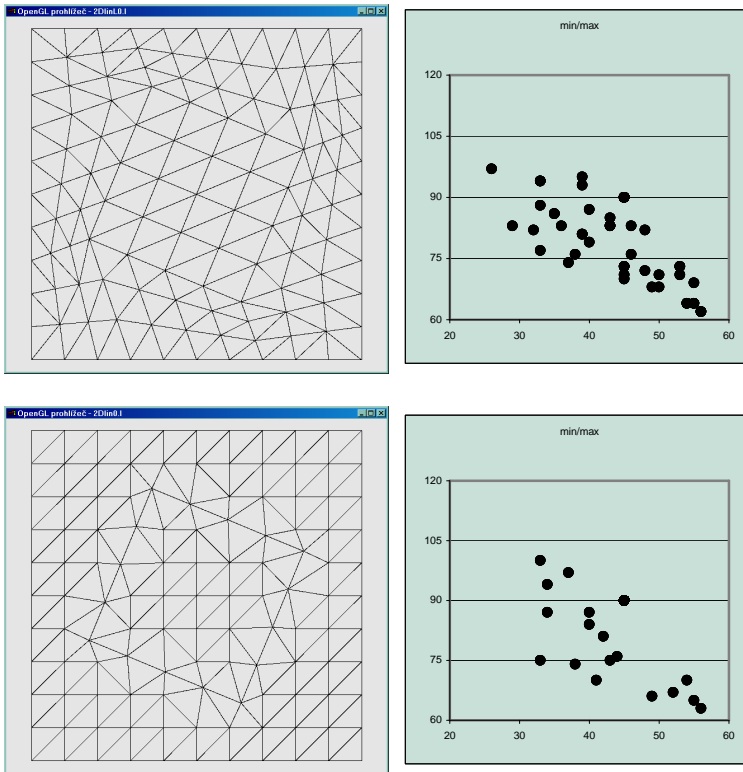
1.
$$P \rightarrow \frac{1}{|\delta(P)|} \sum_{Q \in \delta(P)} Q$$
2.
$$x_P \rightarrow \frac{1}{|\delta_x(P)|} \sum_{Q \in \delta_x(P)} x_Q \quad y_P \rightarrow \frac{1}{|\delta_y(P)|} \sum_{Q \in \delta_y(P)} y_Q$$
3.
$$x_P \rightarrow \frac{1}{|\delta_y(P)|} \sum_{Q \in \delta_y(P)} x_Q \quad y_P \rightarrow \frac{1}{|\delta_x(P)|} \sum_{Q \in \delta_x(P)} y_Q$$

Pritom $\delta(P)$ je množina všetkých susedných uzlov mriežky k uzlu P , $\delta_x(P)$ je množina „horizontálnych“ susedov, tj. „ľavý a pravý“ susedný uzol, $\delta_y(P)$ je množina „vertikálnych“ susedov, tj. „horný a dolný“ susedný uzol.

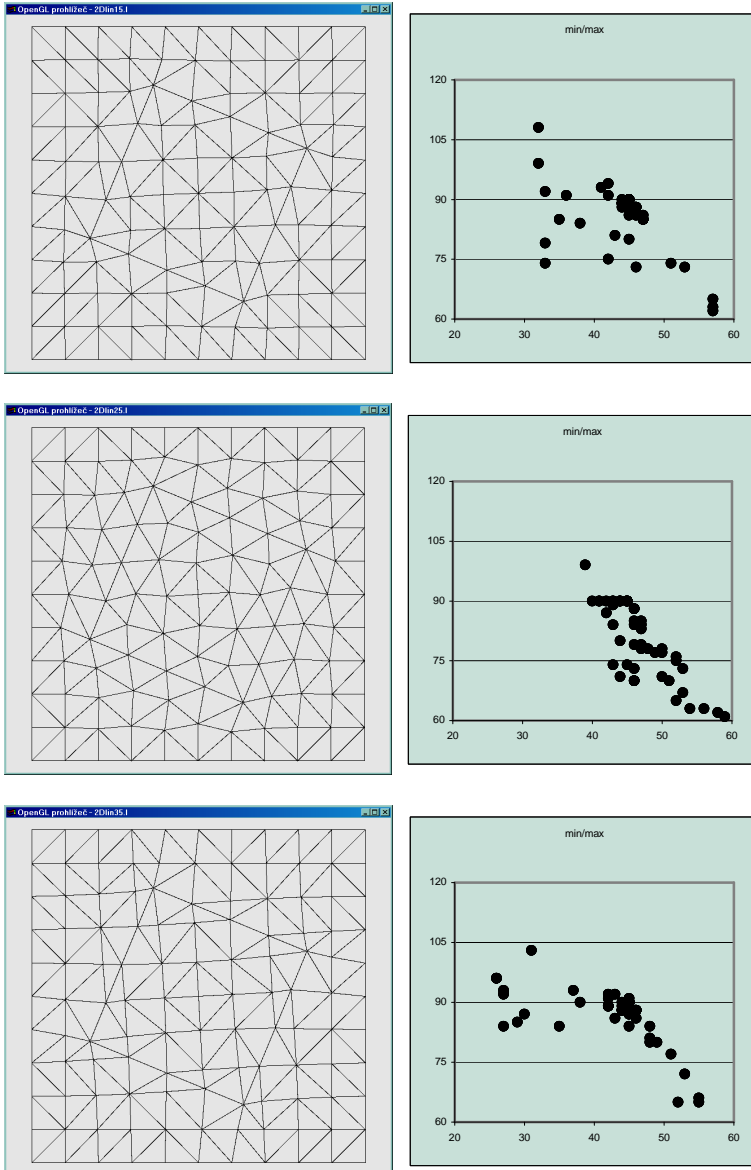
V prvom prípade preto priemerujeme *štandardne*, v druhom prípade x -súradnicu priemerujeme z horizontálnych susedov, y -súradnicu z vertikálnych susedov – *kovariantné vyhladenie*.

V treťom prípade – *kontravariantné vyhladenie* – postupujeme opačne, tj. x -súradnicu priemerujeme z vertikálnych a y -súradnicu z horizontálnych susedných uzlov.

Pre testovací príklad je použitá sieť 11x11 uzlov s jednoduchou geometriou – štvorec polovičnej veľkosti pootočený o $22,5^\circ$.



Obr. 2: Porovnanie generátorov typu „Transport Mapping“ (hore) a „Lokálna deformácia“ (dole). Vpravo sú distribúcie minimálneho (horizontálna os) a maximálneho (vertikálna os) uhlu trojuholníkov.



Obr. 3: Porovnanie rôznych spôsobov konvolučného vyhladenia. Zhora dole: prosté, kovariantné, kontravariantné. Vpravo sú distribúcie minimálneho (horizontálna os) a maximálneho (vertikálna os) uhlu trojuholníkov.

4 Záver

Experimenty ukazujú, že metóda lokálnej deformácie v porovnaní s Transport Mapping prístupom dáva kvalitnejšie siete.

Následné konvolučné vyhladenie v prípade štandardného vyhladenia prináša len nepatrné zlepšenie. Z druhej strany, kovariantné vyhladenie je signifikantne lepšie. Stojí za zmienku fakt, že konvolučné vyhladenie siete je možné aplikovať na štrukturované, tak i na neštrukturované siete. Kovariantný (a taktiež kontravariantný) spôsob je však v prípade štrukturovaných sietí aplikovateľný bez nutnosti dopĺňujúcich testov.

Vyššieuvedené metódy sú implementované v preprocesingu SW GEM2x resp. (GEM3x) pre 2D (resp. 3D) MKP analýzu mechanických a termomechanických problémov.

Pod'akovanie

Príspevok vznikol za podpory projektu 1ET400300415 – Modelování a simulace náročných technických problémů: efektivní numerické algoritmy a paralelní implementace s pomocí nových informačních technologií.

Literatura

- [1] Fiedler, M.: *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. SNTL, Praha 1981.
- [2] George, P.L.: *Automatic Mesh Generation*. J.Willey 1991.
- [3] Kahánek, P., Kolcun, A.: *Bresenham's Regular Mesh Deformation and Angle Criteria*, In: Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice (S. Olivík ed.) ČVUT Praha 2005 pp.95-102.
- [4] Kolcun, A.: *Preprocessing pre aplikáciu MKP v úlohách geomechaniky*. ÚGN AVČR, Ostrava 1999.
- [5] Kolcun, A.: *Nonconformity problem in 3D Grid Decompositions*. Winter Conference of Computer Graphics WSCG'2002, (V.Skala ed.), ZCU Plzeň, 2002.
- [6] Kolcun, A.: *Numerické výpočty a geometria*. Sborník konference o geometrii a počítačové grafice 2003. ZČU Plzeň 2003.
- [7] Kolingerová, I.: *Rovinné triangulace*. ZČU Plzeň, 1999.

Zlatý rez v geometrii

Božena Koreňová

*Dept. of Mathematics and Descriptive Geometry, Technical University in Zvolen
Masarykova 24, 960 53 Zvolen,
email: korenova@vsld.tuzvo.sk*

Abstrakt. V článku sa venujeme matematickému vyjadreniu zlatého rezu a geometrickým útvarom, ktoré v sebe skrývajú proporciu zlatého rezu.

Kľúčové slová: proporcia, gnómon, zlatý rez, logaritmická špirála, zlatý obdĺžnik, zlatý trojuholník, zlaté štvoruholníky, zlatý päťuholník

1 Základné pojmy

Proporcía je slovo latinského pôvodu a znamená vzájomný vzťah dvoch alebo viacerých rozmerov. Z hľadiska geometrie je to teda metrický vzťah, metrický jav a znamená koeficient (pomer) podobnosti.

Gnómon – jedna z foriem, ktorá tvorí zákonitosť harmonického rastu, je to geometrická figúra, ktorá s inou figúrou dohromady vytvára podobnú figúru. Gnómické zostrojovanie geometrických figúr používame vtedy, keď chceme zachovať podobnosť celku so všetkými jeho časťami.

Zlatý rez (*golden section, golden proportion, golden ratio, golden mean, lat: - sectio aurea, sectio divina, divina proportia*) je najznámejší proporčný vzťah. Geometrické tvary odvodené zo zlatého rezu sa v európskej kultúre považujú za esteticky veľmi príťažlivé. K zlatému rezu sa prikláňa človek intuitívne a podvedome. Mnohé výtvarné diela obsahujú zlatý rez i napriek tomu, že autori o tomto zázračnom pomere nič nevedeli.

Číselná hodnota zlatého rezu je iracionálne číslo s nekonečným desatinným rozvojom a označujeme ho gréckym písmenom ϕ . Z geometrického hľadiska zlatý rez znamená rozdeliť úsečku na dve časti tak, že pomer dĺžky menšej časti ku dĺžke väčšej sa rovná pomeru dĺžky väčšej časti ku dĺžke celej úsečky. Matematický zápis tohto problému nás vedie ku kvadratickej rovnici. Pri výpočte je vhodné zvoliť si dĺžku celej úsečky, alebo jej časti rovnú jednej. Ak volíme všetky možnosti, dostaneme tri rôzne kvadratické rovnice:

- $x^2 - 3x + 1 = 0, x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,618\dots, x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,381966\dots$
- $x^2 - x - 1 = 0, x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618\dots, x_2 = -0,618033988\dots$
- $x^2 + x - 1 = 0, x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618\dots, x_2 = -1,618033988\dots$

Tieto čísla sú vzájomne pospájané vzťahmi a nemožno ich od seba oddeliť, pretože sú matematickým vyjadrením toho istého javu, ktorý nazývame zlatý rez. Pre jednoduchosť zápisu označme:

$$a = 0,618... \quad b = 1,618... \quad c = 2,618... \quad d = 0,382....$$

Platí :

- $a + d = 0,618 + 0,382 = 1$ $a \cdot b = c \cdot d = 1$
- $a \cdot c = b$ $b \cdot d = a$ $a^2 = d$ $b^2 = c$
- $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$ alebo inak $a \cdot d = \frac{1}{b \cdot c}$ $a \cdot c = \frac{1}{b \cdot d}$

Pod pojmom zlatý rez sa najčastejšie chápe pomer dvoch rozmerov vyjadrený

číslom :

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618 \dots$$

V praxi sa táto hodnota niekedy nahrádza pomerom dvoch susedných čísel z Fibonacciho postupnosti

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

ktorej rekurentný vzorec a diferenčná rovnica je :

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

$$a_n = a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + a_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Čím väčšie čísla z postupnosti použijeme, tým dostaneme hodnotu bližšiu k skutočnej hodnote zlatého pomeru. Je to preto, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618033988 \dots$$

2 Zlaté geometrické útvary

V geometrii existuje niekoľko útvarov, ktoré nazývame zlaté. Je to preto, že skrývajú v sebe sebadobnosť alebo zlatý pomer.

2.1 Zlatá špirála

V biológii, v bionike, v teórii architektúry a umenia sa často vyskytuje pojem *zlatá špirála*. V matematike ju nazývame *logaritmická špirála*. Je to krivka, ktorá pretína sprievodiče svojich bodov pod konštantným uhlom, preto sa táto krivka tiež nazýva *ekviangulárnou (rovnakouhlou)*. Je sebadobná, tj. každá jej časť je podobná celej krivke. Rovnice logaritmickkej špirály v polárnych súradniciach sú :

$$\text{veľkosť sprievodiča : } \rho = k \cdot a^{b \cdot \varphi}$$

$$\text{uhol sprievodiča s polárnou osou: } \varphi = \frac{1}{b} \frac{1}{\ln a} \ln \frac{\rho}{k}$$

kde k , a , b sú konštanty. Miesto konštanty a sa často používa základ prirodzeného logaritmu $e = 2,71828\dots$, koeficient k a b má najčastejšie hodnotu rovnú 1. Pól O súradnicového systému je asymptotickým bodom logaritmickkej špirály, nazývame ho aj stred, centrum alebo pól špirály. Sprievodiče bodu sú úsečky, ktoré spájajú stred O s bodom krivky, nazývame ich aj polomery špirály. Dotyčnice zvierajú so sprievodičmi v dotykových bodoch konštantný uhol λ , pre ktorý platí $\cotg \lambda = b$. Polomer krivosti v bode logaritmickkej špirály je $R = \rho \cdot \sqrt{1 + b^2}$. Stred krivosti v bode je v priesečníku normály a kolmice prechádzajúcej bodom O na sprievodič daného bodu.

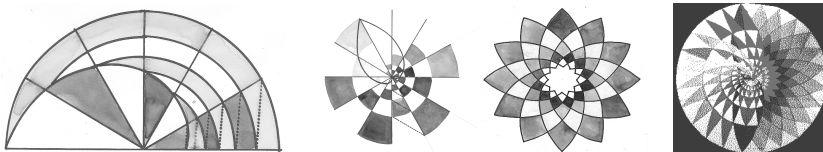
Konštrukcia logaritmickkej špirály je odvodená z nasledujúcej vlastnosti krivky: ak rastie aritmeticky veľkosť uhla sprievodičov s polárou, potom veľkosť sprievodiča rastie geometrickým radom.

Postup konštrukcie logaritmickkej špirály :

- Uhol 2π rozdelíme na n navzájom rovnakých uhlov
- z rovnice vypočítame veľkosti dvoch susedných sprievodičov

$$\rho_0 = k, \quad \rho_1 = k \cdot a^{b \frac{2\pi}{n}}$$

- zostrojíme dve kružnice s polomeri ρ_0, ρ_1 so stredom v póle O
- zostrojíme spojnicu priesečníkov kružníc s ramenami dvoch susedných uhlov
- ďalšie polomery dostaneme pomocou rovnobežiek so spojnicou.

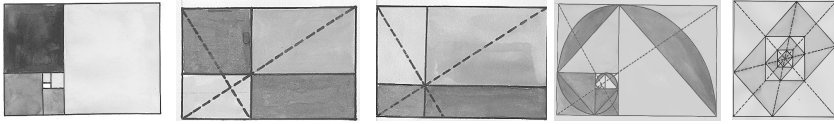


Obr. 1: Konštrukcia zlatej špirály a geometrické kompozície

2.2 Zlaté obdĺžniky

Zlatý obdĺžnik patrí medzi najznámejšie zlaté geometrické útvary a často sa používa ako formát knihy, obrazu, písma. Podľa mnohých autorov prác o zlatom reze, je to najpríjemnejší a oku lahodiaci tvar obdĺžnika. Pomer veľkostí jeho strán je rovný $1,618\dots$. V jeho vnútri existujú body, ktoré sa nazývajú optické stredy a výtvaníci do tohto bodu umiestňujú hlavný motív obrazu. Leží mimo geometrického streda. Ak z neho oddelíme štvorec, dostaneme opäť zlatý obdĺžnik zmenšený $(0,618\dots)$ krát. Tento proces môžeme donekonečna opakovať. Ak k menšej strane zlatého obdĺžnika pripojíme štvorec, dostaneme obdĺžnik, ktorého pomer strán je $2,618\dots = (1,618\dots)^2$. Do zlatého obdĺžnika sa dá vpišať zlatá, teda logaritmická špirála, ktorú zostrojíme s dostatočnou presnosťou pomocou štvrtkružníc. Jej asymptotický stred leží v priesečníku

uhlopriečok dvoch najväčších obdĺžnikov. Aj v štvorci môžeme nájsť zlatý obdĺžnik, ak strany štvorca rozdelíme v zlatom pomere a body pospájame.



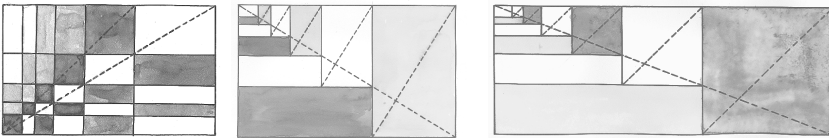
Obr. 2: Zlaté obdĺžniky vpisované do seba, optické stredy, zlatá špirála, zlatý obdĺžnik vo štvorci

Proporčné väzby medzi jednotlivými časťami a prvkami architektonického diela sa často odvodzujú pomocou siete, vytvorenej z uhlopriečok a rovnobežiek vo vnútri obdĺžnika, ktorý je jeho obrysom. Ak zvolíme za obrys alebo pôdorys budovy obdĺžnik so zlatými proporciami, vo vnútri môžeme vytvoriť štruktúru obsahujúcu rôzne typy obdĺžnikov, ktorých pomer strán je odvodený zo zlatého pomeru a jeho mocnín. Na obrázku 3 je uvedených niekoľko ukážok takýchto sietí. Vyskytujú sa tam štvorce (gnómon pre zlatý obdĺžnik) a obdĺžniky, ktorých pomery strán sú:

$$a = (0,618\dots)^1 = 1/1,618\dots,$$

$$b = (0,618\dots)^2 = 0,382\dots = 1/2,618\dots,$$

$$c = (0,618\dots)^3 = 0,236\dots$$



Obr. 3: Zlaté obdĺžnikové štruktúry

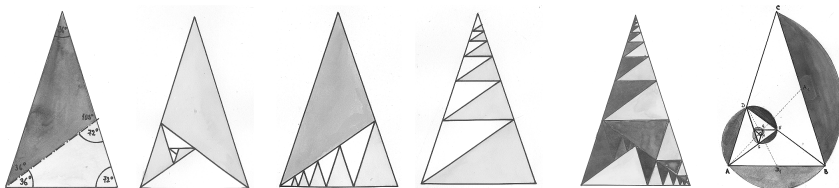
2.3 Zlaté trojuholníky

Zlatý trojuholník je rovnoramenný trojuholník, v ktorom pomer strán je rovný zlatému rezu. Existujú dva typy zlatých trojuholníkov:

- 1. typ - pomer dĺžky ramien ku veľkosti základne je 1,618uhly pri základni majú veľkosť 72° a uhol pri hlavnom vrchole má 36° .
- 2. typ - pomer základne ku veľkosti ramien je 1,618 uhly pri základni sú rovné 36° a uhol pri hlavnom vrchole má veľkosť 108° . Tento trojuholník sa niekedy nazýva aj *zlatý gnómon*.

Os uhla pri základni rozdelí zlatý trojuholník 1. typu na dva zlaté trojuholníky oboch typov. Ak budeme v tomto procese pokračovať, dostaneme vždy zlaté trojuholníky, ktoré sú podobné s predchádzajúcimi a zmenšené pomerom podobnosti 0,618... Na obrázku sú uvedené rôzne možnosti vpisovania stále menších trojuholníkov. Vzniká zaujímavá fraktálová štruktúra.

Zlatú, teda *logaritmickú špirálu* môžeme zostrojiť i pomocou zlatých trojuholníkov, vpisovaných do seba. Vrcholy týchto trojuholníkov ležia na špirále, ktorá má stred v priesečníku ťažníc prvých dvoch najväčších zlatých trojuholníkov 1. typu. Stredy *oskulačných kružníc* (kružnice nahrádzajúce s dostatočnou presnosťou oblúk špirály) ležia vo vrcholoch pri základniach trojuholníkov a zostrojíme v nich osi uhlov.



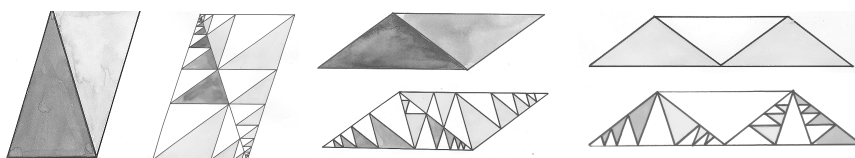
Obr. 4 : Zlatý trojuholník 1. typu



Obr. 5: Zlatý trojuholník 2. typu – zlatý gnómon

2.4 Zlaté štvoruholníky

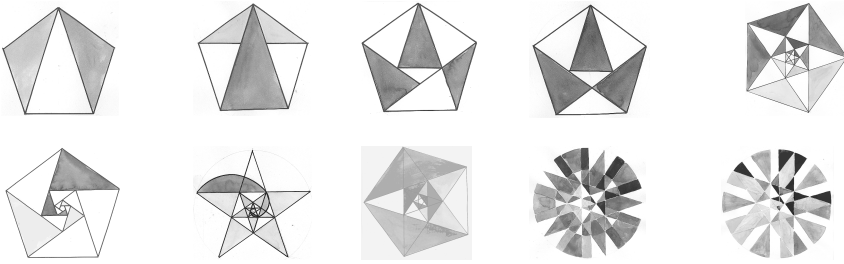
Zlaté štvoruholníky vznikajú skladaním zlatých trojuholníkov. Ak spojíme dva zlaté trojuholníky rovnakého typu, dostaneme zlaté rovnobežníky – kosodĺžniky. Ak spojíme 3 rovnaké trojuholníky, dostaneme zlaté lichobežníky. Na obrázku sú zobrazené oba typy zlatých kosodĺžnikov i lichobežníkov. Ich vnútorná štruktúra sa dá vyplniť zlatými trojuholníkmi.



Obr. 6: Zlaté kosodĺžniky a lichobežníky

2.5 Zlatý päťuholník

Pravidelný päťuholník má pomer uhlopriečky ku strane rovný zlatému rezu. Dá sa poskladať i zostrojiť zo zlatých trojuholníkov. Medzi vonkajším a vnútorným päťuholníkom, ktorý je ohraničený uhlopriečkami, je koeficient podobnosti rovný $(1,618\dots)^2 = 2,618\dots$ Je to číslo, ktoré poznáme z výpočtu zlatého rezu. Na obrázku sú zobrazené konečné i nekonečné pokrytia (bez medzier i prekryvania) oboma typmi zlatých trojuholníkov. Aj do päťuholníka sa dá vpísať špirála. Uvádzame i možnosti tvorby geometrických kompozícií.



Obr. 7: Zlatý päťuholník a jeho pokrytia

3 Záver

Vesmír a príroda sa riadia zákonmi, ktoré nikdy nebudeme vedieť jednoznačne a úplne popísať. Každý nový objav posunie naše poznanie bližšie k pravde, ale vždy bude existovať niečo, čo nedokážeme popísať slovami a matematicky vyjadriť. Svet mimo nás i v nás má zopár čísel, od ktorých sú odvodené jeho proporcie, zákony vývoja, rastu, pohybu a zmien. Fyzici poznajú mnoho konštant, matematici používajú v svojich výpočtoch tri zaujímavé čísla:

$$\pi = 3,141592654\dots, \quad e = 1,718281828\dots, \quad \varphi = 1,618033988\dots$$

Nevieme povedať, koľko čísel ovplyvňuje a riadi naše myslenie, naše osudy, náš život a nevieme, aké vzťahy medzi sebou ukrývajú. Zlatý rez je tajomné číslo, ktorého vlastnosti a význam iba objavujeme.

Literatúra

- [1] CRHÁK, F. – KOSTKA, Z.: *Výtvarná geometria*, SPN Praha 1967, ISBN nemá
- [2] <http://sk.wikipedia.org/wiki/Kreativita>
- [3] <http://alife.tuke.sk/> Tutoriály
- [4] IVANOVÁ-ŠALINGOVÁ, M. – MANÍKOVÁ, Z. : *Slovník cudzích slov*, SPN Bratislava 1983
- [5] LIVIO M. : *Zlatý rez*, Argo Praha 2006, ISBN 80-7203-808-7
- [6] PAPPASOVÁ, T.: *Potešenie z matematiky, objavovanie matematiky všade okolo nás*, Vydavateľstvo Nebojsa Bratislava 1997, ISBN 80-967 724-6-5
- [7] REKTORYS, K. A kolektív: *Přehled užité matematiky*, SNTL Praha 1968, ISBN nemá
- [8] TH. MOREUX: *Jak porozumím analytické geometrii*, Nakladatelství V1.Orel, Praha, rok vydania neznámy
- [9] www.ulib.sk/index/go.php?id=1400&lang=sk - 38k

Lineární operátory dané symetrickou maticí.

Anna Kovářová

Kamil Maleček

Jaroslav Římal

*Katedra matematiky, Stavební fakulta ČVUT, Thákurova 7, Praha 6, ČR
email: kamil.malecek@fsv.cvut.cz, anna.kovarova@fsv.cvut.cz*

Abstrakt. V příspěvku uvádíme některé vlastnosti lineární transformace resp. operátoru v souvislosti s vlastními čísly a vlastními vektory operátoru. Ukazujeme význam vlastních čísel a vlastních vektorů při výpočtu vázaného extrému kvadratické formy dvou proměnných vzhledem ke kružnici.

Klíčová slova: Lineární operátor, vlastní čísla, vlastní vektory, kvadratická forma, vázaný extrém.

1 Geometrická interpretace operátoru.

V euklidovské rovině E_2 resp. vektorovém prostoru R_2 mějme lineární transformaci resp. lineární operátor, který je dán symetrickou maticí

$$A = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}, \quad A \neq \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Transformace resp. operátor, ve kterém obrazem bodu resp. vektoru (x, y) je bod resp. vektor (x', y') , má v pravouhlé soustavě souřadnic $[O, x, y]$ analytické vyjádření

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= bx + cy. \end{aligned} \quad (2)$$

Jestliže matice operátoru je symetrická, pak funkce $U(x, y)$ tvaru

$$U(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (3)$$

má tu vlastnost, že

$$(x', y') = \frac{1}{2} \text{grad}U(x, y). \quad (4)$$

Z (4) plyne geometrická interpretace transformace resp. operátoru: Pokud křivka k je vrstevnice grafu funkce U v rovině xy , pak obrazem průvodního vektoru (x, y) bodu $[x, y] \in k$ je směrový vektor normály křivky k v bodě $[x, y]$.

2 Vlastní čísla a vlastní vektory operátoru

Vlastní vektor operátoru je takový nenulový vektor, jehož obraz je jeho nenulovým násobkem. Proto souřadnice vlastních vektorů jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} ax + by &= \lambda x & \Leftrightarrow & (a - \lambda)x + by = 0 \\ bx + cy &= \lambda y & & bx + (c - \lambda)y = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Aby soustava rovnic (5) měla netriviální řešení, musí být

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Kořeny λ_1, λ_2 této kvadratické rovnice se nazývají vlastní čísla operátoru. Diskriminant D je roven výrazu $(a - c)^2 + 4b^2$, proto má rovnice pouze reálné kořeny. V případě, že $D \neq 0$, má rovnice dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2 a souřadnice příslušných vlastních vektorů musí splňovat rovnice $(a - \lambda_1)x + by = 0$ a $bx + (c - \lambda_2)y = 0$.

Vlastní vektory jsou proto vektory

$$\alpha(b, -(a - \lambda_1)) \text{ a} \quad (7)$$

$$\beta((c - \lambda_2), -b), \quad (8)$$

kde α, β jsou nenulové konstanty z R . Protože $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou řešením rovnice (6), tak skalární součin vektorů (7) a (8) je roven 0, a tyto vektory jsou proto ortogonální.

V případě, že $D = 0$ (tj. když $b = 0 \wedge a = c$), je $\lambda_{1,2} = a$ a každý vektor je vlastním vektorem.

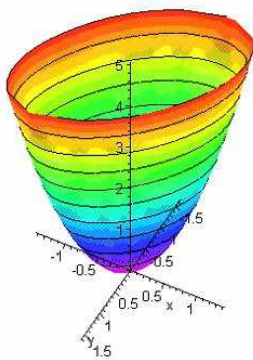
Geometrická interpretace vlastních vektorů je dobře známa. V lineární transformaci je obrazem přímky přímka, a pokud směrový vektor přímky je vlastní vektor, tak jejím obrazem je přímka s ní rovnoběžná.

3 Graf funkce U a vlastní vektory

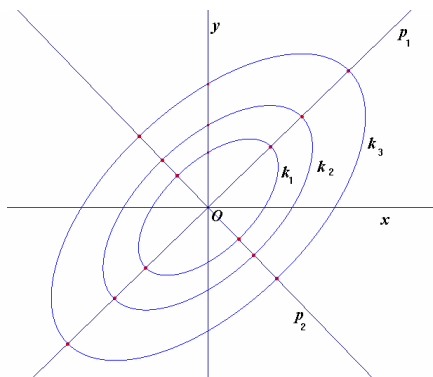
Z (4) plyne, že lineární transformace resp. operátor je možné zadat také funkcí U z (3), tj. kvadratickou formou dvou proměnných. Proto je grafem funkce

U kvadratická plocha. O typu kvadratické plochy rozhoduje hodnota determinantu matice A , viz (1). Mohou nastat tři možnosti.

a) Pokud $\det A > 0$, pak kvadratická forma U je pozitivně definitní (pro $a > 0$) nebo negativně definitní (pro $a < 0$) a grafem funkce je U je eliptický paraboloid, obr. 1. Jeho speciální případ – rotační paraboloid ($b = 0 \wedge a = c$) – nebudeme uvažovat. Na obr. 2 je několik vrstevnic – elipsy k_1, k_2, k_3 .

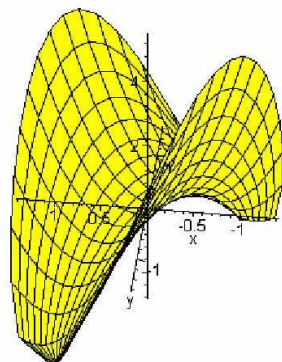


Obr. 1

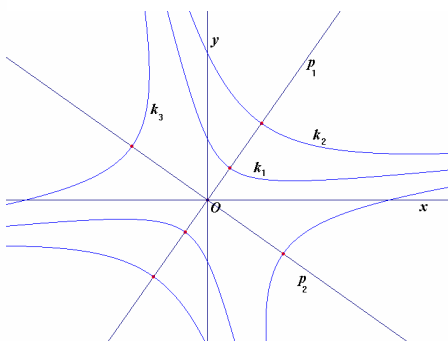


Obr. 2

b) Pokud $\det A < 0$, pak kvadratická forma je indefinitní a grafem je hyperbolický paraboloid, obr.3. Na obr. 4 jsou zobrazeny vrstevnice – hyperboly k_1, k_2, k_3 .



Obr. 3



Obr. 4

Označme p_1 a p_2 přímky, na kterých leží v případě a) vrcholy elips k_1, k_2, k_3, \dots a v případě b) hlavní vrcholy hyperbol k_1, k_2, k_3, \dots , obr.2 a 4. Dále označme P_1 a P_2 paraboly, které jsou řezy grafu funkce U rovinami,

kteří jsou kolmé k rovině xy a procházejí přímkami p_1 a p_2 . Pro oba případy platí následující tvrzení:

- Směrové vektory přímek p_1 a p_2 jsou příslušné vlastní vektory operátoru.

- Paraboly P_1 a P_2 jsou na grafu funkce U křivky největšího spádu.

- V bodech parabol P_1 a P_2 (vyjma počátku O) je derivace ve směru příslušného vlastního vektoru extrémální.

c) Jestliže $\det A = 0$, lze funkci U zapsat ve tvaru

$$U(x, y) = \pm(ax + by)^2, \text{ matici } A \text{ ve tvaru } \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}. \text{ Grafem funkce } U$$

je parabolická válcová plocha, jejíž povrchové přímky jsou rovnoběžné s přímkou danou rovnicemi $ax + by = 0 \wedge z = 0$ (obr.5). Příslušný operátor má podle (4) analytické vyjádření

$$x' = \pm a(ax + by), \quad y' = \pm b(ax + by), \text{ a tedy}$$

$$(x', y') = \pm(ax + by)(a, b). \quad (9)$$

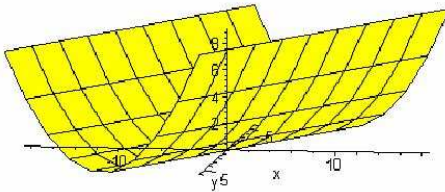
Transformace resp. operátor je singulární. Z (9) plyne, že jádro operátoru $\text{Ker}A$ tvoří množina vektorů

$$\alpha(b, -a), \alpha \in R \quad (10)$$

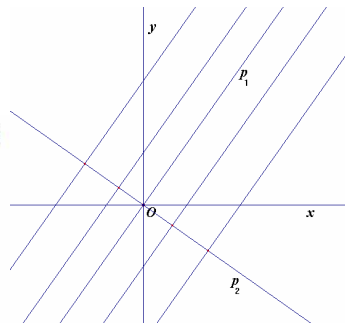
a množinu $\text{Im}A$ tvoří vektory

$$\beta(a, b), \beta \in R. \quad (11)$$

Vlastní čísla operátoru jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = a^2 + b^2$. Vlastnímu číslu λ_1 přísluší vlastní vektory (10) z $\text{Ker}A$ a vlastnímu číslu λ_2 přísluší vlastní vektory (11) z $\text{Im}A$. Na obr. 6 je několik vrstevnic funkce U , směrové vektory přímek p_1 a p_2 odpovídají opět vlastním vektorům.



Obr. 3



Obr. 4

4 Vázaný extrém funkce U v souvislosti s vlastními čísly a vektory

Budeme hledat vázaný extrém funkce U vzhledem k jednotkové kružnici o rovnici $x^2 + y^2 = 1$. Použijeme metodu Lagrangeova multiplikátoru. Pracujeme s funkcí

$$F(x, y, \lambda) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Její parciální derivace podle proměnných x, y, λ položíme rovny 0 a dostaneme tak soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} ax + by - \lambda x &= 0, \\ bx + cy - \lambda y &= 0, \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

První dvě rovnice z (13) můžeme napsat pomocí vektorů takto:

$$(ax + by, bx + cy) = \lambda(x, y). \tag{14}$$

Protože to jsou rovnice (5), jejich řešením jsou souřadnice vlastních vektorů. Znормujeme-li vlastní vektory, splňují jejich souřadnice třetí rovnici, proto jsou normované vlastní vektory průvodní vektory stacionárních bodů vázaného extrému. Je zřejmé, že stacionární body jsou čtyři, z nichž vždy dva jsou souměrné podle počátku O .

Vynásobíme-li rovnici (14) skalárně vektorem (x, y) , dostaneme rovnici

$$U(x, y) = \lambda(x^2 + y^2). \tag{15}$$

Z této rovnice plyne, že hodnota extrému v jedné dvojici bodů souměrných podle počátku je vlastní číslo λ_1 a v druhé dvojici λ_2 .

V případě vázaného extrému funkce U vzhledem ke kružnici o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$ jsou průvodní vektory stacionárních bodů opět vlastní vektory, které ale mají velikost poloměru r kružnice a hodnoty extrémů jsou čísla $r^2\lambda_1$ a $r^2\lambda_2$.

Uvedeme konkrétní příklad – vázané extrémy funkce $U(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$ vzhledem ke kružnici $x^2 + y^2 = 1$:

Z podmínky, že parciální derivace funkce $F(x, y, \lambda) = 5x^2 + 4xy + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ jsou rovny nule, dostaneme nenulové řešení soustavy

$$(5 - \lambda)x + 2y = 0$$

$$2x + (2 - \lambda)y = 0$$

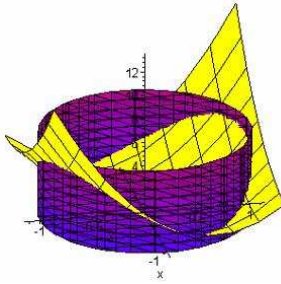
pro $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = 1$.

Pro $\lambda_1 = 6$ je vlastní vektor $\alpha(1, \frac{1}{2})$ a stacionární body

$A = [\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}], B = [-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}]$, pro $\lambda_2 = 1$ je vlastní vektor

$\beta(1, -2)$ a stacionární body $C = [-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}], D = [\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}]$. Tyto

vlastní vektory představují směrové vektory přímk p_1 a p_2 (os souměrnosti vrstevnic funkce U - viz obr.). Hodnota funkce U v bodech A, B je 6 (tj. λ_1), v bodech C, D je hodnota funkce U rovna 1 (λ_2).



5 Závěr

Ukázali jsme význam vlastních čísel a vlastních vektorů v souvislosti s extrémů funkce U . Určení stacionárních bodů a hodnot vázaného extrémů funkce U vzhledem ke kružnici může být jenom algebraická záležitost, není tedy třeba použít diferenciální počet. Elipsy a hyperboly o rovnicích $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ lze chápat jako vrstevnice funkce U , proto příslušné vlastní vektory představují směrové vektory jejich os. Na příkladech tohoto typu by se dalo při výuce poukázat na provázanost jednotlivých partií matematiky.

Výsledky obsažené v tomto článku byly dosaženy s finanční podporou grantového projektu č. 103/06/0815 Grantové agentury České republiky.

Literatura

- [1] Gelfand, J. M.: *Lineární algebra*, NČSA Praha 1953 (překlad z ruštiny)
- [2] Birkhoff, G., Mac Lane, S.: *Algebra*, ALFA Bratislava 1973

Exact Offsets of Quadratic Bézier Triangles

Miroslav Lávička, Bohumír Bastl

*Dept. of Mathematics, Fac. of Applied Sciences, Univ. of West Bohemia
Univerzitní 22, 301 00 Plzeň, Czech Republic
lavicka@kma.zcu.cz, bastl@kma.zcu.cz*

Abstract. The offset surfaces to non-developable quadratic triangular Bézier patches are rational surfaces. We give a direct proof of this result and formulate an algorithm for computing rational parameterizations of the offset surfaces. This algorithm can be used to generate exact offsets of general free-form surfaces approximated by quadratic Bézier triangles.

Keywords: Quadratic Bézier triangles; convolution surfaces; offsets

1 Introduction

One of the fundamental operations in CAD is offsetting. For general free-form NURBS surfaces, an exact rational parametric description of the offsets as NURBS is not available, and therefore suitable approximate techniques have to be used (for surfaces, or for their offsets). Since the offset surfaces of polynomial triangular Bézier surface patches of degree 2 are rational (see [3]), we can use these patches for approximation of the given surface and computing its exact offset.

This paper contains results of the joint work with Bert Jüttler and Jiří Kosinka from JKU Linz. We show that rational parameterizations of the offset surfaces of quadratic patches can be computed simply by solving a 2×2 system of linear equations. Next, we use this result to formulate an algorithm for offset computation.

2 Quadratic Bézier triangles

A quadratic patch is defined by a Bernstein–Bézier representation

$$\mathbf{a}(u, v, w) = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i+j+k=2}} \mathbf{p}_{ijk} \frac{2}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad (1)$$

where $u, v, w \geq 0$, $u + v + w = 1$. The parameters u, v vary within a certain domain triangle $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. The coefficients \mathbf{p}_{ijk} are called the control points. Sometimes it is more convenient to use the power basis representation

$$\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{a}_{20}u^2 + \mathbf{a}_{11}uv + \mathbf{a}_{02}v^2 + \mathbf{a}_{10}u + \mathbf{a}_{01}v + \mathbf{a}_{00}, \quad (2)$$

and we assume that not all coefficients of the quadratic polynomials vanish, i.e., $(\mathbf{a}_{20}, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{02}) \neq \mathbf{0}_{3 \times 3}$.

Quadratic patches are capable of producing C^1 smooth spline surfaces representing general free-form objects. For instance, Powell–Sabin (PS) macro elements (see [4]), consisting of 6 quadratic patches each, are determined by first order Hermite data at the vertices of a triangle, and the collection of PS elements forms a C^1 spline surface.

3 GRC property of quadratic Bézier patches

Let A and B be smooth surfaces in \mathbb{R}^3 . The *convolution surface* $C = A \star B$ is defined as

$$C = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B \text{ and } \alpha(\mathbf{a}) \parallel \beta(\mathbf{b})\}, \quad (3)$$

where $\alpha(\mathbf{a})$ and $\beta(\mathbf{b})$ are the tangent planes of A and B at points $\mathbf{a} \in A$ and $\mathbf{b} \in B$. The points \mathbf{a} , \mathbf{b} are called *corresponding points*. To find corresponding points at A and B , we have to construct a reparameterization $\phi: \tilde{D}_B \rightarrow D_A$

$$(u, v) = (\varphi_1(s, t), \varphi_2(s, t)), \quad (4)$$

which is defined for a certain domain $\tilde{D}_B \subseteq D_B$, with the property that the tangent planes $\alpha(\mathbf{a})$ and $\beta(\mathbf{b})$ at $\mathbf{a}(u(s, t), v(s, t)) \in A$ and $\mathbf{b}(s, t) \in B$ are parallel. Then, the parametric representation of $C = A \star B$ is

$$\mathbf{c}(s, t) = \mathbf{a}(\varphi_1(s, t), \varphi_2(s, t)) + \mathbf{b}(s, t), \quad (s, t) \in \tilde{D}_B. \quad (5)$$

Theorem 1. (GRC property) *The convolution surfaces of non-developable quadratic polynomial surfaces with arbitrary rational surfaces are again rational.*

Proof. See [3] for more details. \square

Corollary 2. *The offset surfaces of non-developable quadratic patches are always rational.*

Analyzing the system of linear equations (4), we obtain a general formula for computing convolution surfaces of quadratic patches.

Theorem 3. *Consider a non-developable quadratically parameterized surface A described by (2). Let*

$$\mathbf{D} = (d_{ij}), \quad \mathbf{D}^u = (d_{ij}^u), \quad \mathbf{D}^v = (d_{ij}^v), \quad \text{where} \quad (6)$$

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} 2a_{20i} & a_{11i} \\ a_{11j} & 2a_{02j} \end{vmatrix}, \quad d_{ij}^u = \begin{vmatrix} a_{11i} & a_{10i} \\ 2a_{02j} & a_{01j} \end{vmatrix}, \quad d_{ij}^v = \begin{vmatrix} a_{10i} & 2a_{20i} \\ a_{01j} & a_{11j} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

$i, j = 1, 2, 3$. Consider the normal vector

$$\mathbf{n}_B = \mathbf{n}_B(s, t) = (\beta_1(s, t), \beta_2(s, t), \beta_3(s, t))^\top \quad (8)$$

at the point $\mathbf{b}(s, t)$ of the surface B . The tangent planes of the surfaces A and B at the points $\mathbf{a}(u(s, t), v(s, t))$ and $\mathbf{b}(s, t)$, where

$$u(s, t) = \frac{\mathbf{n}_B^\top \mathbf{D}^u \mathbf{n}_B}{\mathbf{n}_B^\top \mathbf{D} \mathbf{n}_B}, \quad v(s, t) = \frac{\mathbf{n}_B^\top \mathbf{D}^v \mathbf{n}_B}{\mathbf{n}_B^\top \mathbf{D} \mathbf{n}_B}, \quad (9)$$

are parallel.

Proof. See [1] for more details. \square

The formula (9) can be used for all quadratically parameterized surfaces, except for developable ones, and for all non-parabolic points at non-developable quadratic patches.

4 Algorithm for computing exact offsets

The offset construction is based on the computation of convolution surface $C = A \star B$, where A is a non-developable quadratic patch (2) and B is a suitable patch on a sphere with the radius d centered at the origin. Further, we assume that the domain triangle Δ is the standard triangle obtained for $u \in [0, 1]$ and $v \in [0, 1 - u]$. The Algorithm 1 is divided into three main parts:

1. *Subdividing the domain* (lines 1–9). We subdivide the given quadratic patch A with the parameterization \mathbf{a} along its parabolic curves, which cause singularities in the Gauss image.
2. *Covering the Gauss image* (lines 11–22). We generate a covering patch B with rational parameterization \mathbf{b} of the corresponding Gauss image on the unit sphere \mathbb{S}^2 . Depending on the mutual position of parabolic curves on \mathbf{a} and the subpatches, the Gauss image of each subpatch is chosen as a spherical triangle or a spherical biangle, which is then represented as a rational Bézier patch.
3. *Parameterizing the offset and trimming* (lines 23–33). Using the reparameterization formula (9) we compute the rational offsets at the distance d . The offset surface of \mathbf{a} is then given as a collection of offsets to all subpatches of \mathbf{a}_i along with exact domain descriptions.

Due to the space limitation, we present only the overview of all steps in Alg. 1. Reader who is interested can find more details in [1].

5 Example

We will demonstrate Alg. 1 on the example. Consider the patch

$$\mathbf{a}(u, v) = \left(\frac{1}{15}(3u^2 - u(7v + 3) - 5(2v^2 + v - 3)), \frac{1}{5}(3u^2 + 2u(v - 4) + 5), \frac{1}{15}(-24u^2 + u(27 - 7v) + 11v^2 - 8v - 3) \right)^\top$$

over Δ , see Fig. 1 (left). We find the preimages of parabolic points

$$64u^3 + (166v + 9)u^2 + 2(56v^2 - 82v - 473)u + 20v^3 - 186v^2 - 1562v - 1081 = 0. \quad (10)$$

Algorithm 1 Algorithm for computing exact offsets

Input: Quadratic patch A with parameterization \mathbf{a} over Δ , offsetting distance d .

Output: Exact offset of A given by the set of parameterizations \mathbf{c}_i and corresponding exact domains $D_{\mathbf{c}_i}$

```

1:  $\mathcal{P} \leftarrow$  preimages of parabolic points on  $A$ 
2: if  $\mathcal{P} \cap \text{int}(\Delta) \neq \emptyset$  then
3:   Subdivide  $A$  into subpatches  $A_i$  along parabolic curves
4:    $\{\mathbf{a}_i\} \leftarrow$  parameterizations of triangular subpatches  $A_i$  over  $\Delta$ 
5:    $n \leftarrow$  number of subpatches
6: else
7:    $\mathbf{a}_1 \leftarrow \mathbf{a}$ 
8:    $n \leftarrow 1$ 
9: end if
10: for all  $i = 1, \dots, n$  do
11:    $\mathcal{P}_i \leftarrow$  preimages of parabolic points of  $A_i$ 
12:   if  $\mathcal{P}_i \cap \Delta$  is not a line segment then  $\{\Gamma(\mathbf{a}_i)$  is a triangle $\}$ 
13:      $\mathbf{z} \leftarrow$  suitable pole for the stereographic projection  $\sigma_{\mathbf{z}}$ 
14:      $\Omega \leftarrow \sigma_{\mathbf{z}}(\Gamma(\mathbf{a}_i))$ 
15:      $\widehat{\Omega} \leftarrow$  circumscribed triangle of  $\Omega$ 
16:   else  $\{\Gamma(\mathbf{a}_i)$  is a biangle $\}$ 
17:      $\mathbf{z} \leftarrow$  singular point of  $\Gamma(\mathbf{a}_i)$ 
18:      $\Omega \leftarrow \sigma_{\mathbf{z}}(\Gamma(\mathbf{a}_i))$ 
19:      $\widehat{\Omega} \leftarrow$  circumscribed angle of  $\Omega$ 
20:   end if
21:    $B_i \leftarrow \sigma_{\mathbf{z}}^{-1}(\widehat{\Omega})$ 
22:    $\mathbf{b}_i \leftarrow$  rational Bézier description of  $B_i$ 
23:    $\{u_{\mathbf{b}_i}, v_{\mathbf{b}_i}\} \leftarrow$  subs(Eq. (9),  $\mathbf{n}_{B_i} = \text{Numerator}(\mathbf{b}_i)$ )
24:    $\mathbf{c}_i \leftarrow \mathbf{a}_i(u_{\mathbf{b}_i}, v_{\mathbf{b}_i}) + d \cdot \mathbf{b}_i$ 
25:    $\mathbf{n}_i \leftarrow \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial v}$ 
26:    $m \leftarrow$  number of edges of  $\Gamma(\mathbf{a}_i)$ 
27:   for all  $j = 1, \dots, m$  do
28:      $\{\mathbf{C}_j\} \leftarrow$  parameterizations of normal cones of  $\mathbf{a}_i$  along
       boundary curves
29:      $\{f_j\} \leftarrow$  implicit equations of the normal cones
30:     Choose correct sign of  $f_j$ 
31:      $\{g_j\} \leftarrow$  subs( $f_j, (x, y, z) = \mathbf{b}_i(s, t)$ )
32:   end for
33:    $D_{\mathbf{c}_i} \leftarrow \{(s, t) \in \Delta : g_j(s, t) \geq 0, j = 1, \dots, m\}$ 
34: end for
35: return  $\{(\mathbf{c}_i, D_{\mathbf{c}_i})\}$ 

```

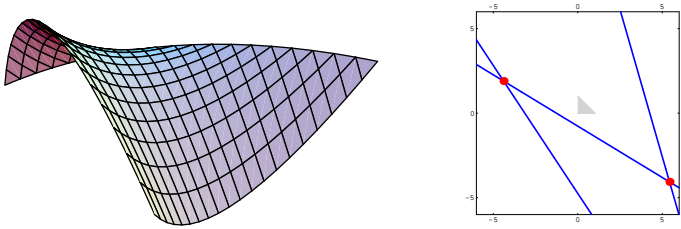


Figure 1: Left: Bézier patch $\mathbf{a}(u, v)$. Right: Preimage of parabolic points (blue) and singular points (red) over Δ (gray).

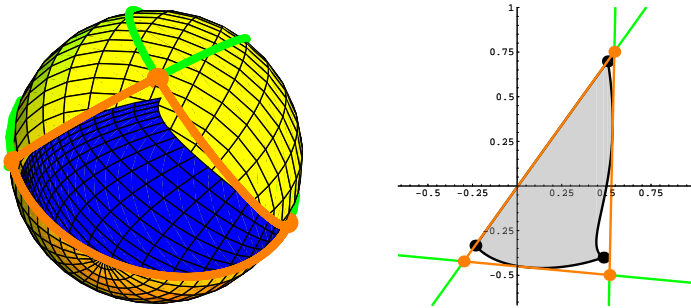


Figure 2: Left: Gauss image (blue) with covering patch (with orange boundaries). Right: Stereographic image $\Omega = \sigma_{\mathbf{z}}(\Gamma(\mathbf{a}))$ of the Gauss image (gray) and circumscribed triangle (orange).

The polynomial (10) factors into 3 terms corresponding to 3 real lines (see Fig. 1 (right)) which do not intersect Δ . Thus, no subdivision is needed.

The Gauss image of $\mathbf{a}(u, v)$ is shown in Fig. 2 (left). We use the stereographic projection $\sigma_{\mathbf{z}}$ with the pole $\mathbf{z} = (0, 0, 1)^T$ and obtain the curved triangle shown in Fig. 2 (right). After generating a circumscribed triangle and parameterizing it as a linear Bézier triangle, we apply the inverse stereographic projection. This gives the rational parameterization \mathbf{b} of quadratic patch B covering $\Gamma(\mathbf{a})$.

Next, we can apply the convolution step – the obtained offset surface (see Figure 3) is a rational triangular Bézier surface of degree 10. Since the patch \mathbf{b} , covering the Gauss image $\Gamma(\mathbf{a})$, is “bigger” than $\Gamma(\mathbf{a})$, it contains points with normal vectors which do not correspond to normals of the patch given \mathbf{a} over Δ . Hence, the offset surface \mathbf{c} over Δ is also bigger than the exact offset surface, and we need to restrict the parameter domain to an appropriate subset $D_{\mathbf{c}}$ – see Fig. 3 (right). This domain

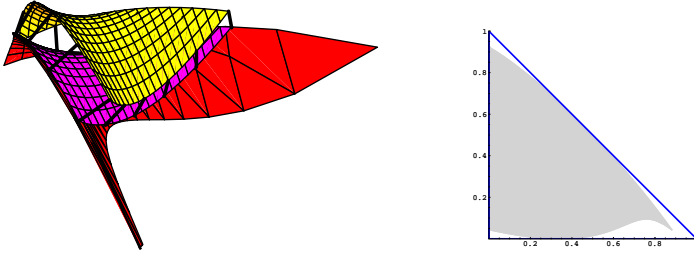


Figure 3: Left: Patch $\mathbf{a}(u, v)$ (yellow) with convolution surface (red) and exact offset surfaces (pink). Right: Domain D_c (grey).

corresponds to the parametric domain of the exact offset surface, which is shown as the pink surface patch in Fig. 3 (left).

6 Conclusion

It was shown that the convolution surfaces of non-developable quadratic Bézier triangles always admit rational parameterizations. We have used this result to formulate the algorithm for computation of exact rational offset surfaces of non-developable quadratic patches. The presented method was demonstrated on one particular example.

Acknowledgements

Authors have been supported by the MSM 4977751301 Research Plan.

References

- [1] Bastl, B., Jüttler, B., Kosinka J., Lávička, M.: *Computing Exact Rational Offsets of Quadratic Triangular Bézier Surface Patches*. CAD, to appear.
- [2] Farin, G.: *Curves and surfaces for CAGD*. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, 2002.
- [3] Lávička, M., Bastl, B.: *Rational hypersurfaces with rational convolutions*. CAGD, Vol. 24, pp. 410–426, 2007.
- [4] Powell, M.J.D., Sabin M.A.: *Piecewise quadratic approximations on triangles*. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 3, pp. 316–325, 1977.
- [5] Sampoli, M.L., Peternell, M., Jüttler, B.: *Rational surfaces with linear normals and their convolutions with rational surfaces*. CAGD, Vol. 23, pp. 179–192, 2006.

Strategie středoškoláků při řešení geometrické úlohy MO

Pavel Leischner

*Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích,
Jeronymova 10, 371 15 České Budějovice, Česká Republika,
email: leischne@pf.jcu.cz*

Abstrakt. Článek analyzuje šest originálních řešení úlohy A-II-3 56. ročníku MO na základě písemných záznamů soutěžících z 2.kola MO v Jihočeském kraji.

Klíčová slova: Matematická olympiáda, planimetrie, strategie řešení úloh.

1 Úvod

Ve druhém kole 56. ročníku matematické olympiády byla v kategorii A zadána úloha:

Necht' M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC . Označme S, S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AMC, BMC .

a) Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na téže kružnici.

b) Pro kterou polohu bodu M má tato kružnice nejmenší poloměr?

Několik účastníků soutěže ji v Jihočeském kraji řešilo zajímavými a dosti odlišnými způsoby, s kterými nyní čtenáři seznámíme.

2 Strategie založené na objevu Thaletovy kružnice

Většina řešitelů, mezi něž patřili i ti méně úspěšní, vycházela při řešení úlohy z postřehu, který výstižně vyjádřil *Libor Peltan* z Gymnázia Česká v Českých Budějovicích:¹

„Pro určení S_1, S_2 je vhodné vzít osy stran CM, AC a BC (obr. 1). Jak vidíme, úhel S_1SS_2 je pravý, takže stačí dokázat, že úhly S_1CS_2 a S_1MS_2 jsou také pravé (Thaletova kružnice). Dokonce stačí důkaz provést jen pro jeden z nich, protože ten druhý je s ním souměrný podle přímký S_1S_2 , což je totiž osa úsečky CM .“

Následující tři postupy mají tuto úvodní část společnou. Liší se jen výběrem bodu X , kde $X \in \{C, M\}$, a metodou důkazu $X \in k$, kde k je zmíněná Thaletova kružnice nad průměrem S_1S_2 .

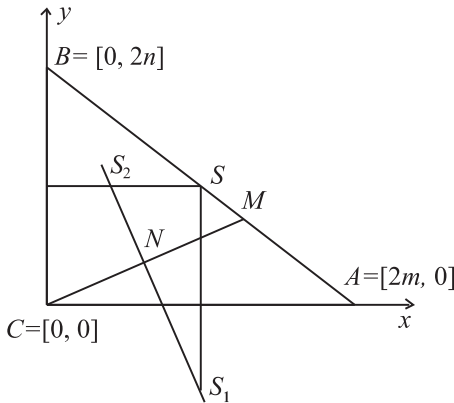
¹ V citaci i obrázku jsme provedli potřebné drobné jazykové úpravy a pozměnili označení vrcholů.

2.1 Liborovo řešení analytickou geometrií

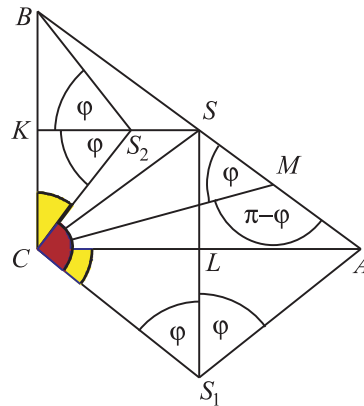
Libor Peltan zvolil pro důkaz, že bod C leží na kružnici k , metodu souřadnic. Jeho řešení uvádíme upravené. Původní úvahy o závislosti vektorů jsme pro stručnost nahradili využitím skalárního součinu.

Peltanovo řešení. Při volbě kartézské soustavy souřadnic podle obr. 1 můžeme bod M vyjádřit symbolickou rovnicí $M = A + t(B - A)$, kde $t \in (0, 1)$ je parametr. Odtud přepíšeme do souřadnic dostaneme $M = [2m(1-t), 2nt]$. Střed úsečky CM je $N = \frac{C+M}{2} = (m(1-t), nt)$. Souřadnici x bodu $S_2 = [x, n]$

určíme z podmínky kolmosti nenulových vektorů $S_2 - N$ a $N - C$ (jejich ska-



Obr. 1



Obr. 2

lární součin položíme roven nule): $(x - m(1-t))m(1-t) + n^2t(1-t) = 0$. Analogicky pro souřadnici y bodu $S_1 = [m, y]$: $(m - m(1-t))m(1-t) + (y - nt)nt = 0$.

Z obou rovnic zjistíme $S_1 = \left[m, \frac{m^2(t-1)}{n} + nt \right]$, $S_2 = \left[m(1-t) - \frac{n^2t}{m}, n \right]$.

Skalární součin vektorů $S_1 - C$ a $S_2 - C$ je $m^2(1-t) - n^2t + m^2(t-1) + n^2t = 0$.

Úhel S_1CS_2 je tedy pravý a body C i M tedy leží na Thaletově kružnici opsané trojúhelníku S_1SS_2 . Tím je úkol a) vyřešen.

Úkol b) vyřešil Libor stručně: „Poloměr r kružnice bude nejmenší, když M bude pata výšky z vrcholu C , protože pak $S_1 = L$ a $S_2 = K$. Odtud $r = c/4$.“

Ztratil bod za neúplné zdůvodnění, které mohlo znít například takto: Průměr uvažované kružnice je vždy větší nebo roven délce její těhiv CM , která je větší

nebo rovná výšce $v_c = c/2$ trojúhelníka ABC . Je-li M patou této výšky, platí $S_1 = L, S_2 = K$ a průměr kružnice (střední příčka S_1S_2) je minimální ($c/2$).

Jiná možnost: $4r^2 = |S_1S_2|^2 = x^2 + m^2 + n^2 + y^2 \geq m^2 + n^2 = |KL|^2 = (c/2)^2$.

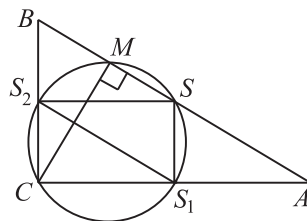
2.2 Idea přemístění úhlu

Jiří Blažek z gymnázia J. V. Jirsíka v Českých Budějovicích zpočátku postupoval podobně jako Libor. Důkaz $C \in k$ však nahradil důkazem rovnosti $|\angle S_1CA| = |\angle S_2CB|$ (obr. 2 - poznamenejme, že Jiří patrně pokládá za zřejmé, že oba úhly mají vždy souhlasnou orientaci nebo jsou oba nulové): Předpokládejme nejprve, že $|\angle BMC| < |\angle AMC|$, a položme $\varphi = |\angle BMC|$. Pak v kružnici opsané trojúhelníku CMB má příslušný středový úhel CS_2B velikost 2φ a z rovnoramenného trojúhelníka BCS_2 plyne $|\angle S_2CB| = \pi/2 - \varphi$.

V kružnici opsané trojúhelníku AMC přísluší tupému obvodovému úhlu CMA velikosti $\pi - \varphi$ středový úhel CS_1A velikosti $2\pi - 2\varphi$. Vnitřní úhel rovnoramenného trojúhelníku CS_1A je doplňkem vypuklého úhlu CS_1A . Má velikost 2φ , a tak $|\angle S_1CA| = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Odtud $|\angle S_1CA| = |\angle S_2CB|$, což jsme chtěli dokázat.

Je-li $|\angle BMC| > |\angle AMC|$, postupujeme analogicky. Snadno nahlédneme, že vztah platí i pro situaci $|\angle BMC| = |\angle AMC|$.

Jirkovo řešení úkolu b): Průměr S_1S_2 kružnice nemůže být menší než konstantní vzdálenost $|CS| = c/2$ jejich bodů C, S (tj. poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC). Stačí proto najít bod M tak, aby $|S_1S_2| = |CS|$ (obr. 3, úsečka S_1S_2 je zde střední příčkou trojúhelníka ABC).



Obr. 3

2.3 Řešení na základě symetrie a sčítání úseček

Jan Matějka z Gymnázia Jírovcova v Českých Budějovicích vystačil pouze s poznatky ze základní školy (osová souměrnost a Thaletova věta). Podobně jako předchozí studenti převedl první z obou úkolů na důkaz, že jeden z bodů C, M leží na kružnici k , opsané pravoúhlému trojúhelníku S_1SS_2 . Rozhodl se pro bod M a postupoval takto: Označme P_1, P_2 paty kolmic z bodů S_1, S_2 na úsečku AB , $c = |AB|$ a $x = |AP_1| = |P_1M|$. Pak z obr. 4 plyne $|MP_2| = |P_2B| = c/2 - x$ a $|SP_2| = |SB| - |P_2B| = c/2 - (c/2 - x) = |P_1M|$. Odtud vidíme, že P_1P_2 a MS mají

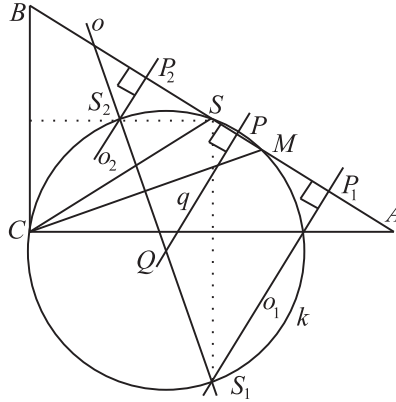
společný střed, jenž označíme P . PQ je střední příčka lichoběžníka (resp. obdélníka) $S_1P_1P_2S_2$, je tedy rovnoběžná s přímkami o_1, o_2 . Leží na ose q úsečky P_1P_2 , která je i osou úsečky SM . Z faktů $Q \in q$ a $S \in k$ pak dostaneme

$M \in k$, což jsme chtěli dokázat. Body

M, C, S_1, S_2 a S leží na téže kružnici.

Při řešení úkolu b) vycházel Jan z faktu $|S_1S_2| \geq |P_1P_2| = c/2$ (viz obr. 4) a ukázal, že rovnost platí, je-li bod M patou výšky z vrcholu C na přeponu AB .

Poznámka. Matějkův postup je podobný druhému ze vzorových řešení naší úlohy na webových stránkách [1], kde byla k důkazu totožnosti středů úseček P_1P_2 a SM využita stejnolehlost.



Obr. 4

3 Strategie opřené o kritérium tětívového čtyřúhelníka

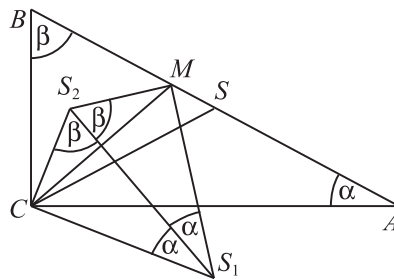
Mnozí řešitelé vycházeli z vlastností středových a obvodových úhlů a kritéria tětívového čtyřúhelníka (vrcholy konvexního čtyřúhelníka leží na kružnici právě tehdy, když součet velikostí jeho protilehlých vnitřních úhlů je 180°). Uvedeme jen řešení úkolu a) u dvou z nich.

Radim Hošek z Gymnázia Jírovcova v Českých Budějovicích nejprve ukázal, že čtyřúhelník $CSMS_2$ je tětívový:

„Protože úhel CS_2M je středový úhel k obvodovému úhlu CBM , je jeho velikost 2β .

Protože $|SC| = |SB|$, je trojúhelník BSC rovnoramenný, a tudíž má úhel BCS velikost β a úhel CSB velikost $180^\circ - 2\beta$. Body S a S_2 jsou protilehlé vrcholy čtyřúhelníka $CSMS_2$. Ten je tětívový, neboť

$$|\angle CSM| + |\angle CS_2M| = (180^\circ - 2\beta) + 2\beta = 180^\circ.$$



Obr. 5

Dále analogicky dokázal, že i čtyřúhelník $CSMS_1$ je tětívový a důkaz úkolu a) uzavřel takto: „Zbývá dokázat, že kružnice opsané čtyřúhelníkům $CSMS_2$ a $CSMS_1$ jsou totožné. To plyne z faktu, že body C , M a S jednoznačně určují kružnici.“

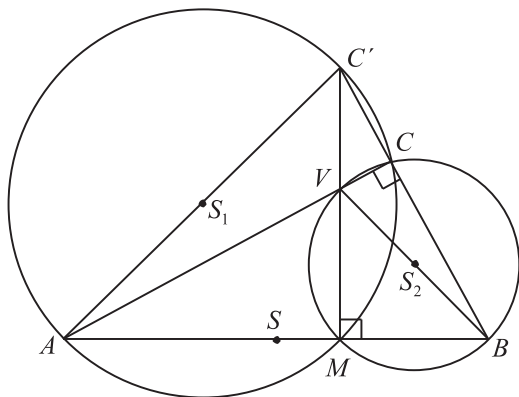
Adam Kabel z téhož gymnázia nejprve zdůraznil, že čtyřúhelník CS_1MS_2 čtyřúhelník souměrný podle úhlopříčky S_1S_2 . Z kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC zjistil $|\angle CS_1M| + |\angle CS_2M| = 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$.

Proto je čtyřúhelník CS_1MS_2 tětívový a $|\angle S_1CS_2| = |\angle S_1MS_2| = 90^\circ$. Osy S_1S a S_2S úseček AC a BC jsou kolmé, tedy $|\angle S_1SS_2| = 90^\circ$. Odtud plyne, že i S leží na kružnici opsané čtyřúhelníku CS_1MS_2 .

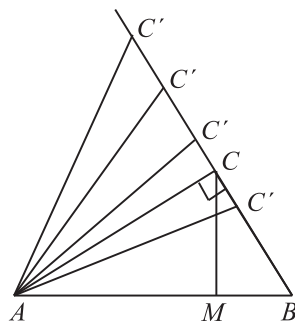
Kabelovo řešení odpovídá prvnímu ze vzorových řešení publikovaných v [1]. Zdánlivě složitější postup Radima Hoška odhaluje více souvislostí.

4 Strategie založená na znalosti Feuerbachovy kružnice

Jako poslední zmíníme konceptuální řešení *Michala Pavelky* z Gymnázia Strakonice, který snad zahájil své úvahy takto: *Neleží dané body na Feuerbachově kružnici nějakého trojúhelníka? Pokud ano, pak by mohly být body M a C paty jeho výšek.*



Obr. 6



Obr. 7

Pavelkovo řešení. „a) Využijeme Feuerbachovy kružnice. Mějme trojúhelník ABC a sestrojme bod C' jako průsečík kolmice z bodu M na AB a prodloužení

strany BC .² Bod V (viz obr. 6) bude ortocentrum trojúhelníka ABC' , body M a C patami výšek. Kružnice opsaná čtyřúhelníku (tětivovému – viz obr. 6) $MBCV$ je také opsaná trojúhelníku MBC . Její střed S_2 je zřejmě středem úsečky BV . Body M , S_2 a C tedy leží na Feuerbachově kružnici trojúhelníka ABC' . Protože S je střed přepony trojúhelníka ABC (a tím i střed strany trojúhelníka ABC'), leží na této kružnici také.

Body A, M, C, C' leží na Thaletově kružnici společné trojúhelníkům AMC' a ACC' , která je zároveň kružnicí opsanou trojúhelníku AMC . Její střed S_1 je středem strany AC' a proto leží rovněž na Feuerbachově kružnici trojúhelníka ABC' . Tím je část a) dokázána.

b) Je známo, že Feuerbachova kružnice je obrazem kružnice opsané (trojúhelníku ABC') ve stejolehlosti se středem v těžišti trojúhelníka a koeficientem -0.5 . Má tedy i poloviční poloměr. Úlohu tímto převedeme na určení minimálního poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC' , pro jejíž poloměr platí $r = |AC'| / (2 \sin \beta)$ (sinová věta). Protože výraz $2 \sin \beta$ je konstantní, je r minimální, právě když je minimální $|AC'|$. Z pravoúhlých trojúhelníků ACC' Na obr. 7 je vidět, že $|AC'|$ je minimální, právě když $C' = C$. Feuerbachova kružnice má tedy minimální poloměr, právě když je bod M patou výšky na stranu AB z vrcholu C .“

5 Závěr

S řešením planimetrických úloh matematické olympiády mívají žáci problémy. Přesto byla úloha A-II-3 56. ročníku MO v Jihočeském kraji nejúspěšnější ze zadané čtveřice úloh. Zcela správně, nebo jen s menšími chybami, ji vyřešilo 7 studentů z celkového počtu 27. Nelze však z tohoto faktu nic usuzovat o celkové úrovni geometrických znalostí středoškoláků.

Literatura

- [1] <http://www.math.muni.cz/~rvmo/>

² Zde Michal neuvedl, že bez újmy na obecnosti předpokládá $|AC| \geq |BC|$. Podle poznámek v závěru jeho řešení (které zde neuvádíme) si pravděpodobně až nakonec uvědomil, že by zmíněná kolmice mohla protínat i prodloužení strany AC nebo by mohla procházet bodem C .

Singularity rotačních obalových ploch

Ivana Linkeová

ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav technické matematiky

Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2 – Nové Město

Ivana.Linkeova@fs.cvut.cz

Abstrakt. V příspěvku je diskutován vznik singularit na rotačních obalových plochách a uvedena konstrukční metoda nalezení bodů charakteristiky obalové plochy, které singularitu způsobují. Za tvořící plochu je uvažována rotační plocha, která vznikne rotací rovinné křivky obecného tvaru kolem osy rotace mimoběžné s osou rotace obalové plochy. K vizualizaci problému jsou použity prostorové modely úloh vytvořené v 3D modeláři Rhinoceros – NURBS modelling for Windows (Rhino). Vzhledem k tomu, že běžně užívané 3D modeláře nedisponují možnostmi pro počítačem podporované konstrukce obalových ploch, je v příspěvku uveden i postup, kterým lze vymodelovat charakteristiku rotační obalové plochy a následně použít k vytvoření 3D modelu obalové plochy.

Klíčová slova: Obalová plocha, rotační obalová plocha, tvořící plocha, charakteristika, modelování obalových ploch, Rhinoceros.

1 Úvod

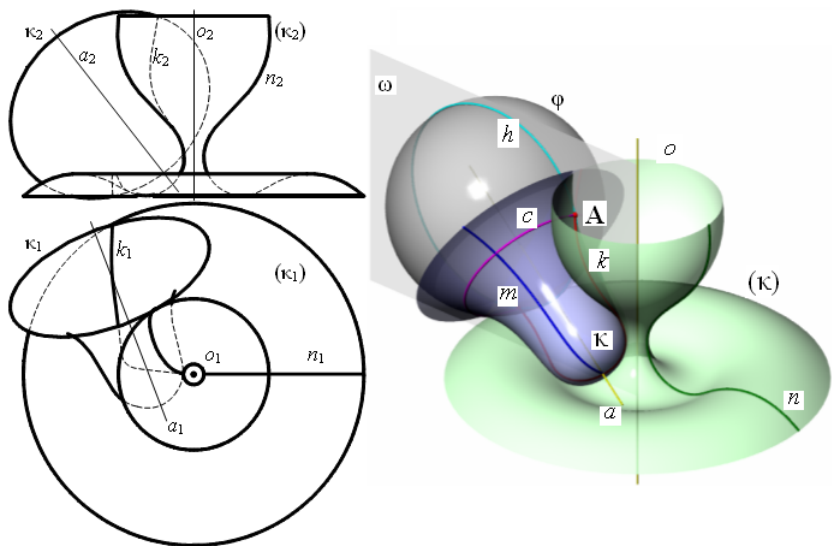
Spojitém rotačním pohybem tvořící plochy κ kolem osy rotace o vznikne jednoparametrický systém ploch $\kappa(t)$, jejichž obálku (pokud existuje) nazýváme obalovou plochou (κ). Obalová plocha (κ) se každé plochy $\kappa(t)$ dotýká podél křivky k , kterou nazýváme charakteristikou obalové plochy, viz obr. 1 (vlevo řešení v Mongeově promítání, vpravo 3D model). Osa rotace o je zvolena svislá.

V každém bodě \mathbf{A} charakteristiky k mají tvořící plocha κ a obalová plocha (κ) společnou tečnou rovinu τ . Podrobíme-li charakteristiku k stejnému pohybu jako tvořící plochu κ , vznikne tatáž plocha (κ).

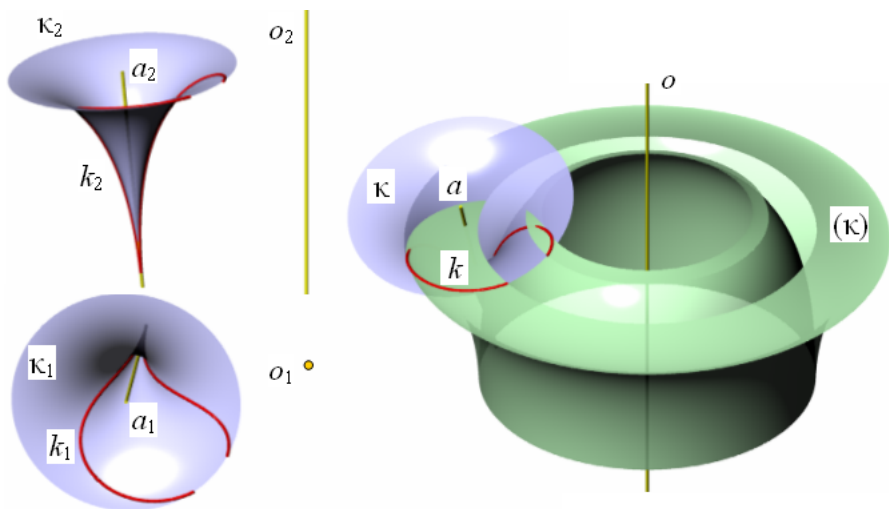
Při konstrukci bodu \mathbf{A} charakteristiky k uvažujeme množinu kulových ploch vepsaných do tvořící plochy κ . Tyto kulové plochy se dotýkají dané tvořící plochy κ podél rovnoběžkové kružnice. Označme φ jednu z těchto kulových ploch a její dotykovou rovnoběžkovou kružnici c . Charakteristika rotační obalové plochy vytvořené kulovou plochou φ je hlavní kružnice h , která leží v rovině ω kolmé na tečnu trajektorie středu kulové plochy φ . Bod \mathbf{A} charakteristiky je průsečíkem (pokud existuje) kružnice c a charakteristiky h .

2 Regulární a singulární část obalové plochy

Na obr. 2 jsou vlevo zobrazeny sdružené průměty zadání ukázkové úlohy, na které budeme demonstrovat vznik a řešení singularity rotační obalové plochy.



Obr. 1: Obalová plocha vzniklá rotací rotační plochy



Obr. 2: Obalová plocha částečně obaluje a částečně protíná tvořící plochu

Vpravo je zobrazen výsledek, kdy obalová plocha obsahuje dvě části: regulární, ve které obaluje tvořící plochu (tj. dotýká se jí podél charakteristiky), a singulární, ve které obalová plocha tvořící plochu neobaluje, ale protíná. Úkolem je identifikovat ty body charakteristiky, které generují singulární část obalové plochy.

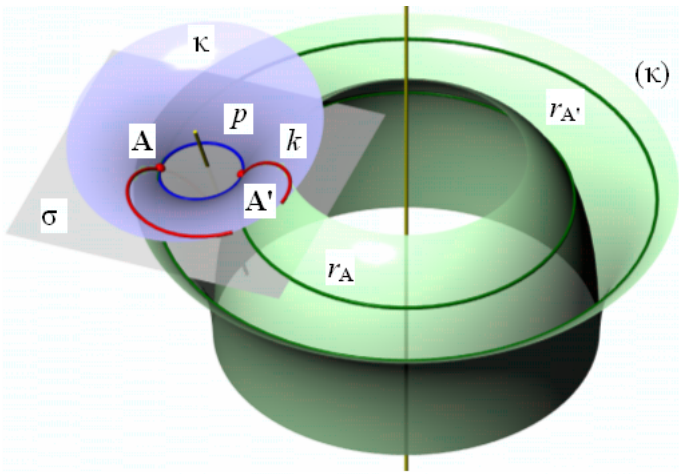
2.1 Kritérium

Konstrukce bodu charakteristiky obalové plochy pomocí vepsaných kulových ploch uvedená výše je konstrukce lokální a úkol rozlišit body charakteristiky na body, které generují regulární nebo singulární části obalové plochy, tudíž neřeší.

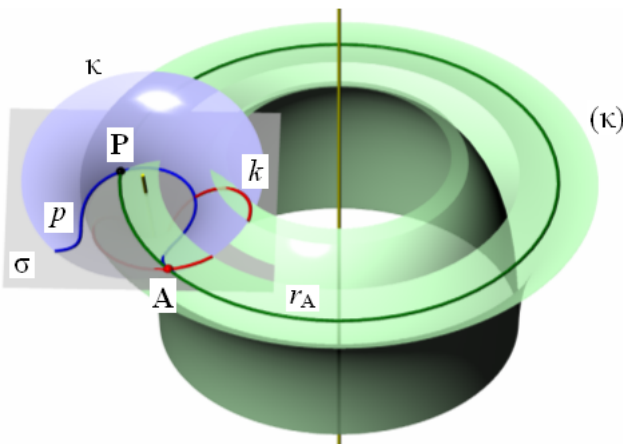
Pro nalezení potřebného kritéria budeme uvažovat následovně:

1. Nejprve si uvědomíme, že trajektorií každého bodu \mathbf{A} charakteristiky k obalové plochy (κ) je rovnoběžková kružnice $r_{\mathbf{A}}$, která leží v rovině σ kolmé k ose rotace o , viz obr. 3. Na obr. 3 protíná rovinu σ obalovou plochu (κ) ve dvou rovnoběžkových kružnicích $r_{\mathbf{A}}$ a $r_{\mathbf{A}'}$. Rovnoběžková kružnice $r_{\mathbf{A}'}$ je trajektorií bodu \mathbf{A}' , jehož z -ová souřadnice je stejná jako z -ová souřadnice bodu \mathbf{A} .
2. Dále sestrojíme křivku p , která je průnikovou křivkou tvořící plochy κ a roviny σ .
3. Jestliže má bod \mathbf{A} charakteristiky k generovat regulární část obalové plochy (κ), musí se jeho rovnoběžková kružnice $r_{\mathbf{A}}$ dotýkat průnikové křivky p pouze v jediném bodě, a to v bodě \mathbf{A} . Tuto podmínku splňují na obr. 3 oba body \mathbf{A} i \mathbf{A}' .
4. Pokud ale existuje kromě bodu dotyku \mathbf{A} ještě průsečík \mathbf{P} rovnoběžkové kružnice $r_{\mathbf{A}}$ a průnikové křivky p , bod \mathbf{A} generuje singulární část obalové plochy. Rovnoběžková kružnice $r_{\mathbf{A}}$ se sice v bodě \mathbf{A} dotýká tvořící plochy, ale na jiném místě (v bodě \mathbf{B}) tvořící plochu protíná.
5. Dělicí bod charakteristiky, tj. bod, ve kterém se charakteristika dělí na část charakteristiky generující regulární část obalové plochy a na část charakteristiky generující singulární část obalové plochy, je bod, ve kterém bod dotyku i bod průniku splývají, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Tím jsme získali kritérium, podle kterého můžeme body charakteristiky zkonstruované metodou vepsaných kulových ploch testovat a charakteristiku rozdělit na část, která generuje regulární část obalové plochy a na část, která generuje singulární část obalové plochy. Za konečný tvar obalové plochy považujeme pouze její regulární část, jak je uvedeno např. na obr. 3.



Obr. 3: Body A , A' generují regulární část obalové plochy



Obr. 4: Bod A generuje singulární část obalové plochy

3 Vizualizace obalových ploch

Obalové plochy mají přímou technickou aplikaci ve strojírenství – v obrábění se teorie obalových ploch využívá při konstrukci a výrobě řezných nástrojů. Z těchto důvodů jsou obalové plochy považovány za jedno ze stěžejních témat vyučovaných v rámci předmětu Konstruktivní geometrie na Strojní fakultě ČVUT v Praze. Z důvodů značných nároků na prostorovou

představitost je toto téma pokládáno zároveň i za jedno z nejobtížnějších. 3D modely obalových ploch názorným způsobem doplňují klasickou konstrukci v Mongeově promítání a zvyšují didaktickou úroveň výuky.

Počítačem podporované konstruování a modelování obalových ploch není v současných 3D modelářích dostatečně zastoupeno. Pro zadanou tvořící plochu a její trajektorii neexistují příkazy a nástroje pro konstrukci charakteristiky obalové plochy.

Bodová konstrukce charakteristiky metodou vepsaných kulových ploch není pro počítačovou aplikaci vhodná. Jednak je zdlouhavá a přesnost získané charakteristiky jako křivky proložené zkonstruovanými body by byla velmi citlivá na počet zkonstruovaných bodů a typ proložené křivky.

K určení tvaru charakteristiky v modelech uvedených v tomto článku byla využita skutečnost, že charakteristika je průniková křivka dvou nekočně blízkých poloh tvořící plochy. V případě rotačních obalových ploch je třeba kvůli konečné přesnosti programu Rhino vymodelovat dvě polohy tvořící plochy vzájemně pootočené o nepatrný úhel, jehož konkrétní velikost záleží na skutečných rozměrech modelu a vzdálenosti tvořící plochy od osy rotace o (např. v ukázkové úloze uvedené na obrázcích tohoto článku byl použit úhel 0.1° , největší průměr rovnoběžkové kružnice obalové plochy byl přibližně 300 mm). Přesnost takto získané charakteristiky byla ověřena konstrukcí pomocí vepsaných kulových ploch a bylo zjištěno, že je srovnatelná s tolerancí přesnosti předem nastavenou v programu Rhino.

Jakmile získáme charakteristiku, podrobíme ji stejnému pohybu jako tvořící plochu, tj. standardními nástroji modeláře vymodelujeme rotační plochu, která je výslednou obalovou plochou.

Popsaným způsobem lze postupovat v libovolném 3D modeláři, neboť příkazy pro otáčení objektů s kopírováním, nalezení průnikové křivky dvou objektů a vytvoření rotační plochy při dané tvořící křivce a ose rotace patří k jejich běžným výbavám.

3.1 Galerie rotačních obalových ploch

Modelování obalových ploch bylo tématem zápočtových prací (letní semestr 2006-2007) volitelného předmětu Geometrie pro CAD, který je zaměřen na modelování v Rhinu a na teoretický základ NURBS reprezentace. Modely rotačních obalových ploch, které studenti vytvořili, jsou uvedeny v galerii na

<http://marian.fsik.cvut.cz/~linkeova>

pod heslem Geometrie pro CAD → Ukázky studentských zápočtových prací. Modely této galerie budou sloužit jako vhodná didaktická pomůcka při výuce Konstruktivní geometrie v dalších letech.

4 Závěr

Další práce bude zaměřena na nalezení podmínek, za kterých singulární části obalové plochy vznikají a na doplnění konstrukční metody identifikace bodů charakteristiky generujících singulární část numerickým řešením celého problému.

Literatura

- [1] I. Linkeová: *Geometric Modelling in Education Process*, In: International Conference on Engineering Education, Silesian University of Technology, Gliwice, Poland, 2005
- [2] D. Szarková: *Rotačná plocha vytvorená rotačnou plochou*, In: Sborník 17. semináře odborné skupiny pro geometrii a počítačovou grafiku, Vydavatelství Západočeskej univerzity, Plzeň 1997, str.89-93
- [3] D. Szarková: *Počítačové spracovanie obalovej plochy vytvorenej skrutkovým pohybom rotačnej plochy*, In: Zborník referátov z medzinárodnej konferencie Strojné inžinierstvo '99, SjF STU, Vydavateľstvo STU v Bratislave, 1999, str.83-86
- [4] D.: Velichová: *Konstruktivná geometria*, SjF STU, Vydavateľstvo STU v Bratislave, 1996
- [5] Studenti předmětu Geometrie pro CAD 2006-2007, FS ČVUT v Praze: *Galerie obalových ploch*, <http://marian.fsik.cvut.cz/~linkeova>

Software pro předmět Konstruktivní a počítačová geometrie

Dalibor Martišek

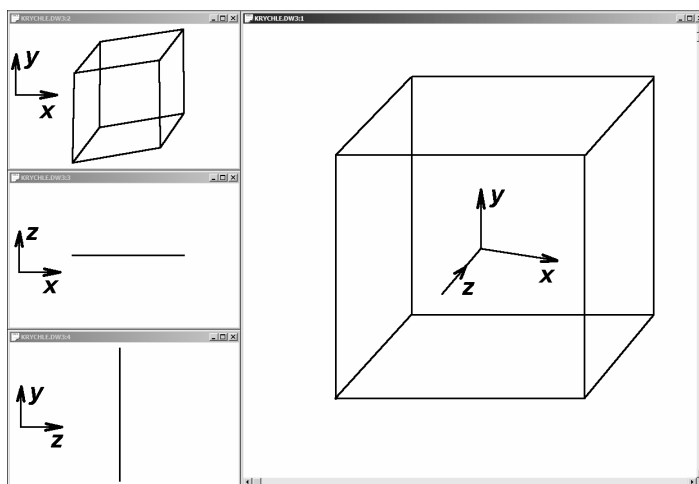
*Institute of Mathematics, Dept. of Computer Graphics and Geometry, Faculty of Mechanical Engineering, Brno University of Technology
Technická 2896/2, 616 69 Brno, Czech Republic
email: martisek@fme.vutbr.cz*

Abstrakt. Článek uvádí výukový software používaný na přednáškách a cvičeníh předmětu Konstruktivní a počítačová geometrie v 1. semestru bakalářského studia na FSI VUT v Brně.

Klíčová slova: konstruktivní a počítačová geometrie, výukový software, animace, Borland Delphi.

1 Výuka konstruktivní geometrie s počítačovou podporou

Výuka konstruktivní geometrie s počítačovou podporou má na naší fakultě dlouholetou tradici. Je však poněkud paradoxní, že čím více počítače pronikají do našeho života, čím dokonalejší jsou CAD systémy a možnosti geometrického modelování, tím jsou znalosti geometrie povrchnější a u studentů přicházejících na fakultu v poslední době přímo zoufalé. Uchazeči o inženýrský diplom mají čím dál horší prostorovou představivost a geometrické myšlení se u mnohých z nich zastavilo v devíti letech jejich věku. Dokazují to stále častěji se objevující „konstrukce“ podobné výtvoru na obr. 1.

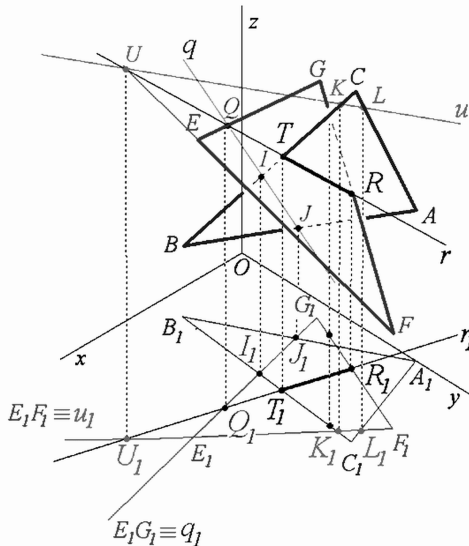


Obr. 1.: Krychle ve speciálním „studentském“ promítání

Základem řešení každé stereometrické úlohy je „abstraktní“ prostorové řešení. Teprve pak je možné uvažovat o tom, jak jeho jednotlivé kroky provést v tom či onom promítání. Studenti však často nejsou schopni dát „geometricky“ dohromady ani řešení velmi jednoduchých prostorových úloh a každá z nich je pro ně jen „seznamem“ konkrétních a mlhavě formulovaných kroků: „toto spoj s tímto a kde se to protne, tak to je ono“. Takto jsou nuceni „řešit“ často i základní úlohy a pokud je mají řešit v Mongeově projekci i v axonometrii, znamená to naučit se všechno dvakrát. S vynaložením veškerého úsilí se takto „naučí“ několik základních úloh a dál se tímto způsobem nejsou schopni dostat.

Na konstruktivní geometrii je přitom i na naší fakultě čím dál méně času. Většinu tohoto času pak zabírá studentská „práce s pravítkem a kružítkem“, které čím dál více odvykají. Trváme-li na pečlivém prorýsování, pak více než dvě-tři úlohy za cvičení nejsme schopni udělat. I na přednáškách je třeba místo rýsování věnovat víc času základním vlastnostem prostorových útvarů a geometrickým principům jejich konstrukce a kratší dobu pak konkrétní práci s pravítkem a kružítkem. Proto jsme vyvinuli výukový program, ve kterém jsou úlohy rozfázovány do jednotlivých kroků. Mohou tak částečně nahradit rýsování na tabuli a učitel se může lépe soustředit na výklad. Jednotlivé konstrukční kroky je možné vracet a úlohu podle potřeby projít několikrát. Samotné proklikání se i konstrukčně náročnější úlohou je velmi rychlé. Například zásek trojúhelníků (viz obr. 2) je rozfázován na dvacet kroků. „Konstrukce“ i s podrobným komentářem trvá pět až deset minut, stručné shrnutí (např.

jako
opakování)
jednu až dvě
minuty.

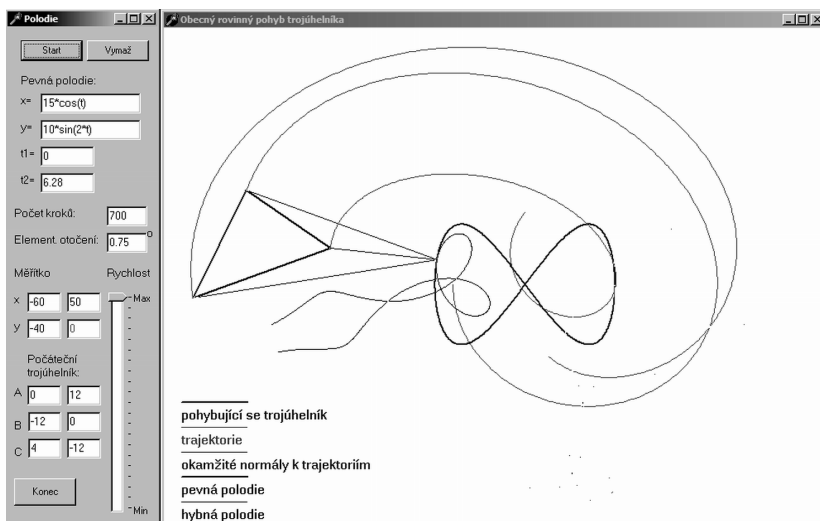


Obr. 2.: Zásek trojúhelníků

Velkou pomocí jsou názorné animace a „prostorové obrázky“. Jako příklad uvedme ukázkou z kinematické geometrie, kde je definován pohyb trojúhelníka pomocí pevné polodie a dále „elementárním“ posunutím a otočením. Při pohybu je dynamicky sestrojována dráha a hybná polodie (viz obr. 3).

Software je prezentován na přednáškách, je k dispozici ve cvičeních a studentům i mimo výuku. Klasické rýsování tímto způsobem nenahrazujeme, ale pouze doplňujeme. Čím méně je rýsování ve výuce, tím více by měl student rýsovat v domácí přípravě. Učiva je totiž poměrně hodně. V jednosemestrálním kursu s dotací 2/2 je třeba zvládnout kolineaci, afinitu, kuželosečky, základy Mongeova promítání a pravoúhlé axonometrie, elementární plochy a tělesa, křivky (zejména pak šroubovici), základy kinematické geometrie a plochy (kvadriky, plochy rotační, šroubové a rozvinutelné).

Programový balík obsahuje i některé jednoduché algoritmy rovinné a prostorové grafiky včetně zdrojových kódů v Borland Delphi. Ze strany studentů je jeho používání vnímáno velmi pozitivně, zvláště když lze za pomoci mnoha úvodních motivačních obrázků oživit přednášku i humorem (viz obr 4). Abychom mohli seriózně zjistit, nakolik tento software přispívá k lepšímu znalostem studentů, bylo by třeba provést srovnávací studii současné výuky s výukou bez použití tohoto software, což není z mnoha důvodů možné. Lze však říci, že zařazením tohoto software se zvýšila návštěvnost přednášek, což signalizuje zvýšený zájem studentů o konstruktivní geometrii. A už tento fakt sám o sobě jistě není k zahazení.



Obr. 3.: Obecný pohyb trojúhelníka v rovině



Obr. 4.: Studenty lze motivovat i humorem.

Literatura

- [1] Borecká, K. a kol.: *Konstruktivní geometrie*, CERM, Brno 2006
- [2] Martišek, D.: *Matematické principy grafických systémů*, Littera Brno 2002
- [3] <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Konstruktivni-a-pocitacova-geometrie/sc-9-sr-1-a-172/default.aspx>

Creating of 3D Model with Difficult Shapes without the Parameters and Dimensions of Real Part

Katarína Monková

*Department of Technological Devices Design,
Faculty of Manufacturing Technologies, Technical University in Košice with the seat in Prešov,
Štúrova 31, 080 01 Prešov, Slovak Republic
email: monkova.katarina@fvt.sk*

Abstract. The contribution deals with some problems, which originate at the creating of 3D model without drawing documentation details of modelled part. To obtain the dimensions of such undefined real part is often very difficult, especially, if the accuracy requirement is great. The solution of these problems can greatly affect the efficiency of the part manufacturing and so considerably decrease the economic cost for its manufacturing.

Key words: CAD/CAM system, 3D model, surface

1 Introduction

The data digitizing is one of main characteristic nowadays and it is projecting into all kinds of industry. The digitizing of drawing documentation has an essential task within machining industry. The big advantage of such processed data is the limpidity of data archiving in the computer, the minimalization of cargo hold for the documentation in paper version and the shortening of modification proceeding time, too.

The hand-made drawing in 2D format is already archaism today and it is continual passing to the creating of 3D model by means of CAD or complex CAD/CAM systems. Through the use of modelled 3D part is possible:

- to create the drawing of modelled part in relatively short time,
- to make the various type of analysis on the modelled part,
- to simulate the machining flow with the CL data output which define the positions of cutting tool and cutting conditions during of the machining process,
- to translate acquired data into NC program for the selected NC (CNC) machine by means of postprocessor.

The creating of 3D model can anticipate the conflicting situations not only at the machining of individual parts but also at the assembling themselves into subassemblies or assemblies, it results in the reduction of preparatory time, the decreasing in cost and the quality improvement of the machining product. One modelled part so can be the basis for it's simply modification or for another parts, which are similar by type or shape.

2 The modelling

The advantages of the computer 3D modelling already employ many companies and firms today, but such models are mostly created following already existing drawing documentation or exactly defined parameters. The problems occur when the part already exists, it is complicated in shape and it is created by general surfaces, but drawing documentation is not around.

Such example can be shown on the template for the coiling of stator winding (Fig.1), which existed in the firm as real steel part, but its shape and dimensions were unknown. It was needed to create 3D model of this part in CAD/CAM system ProEngineer according to sponsor requests to obtain the CL data for the NC program generating.



Fig. 1 The different views to real steel part

The simplest solving how to get the information about product design and dimensions could appear to cast model into the form, for example from the gypsum plaster. The material for casting should be possible to cut. The gained cross section areas could be measured and by means of these sections it could be modelled needed surfaces. The most suitable material for the casting could be for example silicon gum elastic paste with the rubber properties. The disadvantage of this material is its flexibility and therefore the limited accuracy of receives parameters.

One of the problem solutions was the using of touch sensitive unit with Rhinoceros MicroScribe G2 software (Fig. 2a). The MicroScribe digitizing equipment provides a fast, reliable, and easy-to-use method for creating accurate 3D computer models. MicroScribe works with physical objects of any shape, size, and material and is compatible with the leading 3D industry software products. The MicroScribe system offers metrology level accuracy and seamless integration with the most popular reverse engineering and metrology software packages. It is necessary to prepare the point grid to indicate of these points position in regard to the selected coordinate system.

To make the exact point grid was very difficult in this system due to complicated part shape, therefore the generated surfaces were not enough accurate and smooth. The Fig.2b shows three main surfaces, which were

created by means of Rhinoceros MicroScribe G2 software and imported into CAD/CAM system ProEngineer.

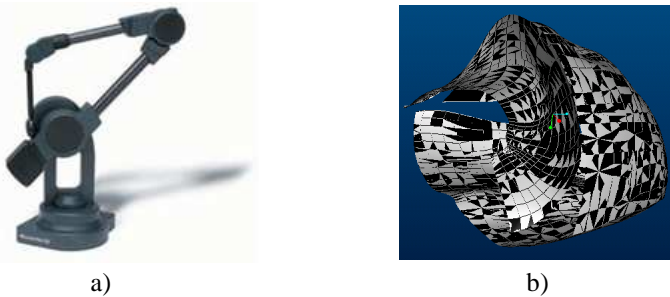


Fig. 2 The part surfaces scanned by device MicroScribe G2 in Rhinoceros modeller

The most effective and most accurate mode of the dimension and shape acquirement in the conditions of Faculty of Manufacturing Technologies of the Technical University in Košice, with the sit in Prešov, was the using of 3D laser scanner LPX-250 with the Dr.PICZA3 software, shown on Fig.3.



Fig. 3 “3D laser scanner”

This integrated hardware/software system is an ideal 3D capture solution for all popular CAD/CAM and animation applications. It makes it incredibly fast and easy to generate precise 3D models, it will save designers hours of manual reverse engineering work. It uses an advanced non-contact laser sensor to quickly generate precise models. Designers use scan data to help design products faster and with less errors; engineers use scanning to convert prototypes into tooling data ready for manufacturing. The combination of precision laser optics and motion control within a rigid enclosure lets the scanner produces high quality scans with minimal surface noise.

3D scanner LPX-250 digitizes objects with both rotary and plane scanning:

- Rotary Scanning Mode (Fig. 4a) is ideal for high-speed scanning of spherical and smooth-surfaced objects. Once the object is placed on the rotating table, the laser beam travels vertically up the rotating object to generate a data file.
- The Plane Scanning Mode (Fig. 4b) is able to capture complicated angles and side-cuts. The LPX-250 laser beam scans a maximum of six surfaces at right angles. Plane Scanning is ideal for relatively flat, hollow and side-cut objects whose angles would be undetectable using Rotary Scanning Mode.

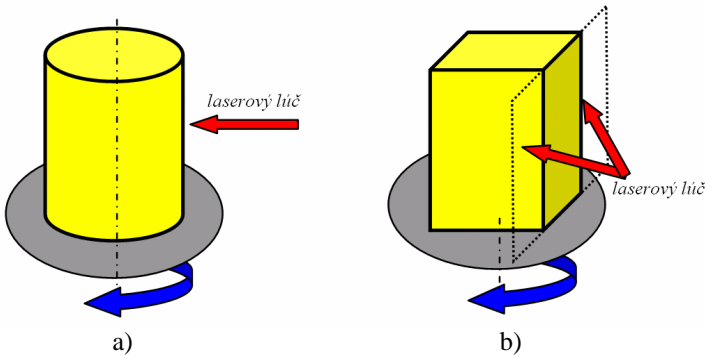


Fig. 4 The Principle of rotary and plane scanning Mode

The top of steel real part had to be sprayed to achieve the dull finish, because the steel surfaces were too reflective for the laser beam. The gained data were saved into computer memory in PIX format (Fig.5) and consequently exported to format STEP or IGES. Transformed data were imported to CAD/CAM system ProEngineer (Fig.6).

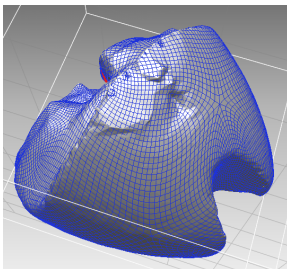


Fig. 5 The scanned model of the part in PIX format

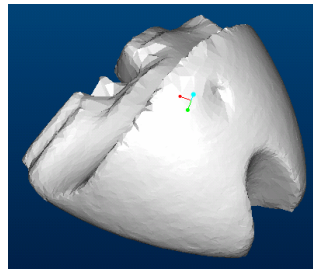


Fig. 6 The imported model of part to CAD/CAM system

This model was accepted by ProEngineer neither as solid nor as surface, it had number of undulations and it was not smooth. (Fig.6)
It was necessary to create new part on the basis of scanned model to achieve needed accuracy, what was difficult and time consuming process. The 3D model created in listed above software is shown on Fig.7.

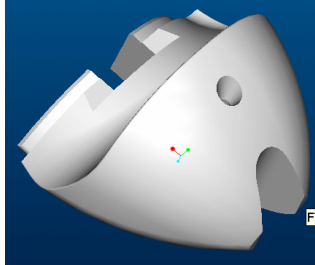


Fig. 7 The definite 3D model of the part modelled in CAD/CAM system ProEngineer

On the basis of created 3D model was made the new physical part by Rapid Prototyping method. The geometry and dimension data of model were exported from ProEngineer to STL format that are used for the producing of silicone form. The cast plastic part (Fig. 8) was compared with the primary real part by means of 3D measuring equipment and then it was used in real situation. It was possible to allege that the model corresponds to the real steel part in required accuracy and so CL data were generated. The obtained data were transformed and applied as NC program for controller of concrete CNC machine in company. The manufacturing of new part by means of CNC machine is very quickly and simple today, any inventories of this part are needed.



Fig. 8 The part model created by means of Rapid Prototyping

3 Conclusion

Manufacturers must often reverse engineer existing products to improve them. But reverse engineering can be complicated. Manual tasks involve technicians scanning in objects, perhaps in multiple part orientations, to get raw point-cloud or polygonal data. Technicians there scan existing parts with a 3D

scanner and use the software to create accurate parametric CAD models. The company uses the models to fabricate replacement parts within strict tolerances and to improve designs to boost performance. Also, the firm ensures components get manufactured based on design intent by redesigning parts from scanned data.

The created plastic solid had needed tolerances and so it was able to make the steel part on the NC machine. Up to now the template for the coiling of stator winding was made by hand in the abroad and the average delivery time was longer then 3 month. The company uses several types of these templates and so it was reason for the making of the expensive inventories.

After the creating of 3D model and after the generating of NC program, the terms of delivery were shortened about 90 till 98 % (from 90 days on 2-5 days), the number of templates decrease about 50 % and the price of the parts made in Slovakia is backspread minimum about 60 % compared to original foreign supplier.

It means that suitable using of modern methods and technologies can greatly decrease

- delivery time of parts,
- investment quantity blocked in stores and
- costingness to its pandering.

Acknowledgements

The author has been supported direct from Institutional task No. 3/2007 of Faculty of Manufacturing Technologies, Technical University in Košice with the seat in Prešov.

References

- [1] MEDVECKÝ, Š. a kol.: *Konštruovanie so systémom Pro/ENGINEER*, Žilina, ES ŽU, 1997, ISBN 80-7100-450-2
- [2] ČUBOŇOVÁ, N. – SALAJ, J. – URÍČEK, J.: *Obrábanie v systéme Pro/Engineer*, Žilina, EDIS ŽU, 2000, ISBN 80-7100-620-3
- [3] MURČINKOVÁ, Z.: *Flexibilné inžinierstvo s využitím CAD/CAM systémov*, In: *Nové smery vo výrobnom inžinierstve 2002*, 6. medzinárodná vedecká konferencia, Prešov, 13.-14.6.2002, Prešov, TU-FVT, 2002. s.343-346, ISBN 80-7099-828-8.
- [4] DÚBRAVČÍK, M.: *Prostriedky digitalizácie*, In: *Transfer inovácií 8/2005*, 2005, str. 52-54, ISBN 80-8073-461-5.

Možnosti testování geometrických postupů

Martin Němec

*Department of computer science, fakulty of elektroval engineering and computer science,
VŠB-Technical University of Ostrava*

17. listopadu 15/2172, 708 33Ostrava, Czech Republic

email: martin.nemec@vsb.cz

Abstrakt. Cílem příspěvku je ukázka možnosti při testování geometrických postupů. Ukázka je demonstrována na modulu, vyvíjeného na VŠB-TU. Tento modul je součástí nástrojů pro generování, testování a automatické vyhodnocování nestandardních otázek. Zaměřuje se na možnosti jak se dají automaticky testovat i předměty jako je geometrie apod.

Klíčová slova: geometrie, konstrukce, automatické vyhodnocování

1 Úvod

Tato prezentace popisuje modul vyvíjený pro použití ve výuce tak, aby umožnil testování základních geometrických konstrukcí. Modul obsahuje základní prostředí umožňující sestavit geometrickou konstrukci s využitím základních objektů (bod, přímka, kružnice, atd.). Po sestrojení vzoru učitelem a výsledku studentem jsou pak oba porovnány a studentův výsledek je automaticky vyhodnocen.

Modul je určen rozšíření a zlepšení výuky a umožňuje studentům sestrojené geometrické konstrukce automaticky vyhodnocovat bez zásahu vyučujícího. Cílem modulu není nahradit tradiční konstruktivní geometrii, ale pouze rozšířit dnešní možnosti, které budou studenti mít při výuce geometrie.

Mezi další výhody tohoto modulu jistě patří i ulehčení práce vyučujícího, který si po vytvoření testů jednoduše může ověřit znalosti svých studentů, bez složitých příprav nebo zdlouhavého opravování. Modul je aktuálně vyvíjen a testován pro následné použití ve výuce.

2 Základní požadavky na testovací modul

První myšlenka vznikla při tvorbě testovacích modulů pro oblasti diagramů, schémat a jazyka UML, kdy jsme se zabývali možnostmi automatického testování a vyhodnocování i pro další netradiční oblasti, mezi které patřila právě i oblast geometrických konstrukcí.

Jedním ze základních požadavků, který jsme si pokládali při návrhu bylo vytvořit vhodné prostředí tak, aby při používání nebyly na studenty kladeny velké požadavky pro práci s tímto modulem. Modul musí být vhodně navržen tak, aby se student nemusel učit složitý systém ovládání a práce s modulem. V případě složitého a neintuitivního prostředí by se zhoršila použitelnost a dostupnost tohoto modulu.

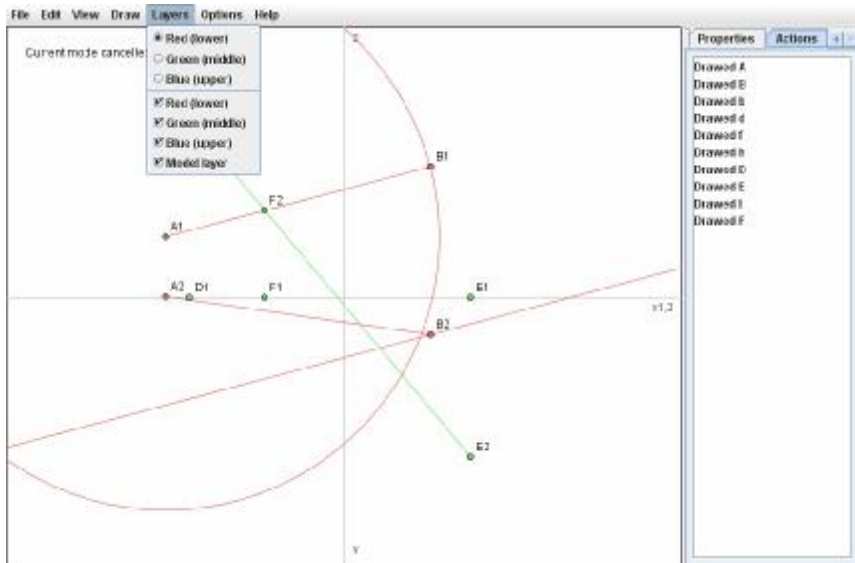
Dalším požadavkem na výsledný výukový modul je použití vhodného programového prostředí tak, aby testovací modul byl přístupný přes standardní internetové prohlížeče (Internet Explorer, Mozilla, atd. s podporou Javy) bez nutnosti spuštění speciálního software.

V neposlední řadě pak mezi základní požadavky patřila možnost použití testovacího modulu v některém z LMS systému.

3 Základní popis modulu

Modul může být spuštěn ve třech základních módech, podle požadavků na jeho vlastnosti:

- **teacher mód** - tento mód je určen pro autora k vytváření zadání konstrukcí, autor vytvoří pomocí modulu konstrukční zadání, nastaví zadání a výsledek konstrukce a vybere vhodné vyhodnocovací kritérium.
- **student mód** - mód určený pro studenta, kde se studentovi zobrazí zadání a ten na základě svých znalostí, vytvoří výslednou konstrukci a odešle výsledek.
- **view mód** - pokud je modul spuštěn v tomto módu, nejsou uživateli umožněny žádné zásahy do postupu. Student popřípadě vyučující se smí pouze procházet mezi jednotlivými kroky vybrané konstrukce.



Obr. 1: Ukázka prostředí modulu pro testování

Na obrázku číslo 1. je zobrazeno aktuální prostředí ve studentském módu (v Mongeově promítání) kde student pomocí základních objektů vytvoří svou konstrukci (každý krok celé konstrukce se postupně ukládá) a ve výsledku se celá konstrukce srovná se správným řešením. Existuje několik srovnávacích algoritmů a vybrán je ten, který zvolí autor při tvorbě testu.

4 Základní vlastnosti modulu

Mezi základní vlastnosti modulu patří:

- **vrstvy** - modul obsahuje několik vrstev, které umožňují lepší orientaci při složitějších konstrukcích. Jednotlivé vrstvy jsou mezi sebou pro lepší přehlednost barevně odlišeny (včetně konstrukčních prvků, které do příslušné vrstvy zapadají) a lze je libovolně vypnout nebo zobrazit.
- **zoom** - velkou výhodou je jednoduché nastavení zoomu, kdy si uživatel může konstrukci podle potřeby přiblížit nebo oddálit.
- **krokování** - jednotlivé kroky celé konstrukce se automaticky během vytváření ukládají, což umožňuje uživateli libovolně používat krok zpět nebo znovu.

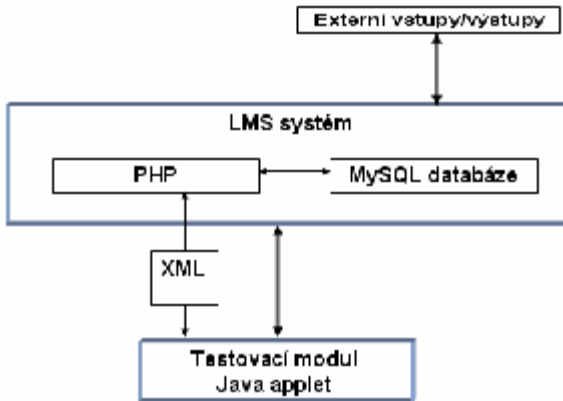
V konstrukci se ukládají všechny kroky, které si pak vyučující může libovolně u všech vypracovaných úloh přezkontrolovat.

5 Software

Samotný modul je vytvořen v programovacím jazyce Java. Pro testování je jako JavaApplet spouštěn v prostředí prohlížeče (nutná podpora Javy). Odesílání a přijímání dat na straně serveru obstarávají PHP skripty, které generují jednotlivá zadání (tuto část řídí LMS systém) a provádějí automatické vyhodnocování ukončených testů.

Celý modul se tedy skládá z těchto částí:

- Samotná aplikace - JavaApplet
- Skripty pro komunikaci - PHP
- Data s uloženými postupy - XML soubory



Obr. 2: Ukázka prostředí modulu pro testování

Pro ukládání dat je použito databáze MySQL a pro formát uložených dat jazyk XML, ve kterém jsou popsány jednotlivé konstrukční kroky. Pokud autor zadá volbu pro vyhodnocení testů, jsou jednotlivé studentské konstrukce (XML soubory) automaticky vyhodnoceny podle některé z předem vybrané vyhodnocovací metody a studentovi zobrazí úspěšnost jeho řešení.

6 Vyhodnocovací algoritmy

Před výběrem vyhodnocovacího algoritmu musí autor vybrat jednotlivé objekty, které budou brány jako správný výsledek dané geometrické konstrukce. Tyto objekty budou srovnávány s konstrukcemi, které vytvářejí studenti.

Jednotlivé druhy vyhodnocovacích algoritmů:

- **výsledek** – systém porovná pouze zda studentovo řešení obsahuje jednotlivé objekty, které autor určil v zadání jako výsledek dané konstrukce.
- **postup bez pořadí** - v tomto případě se porovnává celý geometrický postup bez závislosti na pořadí jednotlivých konstrukčních kroků
- **postup s pořadím** - tento vyhodnocovací algoritmus srovnává celý geometrický postup včetně pořadí jednotlivých kroků.
- **výběr kroků** - při této volbě vyhodnocení musí autor navíc vybrat postupně jednotlivé konstrukční kroky, které nelze mezi sebou zaměnit a systém porovnáva zda tyto (v konstrukci podstatné a nezaměnitelné) kroky student vytvořil správně.

Autor si předem mimo druh vyhodnocení ještě nastaví typ zobrazení výsledku (bodové, procentuální, apod.)

7 Rozšíření LMS systémem

Jednou ze základních vlastností tohoto modulu a také jeho výhod je jeho možnost spolupráce s různými LMS systémy. Podmínkou je, aby LMS systém dokázal být rozšiřitelný a musí umět pracovat s PHP skripty (např. Moodle, Barborka, apod.).



Všechny v systému

Informace o testu pro skupinu "2007_08_29_08_00_A1033"

Stránku automaticky obnovit po

#	Jméno	Login	Zahájen	Ukončen	Zobra. Stav Body PDF
1	Jiri Bactal 158.196.11.10 (pca1033a.vsb.cz)	bar547	29.08.2007 08:10	29.08.2007 08:49	
2	Tomas Drastich 158.196.11.18 (pca1033i.vsb.cz)	dra127	29.08.2007 08:15	29.08.2007 08:27	
3	Alan Kalina 158.196.11.22 (pca1033m.vsb.cz)	kat261	29.08.2007 08:06	29.08.2007 08:24	
4	Jiri Klemes 158.196.11.11 (pca1033b.vsb.cz)	kle111	29.08.2007 08:17	29.08.2007 09:01	
5	Lukas Pasiva 158.196.11.19 (pca1033j.vsb.cz)	pas142	29.08.2007 08:08	29.08.2007 08:27	
6	Vlastimil Vejmirovsky 158.196.11.13 (pca1033d.vsb.cz)	vla067	29.08.2007 08:15	29.08.2007 08:56	
7	Paotr Zavisla 158.196.11.15 (pca1033f.vsb.cz)	zav101	29.08.2007 08:11	29.08.2007 08:42	

Obr. 3: Zabudování do LMS Barborka

V našem případě bylo použito systému Barborka, který je taktéž vyvíjen naší katedrou. Zabudování do LMS systému není pouze z důvodu omezení neoprávněných přístupů.

Mezi výhody patří:

- Jednoduchá práce při vytváření a specifikace testů
- Přehlednost v jednotlivých testech (kdy, kdo vykonal jaký test, bodové hodnocení, délka trvání, počet pokusů, atd.).
- Jednoduché ukládání a záloha s využitím MySQL databáze a s tím spojená možnost si zpětně procházet jednotlivé testy a hledat chyby, kterých se studenti dopouštějí .

8 Závěr

Námi vyvíjený modul by měl sloužit jako ukázka možností rozšíření a podpory výuky předmětu založených na tvorbě geometrických postupů.

Aktuálně spolupracujeme s katedrou matematiky a deskriptivní geometrie na Vysoké škole Báňské - technické univerzitě. Rádi bychom ve spolupráci s touto katedrou nasadili náš modul přímo do výuky a otestovali jeho použití v praxi studenty.

I když první myšlenkou bylo pouze nahradit tužku a papír, v průběhu dalšího vývoje jsme narazili na problém rozhodnout právě hranici mezi tím, co všechno bude mít student k dispozici.

Cílem tohoto modulu není nahrazovat tradiční metody výuky deskriptivní geometrii, pouze se snažíme najít a otestovat další možnosti, které by ulehčily studentům jejich studium a pedagogům jejich práci.

Literatura

- [1] Němec, M.: *Možnosti generování, testování a algoritmů pro automatické vyhodnocování*. Ed. Bc. Andrea Kekeláková, Praha: Czech University of Life Sciences in Prague, 2007, 168-173, ISBN 978-80-213-1649-2
- [2] Němec, M.: *Geometrie v testování a automatickém vyhodnocování*, Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2005. Ed. Staniskav Olivík, vol. 25., čís. 57-533-05, ČVUT v Praze, ISBN 80-7015-013-0
- [3] Němec, M.: *Využití geometrie v testovacích aplikacích a automatické vyhodnocování nestandardních otázek a úloh*. In Sborník WOFEX 2005. Ed. Václav Snášel, Ostrava: VŠB-Technical University of Ostrava, 2005, 435-439, VŠB-Technical University of Ostrava, ISBN 80-248-0866-8

The Geodesic Shortest Path

Anna Porazilová

*Department of Mathematics, University of West Bohemia
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
aporazil@kma.zcu.cz*

Abstract. In the geodesic shortest path problem we have to find the shortest path between two points on the surface so that the path leads along the surface. In the article, the description and solution of that problem is given. The case with forbidden areas on the surface is especially treated.

Keywords: the shortest path, geodesic, forbidden area, obstacle, triangulation, surface

1 Introduction

The shortest path problems are among the fundamental problems studied in computational geometry and other areas including graph algorithms, geographical information systems (GIS), network optimization and robotics.

The geodesic shortest path problem: Given two points s and t on the surface of a polyhedron, find the shortest path from s to t so that it leads along the surface. The problem is usually solved on a triangulated surface and this article is concentrated especially on the surfaces with forbidden areas (obstacles - the shortest path has to avoid the forbidden area).

2 Previous work

As far as we know there is no previous work solving that problem which would concentrate on the surfaces with the forbidden areas. There are more works which solve the general geodesic shortest path problem and some of them can also treat the surfaces with forbidden areas, but their algorithms are not very effective in such cases.

One of the first and exact algorithms solving the geodesic shortest path problem was given by Sharir and Schorr in 1984 [5]. They proved that:

1. The shortest path cannot go through any spherical vertex (fig. 1)
2. The shortest path comes into the straight line after development to the plane.

The paths which satisfy these conditions are called (discrete) geodesics. Sharir and Schorr's algorithm finds the shortest path between two points along the surface of a convex polyhedron in time $O(n^3 \log n)$ where n is the number of all edges in the triangulation.

Another variant of solutions are the approximation solutions which convert the geometrical problem to the graph problem and use Dijkstra's

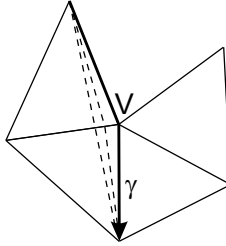


Figure 1: The geodesic shortest path cannot go through the spherical vertex.

algorithm. Although the authors of these algorithms usually do not mention that their algorithm can work on the surfaces with forbidden areas, the adjustment to such surfaces should not be difficult. As an example of a graph solution can be cited Kanai and Suzuki [3]. The complexity of their algorithm varies in the order of $O(k \log k)$, where k is the number of edges passed by the shortest path, and alleged accuracy is within 0.4%

One of the best, exact and already implemented algorithms was proposed by Chen and Han [1] in 1990. This algorithm solves the single-source shortest path problem using the unfolding of triangles into a plane within the time complexity $O(n^2)$. The algorithm was implemented in 2000 by Kaneva and O'Rourke [4] and the code is publicly available¹. Unfortunately the algorithm cannot treat the surfaces with forbidden areas.

In 2004 Deng and Zhou presented a new approach for the geodesic shortest path problem [2]. In preprocessing they first choose the region in which the global shortest path exists, afterward any other known algorithm can be applied.

Surazhsky et al. introduced an algorithm based on the development of the surface into the plane in 2005 [6]. The algorithm can also treat the surfaces with forbidden areas: when the developed strip of surface encounters the borders of forbidden area, a new pseudostartpoint is created and the development proceeds to the all directions from the beginning. The time complexity is $O(kn^2 \log n)$, where n is the number of the edges in the triangulation and k is the number of pseudostartpoints. Because the algorithm is not concentrated on the surfaces with forbidden areas as a special case, the solution is not effective in such cases and k can grow arbitrarily high.

We will show how to treat the surfaces with forbidden areas more effectively. A scheme which can be added to any other known algorithm

¹<http://cs.smith.edu/~orourke/code.html>.

is presented. The scheme will not decrease the worst-case time complexity but it will lower the practical (average) time complexity.

3 Geodesic shortest path with forbidden areas

3.1 Variations of the problem

The geodesic shortest path problem can be categorized by the type of the surfaces and forbidden areas as follows

- Surface
 - convex or nonconvex
 - open (terrain) or closed
- Forbidden area
 - convex or nonconvex
 - connected or disconnected

Convex forbidden area can be treated equally as the nonconvex forbidden area covered with the convex hull, on the assumption that none of two starting points lays inside the convex hull. In this article we will deal further only with a convex surface and a convex connected forbidden area.

3.2 Basic scheme

If the shortest path exists and if it has some intersections with the forbidden area, than:

- Between the intersections the shortest path is formed by geodesics.
- For the intersection points the following conditions hold:
 1. The intersection point cannot lay on the edge of the border of forbidden area (fig. 2).
 2. The intersection point can lay in the convex vertex on the border of the forbidden area only in the case if it bends there more than π . In other words there must exist an angle φ_B which satisfies:

$$\varphi_B = \varphi - \pi - \varphi_D, \quad (1)$$

where φ is the total vertex angle around the vertex and φ_D is the vertex angle inside the forbidden area (fig. 3). Because φ_B must be non-negative: $\varphi_B \geq 0$, then the shortest path will go through the vertex only if it satisfies

$$\varphi - \varphi_D \geq \pi. \quad (2)$$

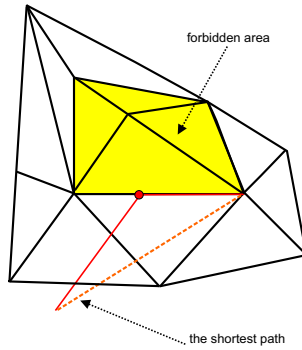


Figure 2: The intersection point cannot lay on the edge of the border of forbidden area - such paths can be shortened.

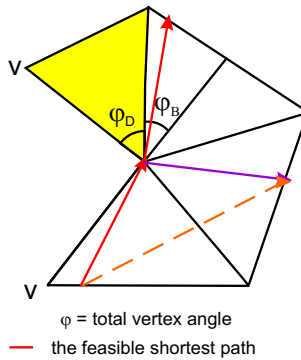


Figure 3: The shortest path at the convex vertex on the border of forbidden area must bend more than π .

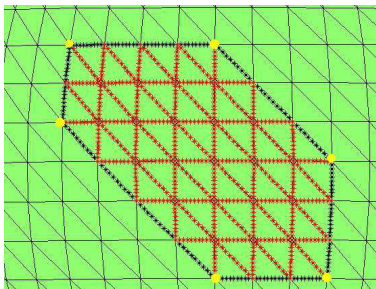


Figure 4: The feasible vertices.

The vertices which satisfy the condition 2 will be denoted as the feasible vertices. It is obvious that the shortest path cannot enter these vertices in arbitrarily direction; it must bend there more than π . The set of feasible vertices can be easily computed and demonstrated (fig. 4).

If this scheme had been used in Surazhsky's algorithm, the number of pseudostartpoints would have been limited and low (in the time complexity $O(kn^2 \log n)$, $k = 6$ for the fig. 4). The scheme is independent on a concrete algorithm and can be inserted to any other algorithm solving the geodesic shortest path problem on the surface with or without forbidden areas.

3.3 Algorithm

In the last part we will present an algorithm for the geodesic shortest path problem which concentrates on the surfaces with forbidden areas and which uses our scheme. The approach comes out from the Zabransky's algorithm [7].

Zabransky's algorithm finds the shortest path between two points on the surface using the knowledge that there exists exactly one geodesic with the given direction coming out from the given point. It searches for all geodesics coming out from the starting point in various directions and chooses the shortest one going through the end point.

Our algorithm works in the following steps:

1. For all the directions coming out from the starting point find the unique geodesic. For all the geodesics:
 - (a) If the geodesic strikes on the edge of the forbidden area or unfeasible vertex, break (go on with the next direction).
 - (b) If the geodesic strikes on the feasible vertex from the feasible angle, then save its length if it is the first one, or compare its length with the length of the last saved geodesic in the vertex and if the new geodesic is shorter, save it, its length and the possible right and left angle of proceeding.
 - (c) If the geodesic goes through the final point, compare the length of last saved geodesic and if the new one is shorter, save the geodesic and its length.
2. For all the feasible vertices v do:
 - (a) Looks for the geodesics in all feasible directions coming out from v and for all of them repeat 1(a)-1(c)
3. Create a graph whose nodes are the feasible vertices and the starting and final point, and the edges are the shortest found geodesics between them. Using the graph algorithm find the shortest path from the starting point to the final point.

4 Conclusion

A scheme which helps to solve the geodesic shortest path problem with focus on the surfaces with forbidden areas was given. The scheme can be implemented into any known algorithm that solves the geodesic shortest path problem; the higher mentioned algorithm is only one of the examples how the scheme can be used. The scheme does not decrease the worst-time complexity but it essentially decreases the average complexity.

In future work we would like to suggest a similar scheme for the non-convex surfaces and for the disconnected forbidden areas.

References

- [1] J. Chen and Y. Han: Shortest paths on a polyhedron. *SCG'90: Proceedings of the sixth annual symposium on Computational geometry*, pages 360-369, New York, USA, 1990. ACM Press.
- [2] K. Deng and X. Zhou. Expansion-based algorithms for finding single pair shortest path on surface. *SODA '95: Proceedings of the sixth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 447-456, Philadelphia, PA, USA, 1995. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [3] T. Kanai, H. Suzuki: Approximate shortest path on a polyhedral surface and its applications. *Computer-Aided Design*, Volume 33, Issue 11:801-811, 2001.
- [4] B. Kaneva and J. O'Rourke. An implementation of chen han's shortest paths algorithm. *Proceedings of the 12th Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 139-146, 2000.
- [5] M. Sharir and A. Schorr: On shortest paths in polyhedral spaces. *SIAM J. Comput.*, 15:193-215, 1986.
- [6] V. Surazhsky et al.: Fast exact and approximate geodesics on meshes. *ACM Trans. Graph.*, Volume 24, number 3, pages 553-560, New York, 2005.
- [7] J. Zábbranský: Triangulace povrchů a úlohy na nich. Master's thesis, Západočeská univerzita v Plzni, 2005.

Detekce ploch v částečně rekonstruované scéně

Radka Pospíšilová, Tomáš Gregar

Faculty of Informatics, Masaryk University, Czech Republic

Botanická 68a, 602 00 Brno

Email: xpospis5@fi.muni.cz, xgregar@fi.muni.cz

Abstrakt. Příspěvek se zabývá vyhledáváním ploch v částečně rekonstruované scéně. Ze sady fotografií se získají 3D body a přímky, které reprezentují rekonstruované hrany. Při hledání ploch je nejprve vypočítána pozice a směr plochy, dále se určí její hranice. Postupy zde uvedené jsou specializované na částečně planární scény, najdou tedy své využití především při rekonstrukci architektonických objektů, vnitřních prostor budov a podobně.

Klíčová slova: Detekce ploch, 3D rekonstrukce, plane-sweep

1 Částečná rekonstrukce

Na každé fotografii se extrahují výrazné body (odpovídají rohům a osamoceným bodům na fotografii s výrazným gradientem) a hrany. Z nich se dále spočítají body a přímky v 3D prostoru.

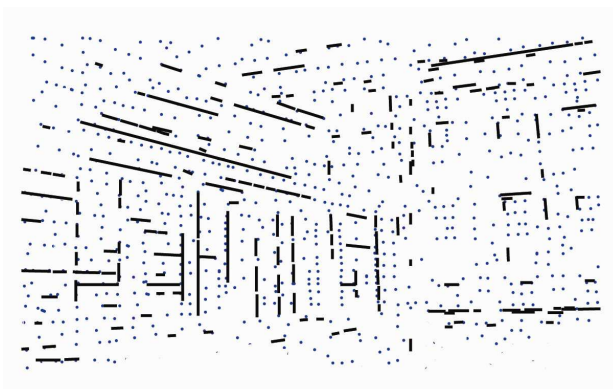
Ve většině případů postačuje pro rekonstrukci scény jen sada fotografií objektu, jen v některých případech (malý počet fotografií, příliš rozdílné pohledy na scénu, nekvalitní fotografie) je vhodné, aby uživatel sám určil některé vlastnosti scény (např. úhly, rovnoběžné přímky, poměry délek).



Obr. 1: Dvě fotografie z celkových sedmi.

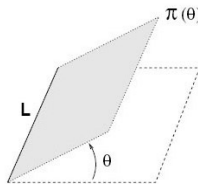
2 Detekce ploch

Při detekci ploch používáme dva základní principy. Bází našeho postupu je metoda *RANSAC*, kdy se postupně pro náhodně vybrané vzorky rekonstruovaných bodů (nebo i přímek) zjišťuje, zda leží na jedné ploše.



Obr. 2: Rekonstruované body a úsečky

Pro úspěšné vyhledávání ploch pomocí *RANSAC* je nutné, aby plocha obsahovala větší množství rekonstruovaných bodů. To bohužel velmi často není splněno. Proto tuto metodu kombinujeme navíc s metodou *plane-sweep* (její podrobný popis je možno najít např. v [2]). U *plane-sweep* postačuje pro určení plochy i jediná nalezená přímka na ní ležící.



Obr. 3: Plocha se hledá kolem rekonstruované úsečky L

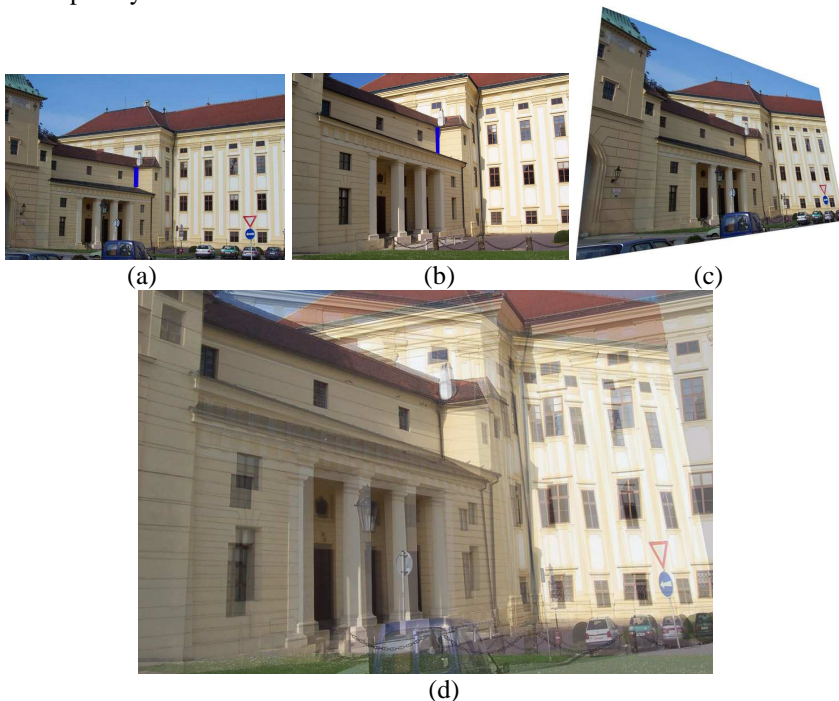
Vzhledem k tomu, že pracujeme s částečně planárními scénami, můžeme pro každou rekonstruovanou přímku předpokládat, že leží na nějaké ploše. Předpokládaná plocha se postupně otáčí kolem úsečky a hledá se její nejpravděpodobnější pozice (procházejí se všechny možné pozice plochy pomocí postupného otáčení plochy o konstantní úhel).

Každá taková pozice plochy určuje nějaké zobrazení (homomorfismus) mezi 2 fotografiemi. Pokud vybraná pozice odpovídá reálně existující ploše, pak po aplikaci homomorfismu na jednu fotografii bude mít výsledný obraz stejný tvar této plochy jako na druhé fotografii (viz obrázek 4). Pro zjištění skutečné pozice plochy se zkoumá a porovnává podobnost mezi nimi.

Vlastnosti plane-sweep:

- Nepotřebuje žádné výrazné rekonstruované body na ploše.
- Obtížně se rekonstruují homogenní plochy bez jakékoliv textury.
- Podobnost se zkoumá mezi body získanými pomocí detektoru hran s velmi nízkým prahem pro velikost gradientu.

- Plocha se umístí do pozice, pro níž byla nejvyšší suma podobností všech pixelů.
- Metoda je velmi citlivá na přesnost přímeek, kolem nichž se hledají plochy.



Obr. 4: Plocha se hledá kolem modře označené úsečky. (a) a (b) jsou zdrojové fotografie.

Obrázek (c) vznikl aplikací homomorfismu (indukovaného skutečnou pozicí plochy) na obrázek (a).

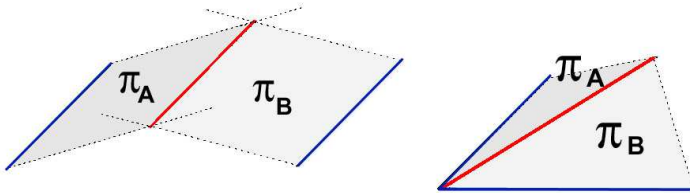
Obr. (d) vznikl překrytím obrázku (b) a (c). Je vidět že pro rekonstruovanou plochu je tento obraz „zaostřený“ jinak rozmazaný. Tedy v místě plochy jsou obrazy totožné.

3 Výpočet hranic plochy

Metoda *plane-sweep* je závislá na nalezených úsečkách ve scéně. Velká část z nich ale není detekována kvůli nevýraznému gradientu hrany, jejímu rozmazání na fotografiích nebo kvůli členitosti scény a překrytí dané hrany na fotografiích. Existují dvě možnosti jak jejich pozici dopočítat.

3.1 Určení části hranice jako průsečíku dvou ploch

Nové hrany jsou nalezeny jako průsečíky dvou ploch. Neslouží již k dalšímu hledání ploch, jen ukončují a ohraničují již nalezené plochy.



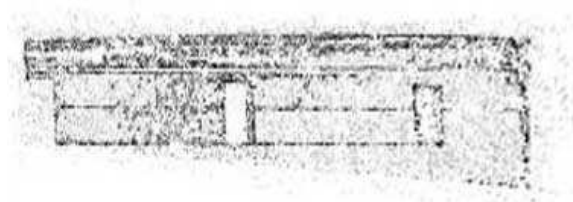
Obr. 5: Hledání průsečíků

3.2 Zjištění hranice na základě podobnostních hodnot

Hranice nalezené tímto způsobem mohou mít poněkud nižší přesnost než hrany nalezené pomocí průsečíku ploch, proto může být problematické hledání nové plochy kolem takto nalezené hrany.

Hrubý odhad hranice

Zkoumají se podobnostní hodnoty pro všechny pixely na fotografiích. Pixely jsou navíc ohodnoceny podle důležitosti (gradientu) vahami. Vzniká tím obraz, kde každý pixel znázorňuje podobnost a důležitost bodu. Obsahuje tedy body s vysokou korelací uvnitř plochy a s nízkou mimo plochu. Na základě těchto hodnot se obraz rozsegmentuje (pomocí prahování s iterativním prahem) a označí se hranice ploch. Spolehlivost metody výrazně stoupá, je-li možné srovnávat vždy alespoň 3 fotografie.



Obr. 6: Zobrazení podobnostních hodnot.

Výpočet nových hran

Hranice nalezené v předchozím kroku jsou obvykle nepřesné a široké (zabírají obvykle několik pixelů). Je tedy nutné je zpřesnit. Hranice se rozdělí na rovné úsečky a pro každou z nich se hledá přesná pozice. Vybere se ta úsečka, která nejlépe rozděljuje své okolí na oblast s vysokou podobností bodů na jedné straně a na body s nízkou podobností na straně druhé. Podobný postup

zjednodušení hranice se osvědčil i v námi vyvíjeném grafickém anotačním systému [3].

Ověření nalezené hrany

Pozice každé nalezené hrany je ověřena zpětným promítnutím do zdrojových fotografií. Podle úrovně gradientu na fotografiích je hranice buď akceptována, nebo zamítnuta. Také jsou hrany rozděleny do několika kategorií, které pak jsou důležité pro další práci se scénou. Například pro doplnění zakrytých částí scény.



Obr. 7: Falešné hrany (např. modře vyznačené) vzniklé v důsledku zakrytí částí objektu na fotografiích jsou odstraněny. Nové hrany se vytvoří jako průniky ploch.

4 Závěr

V příspěvku byl představen algoritmus hledání ploch ve scéně složené z bodů a přímek. Postupy zde uvedené jsou použitelné pouze v částečně planárních scénách, ale dávají zde velmi dobré výsledky, pokud je srovnáme s častěji používanými metodami, kde se jednotlivé pixely rekonstruují v podstatě nezávisle. V takto vytvářených scénách jsou běžné „zašumělé“, nerovné plochy, neostré rohy a hrbolaté úsečky. Použitím zde popsaných postupů získáme přesnější 3D model bez těchto negativních jevů.

Nejcitlivějším místem celého zde popsaného algoritmu je jeho závislost na kvalitě nalezených hran. Proto stále pracujeme na zlepšení dílčích částí algoritmu.

Testování a ověřování získaných postupů bylo prozatím čistě experimentální. Vzhledem k projektu, probíhajícímu na naší fakultě, který se zabývá vztahem elektronické podpory výuky a moderních webových a zobrazovacích technologií (viz například [4]) začala před nedávnem implementace modulu, využívající a vizualizující předvedený postup pro výuku počítačové grafiky.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za podpory projektu Národního programu Informační společnost 'E-learning v kontextu sémantického webu', č. IET208050401.

Literatura

- [1] R. Pospíšilová: *Occlusion detection and surface completion in 3D reconstruction of man-made environments*, International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision '2007, ISBN: 9788086943022, 2007.
- [2] C. Baillard, A. Zisserman: *Automatic Reconstruction from Piecewise Planar Models from Multiple Views*, International Proceedings of CVPR '99, Fort Collins, CO, USA, 1999, pages 559-565.
- [3] T. Gregar, R. Pospíšilová: *Tvorba a využití vizuálních ontologií v elektronické podpoře výuky*, DATAKON 2006, Sborník databázové konference, ISBN 80-210-4102-1, 2006, pages 169-178.
- [4] T. Gregar, T. Pitner: *Vizualizace dat ve výuce*. Sborník konference Informatika 2006. Brno : PEF MZLU Brno, 2006.

Maplety v diferenciální geometrii křivek a ploch

Lenka Pospíšilová

Ústav matematiky, LDF MZLU v Brně
Zemědělská 3, 61300 Brno
pospisi2@mendelu.cz

Abstrakt. V rámci výuky diferenciální geometrie křivek a ploch můžeme s výhodou využít mapletů - jednoduchých programů, které lze vytvořit v systému počítačové algebry (CAS) Maple. Použitím mapletů minimalizujeme nároky na znalosti studentů při práci s Maplem. Nevýhodou se může jevit samotná tvorba mapletu, která vyžaduje po vyučujících alespoň základní znalost programování.

Klíčová slova: Maple, maplet, diferenciální geometrie křivek

1 Úvod

Při používání některého ze systémů počítačové algebry můžeme narážet na problémy plynoucí z nutnosti naučit studenty zvládat alespoň základní práci s daným softwarem. Možným způsobem, jak tyto problémy zmírnit, je vytváření mapletů. Než přejdeme k samotné problematice mapletů, podívejme se na stručný přehled užitečných příkazů, které jsou v systému Maple nainstalovány.

2 Maple v diferenciální geometrii křivek a ploch

Maple 9.5 nabízí v rámci svých knihoven a jejich procedur podporu mnoha odvětvím matematiky včetně aplikací do jiných oborů. Přímá podpora diferenciální geometrie křivek a ploch tu ovšem neexistuje, obzvláště když přejdeme od křivek k plochám. Přesto se dají nalézt procedury, které nám mnohé usnadní. O těchto procedurách se stručně zmíníme, podrobnější popis každé procedury získáme vypsáním příkazu

> ?procedura

2.1 Knihovna plots

Využití knihovny `plots` v diferenciální geometrii křivek je uvedeno například v [3]. Proto se v tomto odstavci budu věnovat pouze plochám. Hned na počátku výuky se většinou věnujeme parametrizacím význačných ploch. Pro vykreslování plochy se nám bude hodit příkaz `plot3d`. Další grafické příkazy už je potřeba načíst z knihovny `plots`. Příkaz `implicitplot3d` vykresluje plochu danou implicitně rovnicí. Pokud je to ale možné, snažíme se nejdříve nalézt parametrické vyjádření plochy, neboť příkaz `implicitplot3d` většinou vytváří méně kvalitní obrázky a například pro kužel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ není výsledek korektní¹. Zajímavě

¹`implicitplot3d(x^2+y^2-z^2,x=-2..2,y=-2..2,z=-5..5);`

plochy lze vykreslit pomocí příkazu `tubeplot`. Samostatný bod potom zobrazí příkaz `pointplot3d`.

U rotačních ploch nebo u izometrických deformací se nabízí vytvářet animace pomocí příkazu `animate3d`. Význam příkazu se rozšiřuje použitím společně s dalšími grafickými příkazy. Celkovou grafickou strukturu vzniklou kombinací těchto příkazů zobrazí příkazy `display` a `display3d`, které mají své využití také u statických obrázků. Animace lze vytvářet i bez příkazu `animate3d` a to s použitím volby `insequence=true` v příkazu `display(seq(), ...)2`.

2.2 Knihovna `VectorCalculus`

Užitečné procedury pro diferenciální geometrii křivek a ploch můžeme objevit v knihovně `VectorCalculus`. Vektor je potřeba zadávat ohraničený závorkami `<, >`. Výstupem Maplu pak je zápis pomocí vektorů báze. Zápis vektorů pouze pomocí souřadnic získáme na výstupu příkazem `evalm`. Např.

```
> with(VectorCalculus):
> v:=<cos(t),sin(t),t>;
```

$$v := \cos(t)e_x + \sin(t)e_y + te_z$$

```
> evalm(v);
```

$$[\cos(t), \sin(t), t]$$

S využitím procedury `BasisFormat` můžeme potlačit zápis pomocí báze, výpis potom probíhá do sloupcového vektoru:

```
> BasisFormat(false); v;
```

$$\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}$$

Pojmům délka, křivost, poloměr oskulační kružnice a torze křivky odpovídají procedury `ArcLength`, `Curvature`, `RadiusOfCurvature` a

²Následující kód zobrazí izometrickou deformaci katenoidu na helikoid:

```
> with(plots):setoptions3d(scaling=constrained):
> catenoid:=(u,v)->[cosh(u)*cos(v),cosh(u)*sin(v),u]:
> helicoid:=(u,v)->[u*cos(v),u*sin(v),v]:
> for i from 0 to 50 do
  p[i]:=plot3d(evalm(cos(i*Pi/100)*catenoid(u,v+i*Pi/100)+sin(i*Pi/100)
    *helicoid(sinh(u),v+i*Pi/100-Pi/2)),u=-2..2,v=0..2*Pi):
  od:
> display(seq(p[i],i=0..50),insequence=true);
```

Torsion. Použití těchto procedur je s přihlédnutím do nápovědy velice intuitivní. Z didaktických důvodů je dobré si pomocí příkazu `plot` zobrazit grafy funkcí křivosti a torze a průběh těchto funkcí srovnat s tvarem dané křivky. Vektory určující Frenetův trojhran křivky lze najít pomocí příkazů `TangentVector`, `Binormal`, `PrincipalNormal` a `TNBFFrame`. Poslední uvedený jako jediný dává na výstupu jednotkové vektory. Knihovna také sestaví parametrické rovnice tečny křivky příkazem `TangentLine` a parametrické rovnice tečné roviny plochy příkazem `TangentPlane`.

2.3 Další knihovny

Knihovna lineární algebry `linalg` se velice často používá napříč celým spektrem matematických oborů. Proto uveďme jen přehled nejdůležitějších příkazů pro diferenciální geometrii bez dalšího komentáře: `dotprod` pro skalární součin vektorů, `crossprod` pro vektorový součin vektorů, `det` pro výpočet determinantu matice a `inverse` pro výpočet inverzní matice.

Dalšími zajímavými knihovnami je knihovna tensorového počtu `tensor` a ve verzi Maple 11 se objevuje knihovna `DifferentialGeometry` pro výpočty v moderní diferenciální geometrii variet.

3 Maplety v diferenciální geometrii křivek a ploch

Všechny výše uvedené procedury lze s úspěchem využívat při cvičeních z diferenciální geometrie (za předpokladu, že výuka probíhá na počítačové učebně), neboť náročnost jejich užití není pro studenty vysoká. Při výuce máme ale nutkání ukázat jim mnohem více, než naimplementované procedury umožňují. K tomu ale potřebujeme vyšší hodinovou dotaci na předmět, neboť vzniká nutnost prezentovat studentům základní programovací techniky. To samozřejmě často nebývá organizačně možné a proto se nabízí řešení v podobě mapletů.

Maplet je aplikace s interaktivním grafickým uživatelským prostředím, která funguje obdobně jako javovské aplety v internetových aplikacích. Knihovna `Maplets` se začala objevovat od verze Maple 7 a od verze Maple 9.5 je součástí program `Maplet Viewer`, který umožňuje maplety jednoduše spouštět. Otevírání zdrojového kódu se můžeme vyhnout tím, že maplet vyexportujeme do formátu `*.maplet`.

Je důležité si uvědomit, že i nejsložitější maplet má k dispozici méně prostředků systému Maple než klasické prostředí mapleovského zápisníku a že v rámci rozhraní není podporována česká diakritika. Nevýhodou je také fakt, že tvorba mapletů vyžaduje určitou zkušenost s programováním. Dostatečným zdrojem informací pro první kroky s maplety může být samotná nápověda `Maplu`³. Ve verzi Maple 11 existuje `Maplet Builder`, který

³Všechny důležité odkazy získáme, když na příkazový řádek v mapleovském zápisníku napíšeme

```
> ?roadmap
```


by měl pomoci vytvořit maplet i méně zkušeným autorům.

Základním principem při programování mapletů je rozdělení jednotlivých prvků do řádků a sloupců, které představují vnořené seznamy (řádky a sloupce se pravidelně střídají). Pro náročnější maplety je ale výhodnější pro přehlednost používat příkazů BoxRow a BoxColumn. Samozřejmě je více než žádoucí ve zdrojovém kódu udržovat určitý systém zápisu, neboť ztratit orientaci v programovém kódu je u mapletů obzvláště snadné.

Maplety, které používám při výuce, jsou zcela přizpůsobeny potřebám na cvičeních. Ovládání je tvořeno tak, aby bylo co nejvíce intuitivní. Navíc jsem vždy připravila několik ukázek vstupních dat, které studentům ulehčí počáteční práci s mapletem. Výhodné určitě bývá hned při spuštění mapletu načíst automaticky nějaké vhodné vstupy, protože vyplňování vstupních formulářů může mnohé uživatele hned zpočátku odradit.

Z témat věnujících se křivkám jsem si pro tvorbu mapletů vybrala animaci epicykloid a cykloid, oskulační rovnice rovinné křivky včetně evoluty a Frenetův trojhran prostorové křivky včetně projekcí do jednotlivých rovin trojhranu. Bližší informace k těmto mapletům lze najít ve [3].

Z témat věnujících se plochám se během výuky ukázalo přínosné naprogramovat maplet zabývající se křivostmi plochy včetně znázorňování hlavních, případně asymptotických směrů v tečném prostoru plochy. Kromě výpočtů Gaussovy, střední a hlavních křivosti vidíme i grafické znázornění těchto křivosti současně se samotnou plochou. Je možné rozlišovat mezi křivostí jakožto funkcí dvou proměnných nebo křivosti v bodě jakožto funkční hodnotou.

Pro objasnování pojmu geodetická křivka a geodetická kružnice byl vytvořen další maplet, v rámci něhož je možno rychle získat Christoffelovy symboly zadané plochy. Maplet umí najít diferenciální rovnice geodetické křivky a na základě numerického řešení vykreslit několik geodetických křivek v daném bodě nebo konkrétní geodetickou křivku v daném bodě a směru. Součástí mapletu je možno si také v daném bodě vykreslit geodetické kružnice.

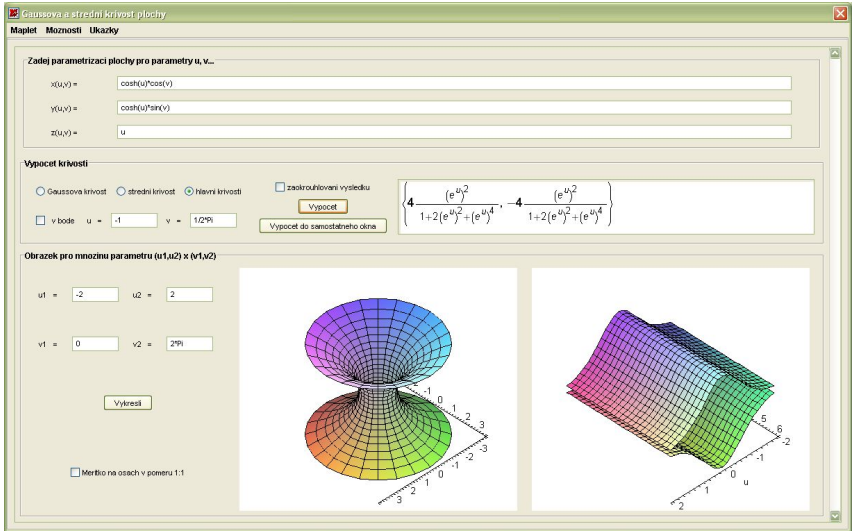
Všechny uvedené ukázky mapletů pro diferenciální geometrii křivek a ploch je možné stáhnout z webové stránky

<http://www.math.muni.cz/~pospisl/dgkp/maplety>

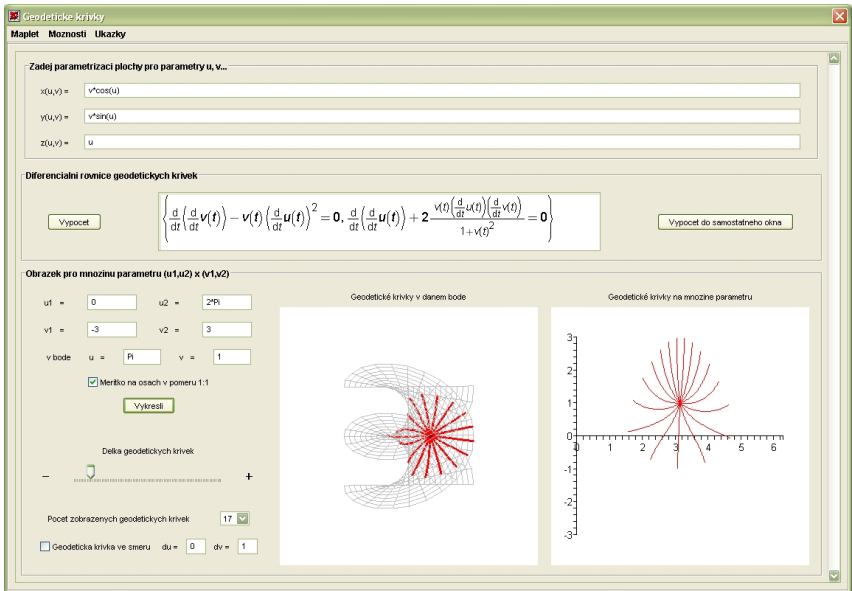
4 Závěr

Je zřejmé, že maplety je možné vytvářet na různá témata, a to nejen v diferenciální geometrii⁴. Závisí jen na našich nápadech, jak zpestřit a

⁴O zajímavých mapletech v matematické analýze je pojednáno v [1].



Obrázek 1: Maplet Křivosti plochy



Obrázek 2: Maplet Geodetické křivky

hlavně objasnit probírané učivo. Studenti zajisté takový druh výukového materiálu ocení.

Při využívání počítačů ve výuce je samozřejmě důležité si uvědomit, zda nás obsluha daného softwaru zbytečně neodvádí od samotného problému. Po praktických zkušenostech s počítačově podporovanou výukou si troufám prohlásit, že přínos pro studenty zcela jistě převýší možné technické komplikace a že počítačová podpora představuje významné doplnění výkladu učiva.

Reference

- [1] Baráková L.: *Využití mapletů ve výuce diferenciálního počtu funkcí dvou proměnných*, Department of Mathematics Report Series č. 13, s. 9-12, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2005
- [2] *Help programu Maple 9.5*
- [3] Pospíšilová L.: *Využití mapletů ve výuce diferenciální geometrie křivek*, Sborník 4. žilinské didaktické konference, Žilina, 2007
- [4] Voráčová Š.: *Tvorba knihovny podporující základní výpočty diferenciální geometrie v Maple*, Department of Mathematics Report Series č. 13, s. 225-228, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2005

Compatible walls

Jana Přívratská

*Dept. of mathematics and didactics of mathematics, Fac. of Education,
Technical Univ. of Liberec
Hálkova 6, 461 17 Liberec, Czech Republic
email: jana.privratska@tul.cz*

Abstract. Orientation of compatible domain walls and share angle of ferroelastic domain twin resulting from phase transitions *tetragonal* \rightarrow *orthorhombic* and *tetragonal* \rightarrow *monoclinic* phases are expressed in crystallographic unit-cell parameters of the low-symmetry phase.

Examples of symmetry descent $4/mmm \rightarrow mmm$ with crystallographic domain walls and $4/m \rightarrow 2/m$ with non-crystallographic domain walls are described in more details.

Key words: ferroelastic domain structure; compatible domain wall; disorientation of ferroelastic domains; disorientation angle.

1 Introduction

For most ferroelastic domain pairs two mutual perpendicular planes (*compatible* or *permissible walls*) exist along which two domain states can meet in a stress-free and dislocation-free way^[1,2]. Ferroelastic single domain states $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ are represented by the same conventional unit-cells whose symmetry is determined by the symmetry group of a single domain state. Their respective orientation is given by the switching operation that transforms the single domain state \mathbf{R}_1 into \mathbf{R}_2 , respectively. Any vector \vec{v} lying in the plane of potential compatible wall in the high-symmetry phase is changed into two different vectors \vec{v}_1 in the single domain state \mathbf{R}_1 and \vec{v}_2 in the single domain state \mathbf{R}_2 . The formation of the domain twin requires rotation of \mathbf{R}_1 and \mathbf{R}_2 by a *disorientation angle* φ about the rotational axis which is the intersection of the permissible domain walls^[3].

These two characteristics, depend on the spontaneous strain in two single domain states $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ from which the domain twin is formed. If relative changes of crystal lattice are small, than the second rank symmetrical strain tensor \mathbf{u} can be calculated from the crystallographic unit-cell parameters before and after the deformation^[5-8].

An alternative approach^[9] works only with crystallographic unit-cell parameters of the low symmetry phase.

The domain state \mathbf{R}_1^- in the first domain can be also obtained by performing a simple shear on the domain \mathbf{R}_2^+ of the second domain. The amount of this shear ^[4] is measured by the absolute value of the displacement q (displacement of a point in the direction parallel to the equally deformed planes and to a plane perpendicular to the axis of the domain pair) at a unit distance, or by a shear angle φ .

2 Tetragonal – orthorhombic symmetry 4/mmm – mmm

A right square prismatic cell of the parent phase is represented in Fig. 1 by the square $M_0N_0P_0Q_0$. It can be deformed under spontaneous strain $u^{(1)}$ into a Rectangular prismatic cell representing a domain state \mathbf{R}_1 ($M_1N_1P_1Q_1$ is the projection \mathbf{R}_1 onto the plane of paper), or under spontaneous strain $u^{(2)}$ into the domain state \mathbf{R}_2 ($M_2N_2P_2Q_2$).

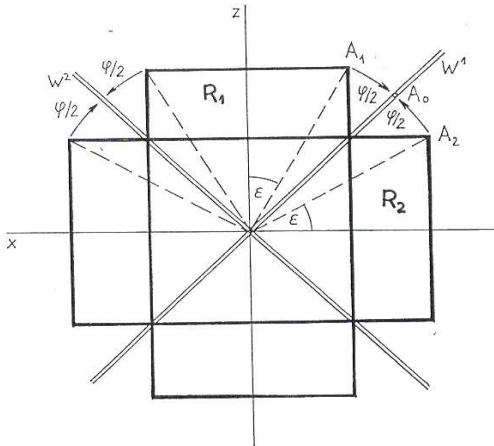


Fig. 1

From the Fig. 1 we can see that both prismatic cells meet each other along the planes with the normal vectors

$$n^1 = [1, 1, 0], \quad n^2 = [1, -1, 0].$$

The disorientational angle is than

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{b}{a}.$$

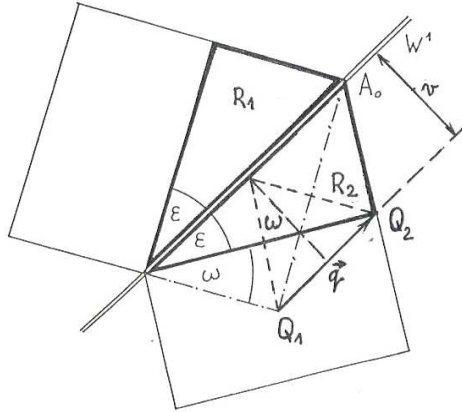


Fig. 2

From the Fig. 2 we see that the amount of shear is also determined by the angle of disorientation

$$s = \frac{q}{d} = \frac{2}{\tan \psi} = 2 \tan \varphi .$$

3 Tetragonal – monoclinic symmetry $4/m - 2/m$

A right square prismatic cell of the parent phase is represented in Fig. 3 and Fig. 4 by the square $M_0N_0P_0Q_0$. It can be deformed under spontaneous strain $u^{(1)}$ into a rhomboidal prismatic cell representing a domain state \mathbf{R}_1 (rhomboid $M_1N_1P_1Q_1$), or under spontaneous strain $u^{(2)}$ into the domain state \mathbf{R}_2 (rhomboid $M_2N_2P_2Q_2$). The symmetry $2_z/m_z$ of the monoclinic phase determines fully neither the orientation of these two rhomboids nor the orientation of compatible domain walls in the Cartesian coordinate system of the tetragonal high-symmetry phase. Therefore we can expect non-crystallographic compatible domain walls W^1 and W^2 with the normal vectors ^[4]

$$n^1 = [1, k, 0] , n^2 = [k, -1, 0] .$$

Both domain states meet along the wall $W^1[n^1]$ when the prism \mathbf{R}_1 rotates through the angle $-\varphi/2$ and the prism \mathbf{R}_2 through $+\varphi/2$ about the z -axis (the intersecting straight line of the two compatible walls). In the Fig.3 the point A_1 of the rhomboid \mathbf{R}_1 is rotated into the point A in the wall W^1 and the point A_2 of the rhomboid \mathbf{R}_2 is rotated into the same point A . This is possible only if

$$|A_1B_1| = |A_2B_2| = |C_1D_1| = |C_2D_2| .$$

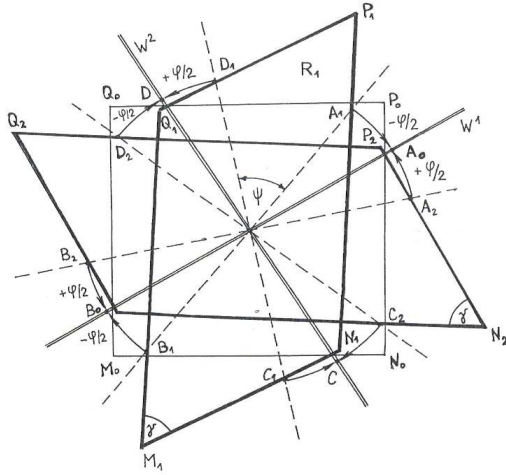


Fig. 3

Under the condition of an affine transformation of a square into a rhomboid, see Fig. 4, it is possible to express the parameter k and the angle ψ

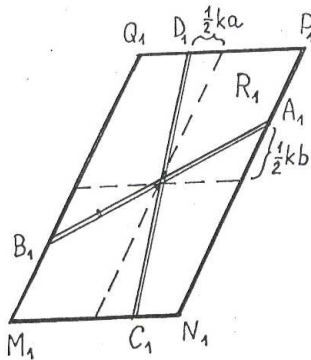


Fig. 4

$$k = \frac{-2ab \cos \gamma + \sqrt{(2ab \cos \gamma)^2 + (b^2 - a^2)^2}}{b^2 - a^2},$$

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{(2ab \cos \gamma)^2 + (b^2 - a^2)^2}}{b^2 + a^2},$$

where a, b, γ are the lattice parameters of the low-symmetry phase (γ is the acute angle between neighboring vertical faces).

From the Fig. 3 it follows that the magnitude of the angle of disorientation is

$$\varphi = \pi/2 - \psi.$$

The domain state \mathbf{R}_1^- in the first domain can be also obtained by performing a simple shear on the domain \mathbf{R}_2^+ of the second domain see Fig. 5.

In the case $q = Q_1 Q_2$ we get

$$q = \frac{\sqrt{2}(1+k)[k(b^2 - a^2) + 2ab \cos \gamma]}{4\sqrt{(a^2 + b^2)(1+k^2)}}, \quad d = \frac{\sqrt{2}(1+k)ab \cos \gamma}{2\sqrt{(a^2 + b^2)(1+k^2)}}.$$

Then

$$s = \frac{q}{d} = \frac{2}{\tan \psi} = 2 \tan \varphi.$$

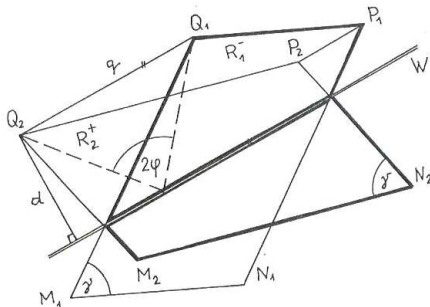


Fig. 5

4 Conclusion

The disorientation angle and orientation of compatible domain walls for a ferroelastic domain twin for symmetry descent $4/m \supset 2/m$ and $4/mmm \supset mmm$ were expressed only in the crystallographic unit-cell parameters of the low-symmetry phase. The derived formulae can be used for both the small and finite spontaneous strain. For small spontaneous strains their values are identical to those calculated from the strain tensor components.

Acknowledgements

This work was supported by the Grant Agency of the Czech Republic (GACR 202/07/1289).

References

- [1] J. Fousek and V. Janovec, *J. Appl. Phys.* 40, 1969, pp.135-142
- [2] J. Sapriel, *Phys. Rev. B* 12, 1975, pp.5128-5140
- [3] L. A. Shuvalov, E. F. Dudnik and S. V. Wagin, *Ferroelectrics* 65, 1985, pp.143-152
- [4] *International Tables for Crystallography*, Vol. D, *Physical Properties of Crystals*, ch. 3.4, Kluwer Press, Dordrecht 2003
- [5] J. L. Schlenker, G. V. Gibbs and M. B. Boisen Jr, *Acta. Cryst.* A34, 1978, pp. 52-54
- [6] M. A. Carpenter, E. K. H. Salje and A. Graeme-Barber, *Eur. J. Mineral.* 10, 1998, pp.621-691
- [7] J. L. Schlenker, *Acta Cryst. A* 34, 1978, pp.152-154
- [8] L. Jian and C. M. Wayman, *J. Am. Ceram. Soc.* 79[6], 1996, pp. 1642-1648
- [9] J. Přivratská, *Ferroelectrics* 291, 2003, pp.197-204

Výuka počítačové grafiky a geometrie s využitím flash animací

Jana Procházková

*Ústav matematiky, Fakulta strojího inženýrství, VUT Brno
Technická 2, 619 00 Brno, Česká republika
email: jana.prochazkova@ieee.org*

Abstrakt. Na fakultě strojího inženýrství VUT v Brně probíhá výuka počítačové grafiky a geometrie pro všechny studenty prvního ročníku. Studenti se seznámí s grafickým studiem DesignCAD, teoretickými základy počítačové grafiky a se základy programování jednoduchých geometrických úloh v prostředí Delphi. Pro podporu výuky byly vypracovány webové podpory využívající flash animací, které jsou volně přístupné na Internetu pro všechny studenty i veřejnost. Popis prostředí, jednotlivé funkce ve studiu DesignCAD či celé tutoriály tvorby předmětů jsou animovány a podrobně popsány. Studenti se k nim mohou vracet i při opakování a procvičování dané látky. V příspěvku budou ukázány výsledné podpory, jejich využití při výuce i způsob jejich tvorby v prostředí Adobe Captivate.

Klíčová slova: počítačová grafika, flash animace, DesignCAD, Borland Delphi.

1 Výuka počítačové grafiky na FSI VUT v Brně

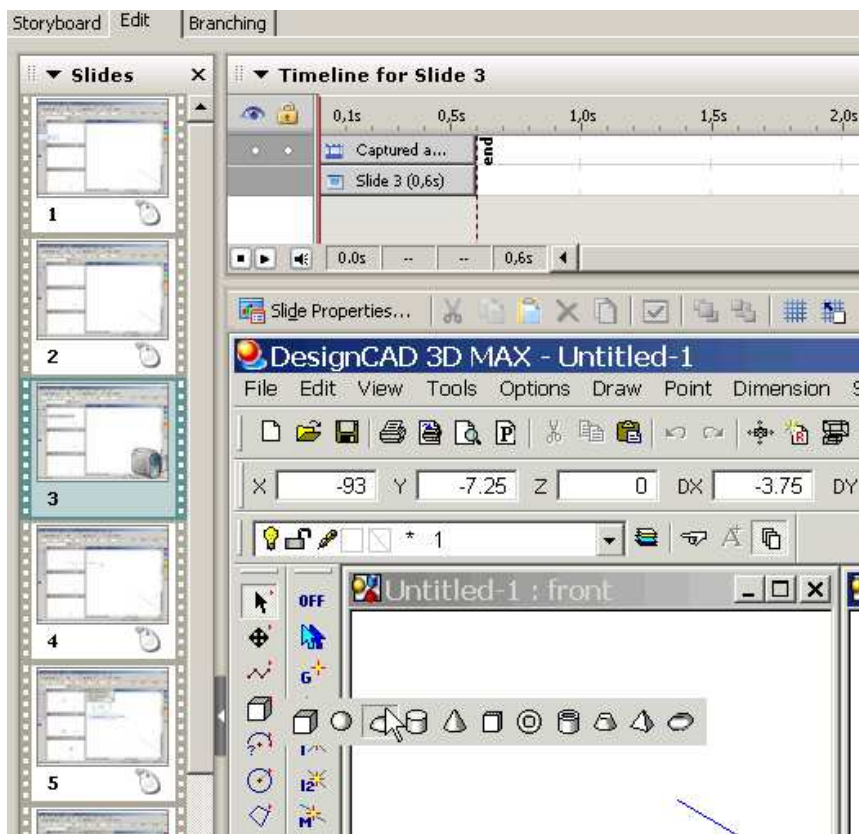
V prvním ročníku se všichni studenti FSI VUT v Brně seznamují se základy počítačové grafiky. Jedná se o jednosemestrální kurz, jehož náplň se skládá ze dvou částí – práce v grafickém studiu DesignCAD a programování v prostředí Delphi.

K tomuto předmětu byly vypracovány internetové podpory. Celé budou volně k dispozici na serveru ústavu matematiky na internetové adrese <http://mathonline.fme.vutbr.cz>. Hlavním cílem těchto podpor bylo využití softwaru Adobe Captivate pro tvorbu flash animací použitelných při výuce. V učebnách nejsou k dispozici projektory, vysvětlování postupů konstrukce složitějších objektů je proto velmi obtížné. Připravené animace poslouží studentům k lepšímu pochopení probírané látky a také k opakování při práci na domácích projektech.

2 Adobe Captivate

Software Adobe Captivate slouží k vytváření flash animací, ale také k tvorbě složitějších prací s interaktivním přístupem.

Princip je založen na snímání jednoho pracovního okna či celé obrazovky. Následně je automaticky generována posloupnost podobná prezentaci v Microsoft Power Pointu, kterou lze dále editovat. K editaci slouží doplňování popisových boxů, podsvícení funkcí, reakce na stisknutí tlačítka, atp.



Obr. 1: Prostředí Adobe Captivate

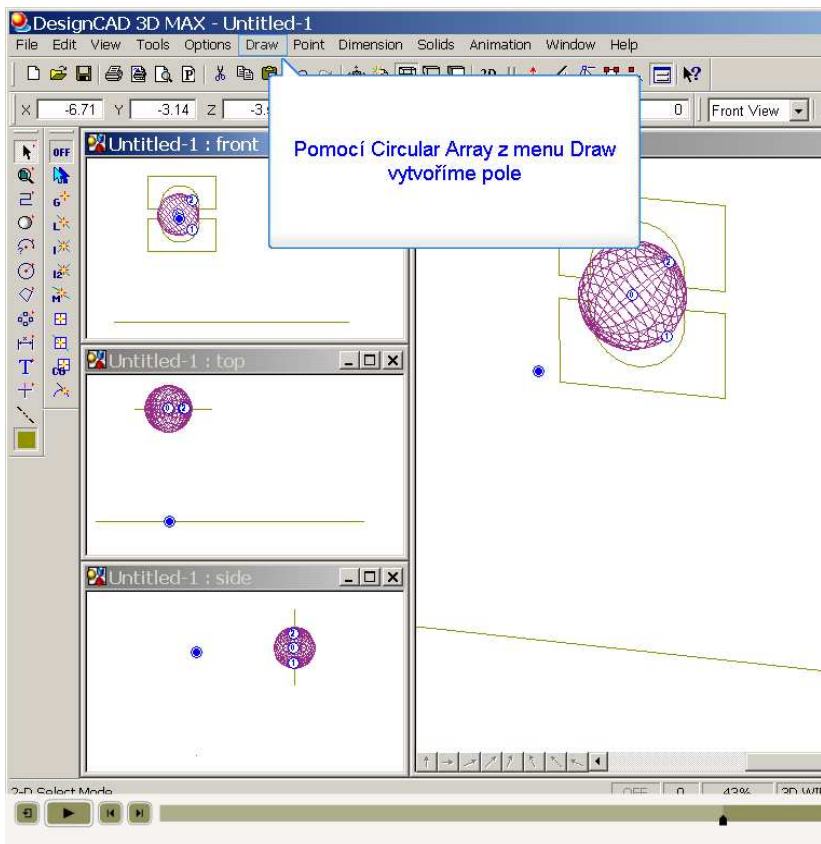
3 Internetové podpory

Vypracované podpory pro předmět počítačová grafika budou k dispozici na internetu na adrese <http://mathonline.fme.vutbr.cz/>

3.1 Struktura podpor

Podpory jsou rozděleny do několika částí. První část jsou podklady pro jednotlivá cvičení ve formátu .html propojené s flash animacemi. Pro tisk je k dispozici .pdf verze.

Další část představuje ucelený manuál pro práci se studem DesignCAD. Obsahuje vysvětlené základní funkce (tělesa, křivky, sweep, extrude, array) a několik tutoriálů pro tvorbu složitějších objektů (například kuličkové ložisko).



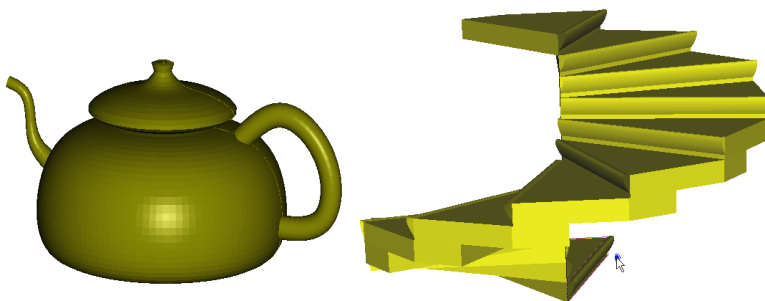
Obr. 2: Ukázka animace v DesignCADu, ve spodní části časová osa.

Ve třetí části jsou shrnuty základní teoretické znalosti týkající se počítačové grafiky – barvy, typy dat, technické křivky a plochy. Jedna část je věnována objektově orientovanému programování, na kterém je založena práce v prostředí Borland Delphi. V rámci výuky je teorii věnována prvních 15-20 minut výuky. Zájemci si mohou svoje znalosti rozšířit přečtením těchto materiálů, které obsahují i další odkazy na literaturu a otázky k opakování.

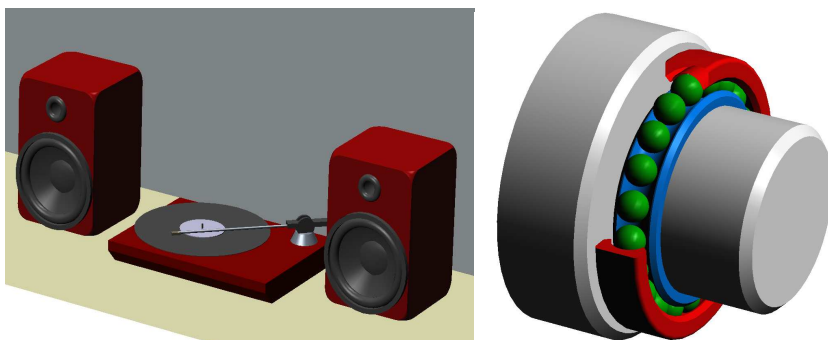
Poslední část je věnována zájemcům o programování v prostředí Delphi. Jsou zde uvedeny složitější úlohy počítačové grafiky a jejich zpracování v jazyce Pascal.

4 Závěr

V letním semestru ročníku 2006/2007 byla část podpor využívána při cvičeních. Studentům se tento přístup velmi líbil a také byl velmi vhodný pro slabší studenty, kteří si konstrukce mohli opakovat také doma. Použití flash animací podle mého názoru výrazně zkvalitní výuku.



Obr. 3: Výsledné modely - ukázka



Obr. 4: Studentské semestrální práce (O.Damborský, P. Frolích)

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory grantu FRVŠ G1 2007/1651

Literatura

- [1] D. Martišek: *Počítačová geometrie a grafika*, Vysoké učení technické v Brně., 2000.

Projektivní rovina nad algebrou oktáv

Marie Provazníková

Ústav matematiky LDF MZLU

Zemědělská 1, 613 00 Brno

provazni@mendelu.cz

Abstrakt. Příspěvek porovnává obvyklou a axiomatickou definici projektivní roviny a uvádí jejich souvislost. Stručně popisuje historii objevu projektivní roviny nad oktávami a důvod, proč tuto rovinu nelze vyjádřit obvyklým způsobem, jako např. projektivní roviny nad tělesem reálných a komplexních čísel. Projektivní rovina nad oktávami se proto zavádí pomocí projektorů.

Klíčová slova: Projektivní geometrie, projektivní rovina, oktávy, projektor.

1 Úvod

Projektivní prostor dimenze n nad polem \mathbb{K} obvykle definujeme jako množinu všech jednorozměrných podprostorů $(n+1)$ -rozměrného vektorového prostoru nad polem \mathbb{K} . Projektivní prostor nad polem \mathbb{K} budeme značit $\mathbb{K}P^n$.

Bodu X z projektivního prostoru $\mathbb{K}P^n$ pak přiřadíme homogenní souřadnice (x_0, x_1, \dots, x_n) . Přitom platí, že

$$(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = (x_0, x_1, \dots, x_n) \text{ pro } 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}.$$

Přímka v projektivním prostoru $\mathbb{K}P^n$ pak odpovídá dvoudimenzionálnímu podprostoru vektorového prostoru \mathbb{K}^{n+1} .

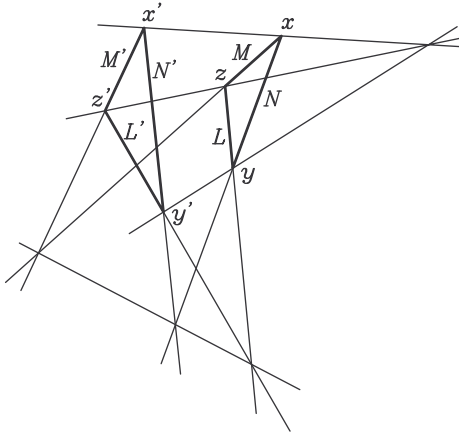
Projektivní prostor však můžeme definovat i axiomaticky. Projektivní prostor je množina bodů splňující

- pro každé dva různé body p, q existuje jediná přímka pq jdoucí oběma body p i q ,
- na každé přímce leží alespoň tři body,
- pro čtyři různé body a, b, c, d takové, že přímky ab a cd se protínají, platí, že se protínají i přímky ac a bd .

Tento přístup se tedy neopírá o konstrukci nad vektorovým prostorem \mathbb{K}^{n+1} a je oblíben v oblasti konečných geometrií a v kombinatorice.

Zajímavá je otázka, zda každý projektivní prostor můžeme vyjádřit ve tvaru $\mathbb{K}P^n$ pro nějaké pole \mathbb{K} . Je známo, že ano, ale pouze pro $n > 2$, u projektivních rovin je situace složitější. Projektivní rovina se dá popsat pomocí vektorového prostoru \mathbb{K}^3 pouze tehdy, když splňuje *Desarguesovu větu*. (Trojúhelník budeme chápat jako trojici bodů, které neleží na jedné přímce.)

Věta (Desarguesova věta). *Nechť xyz , $x'y'z'$ jsou dva trojúhelníky. Strany každého trojúhelníka určují tři přímky LMN , $L'M'N'$. Jestliže se přímky xx' , yy' , zz' protnou v jednom bodě, pak průsečíky LL' , MM' , NN' leží na jediné přímce.*



Obrázek 1: Desarguesova věta

Desarguesova věta je automaticky splněna pro projektivní prostory dimenze ≥ 3 , ale ne pro projektivní roviny. Projektivní rovina, která větu splňuje se nazývá *Desargueovská*. Příkladem projektivní roviny, která není Desarguesovská, je Fanova rovina. Užitím oktáv se dá zkonstruovat také nedesarquesovská projektivní rovina, nazýváme ji projektivní rovina nad oktávami a značíme $\mathbb{O}P^2$. Objevila ji německá matematická Ruth Moufang (1905–1977) v roce 1933.

Ruth Moufang navázala na výzkum Davida Hilberta (1862–1943) v projektivní geometrii. Hilbertova práce v geometrii měla na výstavbu euklidovské geometrie zásadní význam. Systematické studium axiomů rovinné geometrie ho vedlo k návrhu 21 axiomů, jež podrobně analyzoval. Později se zjistilo, že jeden z těchto 21 axiomů je nadbytečný, nicméně Hilbertova práce byla významná v tom, že budovala geometrii na formálním axiomatickém základě, a také tím přispěla k axiomatizaci matematiky.

Hilbert v roce 1901 ukázal, že podmnožina axiomů rovinné geometrie (v podstatě incidenčních axiomů) společně s Desarguesovou větou umožňuje vytvořit projektivní roviny, jejíž prvky lze popsat pomocí nekomutativního tělesa.

O 29 let později, v roce 1930, dokázal tvrzení, že nahrazením Desarguesovy věty Pappovou incidenční větou dostaneme projektivní rovinu, jejíž prvky lze popsat pomocí pole.

Ruth Moufang je známá především pro svou práci na neasociativních algebraických strukturách včetně Moufang loops, které jsou po ní pojmenované. Její největší přínos v projektivní geometrii je postaven právě na práci Davida Hilberta. Sestrojila projektivní rovinu tak, že opět použila incidenční axiomy rovinné geometrie, ale Desarguesovu větu nahradila větou o úplném čtyřrohu. Dostala projektivní rovinu, jejíž prvky lze popsat právě jen pomocí alternativní algebry s dělením.

2 Projektivní rovina nad oktávami

Algebra oktáv \mathbb{O} je osmidimenzionální algebra s dělením s bází

$$\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle.$$

Její prvky jsou čísla tvaru

$$\alpha = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k + x_4l + x_5il + x_6jl + x_7kl.$$

Sčítání dvou oktáv definujeme po složkách a jejich násobení je dáno multiplikativní tabulkou pro prvky báze

	1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>il</i>	<i>jl</i>	<i>kl</i>
1	1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>il</i>	<i>jl</i>	<i>kl</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	-1	<i>k</i>	- <i>j</i>	<i>il</i>	- <i>l</i>	- <i>kl</i>	<i>jl</i>
<i>j</i>	<i>j</i>	- <i>k</i>	-1	<i>i</i>	<i>jl</i>	<i>kl</i>	- <i>l</i>	- <i>il</i>
<i>k</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	- <i>i</i>	-1	<i>kl</i>	- <i>jl</i>	<i>il</i>	- <i>l</i>
<i>l</i>	<i>l</i>	- <i>il</i>	- <i>jl</i>	- <i>kl</i>	-1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>il</i>	<i>il</i>	<i>l</i>	- <i>kl</i>	<i>jl</i>	- <i>i</i>	-1	- <i>k</i>	<i>j</i>
<i>jl</i>	<i>jl</i>	<i>kl</i>	<i>l</i>	- <i>il</i>	- <i>j</i>	<i>k</i>	-1	- <i>i</i>
<i>kl</i>	<i>kl</i>	- <i>jl</i>	<i>il</i>	<i>l</i>	- <i>k</i>	- <i>j</i>	<i>i</i>	-1

Body reálné projektivní roviny jsou určeny nenulovými trojicemi (x_0, x_1, x_2) reálných čísel takovými, že

$$(x_0, x_1, x_2) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

Stejně definice se dá použít i pro projektivní rovinu nad komplexními čísly a nad kvaterniony, ale ne pro projektivní rovinu nad oktávami, protože algebra oktáv není asociativní. Pak totiž není tranzitivní relace

$$\begin{aligned} (x_0, x_1, x_2) &= (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2), & \lambda \in \mathbb{O}, \lambda \neq 0, \\ (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) &= (\mu(\lambda x_0), \mu(\lambda x_1), \mu(\lambda x_2)), & \mu \in \mathbb{O}, \mu \neq 0, \\ (x_0, x_1, x_2) &\neq (\mu(\lambda x_0), \mu(\lambda x_1), \mu(\lambda x_2)). \end{aligned}$$

Vezměme například bod o homogenních souřadnicích (l, il, kl) , $\lambda = jl$, $\mu = il$. Platí

$$\begin{aligned}(l, il, kl) &= (jl \cdot l, jl \cdot il, jl \cdot kl) = (-j, k, -i), \\ (-j, k, -i) &= (il(-j), il \cdot k, il(-i)) = (kl, jl, -l),\end{aligned}$$

ale

$$(l, il, kl) \neq (kl, jl, -l),$$

protože neexistuje číslo $\nu \in \mathbb{O}$, že

$$\begin{aligned}kl &= \nu \cdot l, \\ jl &= \nu \cdot il, \\ -l &= \nu \cdot kl.\end{aligned}$$

Z první a poslední rovnice vychází totiž $\nu = k$, ale z druhé $\nu = -k$.

Existuje však alternativní definice, která splňuje definici dvoudimenzionálního projektivního prostoru, tedy projektivní roviny nad oktávami. Je to definice pomocí projektorů.

2.1 Projektivní rovina nad komplexními čísly pomocí projektorů

Jako motivaci pro projektivní rovinu nad oktávami si vezmeme komplexní projektivní rovinu $\mathbb{C}P^2$. (Adjektivum komplexní budeme v následujících úvahách vynechávat.) Prvek $\mathbb{C}P^2$ je jednorozměrný podprostor $L \subset \mathbb{C}^3$. S tímto jednorozměrným podprostorem můžeme svázat projektory $P: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ takové, že obraz $\text{im } P = L$. Pro každý projektor P platí

$$P^2 = P.$$

Projektorů s vlastností $\text{im } P = L$ je mnoho. My však máme možnost využít hermitovský skalární součin na \mathbb{C}^3 . K jednorozměrnému podprostoru L pak vezmeme jeho ortogonální doplněk L^\perp a použijeme jediný projektor P , který promítá \mathbb{C}^3 na L podél L^\perp . Tento projektor se obvykle nazývá ortogonální projektor. Symbolem P^* označíme jako obvykle příslušný konjugovaný operátor. Je známo, že P je ortogonální projektor právě tehdy, když platí $P^* = P$.

Celkem jsme tedy s jednorozměrným podprostorem $L \subset \mathbb{C}^3$ svázali právě jeden projektor P takový, že

$$P^2 = P, \quad P^* = P \text{ a } \text{im } P = L.$$

Připomeňme ještě, že operátor A splňující identitu $A^* = A$ se nazývá hermitovský.

Převedme předchozí úvahy do maticového tvaru. Nechť projektor P má maticové vyjádření

$$P = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}.$$

Protože P je hermitovský operátor, platí

$$a_{ji} = \bar{a}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Znamená to, že na diagonále matice jsou reálná čísla. Označíme-li $a_{11} = \xi_1$, $a_{22} = \xi_2$, $a_{33} = \xi_3$, $a_{23} = x_1$, $a_{31} = x_2$ a $a_{12} = x_3$ dostáváme matici

$$P = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Protože je matice P hermitovsky symetrická, pak je-li P projektor, je automaticky ortogonální. Tím se tedy dále nebudeme zabývat. Je-li P projektor, je splněna identita $P^2 = P$. Z této podmínky dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_1^2 &= |x_2|^2 + |x_3|^2, & \xi_2 - \xi_2^2 &= |x_3|^2 + |x_1|^2, & \xi_3 - \xi_3^2 &= |x_1|^2 + |x_2|^2 \\ (1 - \xi_1 - \xi_2)\bar{x}_3 &= x_1x_2, & (1 - \xi_1 - \xi_3)\bar{x}_2 &= x_3x_1, & (1 - \xi_2 - \xi_3)\bar{x}_1 &= x_2x_3. \end{aligned}$$

Odsud výpočtem dostáváme

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1.$$

Dá se ukázat i naopak, že je-li P projektor s vlastností $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$, pak $\dim \operatorname{im} P = 1$.

Celkem tedy platí, že P je ortogonální projektor dimenze 1 právě tehdy, když platí

$$P = P^*, \quad P = P^2, \quad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1.$$

2.2 Sestojení $\mathbb{O}P^2$

Projektivní rovinu nad oktávami můžeme nyní vytvořit pomocí projektorů analogicky. $\mathbb{O}P^2$ tvoří všechny matice tvaru

$$P = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

kde ξ_1, ξ_2, ξ_3 jsou reálná čísla a x_1, x_2, x_3 jsou oktávy, takové, že jsou splněny vlastnosti

$$P = P^2, \quad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1.$$

Na množině všech hermitovsky symetrických matic nad \mathbb{O} můžeme definovat součin

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX).$$

Množina všech hermitovských matic nad \mathbb{O} společně s tímto součinem tvoří tzv. Jordanovu algebru.

Pro pevné $X \in \mathbb{O}P^2$ je pak přímka v projektivní rovině množina

$$p = \{Y \in \mathbb{O}P^2; X \circ Y = 0\}.$$

3 Využití

Pomocí algebry oktáv lze snadno popsat vyňaté Lieovy grupy. Například grupa G_2 je grupa automorfismů algebry oktáv, grupa F_4 je izomorfní grupě izometrií projektivní roviny nad algebrou oktáv, a grupu E_6 můžeme popsat jako grupu kolineací $\mathbb{O}P^2$. Projektivní rovina oktáv se také využívá v kvantové mechanice.

Literatura

- [1] J. C. Baez: *The Octonions*, Bulletin of the American Mathematical Society. **39**: 145-205, 200
- [2] J. H. Conway, D. A. Smith: *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic and symmetry*, A. K. Peters, Natick, Massachusetts (Canada), 2003. ISBN 1-56881-134-9
- [3] Karel Havlíček: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL Praha, 1956
- [4] The MacTutor History of Mathematics archive: *Indexes of Biographies*, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BiogIndex.html>, 20.7.2007

Některá specifika výuky deskriptivní geometrie na oboru Architektura pozemních staveb

Jana Puchýřová

*Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně
email: puchyrova.j@fce.vutbr.cz*

Abstrakt. Příspěvek seznamuje stručně s obsahovou náplní předmětu a zaměřuje se na doplnění specifických estetických pojmů a znalostí se vztahem ke geometrii, které jsou užitečné při studiu tohoto oboru. Zmínka bude o geometrickém schématu kompozice, proporcích předmětů a dobrých poměrech vzdáleností mezi předměty, estetické poměry rozměrů objektů, osvětlení jako prostředek zvýšení plastičnosti obrazu

Klíčová slova: Předpokládané znalosti, anotace předmětu, osvětlení, technické osvětlení, rotační plochy, šroubové plochy, zborčené plochy, axonometrie, kosouhlé promítání, lineární perspektiva, estetické proporce, zlatý řez, kompozice.

1 Základní informace o předmětu

Předpokládané znalosti (testované u přijímací zkoušky): kuželoščky, jejich konstrukce, ohniskové vlastnosti (věty o tečnách). Afinita a kolineace v rovině a v prostoru. Kolmé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny – průměty bodů, přímek a rovin; úlohy polohové a metrické; třetí průmětna. Elementární tělesa – hranoly, jehlany, válce, kužele, koule – jejich sdružené průměty, průniky těchto těles s rovinou nebo přímkou.

Anotace předmětu: Osvětlení. Rotační plochy. Kolmá axonometrie. Kosouhlé promítání. Lineární perspektiva, základy fotogrammetrie. Šroubovice, rozvinutelná plocha šroubová, pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha. Zborčené kvadriky a některé zborčené plochy vyšších stupňů. Teoretické řešení střech. Úvod do topografických ploch.

Deskriptivní geometrie jako věda o **zobrazování** trojrozměrných objektů na rovinu (resp. na roviny či plochu) učí nejen přesné konstrukce vedoucí k sestrojení průmětu objektu v konkrétní zobrazovací metodě, ale současně buduje a rozvíjí jak **prostorovou představivost**, tak **estetický grafický projev**. Vzhledem k tomu, že na **nový obor** (od šk. r. 2005/06) **Architektura pozemních staveb** jsou přijímáni uchazeči výtvarně nadaní (absolvovali talentovou zkoušku) je dobré vždy, kdy je to možné, jejich **estetické citění podporovat**. V nabitém programu učiva se mohou podat jen krátké informace o konstrukcích majících vztah k estetice. Samostatné grafické **práce** studentů by měly více vyhovovat **estetickým kritériím**, než je tomu u studentů ostatních bakalářských oborů, kde často rezignujeme jen na věcnou správnost.

Kurz studenti absolvují v **prvním semestru** s dotací **2 hod. přednáška** a **2 hod. cvičení**.

2 Některé estetické pojmy vztahené k obsahu předmětu

Úvodní přednášky jsou věnovány **teorii osvětlení**. Jsou zde zopakovány principy rovnoběžného promítání a dány do souvislosti pojmy směr promítání a směr světla, průmět bodu a stín bodu na rovinu, tzv. skutečný obrys tělesa a mez vlastního stínu tělesa, tzv. zdánlivý obrys tělesa (průmět tělesa) a mez stínu vrženého tělesem na rovinu (na průmětnu), viditelná část objektu a osvětlená část objektu. Je zaveden pojem **technického osvětlení** a je sestrojeno technické osvětlení jednotlivých elementární těles. Stín vržený geometrickým útvarem na jiný objekt je řešen **metodou křížování stínů** a zpětných paprsků. V Mongeově promítání jsou řešeny příklady konstrukce stínu vrženého přímku na elementární těleso a osvětlení tohoto tělesa.

Světlo hraje ve výtvarném díle významnou roli. Znázornění osvětlených ploch a stínů zvyšuje plastičnost obrazu objektu, pomáhá k lepšímu prostorovému vjemu (k lepší představě zobrazeného objektu). Podle tvaru stínu můžeme někdy rozlišit od sebe různé objekty, které mají shodné průměty. Tedy stín hraje roli dalšího průmětu zobrazovaného objektu.

Rotační plochy jsou zobrazovány také v Mongeově promítání. Po zavedení pojmů rovnoběžka, meridián, hlavní meridián a tečná rovina v bodě plochy se řeší sestrojení řezu plochy danou rovinou (příp. světelnou rovinou). Následuje technické osvětlení rotační plochy (většinou jen na nárysnu), použití Piletovy roviny.

Při zadání rotační plochy hlavním meridiánem složeným z kruhových oblouků je dobré se zmínit o **estetickém spojení kruhových oblouků** (viz. K. Drábek, F. Harant, O. Stelzer: Deskriptivní geometrie II, str. 100).

Kurz pokračuje dalšími promítacími metodami – **kolmá axonometrie, kosouhlé promítání a lineární perspektiva**. Tato promítání jsou často používána pro svou názornost. Např. **zastavovací studie** se vypracovávají ve vojenské perspektivě, případně v perspektivě či izometrii. V těchto studiích jde především o získání představy o seskupení hmot a jejich osvětlení, volí se menší měřítko a objekty se zjednodušují (např. vyznačí se jednotlivá podlaží bez zakreslení oken a jiných detailů).

Do perspektivního obrazu architektonického návrhu je zvykem **dokreslit také okolí** zobrazovaného objektu, dát tím uvažovanému prostoru charakter a míru vztahenou k velikosti člověka. Zakresluje se tzv. štafážní prvky, které by měly být všeobecně dobře známé (dopravní prostředky, postavy, stromy,..) a jejich velikosti by měly být odvozeny z lidské postavy. Při osvětlení v perspektivě můžeme zvolit směr vržených stínů (a tím i jejich přiměřenou délku)

Dále je v obsahu kurzu **šroubovice**, rozvinutelná **plocha šroubová**, šroubový konoid a některé **zborčené plochy** (hyperbolický paraboloid, jednodílný hyperboloid, konoidy, Montpellierský oblouk, Marseillský oblouk) a jejich zobrazení v Mongeově promítání, v kolmé axonometrii a v kosouhlém promítání.

Závěr kurzu je věnován **teoretickému řešení střech** a základním pojmům o **topografických plochách**.

2.1 O proporcích

Kompoziční schéma se opírá o základní geometrické útvary, (tj. trojúhelník, čtverec, kružnice, pravidelné mnohoúhelníky, koule, kvádr atd.) rozvržené podle citu. V kompozičním řešení je důležité dbát na **proporce** objektů, tj. na dobré (estetické) poměry rozměrů objektu, ale i na dobré poměry vzdáleností mezi objekty.

Estetické poměry rozměrů jsou:

Harmonie čtverce je poměr délky strany čtverce k délce jeho úhlopříčky. Je to poměr $1 : \sqrt{2}$, v tomto poměru jsou rozměry papíru formátu A, dále je používán u předmětů běžné potřeby jako stůl, skřín, venkovské stavby,... Malíři ho nazvali „formát krajiny“. Předměty s rozměry v tomto poměru působí dojemem solidnosti, stálosti až těžkopádnosti

Zlatý řez je poměr strany pravidelného pětiúhelníka ke straně pěticípé hvězdy do něho vepsané. Tento poměr byl od nejstarších dob **považován za nejkrásnější**. Číslo 5 nazval Pythagoras číslem ozdoby, ornamentu.

Úsečka je rozdělena na dvě nestejně dlouhé části v poměru zlatého řezu, když platí: délka a menší části (tzv. minor) se má k délce b větší části (tzv. maior), jako délka větší části b ku délce celé úsečky $(a + b)$.

Je-li $b / a = 1,61803$, pak $b / a = (a + b) / b$, čili $b / a = 1 + a / b$. Označíme-li $b / a = x$, pak platí rovnice $x^2 = x + 1$ s kořeny $x_1 = 1,61803$, $x_2 = -0,61803...$

Rozdělí-li se maior opět zlatým řezem, pak vzniklý maior se rovná předchozímu minoru.

Dobře esteticky působí tendence **zachování podobnosti** (např. při dalším členění plochy či prostoru) a tendence **proporcionálního růstu**. Tato vlastnost má i psychologický význam, vytváří dojem stálosti, objekt si ve svém vývoji zůstává podobný. Zákonitost harmonického růstu je graficky možné vyjádřit gnomonem. **Gnomon** je geometrická figura (útvary), která, je-li postavena s druhou figurou vytvoří celek podobný původní figurě.

Mezi proporcemi (rozměry) objektu bývá často používán vztah násobku určité společné jednotky – **modulu**. Le Corbusier zformuloval vyměřovací systém, který se opírá o dva faktory, zlatý řez a míry člověka.

2.2 O kompozici

Symetrická kompozice **vyjadřuje klid**, asymetrická **dynamiku**. Asymetrické umístění jednoho bodu (či útvaru) z rámce symetrického uspořádání ostatních bodů (či útvarů) vyjadřuje **výlučnost** a výtvarný význam.

Poměry plošných obrazců je možné **dojmově korigovat členěním plochy** základního obrazce. Vertikálním členěním dojmově zvyšujeme a zužujeme, horizontálním členěním se plocha zdánlivě snižuje a rozšiřuje. Rovinné obrazce

se dělí úhlopříčkami, středními příčkami, atd.. Přitom se určují **hlavní nebo vedlejší body kompozice**. Lze říci, že čím více kompozičních linií bodem prochází, tím je tento bod v kompozici význačnější.

Pocit stability (rovnováhy) nám dávají přímkami svislé a vodorovné. Pocit jistoty a stability je výraznější u linie svislé, odtud její časté užití jako osy souměrnosti. Šikmé linie rovnováhu ruší. Obnovit ji je nutné jednou nebo několika liniemi opačného směru.

Pro výraznější členění je možné použít **rytmického střídání prvků**.

3 Závěr

Obzvláště v oblasti architektonického návrhu či průmyslového návrhu (design) jsou obsah a forma dvě stránky, kterým musí autor věnovat pozornost. Forma je vždy v nějakém vztahu ke geometrii, ať už ve vlastnostech užitých tvarů, nebo ve vztahu k užití projekci. Obsahový záměr je řízen intuicí, invencí a fantazií. Při snaze úspěšně realizovat obsahový záměr díla je užití geometrie složka pomocná, ale nutná. Racionální stránka tvůrčího procesu je v těchto oborech nezbytná, neboť výroba je třeba v předstihu určit pracovní postup podle daných možností techniky a technologie. Na jednu stranu nemohou vypočitatelnost a přesné geometrické konstrukce nahradit nedostatek talentu, na druhou stranu je možné užitím poznatků z geometrie dosáhnout přesvědčivé míry výtvarné dokonalosti.

Přesnost a jasnost tvaru jsou nezbytnými znaky **pro vytvoření dokonalého výrobku či stavby. Předpokladem tohoto výsledku je užití geometrie již od počátku návrhu.**

Poděkování

Pro kurz AA02 vznikly v rámci řešení grantu "Podpora realizace nové struktury a modulární skladby studijních programů VUT v Brně" tyto studijní opory, které naleznete na stránkách <http://math.fce.vutbr.cz>

J. Puchýřová, J. Bulantová, K. Prudilová, L. Zrůstová: Úlohy v kosoúhlém promítání

J. Puchýřová, J. Bulantová, K. Prudilová, L. Zrůstová: Úlohy o přímkových plochách

H. Šafářová: Teoretické řešení střech

J. Šafařík: Technické osvětlení

Literatura

- [1] F.Crhák, Z. Kostka: Výtvarná geometrie, SNP Praha 1967
- [2] B.Puchýř: Sadovnická technika, I.díl, část 2, SPN Praha, 1966.

Chosen subjects of exercises from geometry realized in process of engineers' education on Faculty of Environmental Engineering and Land Surveying at the Agricultural University of Cracow

Adam Rużyczka

*Dept. of Land Reclamation and Environment Development, Fac. of Environmental Engineering and Land Surveying, Agricultural University of Cracow, Poland
email: rruzycz@cyf-kr.edu.pl*

Abstract. This is a paper of chosen classes performed within subject named Descriptive Geometry and Engineer's graphics for first-year students of Environmental Engineering and Land Surveying and Cartography, Faculty of Environmental Engineering and Land Surveying at the Agricultural University of Cracow. They were developed by author in order to present geometry applications in engineers' practice, and obtain highest effectiveness of education in relation to reduced time of classes (hours of exercises).

Key words: Descriptive Geometry, Engineer's Graphics

1 Introduction

This is a paper of chosen classes performed within subject named Descriptive Geometry and Engineer's graphics for first-year students of Environmental Engineering and Land Surveying and Cartography, Faculty of Environmental Engineering and Land Surveying at the Agricultural University of Cracow. Classes include axonometry, Monge's Descriptive Geometry orthogonal projections, and perspective. They were developed by author in order to present geometry applications in engineers' practice, and obtain highest effectiveness of education in relation to reduced time of classes (hours of exercises).

2 Chosen subjects of exercises from geometry and Engineer's graphics

Students receive exercise subjects, usually individual data in the form of already started drafts, and they solve those problems using knowledge obtained during lectures. Form of lectures was also modified and adapted to their reduced number. Therefore, it is a computer presentation of construction performed step-by-step. Furthermore, students receive reprints of subsequent drafts for copying, usually one week before lecture, so they could take notes with respect to hints on their copies.

Chosen subjects of exercises:

1. In the flat ground, design a reservoir with horizontal, rectangular bottom limited by dykes surrounding the bottom when crown's ordinate is 1.2 m higher than bottom's ordinate. Width of dyke's crown is 1.5 m, and the slopes' tilt is 1:1.5. Reservoir is surrounded by a ditch 0.4 m wide (on the bottom), and 0.7 m deep when compared with the dyke. There is a road leading to the reservoir, tilted by 10% and 3 m wide. Delimit ground works concerning banks and excavations and sketch sectional views in 1:100/200 scale (Fig. 1).
2. Sketch St. Andrew's cross in perspective geometry (axometry) when dimensions of component elements are given (Fig. 2).
3. Measure buildings presented in the pictures, which have orthogonal walls. Longitude of one wall section is given (Fig. 3).
4. Describe visibility of two infiltrating regular tetrahedrons with parallel bases. Visibility of one edge is given (Fig. 4).
5. Describe visibility of three circumscribed (tangential) hoops, orthogonal to each other, when visibility of one edge is given (Fig. 5).
6. Design bicycle route in children's playground (Fig. 6). The route should consist of straight fragments, circular arches, connected tangentially. Do geometric constructions of connections between lines and circles when different elements are given (either the radius of connection arch, its beginning or end, or its center).

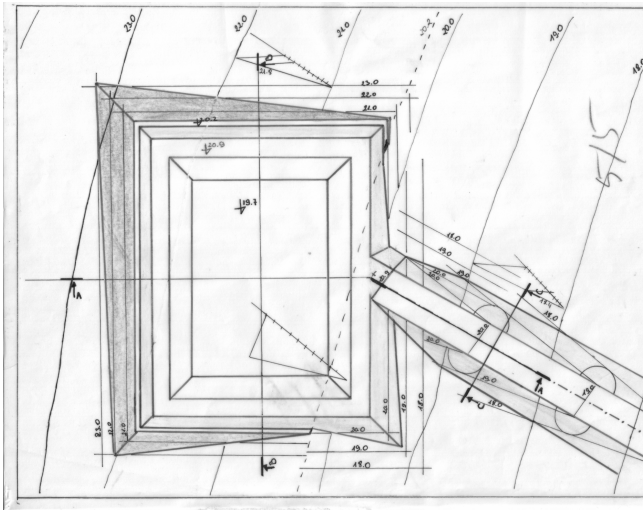


Fig. 1: Reservoir with horizontal, rectangular bottom (student's draft)

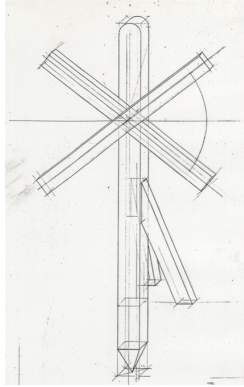


Fig. 2: St. Andrew's cross (axonometry)

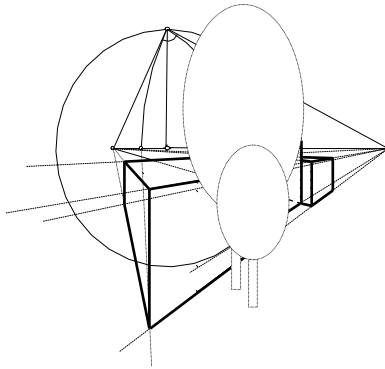


Fig. 3: Buildings

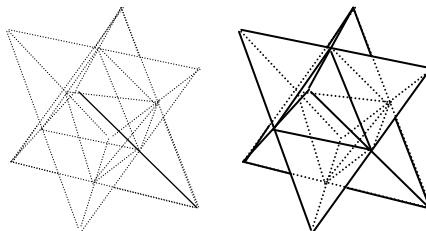


Fig. 4: Two infiltrating regular tetrahedrons with parallel bases

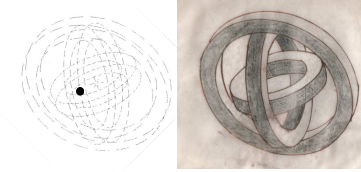


Fig. 5: Three circumscribed (tangential) hoops

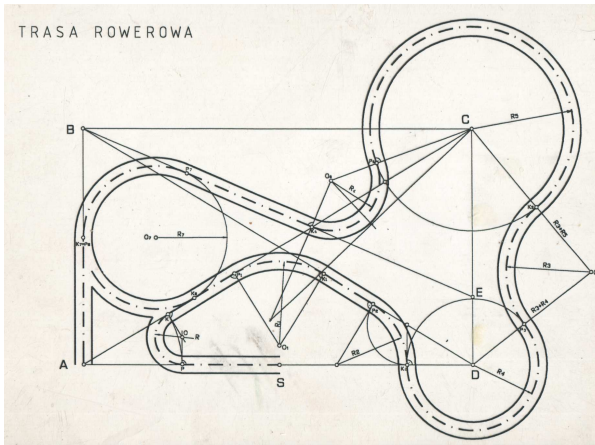


Fig. 5: Three circumscribed (tangential) hoops

3 Conclusion

Gradually reduced number of hours of descriptive geometry and engineer's graphics pose new challenges for teachers. Fortunately, educational experience is assisted by computer techniques, which allow teachers to manage new problems well.

References

- [1] Rużyczka A: *Spatial imagination among students commencing the course of descriptive geometry in a technical studies*. Journal for Geometry and Graphics Volume 7 (2003) Vien No. 2, s.247-252
- [2] Rużyczka A.: Using Microsoft PowerPoint programme to teach Descriptive Geometry. Geometry & Computer Graphic. VSB-Technicka Univerzitetu Ostyrawa. Sbornik prispevku GCG 2004.

Tvorba studijních materiálů za podpory ESF

Jan Šafařík – Hana Šafařová

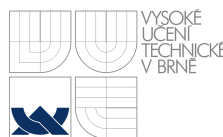
*Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně
Žitkova 17, 602 00 Brno, Česká republika
email: safarik.j@fce.vutbr.cz, safarova.h@fce.vutbr.cz*

Abstrakt. Příspěvek podává informace o projektu Modernizace výuky na Fakultě stavební VUT v Brně v rámci bakalářských a magisterských studijních programů, speciálně o jeho dílčí části – vyrovnávacím kurzu z deskriptivní geometrie – řešené na domovském pracovišti autorů příspěvku.

Klíčová slova: ESF, MŠMT, deskriptivní geometrie, vyrovnávací kurz

1 Úvod

V minulém roce jsme vás informovali o zahájení práce členů ústavu matematiky FAST na projektu podporovaném Evropským sociálním fondem. V realizaci, která byla rozvržena na dva roky, právě skončil 15 měsíc. Chtěli bychom vás informovat o postupujících pracích na tomto projektu:



**Modernizace výuky na Fakultě stavební VUT v Brně
v rámci bakalářských a magisterských studijních programů
CZ.04.1.03/3.2.15.2/0292**

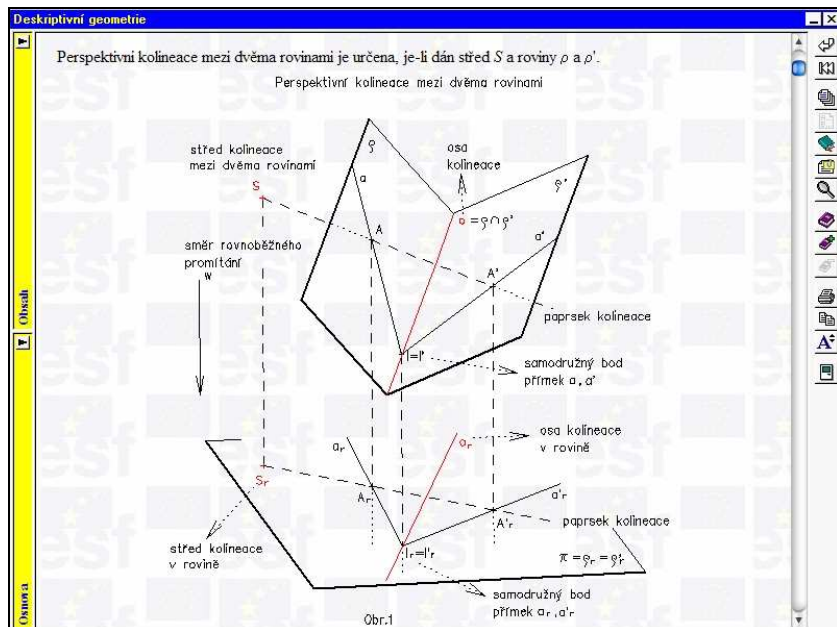
Cílem projektu je připravit studijní opory pro „Vyrovnávací kurz deskriptivní geometrie“.

2 Vyrovnávací kurz deskriptivní geometrie

Cílem je sjednocení znalostí studentů prvních ročníků přicházejících na fakultu z různých typů středních škol. Kurz umožní studentům chybějící znalosti získat a poskytne jim stejné startovní znalosti pro další studium.

Kurz vznikne modernizací stávajícího nepovinného předmětu prvního ročníku zimního semestru: *BA91 základy deskriptivní geometrie*, který je ukončen zápočtem bez kreditové dotace. Předmět by měl být opět nepovinný, ale doporučený všem studentům s absencí výuky deskriptivní geometrie na střední škole. Měl by být ukončen zápočtem, domníváme se, že by bylo vhodné, aby předmět měl alespoň minimální kredit.

Cílovou skupinou pro kurz jsou především studenti, kteří přicházejí ze středních škol, kde není výuka deskriptivní geometrie. Neumí zacházet s pravítkem a kružítkem, nemají elementární znalosti vlastností kuželoseček potřebné k jejich vyrýsování. Často mají velmi slabé základy stereometrie atd.

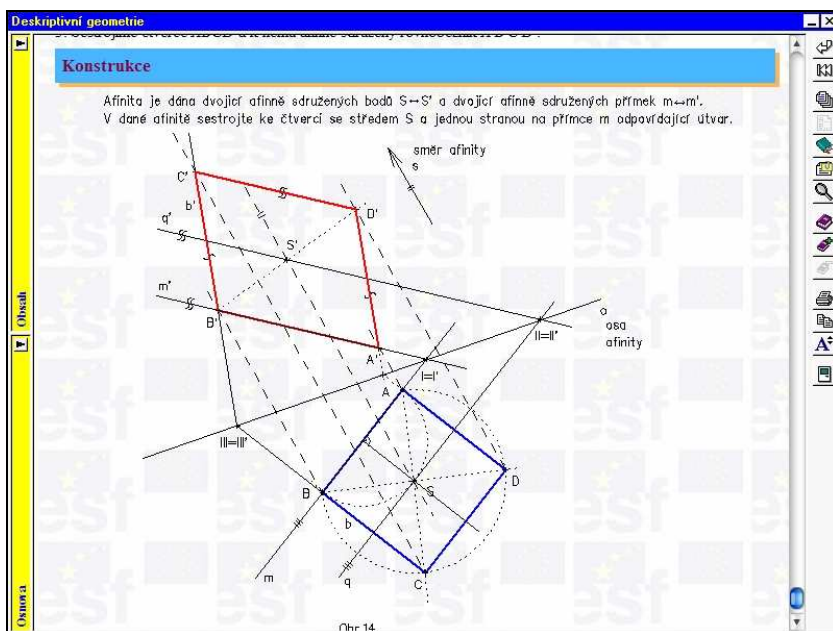


Obr. 1: Ukázka z připravované studijní opory

3 Základní tématické celky

- základy technického kreslení
- geometrie na přímce
 - poměr tří bodů na přímce
 - dvojpoměr čtyř bodů na přímce
- geometrie v rovině
 - konstrukce trojúhelníků
 - kružnice (tečna, mocnost bodu ke kružnici, chordála...)
 - konstrukce pravidelných n -úhelníků
 - konstrukce odmocnin
 - konstrukce elipsy
- planimetrie
 - identita
 - shodnost
 - osová souměrnost

- středová souměrnost
- otáčení
- posunutí
- podobnost
 - stejnoolehlost
- stereometrie
 - jednoduchá tělesa a plochy
- afinita a kolineace
- základy rovnoběžného promítání



Obr. 2: Ukázka z připravované studijní opory

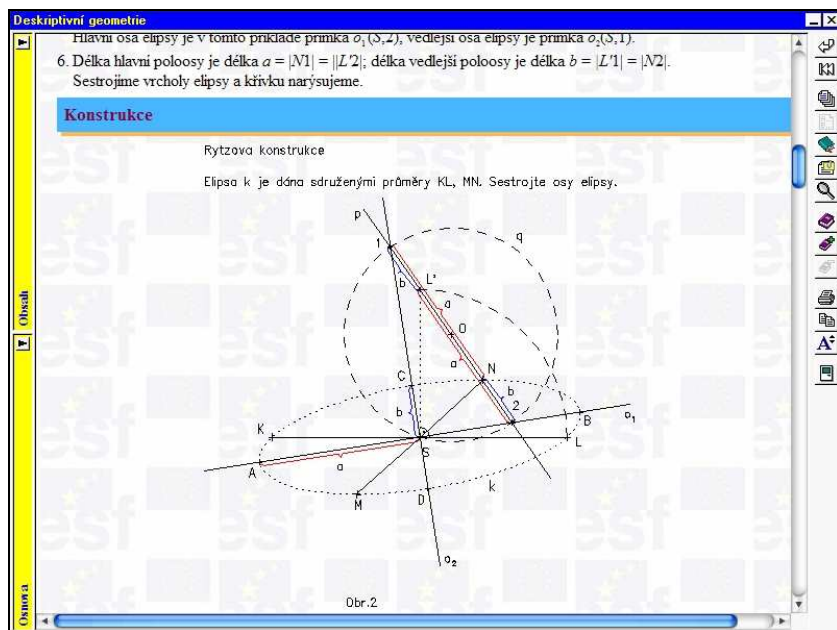
4 Popis předpokládaného řešení projektu ESF 2006/2008

Příklady jsou zpracovávány formou slide-show na CD-ROM. Práce na této části projektu by měly být ukončeny 31. října 2007.

V průběhu těchto prací byl zveřejněn informační leták na internetu, připravena prezentace na den otevřených dveří FAST (únor 2007 a únor 2008), a veletrh Gaudeámus. V rámci projektu jsme spolupracovali na přípravě 5. matematického workshopu v roce 2006 a 6. matematického workshopu v roce 2007.

Ve stávajícím kurzu BA91, který proběhl ve školním roce 2006/2007 jsme otestovali vhodnost některých příkladů a práci s nově vytvořenými pomůckami. K danému kurzu se přistupovalo jako k přípravnému. Vyhodnocení tohoto

pilotního kurzu proběhlo až po skončení letního semestru školního roku 2006/2007. Podle jeho výsledků došlo ke korekci textů připravovaného kurzu.



Obr. 3: Ukázka z připravované studijní opory

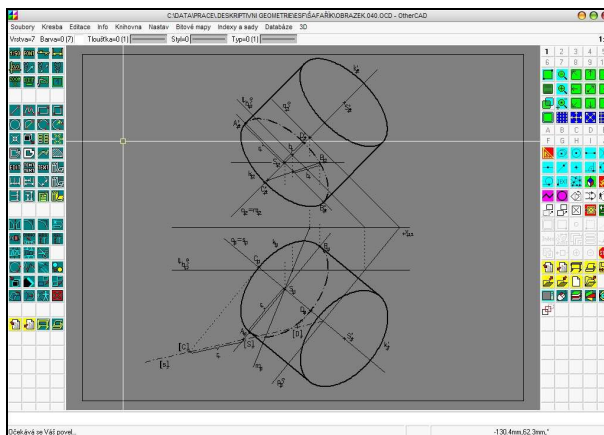
Inovovaný kurz proběhne poprvé ve školním roce 2007/2008 prvního ročníku zimního semestru.

V lednu až červnu 2008 proběhne závěrečné vyhodnocení a příprava veškerých materiálů k následnému používání v dalších kurzech a příprava k uzavření projektu.

5 Použité technologie

5.1 OtherCAD

Rozfázované konstrukce jsou narýsovány v programu OtherCAD firmy ALPRO, s.r.o. a na CD je použita jeho minimální verze doplněná o slideshow od Petra Slepíčky.

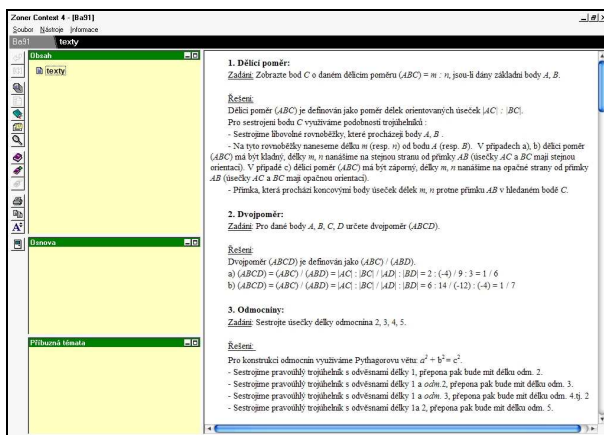


Obr. 4: OtherCAD

Systémy OtherCAD umožňují práci s vektorovou i rastrovou grafikou a jsou určeny i pro rozsáhlé aplikace. Jedná se o modulární grafický systém, který neklade příliš velké nároky na počítač ani na kapacitu disku. K základnímu systému lze doplnit velké množství profesních knihoven a nadstaveb.

5.2 Zoner CONTEXT

Jako celkové prostředí je opět zvolen Zoner CONTEXT firmy ECON info, s.r.o., který umožňuje tvorbu multimediálních CD-ROMů. Tento systém je univerzální a výkonný autorský nástroj pro elektronické publikování. Má velmi dobře vyřešeno zpracovávání textu a jeho vlastní fulltextová technologie zvládne jakkoliv obsáhlé publikace.



Obr. 5: Zoner CONTEXT

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory projektu *Modernizace výuky na Fakultě stavební VUT v Brně v rámci bakalářských a magisterských studijních programů* (registrační číslo: CZ.04.1.03/3.2.15.2/0292), který je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v rámci operačního programu “Rozvoj lidských zdrojů”, opatření 3.3

Literatura

- [1] H. Šafářová: *Projekt “Modernizace výuky na Fakultě stavební VUT v Brně v rámci bakalářských a magisterských studijních programů”*. 5. matematický workshop, FAST VUT, Brno, 2006.
- [2] J. Šafařík, H. Šafářová, J. Puchýřová: *Nové trendy výuky deskriptivní geometrie v bakalářském studiu na Fakultě stavební VUT v Brně*, 26. konference o geometrii a počítačové grafice, Nové Město na Moravě, 11. – 15. září 2006.
- [3] V. Tryhuk, H. Šafářová, K. Prudilová, O. Příbyl, J. Šafařík: *Vyrovňovací kurzy z matematiky a deskriptivní geometrie na FAST VUT v Brně*, připravovaný článek na konferenci 6. matematický workshop, FAST VUT, Brno, 2007.

Polární reciprocita

Arnošt Šarman

*Katedra informatiky, FEI VŠB Ostrava
Tř. 17. listopadu 15, Ostrava-Poruba
arnost.sarman@vsb.cz*

Abstrakt. Příspěvek vznikl na základě mé spolupráce s pracovníky, kteří se zabývají aplikací vlastností při tváření kovů. Zde jde o poměry citlivosti anisotropních vlastností materiálů napětí při tváření kovů. Vlastnosti funkcí, které vyjadřovaly jednotlivé vztahy, byly vyjádřeny dvojpoměrem, kde modelovými křivkami byly kuželosečky (elipsy). Tyto kuželosečky jsou ve vztahu polární reciprocity, vzhledem ke základní - řídicí kuželosečce. Tato řídicí kuželosečka váže reciproční kuželosečky vztahem dvojpoměru.

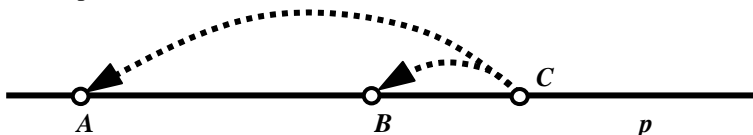
Klíčová slova: reciprocita, polarita, kuželosečka, poměr, dvojpoměr.

1 Úvod

Začátkem příspěvku uvedu některé pojmy projektivní geometrie, které je nutno připomenout pro pochopení obsahu příspěvku. Pro úplné pochopení obsahu příspěvku je nutno seznámit se s dalšími pojmy projektivní geometrie, jako je Pascalova a Brianchonova věta, konstrukce kuželoseček na základě těchto vět a pod. V příspěvku se nebudu zabývat podrobným popisem konstrukce kuželoseček. Spoléhám na znalosti těchto projektivních vlastností kuželoseček u těch, kteří budou tímto příspěvkem osloveni. Tyto pojmy jsou velice dobře popsány v literatuře [1]. Uvedená literatura je vhodná pro řešení problémů projektivní geometrie pomocí počítačů. V následujících bodech jsou popsány zásadní pojmy, které jsou podstatou polární reciprocity kuželoseček.

2 Poměr, dvojpoměr.

Dělicí poměr.



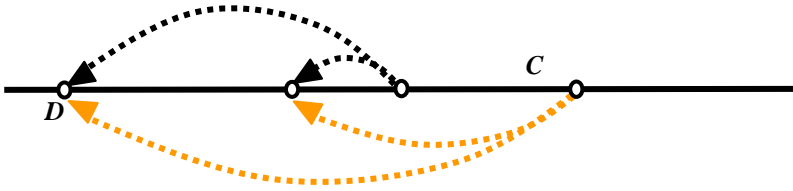
Obr. 1

Poměr úseček AC/BC nazveme *dělicím poměrem* tří bodů A, B, C a budeme značit

$$(ABC): \lambda_C = (ABC) = \pm AC/BC,$$

kde znaménko - platí, je-li bod C vnitřním bodem úsečky AB .

Dvojpoměr.



Obr. 2

Dvoj
poměr bodů $(ABCD)$... podíl poměrů (ABC) a (ABD) . Body A a B jsou
základní.

Body C a D jsou dělicí. (Vlastní.)

$$\text{Platí tedy: } (ABC): \lambda_C = (ABC) = \pm \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}},$$

$$(ABD): \lambda_D = (ABD) = \pm \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}},$$

$$\sigma = (ABCD) = \frac{\lambda_C}{\lambda_D}, \quad \sigma = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}}.$$

Vztah má smysl pro vlastní dělicí body C a D .

3 Pól, polára kuželosečky.

V rovině mějme danou libovolnou jednoduchou kuželosečku k a libovolný bod P , který není bodem kuželosečky k . Bodem P proložíme libovolnou přímku a protínající kuželosečku v bodech A a B . Na přímce a sestrojíme bod X pro který bude platit $(A B P X) = -1$. Je to čtvrtý harmonický bod čtveřiny bodů A, B, P, X . Sestrojíme-li další body, obdobně jako bod X , potom:

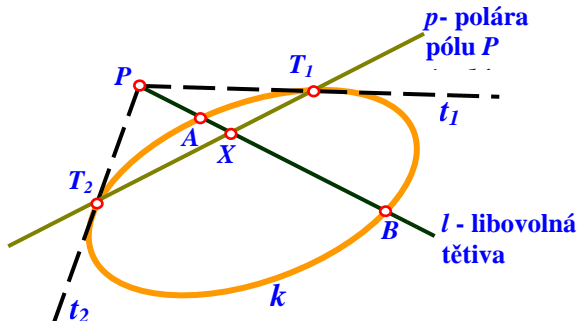
Všechny body X leží na jedné přímce p , kterou nazveme *polárou* bodu P vzhledem ke kuželosečce k .

Průsečíky U a V poláry p a kuželosečky k jsou dotykové body tečen u a v , které procházejí bodem P .

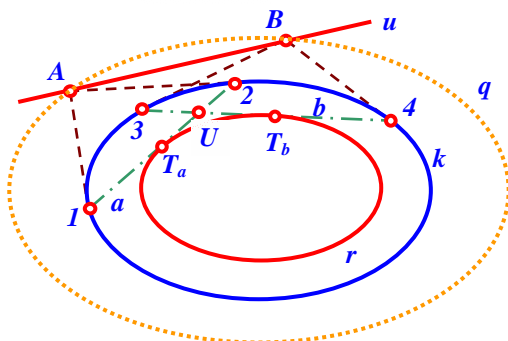
4 Polární reciprocita kuželoseček.

Na obrázku 3 je uvedena konstrukce jedné poláry p bodu P kuželosečky k . Jestliže sestrojíme k zadané kuželosečce k další poláry k bodům, které náležejí libovolné kuželosečce, potom tyto poláry obalují **reciproční křivku** vzhledem k zadané křivce k . Křivku k uvažujeme jako řídící prvek recipročních křivek q a

r . Na následujícím obrázku 4 je naznačena konstrukce dvou bodů A, B , které jsou body kuželosečky q . Bodům A, B odpovídají poláry a a b .

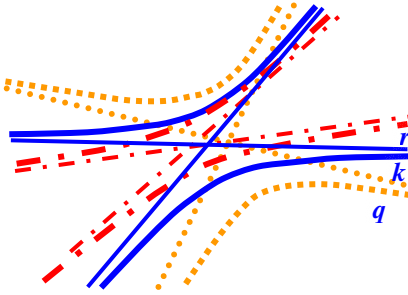


Obr. 3

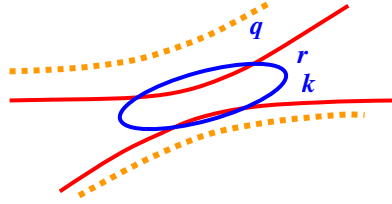


Obr. 4

Poláru p bodu P kuželosečky k lze tedy konstruovat jako spojnicí bodů U a V dotyku tečen u a v vedených bodem P ke kuželosečce k . Snadno lze ukázat, že jestliže sestrojíme poláru bodu P , který je bodem kuželosečky k , potom polárou p tohoto bodu je tečna kuželosečky a pól P je dotykovým bodem poláry p a kuželosečky k . Na příkladu na obrázku 3 jsou tečny t_1 a t_2 , které jsou polárami bodů T_1 a T_2 elipsy k . Pro úplnost je nutno uvést, že poláry vnitřních bodů kuželosečky nemají s kuželosečkou společné body. Na obrázku 4 je polára u bodu U kuželosečky k . Sestrojíme další tři poláry k bodům kuželosečky q . Získáme pět polár - tečen kuželosečky r . Tato kuželosečka r je **reciproční polární kuželosečkou** ke kuželosečce q vzhledem ke kuželosečce k . Na následujícím obrázku 5 je varianta, kdy kuželosečky jsou hyperboly. Na obrázku 6 je řídicí kuželosečkou elipsa k a reciproční kuželosečky jsou hyperboly q a r .



Obr. 5



Obr. 6

Kuželosečky z daných tečen jsou konstruovány pomocí věty Pascalovy resp. Brianchonovy a pomocí dalších vlastností kuželoseček. Na obrázku 5 je řídicí křivkou hyperbola. V technické praxi však je více požívána elipsa, protože elipsa aproximuje (dle technických zkušeností) lépe tvary materiálu při válcování profilů. Z hlediska projektivní geometrie však tato "zkušenost" není podstatná. Není účelem tohoto příspěvku rozebírat všechny varianty možnosti konstrukce kuželoseček z daných prvků. To lze najít v literatuře, která se danou problematikou zabývá.

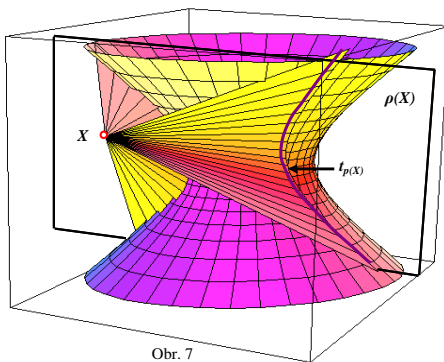
5 Využití v počítačové grafice a v technické praxi.

Polárních vlastnosti lze využít i v prostoru 3D. Na příklad při středovém osvětlení kvadrik. Mez vlastního stínu při středovém osvětlení kvadriky je vlastně rovinný řez polární roviny středu osvětlení a uvedené kvadriky. Polární rovinu určíme třemi body, které jsou čtvrté harmonické body na třech různých přímkách procházející středem osvětlení vzhledem k průsečíkům těchto přímek a dané kvadriky.

Na obrázku 7 je zobrazena situace v prostoru 3D. Je zadán jednodílný hyperboloid q a bod X , který není bodem plochy. Jestliže bodem X vedeme libovolnou přímku, která protne plochu jednodílného hyperboloidu q , potom množina čtvrtých harmonických bodů k bodu X vzhledem k průsečíkům plochy tvoří polární rovinu $\rho(X)$. Rovina $\rho(X)$ protne plochu q v křivce $t_{\rho(X)}$, která je dotykovou křivkou těch přímek procházející bodem X , které se plochy q dotýkají.

V technické praxi našla uplatnění polární reciprocita při tváření materiálu. Popisovaná polární reciprocita je nejen diskutovaným problémem geometrické algebry a projektivní geometrie [odkazů řada (120) na Google „polar reciprocity“], ale našla uplatnění i vědách. S pojmem polární reciprocita lze setkat i použít při studiu seismiky a pod.

Byla také použita při formulaci tzv. duálního potenciálu k potenciálu plastickému v teorii nelineární pružnosti a plasticity [5] [HILL 1987] a odtud pak k vytvoření tzv. modelu polární reciprocit jako nástroje k hodnocení tvařitelnosti za tepla [4] [RAJAGOPALACHARY, KUTUMBARO 1989] a [7] [POVÝŠIL, 2007]. Teorie polární reciprocit byla využita k návrhu vztahů pro výpočet křivek plasticity anizotropních materiálů [8] [VAN HOUTTE 1994].



Obr. 7

V těchto materiálech je využívána polární reciprocita kuželseček. Zde však podstatnou záležitostí jsou normály v odpovídajících bodech. Tyto normály zpravidla znázorňují fyzikální veličiny, které jsou vázány dvojnásobkem. Je tedy téměř vždy hledána závislost čtvrté veličiny příslušného dvojnásobku zbyvajících tří veličin. Na obrázku 8 jsou znázorněny normály n_Q a n_R v bodech Q a R , které náležejí recipročním elipsám q a r přes řídící elipsu k . Elipsa k vyjadřuje funkční závislost křivek q a r danou dvojnásobkem. Pro praktické výpočty tečen a normál kuželseček však dosavadní tradiční postupy konstrukcí těchto prvků nejsou příliš vhodné. Postupy výpočtu v odkazech [1], [2] resp. [3] jsou daleko vhodnější.

6 Závěr

Proč jsem se rozhodl vytvořit tento příspěvek? Vedlo mne k tomu několik důvodů. Jeden je, že jsem chtěl ukázat aplikaci projektivní geometrie jednak v praxi a taktéž pro případné využití v počítačové grafice. Není účelem na tomto místě uvádět problémy, které lze s pomocí projektivní geometrie řešit. Zájemci o se mohou s těmito setkat v uvedené literatuře. [4], [5], [6], [7] a [8]. Hlavní důvod, který je vhodné na tomto místě připomenout jsou odkazy [1], [2] a [3] tohoto příspěvku. Jde v podstatě o učebnice projektivní geometrie zpracované pro použití řešení problémů projektivní geometrie pomocí počítače. Domnívám se, že učitelům v současné době, kteří se projektivní geometrií zabývají by tyto učebnice velice pomohly. Zvláště těm učitelům, kteří se snaží vhodným způsobem při řešení geometrických úloh využívat výpočetní techniky. Jde totiž mimo jiné o to, že použitím výpočetní techniky umožňuje zapojit více oblastí pro řešení a nejsme odkázáni pouze na znalosti z geometrie resp. matematických disciplín. Právě aplikace různých částí matematických

disciplin algebry, diferenciální geometrie a pod. umožňuje využít principů projektivní geometrie v dalších vědních oborech.

Také není účelem tohoto příspěvku polemizovat ohledně způsobů konstrukcí tečen, normál a dalších prvků ke kuželosečkám. Způsoby výpočtu a zápisu závislosti uvedené v učebnicích [1], [2] a [3] nemusí být vždy vhodné, ale je třeba o této formě vědět. Mne osobně velice mrzí, že jsem se o těchto studijních materiálech dověděl až nyní a to díky aplikacím v hutním a strojním oboru.

Literatura

- [1] Winroth, H., *Dynamic Projective Geometry*, TRITA-NA-99/01, ISSN 0348-2953, ISRN KTH/NA/R--99/01--SE, Dissertation, The Computational Vision and Active Perception Laboratory, Dept. of Numerical Analysis and Computing Science, KTH, Stockholm, March 1999.
- [2] Hestenes, D. & Ziegler, R., *Projective Geometry with Clifford Algebra*, Acta Applicandae Mathematicae 23, pp. 25-63, 1991.
- [3] Naeve, A. & Svensson, L., *Geo-Metric-Affine-Projective Unification*, Sommer (ed.), *Geometric Computations with Clifford Algebra*, Chapter 5, pp.99-119, Springer, 2000.
- [4] T.Rajagopalachary and V.V. Kutumbarao, *Polar Reciprocity Model for Hot Workability of Metals, Metals Materials and Processes*, 1989, Vol. 1, pp 57 – 66
- [5] Hill, R., Mech, J., *Constitutive Dual Potentials in Classical Plasticity*, Phys. Solids, Vol. 35, No. 1, pp 23 – 33, 1987
- [6] Beausir, B., Tóth, L., S., Neale, K., W., *Role of Strain-rate Sensitivity in The Crystal Plasticity of Hexagonal Structures*, International Journal of Plasticity, Québec, Canada 2006
- [7] POVÝŠIL, J. *Hodnocení tvařitelnosti zpevňujících materiálů s využitím dynamického materiálového modelu*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava. Fakulta strojní. Katedra mechanické technologie. 2007. 79. s. Vedoucí disertační práce prof. Ing. Jiří Petruželka, CSc
- [8] P. Van Houte.: *Application of Plasti Potentials to Strain Rate Sensitive and Insensitive Anisotropic Materials*, International Journal of Plasticity, Vol. 10, No. 7, pp. 719-748, 1994.

Řešeno za podpory projektu ESF OP RLZ CZ.04.1.03./3.2.15.2/0326

Hyperbolické mozaiky na počítači

Ivo Serba

KPGD FI MU, Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic

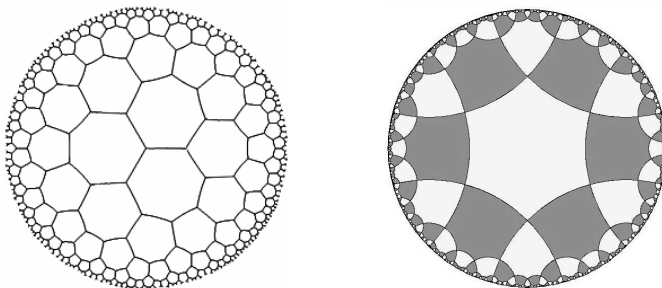
serba@fi.muni.cz

Abstrakt. Příspěvek je věnován počítačové konstrukci hyperbolických mozaik

Klíčová slova: Hyperbolické mozaiky, Poincareho disk, grupa symetrií, fundamentální oblast

Na konferenci GCG 2006 byl přednesen příspěvek o hyperbolických mozaikách [1], kde autorka na příkladu populární hyperbolické mozaiky H. S. M. Coxetera z roku 1958 naznačila konstrukci této mozaiky transformacemi fundamentálního pravoúhlého trojúhelníka. V závěru byla zmíněna konstrukce hyperbolické mozaiky pomocí pravítka a kružítka, jak ji popsál Ch. Gootman-Straus [3].

Protože jsou hyperbolické mozaiky geometricky zajímavé a esteticky nosné, jsou tématem předmětu Výtvarná informatika. Příspěvek je zkrácenou verzí přednášky - zobecňuje pojem hyperbolické fundamentální oblasti a uvádí potřebné matematické vztahy pro počítačovou konstrukci.

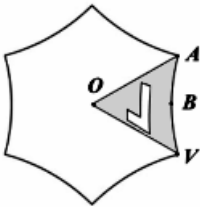


Obr. 1. Hyperbolická mozaika $\{7, 3\}$ a hyperbolická mozaika $\{6, 4\}$.

Hyperbolické regulární dláždění budeme realizovat v prostoru Poincarého disku [1], [4]. Tento model hyperbolického prostoru je pro naše účely vhodný, protože jeho geodetiky jsou kruhové oblouky a zobrazení je konformní. Hyperbolické mozaiky tak budou „podobné“ těm, které známe z euklidovského prostoru - viz obr. 1., kde levá mozaika má v centru disku společný vrchol, pravá naopak dlaždicí. Hyperbolickou regulární mozaiku označíme stejně jako v Euklidově prostoru Schläfliho symbolem $\{p, q\}$. Dláždění je vytvořeno pravidelnými (regulárními) p -úhelníky, kterých se q stýká v každém vrcholu. Víme, že mozaika $\{p, q\}$ je hyperbolická tehdy, když $(p-2) \cdot (q-2) > 4$.

Vzor, který mozaika vytvoří, bude stejně jako v euklidovském prostoru záležet na zvolené grupě symetrií G , s příslušnými generátory transformací S , podle které budeme k sobě dlaždice přikládat tak, abychom pokryli disk bez mezer a překrytí. Stejně jako v euklidovském prostoru můžeme dekomponovat motiv dlaždice a určit její fundamentální oblast [5]. Připomeňme, že fundamentální oblast F diskretní grupy symetrií G je oblast, která po aplikaci transformací $S \in G$ pokryje celou rovinu disku. I hyperbolická fundamentální oblast bude nejčastěji trojúhelníková (resp. čtyřúhelníková) „subdlaždice“, jak ji známe z euklidovského dláždění.

Konstrukci hyperbolické mozaiky s centrální dlaždicí, která je opřena o transformace fundamentálních oblastí, si ukážeme na vzorovém příkladě. Nejdříve však zdůrazněme, že potřebné geometrické entity vyjádříme jako funkce hlavních parametrů p a q [6]. Zvolme mozaiku $\{6, 4\}$ s centrální dlaždicí a s fundamentální oblastí podle obr. 2.:



O je střed Poincarého disku o souřadnicích $[0,0]$

B je střed hrany centrální dlaždice

V je vrchol centrální dlaždice
- polohovací fundamentální vrchol

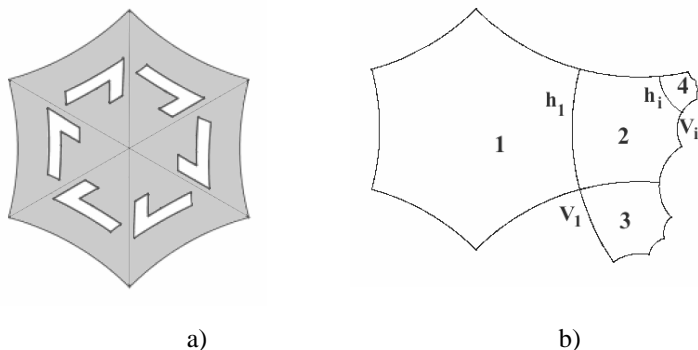
Obr. 2. Příklad šestiúhelníkové centrální dlaždice a její fundamentální oblasti odpovídající grupě symetrií $G = [p, q]^+$ - notace podle [6], [7].

Transformace fundamentálních oblastí uskutečníme (implementujeme) v homogenních souřadnicích pomocí známého násobení transformačními maticemi ($P' = T_{3 \times 3} P$). Potřebujeme matice pro zrcadlení M a matice pro otáčení R . Prvky transformačních matic vyjádříme opět pomocí parametrů p a q .

Tvorba mozaiky je dvoukroková: Nejdříve je grupě příslušející fundamentální oblast (obr. 3.) opakovaně transformována uvnitř centrálního p -úhelníka, až jej vyplní. Pak je dlaždice replikována (transformována) do sousedních oblastí (vrstev), aby došlo k pokrytí „celého“ prostoru disku. Abychom mohli použít grafický vektorový výstup mozaiky a hrany dlaždic se nekreslily „přes sebe“, zvolíme speciální algoritmus vykreslování [7].

Ilustrujme na obr. 3. algoritmus vykreslování příkladové mozaiky $\{6, 4\}$ zapsané grupou $G = [6, 4]^+$. Pro vytvoření centrální dlaždice je motiv (část designu dlaždice) fundamentální oblasti, která je v základní poloze (viz obr. 2.), postupně otáčen kolem středu O o úhel $2\pi/p$ (transformace R_O). Po každé rotaci je množina transformovaných objektů přidávána do seznamu kreslených objektů centrálního p -úhelníka. Tak vytvoříme celý motiv – obr. 3. a).

Pokračujeme druhým krokem - vykreslováním první vrstvy dlaždic – viz. obr. 3. b. Začneme dlaždicemi sousedícími hranami s dlaždicí 1. Dlaždice 2 sousedí hranou h_1 s fundamentální oblastí dlaždice 1. (Poznamenejme, že sousedství fundamentální oblasti s novou dlaždicí je pro zvolený algoritmus nutné).

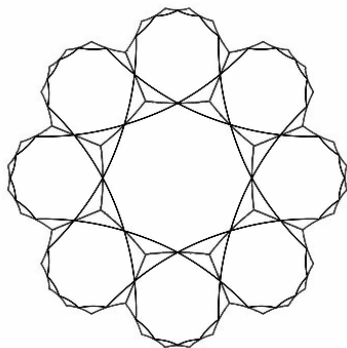


Obr. 3. Algoritmus vykreslení mozaiky

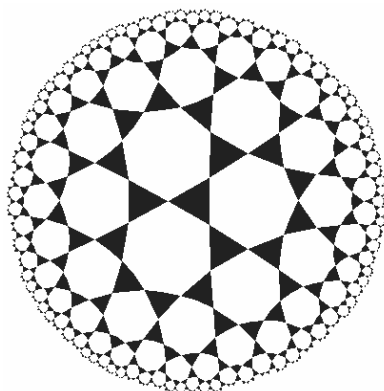
Abychom pomocí transformací grupy $[6,4]^+$ (která zná jen rotace - viz dodatek) dostali dlaždice z pozice 1 do pozice 2, otočíme ji kolem vrcholu V_1 o úhel $2\pi/q$ (transformace R_V). Protože se transformace vztahuje na celý seznam kreslených objektů, dostaneme obraz celé dlaždice 1, tedy dlaždice 2. Tuto operaci provedeme opakovaně kolem dlaždice 1, až vykreslíme všechny dlaždice 2. Pak otáčením kolem vrcholů V_1 o úhel $2\pi/q$ vykreslíme všechny dlaždice 3. Tím je hotova první vrstva a pokračujeme dále. Zdůrazněme, že důležitý vrchol V_1 zůstal na původním místě. Hranovým sousedem dlaždice 2 je dlaždice 4 z další vrstvy. Abychom mohli opakovat předešlý algoritmus (tj. transformace R_V), musíme nejprve fundamentální oblast dlaždice 2 přemístit do polohy, kdy bude sousedit hranou h_i s dlaždicí 3. To provedeme pomocí trojnásobného otočení dlaždice 2 o $2\pi/p$ kolem středu (transformace R_O). Fundamentální vrchol bude nyní v poloze V_i a můžeme pokračovat transformacemi R_V . Celý postup opakujeme až do vykreslení poslední žádané vrstvy. Z uvedeného je zřejmé, že fundamentální oblasti (resp. fundamentální vrcholy) mají polohovací význam. Pro jiné grupy symetrií je postup obdobný. Popsaný algoritmus, který je starý více jak dvacet let [7] není jediný. Byl však inovován a úspěšně použit v diplomové práci R. Charvátka [6]. Na síti najdeme další, zejména pro výuku vhodné programy ve formě „apletů“ s příloženými zdrojovými kódy [8], [9].

Spojíme-li v regulárním dláždění středy hran dlaždic, dostaneme nové dělení roviny disku, které nazveme kvaziregulární – obr. 4. Pro rozlišení

použijeme nové značení $quasi-\{n/k\}$, které říká, že dláždění je složeno z n -úhelníků a k -úhelníků, které se střídají kolem společného vrcholu. Na obr. 5. je zobrazeno kvaziregulární dláždění $quasi-\{7/3\}$.

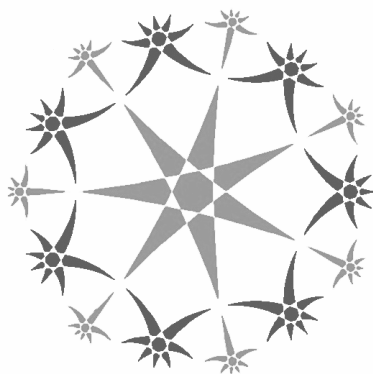


Obr. 4. Dělení $\{8,3\}$ a $quasi-\{8/3\}$.

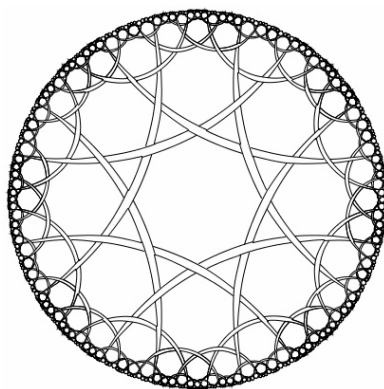


Obr. 5. Dláždění $quasi-\{3/7\}$.

Stejně jako u jiných mozaik je výtvarný efekt vzoru závislý na designu (motivu) dlaždice. Pro něj můžeme získat další pomocné geometrické entity. Například spojováním vrcholů p -úhelníka vzniknou zajímavé hvězdicové vzory. S počtem vrcholů centrálního p -úhelníka poroste i počet hvězdicových variací.



Obr. 6. Dláždění $[7,3]$ - $star7/2$.

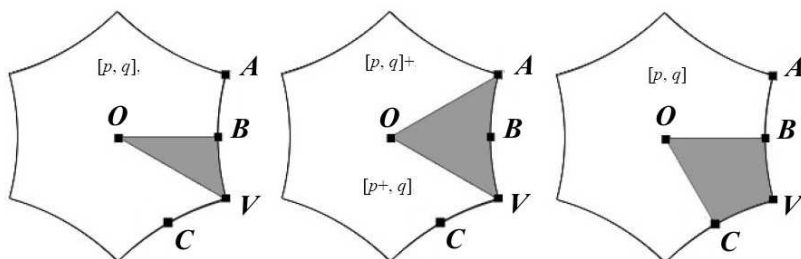


Obr. 7. Propletání $quasi-\{8/3\}$.

Na obr. 6. je zobrazen hvězdicový vzor. Další možnosti získáme například „ořezáním“ vrcholů p -úhelníků. Protože se u kvaziregulárních mozaik ve

vrcholech protínají jen dvě čáry, mohou být také základem konstrukce výtvarně efektních uzlů [12], viz obr.7. Všechny tyto jednoduché geometrické operace poskytují bohaté pomocné mřížoví pro vybarvování mozaik [10], [11]. Varieta hyperbolických mozaik je nekonečná.

Dodatek: Popis diskutovaných grup symetrií mozaik $\{p, q\}$:



Obr.A. Grupy symetrií a příslušné fundamentální oblasti - podle [7].

Grupa symetrií $[p, q]$ - Fundamentální oblast tvoří pravoúhlý hyperbolický trojúhelník OVB . Množinu generátorů grupy symetrií $[p, q]$ tvoří transformace: Zrcadlení podle hrany dlaždice (AV) , zrcadlení podle osy hrany (OB) , zrcadlení podle spojnice středu a vrcholu (OV) .

Grupa symetrií $[p, q]^+$ - Fundamentální oblast tvoří hyperbolický trojúhelník tvořený hranou dlaždice a spojnicemi jejích vrcholů se středem dlaždice (trojúhelník OVA). Množinu generátorů grupy symetrií $[p, q]^+$ tvoří transformace: Rotace řádu p kolem středu dlaždice o úhel $2\pi/p$ stupňů, rotace řádu q kolem vrcholu dlaždice o úhel $2\pi/q$ stupňů, rotace 2.řádu kolem středu hrany dlaždice o úhel $2\pi/2$.

Grupa symetrií $[p^+, q]$ - Fundamentální oblast tvoří opět hyperbolický trojúhelník tvořený hranou dlaždice a spojnicemi vrcholů se středem dlaždice (trojúhelník OVA). Množinu generátorů grupy symetrií $[p^+, q]$ tvoří transformace: Rotace řádu p kolem středu dlaždice o úhel $2\pi/p$ stupňů, zrcadlení podle hrany dlaždice (VA) . Aby se mozaika vykreslovala správně, musí být u této grupy symetrií q sudé.

Grupa symetrií $[p, q^+]$ - Fundamentální oblast je tvaru draka, tvoří ji dva malé pravoúhlé hyperbolické trojúhelníky přilehlé k téměř vrcholu dlaždice $(OCVB)$. Množinu generátorů grupy symetrií $[p, q^+]$ tvoří transformace: Zrcadlení podle osy hrany dlaždice (OB) , rotace řádu q kolem vrcholu dlaždice o úhel $2\pi/q$ stupňů. Aby se mozaika vykreslovala správně, musí být u této grupy symetrií počet hran dlaždice p sudý.

Literatura

- [1] Tihlaříková, M.: Tessellations in Hyperbolic plane In. Sborník 26.konference o geometrii a počítačové grafice, Nové Město na Mor., 2006, JČMF, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, ISBN 80-7040-902-9, pp. 253-258.
- [2] Dunham, D.: "Families of Escher Patterns," In Schattschneider, Doris, and Michele Emmer, editors, M. C. Escher's Legacy: A Centennial Celebration, Springer Verlag, 2003. ISBN 3-540-42458-X, pp. 286-296.
- [3] Chaim Goodman-Strauss: Compass and straightedge in the Poincaré disk, Amer. Math. Monthly 108, 2001, s. 38-49.
<http://comp.uark.edu/~strauss/papers/hypcomp.pdf>
- [4] Joshi, A.: http://www.geocities.com/alark_j/thesis/img17.htm
- [5] Serba, I. : Geometrie islámských hvězdicových vzorů, In. Sborník 26. konferenceo geometrii a počítačové grafice, Nové Město na Mor., 2006 JČMF, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, ISBN 80-7040-902-9, pp. 217-220.
- [6] Charvát, R.: Editor hyperbolických mozaik, diplomová práce, FIT, MU, 2005.
- [7] Dunham, D., Lindgren, J.: Creating repeating hyperbolic patterns, Computer graphics vol.15, num. 3 (august 1981), pp. 215-223.
- [8] Hatch, D.: Hyperbolic tessellations:
<http://www.hadron.org/~hatch/> Hyperbolic Tessellations
- [9] Joyce, D., E.: Poincare,
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/poincare.html>
- [10] Schwarzenberger, R.,L.,E.: Colour Symmetry, Bulletin of the London Mathematical Society 16 (1984), pp. 209-240.
- [11] Senechal, M.: Color Symetry, Computers & Mathematics with Applications, 16, 5-8, pp. 545-553.
- [12] Serba, I.: Geometrie a algoritmy uzlů, In: Sborník 21. konference o geometrii a počítačové grafice, Lednice na Moravě, 2001, JČMF, Mendelova univerzita v Brně, ISBN 80-7157-560-7, str. 124 – 129.

O warpingu v škole

Zuzana Študencová

*Department of Mathematics, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology
Radlinského 11, 813 68 Bratislava, Slovakia
studenc@math.sk*

Abstrakt. Warping (grafická deformácia rastrového obrazu spravidla s použitím počítača) sa javí ako *vhodná* motivačná úloha vo výučbe geometrie (i počítačovej grafiky). Načrtne niekoľko didaktických krokov ako tému predstaviť študentom.

Kľúčové slová: warping, rovinný raster obrazu, Bernštejnove polynómy, splajnová krivka, fázové stopy

1 Úvod

Grafický obraz (i foto) a jeho deformovaná podoba, to sú výjavy, s akými sa môžeme stretnúť azda denne. Na internete, v televízii, v novinách, v uliciach miest i malých viesok, nápisy, logá, reklamné pútače, karikatúry, na plotoch diela grafitov a tak podobne. Na niektorých témach rozpoznať, že myšlienka tvorby má geometrické črty. Blízke sú nám tie, čo majú genézu v lineárnych transformáciách (afinity, atď.). O nich sa v prvom slede žiak v škole dozvie (spravidla na hodinách geometrie). Zložitejšie útvary, animácia, rôzna manipulácia s výtvarmi, to už patrí do oblastí, kde sa vyžaduje trochu komplikovanejší výtvarný aparát. Ten je často firemným tajomstvom a aj keď nie, nemôže byť pre každú vekovú kategóriu vo vysokom štandarde dostupný.

Téma, ktorú tu navodzujem trochu asi predbieha vedomostiam študentov na školách niektorých stupňov. Nebráni to však inšpirácii k napodobovaniu a, čo môže byť ešte prospešnejšie, k záujmu o geometrickú podstatu takej činnosti. Tu, pravda, vhodne vstupuje do obrazu aj záujem učiteľa...

2 Warping rovinného rastra

S heslami warping a morfing (morphing) sú preplnené stránky na internete (odporúčame pozrieť). *Morfing* definujú autori ako spojitú množinu zobrazení¹. *Warping* je počítačová technika, kde nás zaujíma len vzor (originál) a jeho obraz ako produkt zobrazenia. Odtiaľ, nie úplne presne, môžeme povedať, že morfing je vzor plus množina jeho obrazov (produktov vo warpingu).

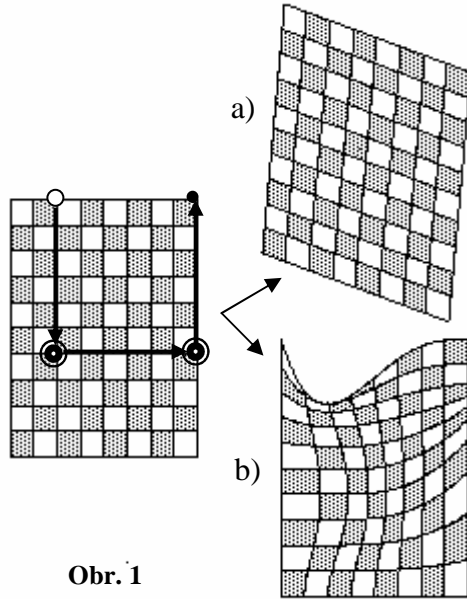
Zameriame sa na *warping rovinného rastra*. Jednoduchú deformáciou rastra cez warping môže sprostredkovať aj afinná transformácia. Na obr. 1a je afinita rovinného rastra zmenou polohy troch uzlových bodov rastra. ($\circ \rightarrow \bullet$) Použitie obrazov prostredníctvom takých transformácií (tiež projektívna a bilinéarna transformácia) je však dosť obmedzené – sú to tzv. *globálne*

¹ Pretože ale prakticky takéto zobrazenia robíme na počítači, kde je počet obrázkov konečný, mali by sme hovoriť o diskrétnej množine zobrazení.

zobrazenia určené pre celý definičný obor². Atraktívnejšie sú deformácie, ktorých pôsobnosť je *lokálna* (obr. 1b)³ (pritom u oboch (obr.1ab) sme špeciálne zadali zmenu polohy troch uzlových bodov, v druhom prípade cez transformáciu, ktorej výklad bude nasledovať).

Obvykle to robíme tak, že obrazec vložíme do pravouhlej súradnicovej sústavy a pokryjeme pravouhlým rastrom vhodnej hustoty. Obsah (farebnosť a pod.) pravouhlých elementov rastra prenáša príslušné zobrazenie do cieľového obrazu.

Základom našej metódy je bodová transformácia zobrazujúca pravouhlý raster $p(u,v)$ do Bézierovho (rovinného) rastra



Obr. 1

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{ij} B_{mi}(u) B_{nj}(v), \quad u, v \in \langle 0, 1 \rangle \quad (1)$$

kde $B_{mi}(u), B_{nj}(v)$ sú známe Bernštejnove polynómy⁴.

Program, ktorý je pripravený pre záujemcov konferencie (v jazyku Qbasic) sprostredkuje prakticky každú transformáciu.

Cieľové plošné elementy sú ohraňované hladkými krivkami. Závisí od rozhodnutia učiteľa do akej úrovne sprostredkuje túto tému žiakovi. (poznamenajme, že návrh splajnovej „hladkej“ krivky sk začína zadaním

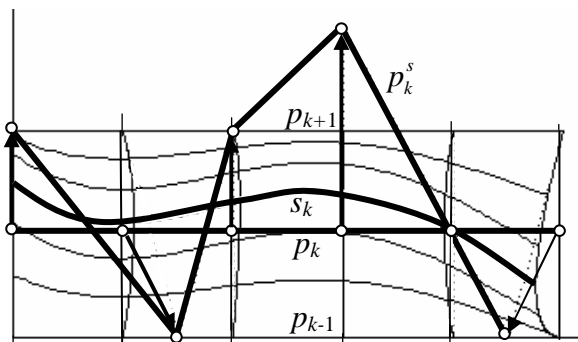
² Patria do výberu tzv. *jednosegmentových* metód transformácie obrazu.

³ Rozdiel od jednosegmentových metód, naša metóda patrí do tzv. *viacsegmentových* (zmena polohy niektorých prvkov pôsobí lokálne).

⁴ Бернштейн - v angl. prepise je často Bernstein

polygónu P_k^s , ktorého vrcholy sú obrazmi uzlových bodov na úsečke P_k rastra. Splajnová krivka s_k vznikne aproximáciou tohto polygóna čiary [3],[4],[5],[6].

Pripomeňme ešte, že polygón p_k^s definuje splajnovú krivku s_k v rovinnom rastrovi spolu s blízokým okolím (obr. 2), to zn. ovplyvní obidva systémy kriviek rastra v tomto okolí.



Obr. 2

Spomenuli sme, že grafické systémy ponúkajú rôzne pestré spôsoby deformácií a iných úprav obrázkov, ale ich vnútorná štruktúra je často skrytá za firemným tajomstvom. Poodhalenie tejto štruktúry či návrh na tvorbu „vlastnej“ deformácie je zaujímavý aj z didaktického hľadiska.

3 Warping ako učivo na školách

Téma warping (deformácia) sa spravidla v učive našich stredných či vysokých škôl teda neobjavuje.

Napriek istej náročnosti v kombinácii počítač a (spravidla nelineárne) zobrazenie stojí za úvahu si o tom pohovoriť.

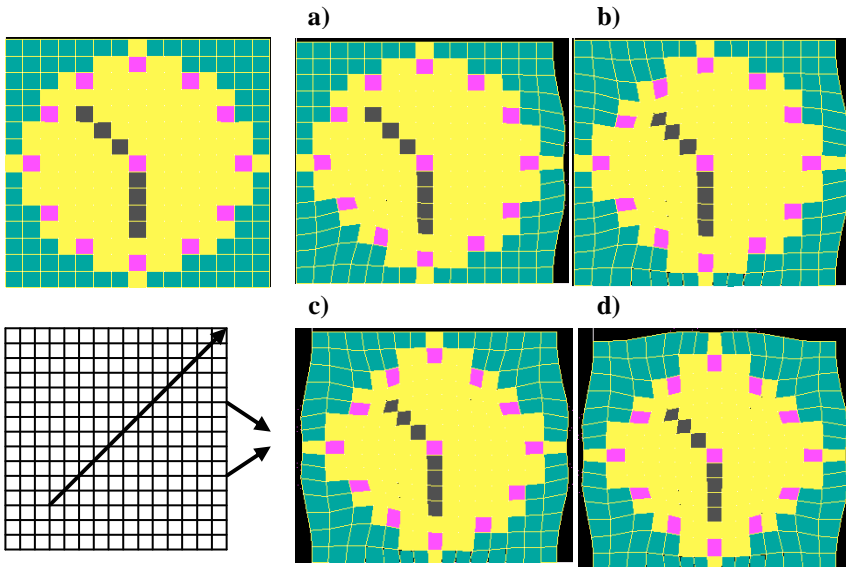
3.1 Príklad

Vybrali sme príklad, v ktorom je zobrazenie cez Bézierov raster (1).

Vstupným útvarom je rastrový obraz ručičkových hodín (obr. 3.). Počet elementov rastra s maticou (15, 15) udáva (v nejakom module) jeho rozmery.

Označme $(x_{k,l}, y_{k,l})$, $k = 0,1, \dots, m$, $l = 0,1, \dots, n$ vrchol uzla, ktorým prechádzajú úsečky p_k a p_l rastra, jedna rovnobežná s osou x , druhá s osou y . Zvolíme v rovine množinu bodov $\{\dots, (x'_{kl}, y'_{kl}), \dots\}$ s vlastnosťou:

$(x_{ij}, y_{ij}) \rightarrow (x'_{ij}, y'_{ij})$. Zobrazenie (1) potom transformuje daný raster $\mathbf{r}(u, v)$ do jeho obrazu $\mathbf{p}(u, v)$.

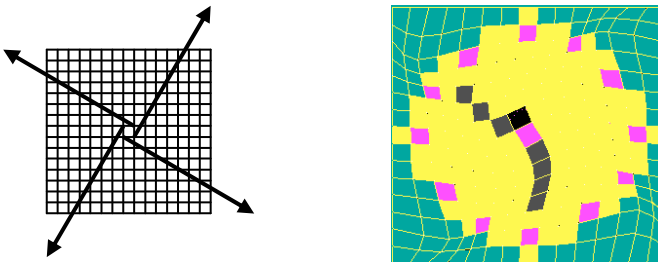


Obr. 3.

Konkrétne. Zvolili sme zobrazenie:

1. $(3, 3) \rightarrow (15, 15)$, $(15, 10) \rightarrow (18, 8)$, $(15, 5) \rightarrow (18, 7)$ (obr. 3a).
2. Pridali sme zobrazenie kolmo súmerné podľa strednej priečky štvorca rovnobežnej s osou x (postačilo zobrazit' $(3, 12) \rightarrow (15, 0)$ (obr. 3b)).
3. Na obr. 3c. je pridané zobrazenie kolmo súmerné podľa strednej priečky štvorca rovnobežnej s osou y .
4. Zadanie k obrazu 3d je zrejmé z postupu v predchádzajúcich prípadoch.

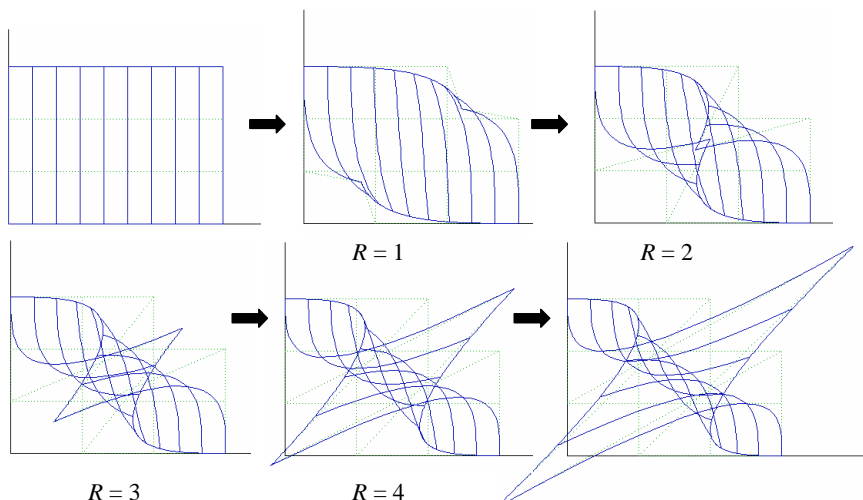
Na obr. 4 je warping zadaný obrazmi štyroch uzlov rastra.



Obr. 4. Ukážka inak vytvoreného warpingu.

4 Warping rozdelený na fázové stopy

Nech R je počet fáz medzi zadanými bodmi $\{V\}$ a finálnymi bodmi $\{V'\}$. Označme $\{V_i\}_R$ množinu aktuálnych bodov v i -tej fáze a aplikujeme na každú dvojicu $(\{V_i\}, \{V'_i\}_R)$ splajnovú deformáciu. Jej výsledkom je *fázová stopa* V'_i , $i \in R$. Množina útvarov, ktoré dostaneme transformáciou cez splajnové funkcie bude morfingom. Postupnosť polôh bodov $(V'_i)_R$, sled, je neobmedzená. Najjednoduchší prípad je, ak zvolíme fázové body na úsečke (a lineárne) medzi bodmi V a V' (obr. 5.). Sled môžeme voliť primerane aj „ručne“; sledom môže byť množina bodov na nejakej krivke a pod.



Obr. 5.

5 Záver

Ako užitočný doplnok ku konštrukcii warpingu na cvičeniach v škole môže (ako naznačuje obr. 5) tvoriť postupnosť fázových stôp v morfingu za sebou. Animáciu týchto krokov možno realizovať tou postupnosťou obrázkov na počítači alebo „listovaním“ zväzku obrázkov v tlačenej forme v papierovom bloku.

Chcem ešte pripomenúť, že warping nemusí byť len zábavou. Existujú aplikácie, ktorých význam v praxi je nesporný. Jednou z nich je napr. počítačová technológia rekonštrukcie poškodených máp v archívoch. Metódy rekonštrukcie katastrálnych máp možno nájsť napr. v literatúre [8], [9].

Pod'akovanie

Článok bol vypracovaný v rámci riešenia grantovej výskumnej úlohy VEGA 1/4026/07.

Literatúra

- [1] Študentová, Z.: *Warping rovinného rastra pomocou splajnu*, VIII. Vedecká konferencia s medzinárodnou účasťou Košice 2007
- [2] Zámožík, J., Szarková, Študentová, Z.: *Šlabikár počítačovej geometrie*, elektronická publikácia na CD, Trnava – Bratislava, ISBN 80-969494-4-6
- [3] Martiček, D.: *Matematické princípy grafických systémů*, nakl. Littera 2002
- [4] Velichová, D.: *Geometrické modelovanie*, Matematické základy STU v Bratislave 2003
- [5] Černý, J. – Kočandrlová, M.: *Konstruktivní geometrie*, Vyd. ČVUT, Praha 1998
- [6] Zámožík, J. a kol. : *Základy počítačovej grafiky*, geometrická problematika, STU v Bratislave 1999
- [7] www.wikipedia.org
- [8] Bohdal R.: *Picture Deformation Recovery of Cadastral Maps*. Proceedings of abstracts ISCAM 2007, April 20-21, 2007, Bratislava
- [9] Bohdal R.: *Comparison of Methods for Picture Deformation Recovery*. G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku, číslo 7, 2007, str. 23-34, Bratislava

Európske virtuálne laboratórium matematiky

Dagmar Szarková¹, Daniela Velichová²

*Katedra matematiky, Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovenská republika
¹dagmar.szarkova@stuba.sk, ²daniela.velichova@stuba.sk*

Abstrakt. Príspevok je informáciou o projekte EVLM v rámci programu Leonardo da Vinci, ktorého hlavným cieľom je vytvoriť sieť konzultačných centier matematiky na európskych univerzitách. Centrá budú zabezpečovať konzultácie z matematiky, vrátane geometrie, pre všetkých záujemcov z radov študentov, učiteľov a vedeckých pracovníkov prezenčne, aj formou e-learningu.

Kľúčové slová: e-learning, elektronické učebné texty, projekt EVLM

1 Úvod

Neustále rastúce požiadavky na všeobecné vedomosti študentov technických univerzít z prírodovedných predmetov a na zručnosti pri využívaní informačných a komunikačných technológií sú v ostrom kontraste s viditeľne klesajúcou vedomostnou úrovňou absolventov stredných škôl. Spomenutý vývoj má negatívny dopad na počty študentov zaujímajúcich sa o technické smery štúdia na univerzitách v celej Európe, na vysoký počet neúspešných študentov prvého ročníka štúdia a na celkovo neuspokojivé študijné výsledky. Mnohé vzdelávacie inštitúcie majú skúsenosti so zastavením uvedeného nežiaduceho vývoja mobilizáciou celého potenciálu výučbových metód a didaktických prostriedkov poskytovaných IKT, ktoré sú pre mladých ľudí atraktívnejšie ako tradičné metódy výučby. Na internete sa objavuje množstvo elektronických výučbových materiálov z rôznych oblastí, matematiku a geometriu nevynímajúc, vzniká preto akútna potreba zostaviť odborný katalóg dostupných kvalitných materiálov vhodných pre štúdium. Na základe týchto skutočností vznikla myšlienka nadnárodného európskeho projektu zameraného na šírenie informácií o existujúcich, a zároveň na vývoj nových základných elektronických učebných materiálov z rôznych oblastí matematiky v národných jazykoch a v angličtine.

2 Projekt EVLM

Cieľom navrhnutého projektu v programe Leonardo da Vinci je vytvorenie Európskeho virtuálneho laboratória matematiky – EVLM, operujúceho na nadnárodnej úrovni vo forme siete Národných centier matematiky umiestnených na partnerských inštitúciách a pracujúcich v rámci spoločnej štruktúry. EVLM bude slúžiť ako platforma pre rozširovanie relevantných informácií o virtuálnej databáze umožňujúca zdieľanie všetkých dostupných zdrojových materiálov a poskytujúca školenia o ich využívaní. EVLM portál je

voľne dostupný na internete, poskytuje priame prepojenia na Národné portály a elektronické fórum pre doručenie požiadaviek na odborné konzultácie a ich distribúciu na príslušné Národné portály, ako aj prepojenia na iné stránky s podobným obsahom. Národné centrá matematiky zabezpečujú odborné konzultácie v oblasti matematiky na národnej úrovni, cez národné komunikačné portály na lokálnych serveroch inštalovaných na partnerských inštitúciách.

EVLM poskytuje odborné konzultácie spoločnými kapacitami všetkých zúčastnených inštitúcií na požadovanej odbornej úrovni v anglickom jazyku alebo v relevantnom národnom jazyku. Informácie sú zdieľané vo forme virtuálnej databázy dostupných zdrojových materiálov v elektronickej forme, ako sú e-learningové edukačné moduly a kurzy, elektronické učebné texty a učebnice voľne dostupné na internete na oboch úrovniach – národnej aj nadnárodnej. Národné centrá matematiky slúžia študentom aj pedagógom, výskumným a vedeckým pracovníkom a poskytujú priestor pre vzájomnú spoluprácu záujmových skupín z rôznych krajín novou formou v rámci virtuálnej štruktúry siete partnerských organizácií v našom spoločnom Európskom vzdelávacom priestore.

The screenshot shows the EVLM Central portal website. The header includes the EVLM logo and the text "EUROPEAN VIRTUAL LABORATORY OF MATHEMATICS Central portal". Below the header, there are links to national portals with flags of various European countries. A navigation menu on the left lists categories like FACTS, PROBLEMS, and MODULES. The main content area provides information about the database and its services. At the bottom, there is a footer with the text "EVLM CENTRAL PORTAL HOSTED BY SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE" and a search bar.

Obr. 1: EVLM Centrálny portál

3 Záver

Navštívte EVLM portál [1], kde nájdete potrebné informácie, a pridajte sa k nám poskytnutím svojich edukačných materiálov voľne dostupných na webe.

Literatúra

- [1] <http://www.evml.stuba.sk>

Plochy 4. stupňa s trojnásobnou priamkou

Zuzana Tereňová

*Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Stavebná fakulta STU
Radlinského 11, 813 68 Bratislava
zuzana.terenova@stuba.sk*

Abstrakt. Článok sa zaoberá plochami 4. stupňa s trojnásobnou priamkou v P^3 nad algebricky uzavretým poľom a ich rozdelením do troch skupín podľa toho, koľko rovín incidentných s trojnásobnou priamkou pretína plochu iba v trojnásobnej priamke.

Kľúčové slová: projektívny priestor, algebrická plocha, singulárny bod, singulárna priamka.

1 Úvod

Kubické plochy s dvojnásobnou priamkou sú priamkové plochy. Skúmal ich napr. S. Abhyankar v práci [1]. Plochy rozdelil do štyroch skupín, z toho dve skupiny tvoria kužeľové plochy a dve skupiny nekužeľové plochy 3. stupňa.

Nekužeľové kubické plochy s dvojnásobnou priamkou skúmal aj B. Bydžovský v práci [2]. Rozlišuje dva typy kubických plôch s dvojnásobnou priamkou:

- PRVÝ TYP PRIAMKOVEJ KUBICKEJ PLOCHY

Tieto plochy sú charakteristické tým, že každá rovina incidentná s dvojnásobnou priamkou plochy pretína plochu ešte v ďalšej priamke.

- CAYLEYOVA PLOCHA

Pre tieto plochy platí, že existuje jedna rovina incidentná s dvojnásobnou priamkou plochy, ktorá pretína plochu iba v dvojnásobnej priamke.

V článku sa budeme zaoberať plochami 4. stupňa s trojnásobnou priamkou v 3-rozmernom projektívnom priestore nad algebricky uzavretým poľom, špeciálne to budú nekužeľové plochy 4. stupňa.

2 Plochy 4. stupňa

Ak plocha 4. stupňa obsahuje 3 trojnásobné body, ktoré sú nekolineárne, tak je rozložiteľná. Ak tieto 3 body ležia na jednej priamke, tak všetky body tejto priamky sú trojnásobné (pozri [3]). Navyše platí:

Veta 1 *Ak nerozložiteľná plocha 4. stupňa obsahuje trojnásobnú priamku, tak neobsahuje žiadne ďalšie singulárne body.*

Dôkaz. Nech plocha 4. stupňa obsahuje okrem trojnásobnej priamky p ešte ďalší dvojnásobný bod A , ktorý na nej neleží. Potom rovina Ap je súčasťou plochy, lebo spojnica dvojnásobného bodu s každým bodom trojnásobnej priamky leží na ploche 4. stupňa.

◇

Veta 2 *Plocha 4. stupňa s trojnásobnou priamkou je priamková plocha.*

Dôkaz. Zvoľme súradnicovú sústavu tak, aby priamka $o_{01} : x_2 = x_3 = 0$ bola trojnásobnou priamkou plochy. Rovnica plochy 4. stupňa má potom tvar

$$x_2^3 A(x) + x_2^2 x_3 B(x) + x_2 x_3^2 C(x) + x_3^3 D(x) = 0,$$

kde $A(x), B(x), C(x), D(x)$ sú lineárne formy premenných x_0, x_1, x_2, x_3 . Rovnicu plochy upravíme tak, aby sa v nej každý člen nachádzal iba raz. Potom bude mať tvar

$$x_2^3 A'(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_2^2 x_3 B'(x_0, x_1, x_3) + x_2 x_3^2 C'(x_0, x_1, x_3) + x_3^3 D'(x_0, x_1, x_3) = 0,$$

resp.

$$x_2^3(a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + x_2^2 x_3(b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_3 x_3) + x_2 x_3^2(c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_3 x_3) + x_3^3(d_0 x_0 + d_1 x_1 + d_3 x_3) = 0.$$

Nech bod A je ľubovoľný bod plochy 4. stupňa, ktorý neleží na trojnásobnej priamke o_{01} . Nech $A = O_2 = (0, 0, 1, 0)$. Rovnica plochy má potom tvar

$$x_2^3(a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_3 x_3) + x_2^2 x_3(b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_3 x_3) + x_2 x_3^2(c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_3 x_3) + x_3^3(d_0 x_0 + d_1 x_1 + d_3 x_3) = 0.$$

Rovina obsahujúca trojnásobnú priamku o_{01} a bod A , t.j. rovina $\omega_3 : x_3 = 0$, pretína plochu trikrát v priamke o_{01} a raz v priamke

$$p : \begin{aligned} a_0 x_0 + a_1 x_1 &= 0 \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aspoň jeden z koeficientov a_0, a_1 je rôzny od nuly, lebo inak by bola plocha rozložiteľná. Priamka p je rôzna od priamky o_{01} a $A \in p$. To znamená, že sme našli priamku plochy prechádzajúcu ľubovoľným bodom A plochy, čím je veta dokázaná. \diamond

Predpokladajme, že plocha 4. stupňa s trojnásobnou priamkou nie je kužeľovou plochou. Potom platí:

Veta 3 *Nech plocha 4. stupňa nie je kužeľovou plochou a nech obsahuje trojnásobnú priamku. Každá rovina incidentná s trojnásobnou priamkou plochy pretína plochu ešte v ďalšej priamke; až na maximálne dve roviny, ktoré pretínajú plochu iba v trojnásobnej priamke.*

Dôkaz. Nech trojnásobná priamka plochy je priamka o_{01} . Všetky priamky plochy určite nepretínajú trojnásobnú priamku v tom istom bode, lebo v tom prípade by to bola kuželová plocha a to je v spore s predpokladom vety. Potom existujú také 2 roviny zo zväzku rovín cez trojnásobnú priamku, že priamky v nich ležiace nepretnú trojnásobnú priamku v tom istom bode. Nech sú to priamky O_0O_3 a O_1O_2 . Rovnica plochy má potom tvar

$$x_2^3(a_0x_0 + a_3x_3) + x_2^2x_3(b_0x_0 + b_1x_1 + b_3x_3) + x_2x_3^2(c_0x_0 + c_1x_1 + c_3x_3) + x_3^3(d_1x_1) = 0.$$

Rovina $\alpha : x_3 - kx_2 = 0$ incidentná s trojnásobnou priamkou o_{01} pretína plochu trikrát v priamke o_{01} a raz v priamke p :

$$x_0(a_0 + kb_0 + k^2c_0) + kx_1(b_1 + kc_1 + k^2d_1) + kx_2(a_3 + kb_3 + k^2c_3) = 0 \\ x_3 - kx_2 = 0.$$

Ak $a_3 + kb_3 + k^2c_3 = 0$, tak priamka p je rôzna od trojnásobnej priamky.

Ak $a_3 + kb_3 + k^2c_3 \neq 0$, potom priamka p je totožná s priamkou o_{01} práve vtedy, keď platí

$$a_0 + kb_0 + k^2c_0 = 0 \\ b_1 + kc_1 + k^2d_1 = 0.$$

Tieto 2 rovnice nie sú splnené identicky, lebo inak by plocha bola rozložiteľná. Rovnice majú maximálne 2 riešenia a to znamená, že existujú maximálne 2 roviny zo zväzku rovín cez trojnásobnú priamku, ktoré pretínajú plochu iba v trojnásobnej priamke.

◇

Z poslednej vety vyplýva, že nekuželové plochy 4. stupňa s trojnásobnou priamkou môžeme rozdeliť do troch skupín podľa toho, koľko rovín incidentných s trojnásobnou priamkou pretína plochu iba v trojnásobnej priamke. Jednotlivé prípady sú uvedené v nasledujúcich podkapitolách. Pre nedostatok miesta sú vety uvedené bez dôkazov.

2.1 Prvá skupina

Veta 4 *Nech každá rovina obsahujúca trojnásobnú priamku plochy 4. stupňa pretína plochu ešte v ďalšej priamke. Potom platí:*

- Uniplanárnym bodom prechádza jediná ďalšia priamka plochy. Každým biplanárnym bodom prechádzajú dve ďalšie priamky plochy a každým triplanárnym bodom prechádzajú tri ďalšie priamky plochy.*
- Plocha buď neobsahuje žiadnu priamku mimobežnú s trojnásobnou priamkou, alebo obsahuje práve jednu priamku mimobežnú s trojnásobnou priamkou.*

Príklad 1 Uvedieme príklady plôch 4. stupňa z predchádzajúcej vety.

a) Plocha

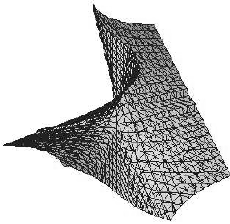
$$x_0x_2^3 - x_1x_3^3 = 0$$

je plocha s trojnásobnou priamkou o_{01} . Obsahuje priamku o_{23} mimobežnú s trojnásobnou priamkou.

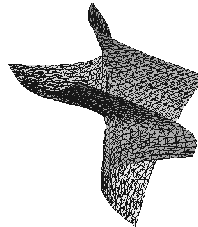
b) Plocha

$$x_0x_2^3 + x_2^2x_3^2 + x_1x_3^3 = 0$$

obsahuje trojnásobnú priamku o_{01} a neobsahuje žiadnu priamku mimobežnú s trojnásobnou priamkou.



Obr. 1: Pr. 1 a)



Obr. 2: Pr. 1 b)

◇

2.2 Druhá skupina

Veta 5 *Nech existuje práve 1 rovina incidentná s trojnásobnou priamkou plochy 4. stupňa, ktorá pretína plochu iba v trojnásobnej priamke. Potom platí jedna z možností:*

- Jeden bod trojnásobnej priamky je uniplanárny, jeden biplanárny a všetky ostatné body trojnásobnej priamky sú triplanárne.
- Jeden bod trojnásobnej priamky je uniplanárny a všetky ostatné body trojnásobnej priamky sú biplanárne.
- Tri body trojnásobnej priamky sú biplanárne a všetky ostatné body trojnásobnej priamky sú triplanárne.

Navyše platí:

- Rovina, ktorá pretína plochu iba v trojnásobnej priamke, je súčasťou dotykovej kuželovej plochy vo všetkých bodoch trojnásobnej priamky.
- Uniplanárnym bodom neprechádza žiadna ďalšia priamka plochy. Každým biplanárnym bodom prechádza jediná ďalšia priamka plochy a každým triplanárnym bodom prechádzajú dve ďalšie priamky plochy.
- Plocha neobsahuje žiadne iné priamky okrem trojnásobnej priamky a priamok, ktoré ju pretínajú.

Príkald 2 Uvedieme príklady všetkých troch typov plôch 4. stupňa z vety 5.

a) Plocha

$$x_0x_2^3 - x_1x_2x_3^2 + x_3^4 = 0$$

je plocha s trojnásobnou priamkou o_{01} . Bod O_0 je uniplanárny, bod O_1 biplanárny a všetky ostatné body trojnásobnej priamky sú triplanárne, lebo dotyková kuželová plocha v ľubovoľnom bode trojnásobnej priamky má rovnicu

$$x_2(x_2^2(y_0) - x_3^2(y_1)) = 0.$$

b) Plocha

$$x_0x_2^3 + x_1x_2^2x_3 + x_3^4 = 0$$

obsahuje trojnásobnú priamku o_{01} . Rovnica dotykovkej kuželovej plochy v ľubovoľnom bode priamky o_{01} je

$$x_2^2(x_2(y_0) + x_3(y_1)) = 0,$$

t.j. bod O_0 je uniplanárny a všetky ostatné body trojnásobnej priamky sú biplanárne.

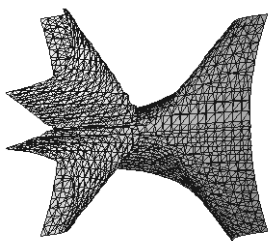
c) Plocha

$$x_0x_2^3 + 2x_0x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 + x_3^4 = 0$$

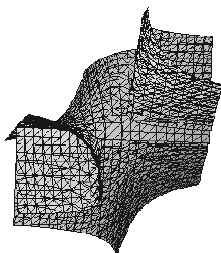
je plocha s trojnásobnou priamkou o_{01} . Dotyková kuželová plocha v ľubovoľnom bode priamky o_{01} má rovnicu

$$x_2(x_2^2(y_0) + x_2x_3(2y_0) + x_3^2(y_1)) = 0.$$

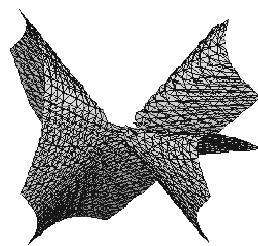
Body O_0, O_1 a $(1, 1, 0, 0)$ sú biplanárne. Všetky ostatné body trojnásobnej priamky sú triplanárne.



Obr. 3: Pr. 2 a)



Obr. 4: Pr. 2 b)



Obr. 5: Pr. 2 c)

2.3 Tretia skupina

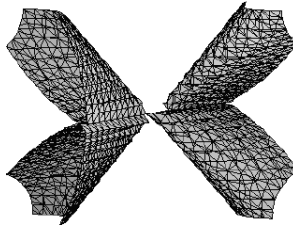
Veta 6 *Nech existujú 2 roviny incidentné s trojnásobnou priamkou plochy 4. stupňa, ktoré pretínajú plochu iba v trojnásobnej priamke. Potom platí:*

- Dva body trojnásobnej priamky sú biplanárne a všetky ostatné body trojnásobnej priamky sú triplanárne. Roviny, ktoré pretínajú plochu iba v trojnásobnej priamke, sú súčasťou dotykovej kužeľovej plochy vo všetkých bodoch trojnásobnej priamky.*
- Biplanárnymi bodmi už neprechádza žiadna ďalšia priamka plochy. Každým triplanárnym bodom prechádza jediná ďalšia priamka plochy.*
- Plocha neobsahuje žiadne iné priamky okrem trojnásobnej priamky a priamok, ktoré ju pretínajú.*

Príklad 3 Príkladom plochy 4. stupňa z vety 6 je napr. plocha

$$x_2^4 + x_0x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 + x_3^4 = 0.$$

Je to plocha s trojnásobnou priamkou o_{01} . Body O_0, O_1 sú biplanárne a všetky ostatné body trojnásobnej priamky sú triplanárne. Je to zrejme z rovnice dotykovej kužeľovej plochy v ľubovoľnom bode trojnásobnej priamky, ktorá má tvar $x_2x_3(x_2(y_0) + x_3(y_1)) = 0$.



Obr. 6: Pr. 3

◇

Pod'akovanie

Článok vznikol za podpory grantu VEGA č. 1/4026/07.

Literatúra

- [1] S. Abhyankar: *Cubic surfaces with a double line*, Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A, Mathematics, Vol. XXXII, No. 3, 1960
- [2] B. Bydžovský: *Úvod do algebraickej geometrie*, JČMF, Praha, 1948
- [3] Z. Tereňová: *Plochy 3. a 4. stupňa s konečným počtom priamok*, Rigorózna práca, FMFI UK, Bratislava, 2002

Applications of Hyperbolic Geometry: Gyrovector Spaces

Miroslava Tihlaříková

*Mendel University of Agriculture and Forestry in Brno
Zemědělská 3*

tihlarik@node.mendelu.cz

Abstrakt. This paper deals with modern history of hyperbolic geometry in relation to Einstein's special theory of relativity. Main part of the text presents the theory of gyrogroups and gyrovector spaces which provide algebraic tools for the study of relativistic physics and hyperbolic geometry.

Klíčová slova: Gyrovector space, gyrogroup, Thomas precession.

1 History

The special theory of relativity was introduced by Albert Einstein (1879-1955) in 1905. When Hermann Minkowski (1864 - 1909) in 1907 began pondering the structure of Lorentz group he noticed that geometrical relations between velocity vectors measured in inertial frames of reference are not Euclidean, but hyperbolic, but he didn't exploit this insight.

Mathematicians like V. Varičák (1865 - 1942) and E. Borel (1871 - 1956) tried to inaugurate a new, non-Euclidean style of relativity, but this style was neglected for a long time. Following years didn't bring to this style anything new. Yet Abraham A. Ungar in 1988 started to build gyrogroup theory, first algebraic structure of that kind involved Einstein's addition.

2 Born of "gyro" theory

Relativistically admissible velocities are elements of the open ball \mathbb{R}_c^3 with radius c of the Euclidean three-space \mathbb{R}^3 ,

$$\mathbb{R}_c^3 = \{v \in \mathbb{R}^3; \|v\| < c\},$$

c being the vacuum speed of light. Einstein's addition is on the set of relativistically admissible velocities neither commutative nor associative. Most books on special theory of relativity deal with Einstein's addition only for parallel velocities, in which case it is both commutative and associative. Breakdown of commutativity and associativity in general case repairs Thomas' precession. If we denote that relative rotation generated by two relative velocities $u, v \in \mathbb{R}_c^3$ as $\text{gyr}[u, v]$, we could write

$$u \oplus v = \text{gyr}[u, v](v \oplus u).$$

The generalization of this precession calls Ungar gyration and the previous relation gyrocommutative law. Although not so recognized, this relation appeared in early literature on special relativity, for example in [1].

Gyroassociative law is a recent discovery of Ungar made in 1988. Using gyration he wrote down following left and right gyroassociative law:

$$\begin{aligned}u \oplus (v \oplus x) &= (u \oplus v) \oplus \text{gyr}[u, v]x \\(u \oplus v) \oplus x &= u \oplus (v \oplus \text{gyr}[v, u]x)\end{aligned}$$

Ungar uses prefix "gyro" to emphasize analogies with classic notions and builds whole gyrogroup theory.

The groupoid (G, \oplus) is a gyrogroup if operation \oplus satisfies the following axioms. In G there exist a unique element, 0 , called the identity, satisfying

$$0 \oplus a = a \oplus 0 = a,$$

for all $a \in G$. For each a in G there exist a unique inverse $\ominus a$ in G , satisfying

$$\ominus a \oplus a = a \ominus a = 0,$$

where we use the notation $a \ominus b = a \oplus (\ominus b)$, where $a, b \in G$. Moreover, if for any $a, b \in G$ the self-map $\text{gyr}[a, b]$ of G is given by the equation

$$\text{gyr}[a, b]z = -(a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus z))$$

for all $z \in G$, then the following hold for all $a, b, c \in G$:

$$\begin{aligned}\text{gyr}[a, b] &\in \text{Aut}(G, \oplus) \\a \oplus (b \oplus c) &= (a \oplus b) \oplus \text{gyr}[a, b]c \\(a \oplus b) \oplus c &= a \oplus (b \oplus \text{gyr}[b, a]c) \\\text{gyr}[a, b] &= \text{gyr}[a \oplus b, b] \\\text{gyr}[a, b] &= \text{gyr}[a, b \oplus a] \\\ominus(a \oplus b) &= \text{gyr}[a, b](\ominus b \ominus a) \\\text{gyr}^{-1}[a, b] &= \text{gyr}[b, a]\end{aligned}$$

2.1 Einstein's gyrovector space

Some commutative groups allow the introduction of scalar multiplication turning them into vector spaces. Similarly, some gyrocommutative gyrogroups allow the introduction of scalar multiplication turning them into gyrovector spaces. One of those cases is Einstein gyrovector space.

The Einstein velocity addition \oplus given by the equation

$$u \oplus v = \frac{1}{1 + \frac{u \cdot v}{c^2}} \left\{ u + \frac{1}{\gamma_u} v + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_u}{1 + \gamma_u} (u \cdot v) u \right\}$$

for all $u, v \in R_c^3$, where $u \cdot v$ is standard scalar product and γ_u is the Lorentz factor given by

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\|u\|^2}{c^2}}}$$

gives rise to the gyrocommutative gyrogroup (\mathbb{R}_c^3, \oplus) .

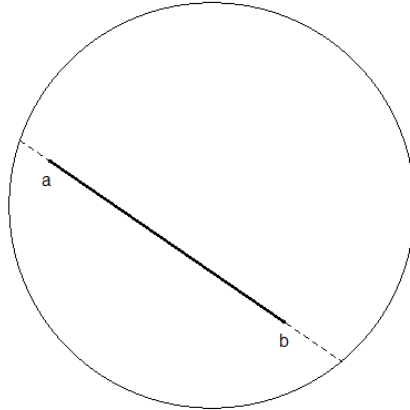
Einstein's addition admits multiplication by a scalar given by

$$r \otimes v = c \frac{(1 + \|v\|/c)^r - (1 - \|v\|/c)^r}{(1 + \|v\|/c)^r + (1 - \|v\|/c)^r}$$

which turns Einstein's gyrogroup into a gyrovector space $(\mathbb{R}_c^3, \oplus, \otimes)$.

2.2 Models of hyperbolic geometry

Gyrovector spaces provide the setting for hyperbolic geometry in the same way that vector spaces provide setting for Euclidean geometry. In two dimensions, Einstein gyrovector space is coincident with Klein-Beltrami disc model of hyperbolic geometry.



The gyrolines (or hyperbolic lines) in this model are line segments contained in the disc. We can express the geodesic segment joining two given points a and b by Einstein's addition and Einstein's scalar multiplication as

$$a \oplus (\ominus a \oplus b) \otimes t, 0 \leq t \leq 1.$$

And hyperbolic distance of those two points as $\|a \ominus b\|$. In both cases we can see analogy with Euclidean spaces. The cosine of the angle α between two gyrovectors $\ominus a \oplus b$ and $\ominus a \oplus c$ is defined by inner product of corresponding unit gyrovectors

$$\cos(\alpha) = \frac{\ominus a \oplus b}{\|\ominus a \oplus b\|} \cdot \frac{\ominus a \oplus c}{\|\ominus a \oplus c\|}.$$

The sine of the hyperbolic angle α is defined by the equation

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

For a triangle in an Einstein gyrovector space with sides A , B , and C and with respective angles α , β , γ opposite to these sides, we have hyperbolic law of cosines and hyperbolic law of sines

$$\frac{\|1/2 \otimes C\|^2}{c} = \frac{\|1/2 \otimes A\|^2}{c} \oplus \frac{\|1/2 \otimes B\|^2}{c} \ominus \frac{1}{2c} \frac{\|A\|\|B\| \cos \gamma}{1 - \frac{\|A\|\|B\| \cos \gamma}{2c^2}}$$

$$\frac{\gamma_A \|A\|}{\sin \alpha} = \frac{\gamma_B \|B\|}{\sin \beta} = \frac{\gamma_C \|C\|}{\sin \gamma}.$$

In the case $\gamma = \pi/2$ we receive from the hyperbolic law of cosines a hyperbolic Pythagorean theorem:

$$\frac{\|1/2 \otimes C\|^2}{c} = \frac{\|1/2 \otimes A\|^2}{c} \oplus \frac{\|1/2 \otimes B\|^2}{c}.$$

We see that Einstein's addition captures these laws in a form similar to the form we know from Euclidean trigonometry.

3 Conclusion

Gyrogroup theory is a new step in history of use of hyperbolic geometry in relativistic physics. This approach to hyperbolic geometry shares analogies with euclidean geometry and the Thomas precession is the missing link between those two geometries.

Reference

- [1] Silberstein, L.: *The theory of relativity*, Mac Millan, London, 1914
- [2] Ungar, Abraham A.: *The Beyond the Einstein Addition Law and its Gyroscopic Thomas Precession: The Theory of Gyrogroups and Gyrovector spaces*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2001
- [3] Ungar, Abraham A.: *Hyperbolic Trigonometry in the Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometry*, [www:http://www.math.ndsu.edu/faculty/ungar/dir_webpapers/hyptrig01.ps](http://www.math.ndsu.edu/faculty/ungar/dir_webpapers/hyptrig01.ps)
- [4] Walter, S.: *The Non-Euclidean Style of Minkowskian Relativity*, [www:http://www.univ-nancy2.fr/DepPhilo/walter/papers/nesh.xml](http://www.univ-nancy2.fr/DepPhilo/walter/papers/nesh.xml)

Blossoming a jeho využitie pri konštrukcii Bézierovej krivky

Júlia Tomanová

*Dept. of Informatics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University
Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra, Slovak Republic
email: jtomanova@ukf.sk*

Abstrakt. V článku sú porovnané dve rôzne reprezentácie Bézierovej krivky, a to klasická reprezentácia pomocou polynómu n -tého stupňa a reprezentácia pomocou polárnej formy toho istého polynómu. Práve tento druhý spôsob zjednodušuje výpočet kriviek, ich konštrukciu a manipuláciu s nimi. V článku opisujeme postup konštrukcie Bézierovej krivky s využitím transformácie polynomickej funkcie n -tého stupňa na symetrickú n -afinnú funkciu, ktorá sa volá blossoming.

Kľúčové slová: polynomická funkcia, polárna forma, Bézierova krivka

1 Úvod

Polárne formy zjednodušujú konštrukciu polynomických a po častiach polynomických kriviek a plôch a vedú k novej reprezentácii povrchov a k novým algoritmom na ich výpočet.

2 Polárna forma polynomických funkcií

Nech $F(t)$ je polynóm nanajvyš n -tého stupňa. Potom existuje jednoznačne definovaný symetrický multiafinný polynóm $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, ktorého diagonála sa rovná $F(u)$:

$$F(u) = f(u, u, u)$$

Polynóm f sa nazýva blossom alebo polárna forma polynómu F .

Vo všeobecnosti polynomická funkcia n -tého stupňa daná vzťahom

$$F(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i \quad (1)$$

má symetrickú n -afinnú funkciu (blossom) tvaru [1]

$$f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^n a_i \binom{n}{i}^{-1} \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |S|=i}} \prod_{j \in S} u_j, \quad (2)$$

kde S je počet prvkov množiny S a koeficienty a_i sú dané nasledovne:

$$a_i = \frac{F^{(q)}(0)}{q!}, \quad (3)$$

pričom $F^{(q)}(u)$ je q -ta derivácia pre parameter u .

Polynomická funkcia n -tého stupňa a polárna forma tohoto polynómu sú dve rôzne reprezentácie toho istého objektu.

Pre kubický polynóm platí:

$$F(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 \quad (4)$$

Podľa vyššie uvedeného predpisu priradíme tomuto polynómu blossom, symetrickú 3-afinnú funkciu, takto [3]:

$$f(u_1, u_2, u_3) = a_0 + \frac{a_1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) + \frac{a_2}{3}(u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_1 u_3) + a_3 u_1 u_2 u_3$$

s diagonálou $f(u, u, u) = F(u)$.

(5)

3 Polárna forma Bézierovej krivky

Bézierova krivka s riadiacimi vrcholmi P_0, P_1, \dots, P_n je všeobecne reprezentovaná takto:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(u),$$

kde B_i^n sú Bernsteinove polynómy n -tého stupňa

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

$u \in \langle 0, 1 \rangle$ a $i = 0, 1, \dots, n$.

Pretože výpočet krivky pomocou Bernsteinových polynómov je veľmi náročný, je možné ho zjednodušiť výpočtom s využitím polárnej formy Bézierovej krivky tak, že do vzťahu (5) dosadíme $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n = u$, pretože nám postačí získať hodnoty na diagonále a koeficienty a_i vypočítame podľa predpisu (3).

Pre Bézierovu krivku tretieho stupňa, teda pre Bézierovu kubiku, dostaneme tieto koeficienty:

$$a_0 = P_0$$

$$a_1 = 3(P_1 - P_0)$$

$$a_2 = 3(P_0 - 2P_1 + P_2)$$

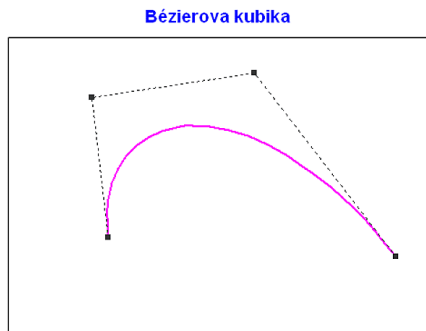
$$a_3 = -P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3$$

Po ich dosadení do vzťahu dostaneme predpis na výpočet bodov Bézierovej kubiky závislý už len od parametra u , ktorý volíme s takým prírastkom, aby bola výsledná krivka dostatočne hladká, napr. 0,05, začíname hodnotou $u = 0$ a končíme hodnotou $u = 1$.

Ukážku riešenia implementovanú v prostredí tabuľkového kalkulátora MS Excel uvádzame na obr. 1. Polohy riadiacich vrcholov krivky je možné meniť zmenou ich polohy priamo v grafe alebo zadaním ich nových súradníc do políček zafarbených fialovou farbou. Po vykonaní takejto zmeny sa vypočítajú

hodnoty parametrov a_i (uvedené v políčkach zafarbených žltou farbou) a vykreslí sa nová krivka určená zadaným riadacimi vrcholmi.

Prirastok t:		0,1			
	x	y	t	P.x	P.y
P0	18,9	13,1	0	18,9	13,1
P1	15,8	31,9	0,1	18,9492	18,2625
P2	46,6	35,2	0,2	20,8056	22,42
P3	73,5	10,5	0,3	24,2424	25,4975
			0,4	29,0328	27,42
			0,5	34,95	28,1125
A0	18,9	13,1	0,6	41,7672	27,5
A1	-9,3	56,4	0,7	49,2576	25,5075
A2	101,7	-46,5	0,8	57,1944	22,06
A3	-37,8	-12,5	0,9	65,3508	17,0825
			1	73,5	10,5



Obr. 1: Ukážka výpočtu koeficientov a_i a vykreslenia Bézierovej kubiky vo vytvorenej aplikácii

Zovšeobecnením pre Bézierovu krivku n -tého stupňa, môžeme koeficienty a_i vypočítať nasledovne:

$$a_0 = \binom{n}{1} P_0$$

$$a_1 = \binom{n}{1} \left[-\binom{1}{0} P_0 + \binom{1}{1} P_1 \right]$$

$$a_2 = \binom{n}{2} \left[\binom{2}{0} P_0 - \binom{2}{1} P_1 + \binom{2}{2} P_2 \right]$$

$$a_3 = \binom{n}{3} \left[-\binom{3}{0} P_0 + \binom{3}{1} P_1 - \binom{3}{2} P_2 + \binom{3}{3} P_3 \right]$$

⋮

$$a_{n-1} = \binom{n}{n-1} \left[(-1)^{n-1} \binom{n-1}{0} P_0 + (-1)^n \binom{n-1}{1} P_1 + \dots + \binom{n-1}{n-1} P_{n-1} \right]$$

$$a_n = \binom{n}{n} \left[(-1)^n \binom{n}{0} P_0 + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} P_1 + \dots + \binom{n}{n} P_n \right]$$

Body výslednej krivky potom vypočítame podľa vzťahu (2).

Iným príkladom použitia polárnej formy Bézierovej krivky je výpočet jej riadiacich vrcholov, v prípade, že je krivka zadaná analytickým vyjadrením, z ktorého nie je jednoduché vypočítať tieto vrcholy, napr. polynomickeou funkciou [4].

Majme Bézierovu krivku zadanú takto:

$$F(u).x = 20 + 15.u + 51.u^2 - 13.u^3$$

$$F(u).y = 15 + 45.u - 30.u^2 - 20.u^3$$

Potom pre jej blossom platí:

$$f(u_1, u_2, u_3).x = 20 + 15 \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} + 51 \frac{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_1 u_3}{3} - 13 u_1 u_2 u_3$$

$$f(u_1, u_2, u_3).y = 15 + 45 \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} - 30 \frac{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_1 u_3}{3} - 20 u_1 u_2 u_3$$

Súradnice riadiacich vrcholov vypočítame všeobecne takto [2]:

$$V_0 = f(0, \dots, 0), V_1 = f(0, \dots, 0, 1), \dots, V_{n-1} = f(0, 1, \dots, 1), V_n = f(1, 1, \dots, 1)$$

V našom prípade, pre $n = 3$:

$$V_0 = f(0, 0, 0), V_1 = f(0, 0, 1), V_2 = f(0, 1, 1), V_3 = f(1, 1, 1),$$

dostávame

$$V_0 = (20, 15), V_1 = (25, 30), V_2 = f(47, 35), V_3 = f(73, 10).$$

4 Záver

V článku sme opísali časovo menej náročný algoritmus na výpočet bodov Bézierovej krivky v porovnaní s výpočtom pomocou Bernsteinových polynómov. Tento algoritmus je založený na využití blossomingu, ktorý nachádza uplatnenie nie len pri operáciách s krivkami a pri ich modifikáciách, ale aj pri výpočte riadiacich vrcholov krivky, pričom uvedený postup je možné zovšeobecniť aj pre krivky parametrizované na inom intervale ako je $\langle 0, 1 \rangle$.

Literatúra

- [1] Hýrošová, T.: Polárna forma Bézierovej krivky. In: *Sborník 26. konferencie o geometrii a počítačové grafice*. České Budějovice : Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita, 2006, s. 79-84. ISBN 80-7040-902-9
- [2] Kmeťová, M.: Klasická geometria v teórii kriviek CAGD. In: *Sborník příspěvků z mezinárodní konference Geometrie a počítačová grafika*. Ostrava : Fakulta elektrotechniky a informatiky, Technická univerzita, 2004, s. 70–75. ISBN 80-248-0581-2
- [3] Seidel, H.P.: *An Introduction to Polar Forms*, IEEE Computer Graphics and Applications, 1993, pp. 38-46
- [4] Zaťko, V.: *Some Expressions for Blossoms*. Proceedings of SCG'96, Vol. 5, Bratislava, 1996, pp. 153-162

Packing and containment problems

Světлана Tomiczková

*KMA FAV ZU v Plzni
Univerzitní 8, 301 00 Plzeň
svetlana@kma.zcu.cz*

Abstract. Various approaches and methods of solution of the packing and containment problems are discussed in this paper.

Keywords: Packing, containment, genetic algorithm, Minkowski sum, Minkowski difference.

1 Introduction

The packing problems can be sorted into many different types. The main problem is to put some pieces into the container (this container can also be whole space) such that the pieces non-overlap each other. We can solve packing of the pieces in the plane, three-dimensional space or more-dimensional space. Different approach to this problem depends on the shape of pieces or on the shape container.

2 Circle and Sphere Packing

One type of the packing problem is the sphere and circle packing problem. Main target of this problem is to arrange non-overlapping identical spheres (in E_3) or circles (in E_2) which fill a space such that the remaining space is as small as possible.

Density of the arrangement is proportion of the space filled by the spheres or circles (mass m per unit volume V). Carl Friedrich Gauss proved that the regular arrangement of circles with the highest density is hexagonal arrangement. The density of such arrangement is $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ (fig. 1).

Similar problem exists in three dimensional Euclidean space. Johannes Kepler believed that the arrangement when each sphere is surrounded by 12 other spheres gives the best issue (density of this arrangement is $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$) but he was unable to prove this. In 1998 Thomas Hales gave the proof of this Kepler's conjecture.

But circle and sphere packing is not only packing of equal circles or spheres into the plane or space but also packing of arbitrarily-sized circles and spheres or packing into container which have special shape (circle, triangle, cube etc.)

3 Packing of polygons

3.1 Genetic algorithm

Another type of packing problem is packing of polygons into given container. If we have a finite number of rectangles r_i and rectangular board than the orthogonal packing pattern requires a disjunctive placement of

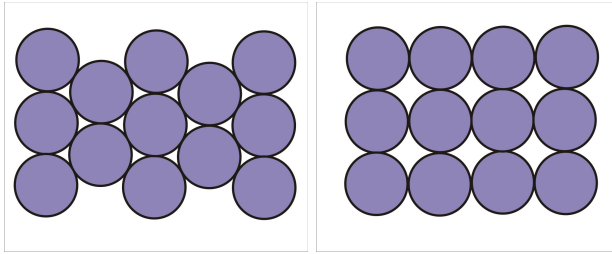


Figure 1: Circle packing, hexagonal and square arrangement.

rectangles on a board in such a way that the edges are parallel to x and y axes. This orthogonal problem can be generalized to the problem of irregular pattern of rectangular shapes or nesting of irregular shapes (non-rectangular).

Genetic algorithm is search technique used in computing to find exact or approximate solution to optimization problem. As base of this algorithm is used BL-algorithm. This algorithm places rectangular pieces into the container such as the BL-condition (bottom-left condition) is satisfied (fig 2). The orthogonal packing pattern fulfills the BL-condition if no rectangle can be shifted further to the bottom or to the left. The BL-algorithm satisfy some useful properties. Upper bound to the possible packing patterns is $2^n \cdot n$. If rectangles are sorted according to the width then $h_{BL} \leq 3h_{OPT}$, where h_{BL} is height of the packing pattern after BL-algorithm and h_{OPT} is optimal height of the packing pattern. As fitness function of genetic algorithm can be used for instance value of height (fig. 2) of pattern or contiguous remainder (fig. 3) (Stefan Jacobs in [4]). By the help genetic algorithm it is choose optimal packing pattern. This algorithm can be extended to polygons such that each polygon is embedded into rectangle and then the genetic algorithm is applied.

Another way of representation of the shapes is discrete representation which is use in [1]. Parts and sheet are enclosed in imaginary rectangles. Then imaginary rectangles are divided into uniform grid (pixel) and a specific value is assign to each pixel based on its position with respect to the geometry of the part . Value '0' is assigned if the pixel lies on the part either partially or completely, otherwise, the value is positive integer value, which starts from one as it moves to the leftmost pixel of rectangular enclosure. For sheet it holds that '0' is assigned when the material of sheet exist on the pixel completely (fig. 4).

Than the shapes are placed into sheet in a few steps:

- Step 1: Translate the part to bottom-left corner of the imaginary

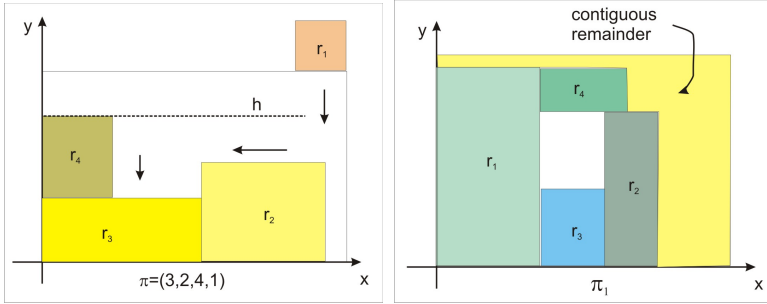


Figure 2: i_j is index of the rectangle (r_{i_j}), $\pi = (i_1, \dots, i_n)$ is permutation, h height of the packing pattern

Figure 3: contiguous remainder

rectangular enclosure of the sheet.

- Step 2: Apply the scanning technique and find whether the position of the part is acceptable or not. If the position is acceptable, consider the next part and continue from Step 1.
- Step 3: From the scanning technique, get the incremental positional value for the part in x-direction.
- Step 4: After placing these parts on the sheet, the value of the pixels are modified.

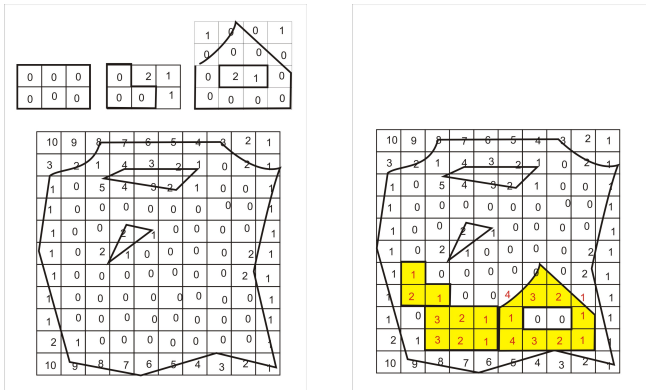


Figure 4: Discrete representation

Then the genetic strings are arranged (coding of strings) and genetic operations (initial population, fitness function, crossover and mutation)

are used.

3.2 Minkowski operations

Minkowski sum and Minkowski difference of two point sets are defined as follows: $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{A}^b$, $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B} = \bigcap_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{A}^{-b}$ (in [6]).

If \mathcal{A} a \mathcal{B} are two point sets in E_n and x be an arbitrary point then $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^x \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \mathcal{A} \oplus (-\mathcal{B})$, where $-\mathcal{B} = \{-b | b \in \mathcal{B}\}$ (see fig. 5). This theorem gives us tool for solution of packing problem. If we place one shape, we can specify the forbidden place for next shapes. If we want to place the shape into the container then we can use the following theorem: If $\mathcal{B}^x \subseteq \mathcal{A}$ then $x \in \mathcal{A} \ominus \mathcal{B}$ and Minkowski difference is the set of end-points of all vectors which translate the set \mathcal{B} into the set \mathcal{A} (see fig. 6).

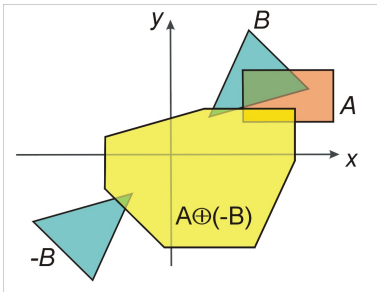


Figure 5: Minkowski sum

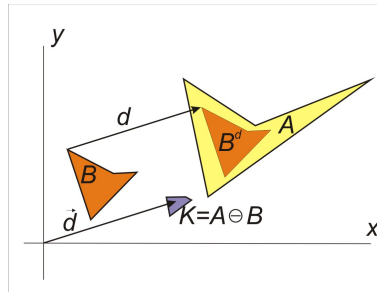


Figure 6: Minkowski difference

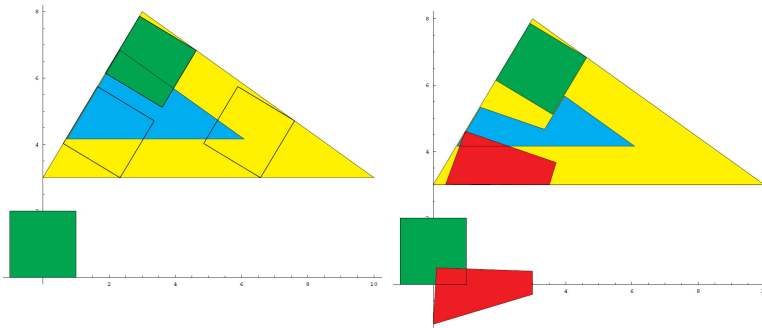


Figure 7: Output of the software Mathematica

We can use Minkowski sum and Minkowski difference only if we need only translation. If we want to allow rotation, and use the Minkowski operations we have to use Minkowski product. Minkowski product in the plane is defined as $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{a \times b | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$ (where $a \times b$ is

product of complex number) or alternatively as $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} a\mathcal{B}$. We can understand Minkowski product of the set \mathcal{B} and single set $\mathcal{A} = \{z\}$ as rotating of the set \mathcal{B} around to origin by the angle φ and scaling with coefficient $|z|$. Now we can decide about placement of the set \mathcal{B} into the set \mathcal{A} by help of the next theorem: Let \mathcal{A} and \mathcal{B} be two point sets in E_2 and $\mathcal{K} = \{\cos t + i \sin t \mid t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ be the unit circle with center in $(0, 0)$. Then the set \mathcal{B} can be placed into the set \mathcal{A} , (there exists x such, that $\mathcal{B}^x \subset \mathcal{A}$, iff $\bigcup_{z \in \mathcal{K}} \mathcal{A} \ominus (\{z\} \otimes \mathcal{B}) \neq \emptyset$) (see fig. 8 and 9).

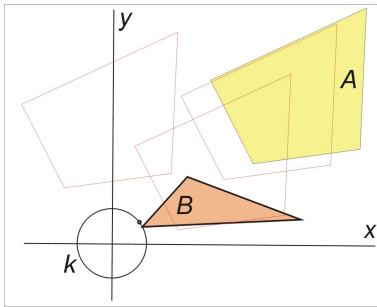


Figure 8: Rotation 1

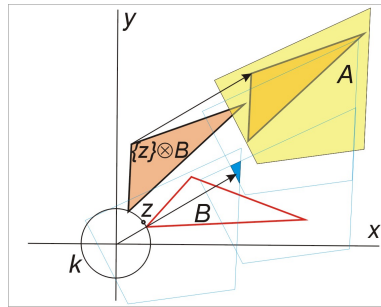


Figure 9: Rotation 2

4 Conclusion

Several approaches of solving of packing problems was shown in this paper. In conclusion I want to mention some peoples who also deal with similar problems. E. Vrankov a and M. Božek [7] solve problem of dense placement of polygons, J. Xue and K. K. Lai solve orthogonal packing problem in E_3 [8] or V. Milenkovic and his team [2] solve packing problem for special types of shapes and multiple containment methods.

Acknowledgements

The author has been supported by the Research Plan MSM 4977751301.

References

- [1] Babu, A. Ramesh; Babu, N. Ramesh: *A generic approach for nesting of 2-D parts in 2-D sheets using genetic and heuristic algorithms*. Computer-Aided Design 33, 879-891, 2001.
- [2] Daniels, Karen McIntosh : *Containment Algorithms for Nonconvex Polygons with Applications to Layout*. Massachusetts: Harvard University. PhD. thesis, 1995.
- [3] Farouki, Rida T.: *Minkowski Combinations of Complex Sets*. Curve and Surface Fitting. Saint-Malo 2002.

- [4] Jakobs, Stefan: *On genetic algorithms for the packing of polygons*. European Journal of Operational Research 88, 165-181, 1996.
- [5] Hopper, Eva: *Two-dimensional Packing utilising Evolutionary Algorithms and other Meta-Heuristic Methods*. University of Wales. Ph.D. thesis, 2000.
- [6] Tomiczková, S.: *Minkowského operace a jejich aplikace*. Ph.D. thesis, Pilsen 2006.
- [7] Vranková, Edita: *Konštrukcia množiny hustých rozmiestnení dvoch mnohouhelníkov využitím stredovej súmernosti metódou zjednotenia..* Ph.D. thesis, Bratislava, 2000.
- [8] Xue, J.; Lai, K. K.: *Effective Methods for a Container Packing Operation*. Mathl. Comput. Modelling. 1997, vol. 25, no. 2, pp. 75-84.

Meranský program a geometrické transformace

Dana Trkovská

*Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
trkovska@karlin.mff.cuni.cz*

Abstrakt. V příspěvku připomeneme hlavní myšlenky a výsledky tzv. Erlangenského programu (1872), v němž německý matematik Felix Klein prezentoval jednotný pohled na geometrii. Podáme stručný přehled informací o reformním hnutí ve výuce matematiky na přelomu 19. a 20. století v souvislosti s otázkami, které byly diskutovány na světových kongresech matematiků. Podrobněji se budeme věnovat tzv. Meranskému programu (1905), který přinesl reformu středoškolského matematického vzdělávání. Zmíníme důsledky Meranského programu v našich zemích a ukážeme, jak se tyto změny projeví v českých učebnicích matematiky.

Klíčová slova: Erlangenský program, Meranský program, geometrické transformace.

1 Úvod

Geometrické transformace sehrály v 19. století významnou roli. Německý matematik Felix Klein (1849–1925) na základě grup geometrických transformací zformuloval jednotnou definici geometrie a vyložil princip uspořádání jednotlivých geometrií. Zasadil se také o začlenění nejnovějších vědeckých poznatků do výuky středoškolské matematiky. *Meranský program* z roku 1905 požadoval zařadit do středoškolských osnov mimo jiné právě geometrické transformace. V Rakousku-Uhersku byla reakcí na Meranský program *Marchetova reforma učebních osnov* z roku 1909. Projevila se změnami v obsahu i metodickém zpracování učiva, které si vyžádaly tvorbu nových učebnic matematiky.

2 Geometrické transformace

2.1 Erlangenský program

Pod tímto názvem se do dějin matematiky zapsala Kleinova nástupní přednáška *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních], jejíž text Felix Klein předložil v říjnu 1872 při příležitosti svého jmenování řádným profesorem filozofické fakulty univerzity v Erlangen (Bavorsko). V této přednášce Felix Klein prezentoval svůj jednotný přístup ke klasifikaci různých geometrií založený na grupách transformací.

Erlangenský program sestává z deseti kapitol. Základní myšlenky Kleinovy klasifikace geometrií jsou obsaženy v první kapitole, v níž je uvedena následující definice geometrie:

Je dán geometrický prostor a nějaká grupa transformací. Úkolem geometrie je zkoumat právě ty vlastnosti prostoru, které se nemění při transformacích dané grupy. Jinými slovy řečeno, každá geometrie je teorií invariantů dané grupy transformací.

Felix Klein přitom zdůrazňuje, že grupu transformací lze volit libovolně. Grupy transformací tak slouží nejen ke zkoumání a klasifikaci daných geometrií, ale rovněž umožňují definovat nové geometrie. Základní geometrické pojmy jsou potom určeny jako invarianty zvolených grup transformací.

Ve druhé kapitole zavádí Felix Klein uspořádání geometrií, a to tak, že relaci inkluze, kterou lze uspořádat jednotlivé grupy transformací, přenáší na jim odpovídající geometrie. Pokud nějakou grupu nahradíme jinou grupou, která danou grupu obsahuje, zůstane zachována pouze část původních geometrických vlastností. Přechodem k rozšířené grupě nebo k vlastní podgrupě tak lze přejít od jednoho typu geometrie k jinému. Erlangenský program tedy přinesl jednoduchý, ale důležitý princip uspořádání jednotlivých geometrií.

Pro ilustraci je v následující tabulce vybráno pět základních geometrických vlastností a u každé ze čtyř zvolených grup transformací je uvedeno, zda uvažované transformace dané vlastnosti zachovávají, či nikoliv.

Tabulka č. 1: Grupy transformací a jejich invarianty

vlastnost/grupa	grupa shodností	grupa podobností	grupa afinit	grupa projektivit
poloha	mění se	mění se	mění se	mění se
velikost	zachována	mění se	mění se	mění se
kolmost	zachována	zachována	mění se	mění se
rovnoběžnost	zachována	zachována	zachována	mění se
kolineárnost	zachována	zachována	zachována	zachována

Jednotlivé grupy lze relaci inkluze uspořádat následujícím způsobem:

$$\text{grupa shodností} \subset \text{grupa podobností} \subset \text{grupa afinit} \subset \text{grupa projektivit}$$

Každé grupě přitom přísluší odpovídající geometrie. Z výše uvedeného schématu inkluzí grup transformací tak získáme následující uspořádání klasických geometrií:

$$\text{eukleidovská geometrie} \supset \text{podobnostní geometrie} \supset \text{afinní geometrie} \supset \text{projektivní geometrie}$$

2.2 Reformní hnutí ve výuce matematiky na přelomu 19. a 20. století

Na přelomu 19. a 20. století se zrodila tradice mezinárodních kongresů matematiků; jedním z vůdčích osobností těchto aktivit byl i Felix Klein. První kongres se konal roku 1897 v Zürichu, druhý roku 1900 v Paříži; mimo jiné na něm byla ustavena mezinárodní sekce pro vyučování matematice. Výuka středoškolské matematiky byla rovněž jedním z témat 3. mezinárodního kongresu matematiků v Heidelbergu v srpnu 1904. Téhož roku se v Breslau (Wrocław, Vratislav) sešlo shromáždění německých přírodovědců a lékařů, na němž byla ustavena německá komise pro vyučování matematice a přírodovědným předmětům. Jejím předsedou byl zvolen německý matematik August Gutzmer (1860–1924). Felix Klein této komisi předložil vlastní návrh na reformu matematicko-fyzikálního vzdělávání. Činnost komise vyústila v reformní návrh na úpravu středoškolského matematicko-přírodovědného vzdělání, který byl přijat na dalším shromáždění konaném roku 1905 v Meranu (dnes Itálie). Tento návrh bývá označován jako tzv. *Meranský program*.

V roce 1906 se shromáždění německých přírodovědců a lékařů konalo ve Stuttgartu. Diskutovaly se zde obsahové změny, které souvisely zejména se snahou obohatit středoškolskou matematiku o základy matematické analýzy. Další shromáždění se uskutečnilo roku 1907 v Drážďanech. Bylo na něm přijato doporučení posilovat v přípravě budoucích učitelů matematiky i ve středoškolské výuce matematiky aplikace na úkor některých speciálních problémů.

Roku 1908 se v Římě konal 4. mezinárodní kongres matematiků, na kterém bylo předneseno osm referátů o reformním dění ve vyučování matematice v různých zemích. Na tomto kongresu byla ustavena Mezinárodní komise pro vyučování matematice, která se zabývala vyučovacími metodami a učebními plány veškeré výuky matematiky, od elementární až po vysokoškolskou. Jejím předsedou byl zvolen Felix Klein. Kromě již přijatých požadavků na obsahové změny ve výuce středoškolské matematiky komise dále doporučila obohatit výuku geometrie na středních školách o některé prvky projektivní geometrie a vedle matematické analýzy zařadit do osnov také základy teorie množin a teorie grup. V návaznosti na Mezinárodní komisi byly postupně v jednotlivých zemích ustaveny národní komise, které měly vypracovat podrobnou zprávu o organizaci a metodách výuky matematiky v dané zemi. Výsledky těchto zpráv byly zveřejněny na 5. mezinárodním kongresu matematiků roku 1912 v Cambridge; sešlo se zde asi 280 národních zpráv. Činnost Mezinárodní komise pro vyučování matematice zanikla během 1. světové války, obnovena byla teprve na 8. mezinárodním kongresu matematiků v Bologni v roce 1928.

2.3 Meranský program

Názvem *Meranský program* tedy bývá označován návrh německé komise pro vyučování matematice a přírodovědným předmětům na reformu středoškolského vzdělávání v těchto předmětech. Pokud jde o matematiku, byly mezi obecnými požadavky na její výuku na středních školách uvedeny následující záměry:

- poskytnout vědecky podložený přehled matematického učiva,
- rozvíjet schopnost matematického myšlení a jeho využití při řešení praktických úkolů,
- přiblížit význam matematiky pro exaktní poznání přírody a moderní kulturu vůbec.

S ohledem na dosažení těchto cílů měla být středoškolská výuka matematiky založena na následujících třech základních principech:

1. přizpůsobit výuku přirozenému duševnímu vývoji žáků (*psychologický princip*),
2. rozvíjet schopnost matematického nazírání na okolní svět (*utilitární princip*),
3. vést žáky k uvědomování si souvislostí mezi jednotlivými poznatky (*didaktický princip*).

Meranský program připisoval matematice ve středoškolském vzdělání jedno z klíčových postavení, její hlavní úkoly viděl zejména v rozvíjení rozumových schopností a logického myšlení. Nově chtěl do výuky zavést výchovu k funkčnímu myšlení a základy infinitesimálního počtu. Pojem funkce se měl stát ústředním pojmem veškeré výuky matematiky. Meranský program na výuku matematiky na středních školách kladl z hlediska jejího obsahu následující požadavky:

- podporovat rozvoj prostorové představivosti,
- prostoupit učivo pojmem funkce, rozvíjet funkční myšlení,
- zavést diferenciální a integrální počet,
- zařadit do výuky grupy geometrických transformací,
- omezit formalismus a abstraktní učivo,
- řešit úlohy z praktického života,
- rozvíjet mezipředmětové vztahy.

Abyste výše uvedené reformní návrhy nevedly k přetěžování žáků, byly současně s nimi předloženy nově vypracované učební plány pro jednotlivé typy středních škol. Školní úřady většiny německých zemí přijaly meranské návrhy velmi příznivě.

2.4 Vliv Meranského programu v českých zemích

V Rakousku-Uhersku na Meranský program reagovala *Marchetova reforma učebních osnov* z roku 1909. Byla pojmenována podle Gustava Marcheta (1846–1916), tehdejšího ministra kultu a vyučování. Jejím hlavním výsledkem bylo zařazení učiva elementárních funkcí a některých prvků infinitesimálního počtu do výuky matematiky na středních školách. Mezi učebními metodami doporučenými ministerstvem pro výuku na střední škole byla zdůrazněna heuristická metoda.

Kromě obsahových změn přineslo přijetí Meranského programu nový pohled na matematiku a její postavení ve středoškolském vzdělávání. To se promítlo i do některých změn v metodickém zpracování učiva. Změna školních osnov přijatá v rámci Marchetovy reformy si vyžádala tvorbu nových učebnic matematiky. Tento úkol na sebe vzala Jednota českých matematiků a fyziků, jež vybrala za autory nových učebnic Ladislava Červenku (1874–1947), Miloslava Valoucha (1878–1952), Bohumila Bydžovského (1880–1969) a Jana Vojtěcha (1879–1953). V letech 1910 až 1912 sepsali učebnice aritmetiky a geometrie pro všechny třídy středních škol ve verzích pro gymnázia, reálná gymnázia a reálky. Tyto učebnice se dočkaly několika vydání a byly s drobnými úpravami používány až do padesátých let 20. století. Mezi hlavními požadavky kladenými na nové učebnice bylo, aby co nejvíce odpovídaly zamýšleným obsahovým a metodickým změnám učiva, aby byly v souladu s učebnicemi vysokoškolskými a aby v nich byla používána jednotná terminologie a symbolika.

Porovnáme-li nové učebnice s učebnicemi z předcházejícího období, liší se především výraznou snahou o vysvětlení podstaty veškeré předkládané látky. Větší důraz se klade na budování elementárních matematických teorií přiměřeně věku žáků, na logické usuzování a kritické hodnocení získaných výsledků. Nový způsob zpracování učiva je založen na cyklickém uspořádání osnov matematiky. Všude, kde je k tomu vhodná příležitost, ilustrují autoři výklad geometrickou problematikou, jsou zdůrazňovány souvislosti mezi algebrou, matematickou analýzou a geometrií. Je třeba konstatovat, že nové učebnice matematiky byly na svou dobu na poměrně vysoké úrovni. Později se objevily připomínky, že tyto učebnice často přesahovaly chápání žáků a vedly k jejich neúměrnému přetěžování. V dalších vydáních byly proto některé obtížné partie vynečány nebo zjednodušeny.

V nových středoškolských učebnicích matematiky se poprvé objevily také grupy geometrických transformací. V učebnici [1] jim je věnován poměrně velký prostor; jsou zde vyloženy základní myšlenky obsažené v Kleinově Erlangenském programu. Hned v úvodu je zdůrazněn význam pojmů *transformace* a *grupa* v geometrii. Grupa transformací je posléze definována následujícím způsobem:

Grupa transformací je taková soustava transformací, že kterékoli dvě z nich postupně provedené (a tedy i libovolný jich počet) lze nahradití jedinou transformací téže soustavy.

Transformace, při které nenastává žádná změna, sluje identická a patří vždy ke grupě. ([1], str. 68)

V dalším textu jsou postupně probrány některé příklady grup (pohyby v rovině a prostoru, translace, rotace, šroubové pohyby, souměrnosti, podobnosti, homotetie) a jejich invarianty. Poté následuje vymezení elementární (metrické) geometrie jakožto geometrie, která přísluší ke grupě podobnostních transformací. Dále se autoři věnují projektivní geometrii odpovídající grupě projektivních transformací. Poslední odstavec nese název *Význam transformací pro úvahy geometrické*; je v něm naznačen význam geometrických transformací pro uspořádání geometrie.

3 Závěr

Z předchozího textu je patrné, že řada požadavků na výuku matematiky, které jsou dnes chápány jako moderní – omezení formalismu a abstraktního učiva, orientace na úlohy z praktického života, mezipředmětové vztahy atd., byla již před sto lety obsažena v Meranském programu. A zdůrazněme, že matematika byla tehdy ceněna mnohem více než dnes.

Literatura

- [1] B. Bydžovský, J. Vojtěch: *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií*, Jednota českých matematiků, Praha, 1912
- [2] F. Klein: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, A. Deichert, Erlangen, 1872 (též *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, 460–497)
- [3] W. Lietzmann: *25 Jahre Meraner Vorschläge*, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen 61 (1930), 289–300
- [4] F. Pahl: *Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts*, Verlag von Quelle und Meyer, Leipzig, 1913, 328–334
- [5] J. Potůček: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945*, Díl I. a II., Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 1992, 1993
- [6] J. Šedivý, J. Mikulčák, S. Židek: *Antologie z učebnic matematiky, Období 1860–1960*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988, 233–258
- [7] Q. Vetter: *Czechoslovakia*, The National Council of Teachers of Mathematics, The Fourth Yearbook – Significant Changes and Trends in the Teaching of Mathematics Throughout the World Since 1910, Teachers College, Columbia University, New York, 1929, 9–20

Zauzlené anuloidy

Daniela Velichová

*Katedra matematiky, Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovenská republika
email: daniela.velichova@stuba.sk*

Abstrakt. Príspevok pojednáva o zauzlených anuloidoch ako o špeciálnej podskupine dvojsových rotačných plôch Eulerovho typu, uvedená je analytická reprezentácia plôch, odvodené sú niektoré špecifické geometrické vlastnosti, tvarovacie charakteristiky a ilustrácie niektorých tvarovo zaujímavých reprezentantov.

Kľúčová slova: Zauzlený anuloid, Eulerova trajektória, dvojsová rotačné plochy Eulerovho typu

1 Úvod

Teória uzlov je časť algebraickej topológie, ktorá sa zaoberá štúdiom problému známeho ako „problém vnorenia“ jedného topologického priestoru do druhého. Vnorením priestoru X do priestoru Y rozumieme každé injektívne spojitý zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ také, že reštrikcia f na $f: X \rightarrow f(X) \subseteq Y$ je homeomorfizmus priestorov X a $f(X)$.

Najjednoduchšou formou spomínaného problému je napr. vnorenie jednotkovej kružnice do trojrozmerného euklidovského priestoru \mathbf{E}^3 . Prakticky povedané to znamená: „vezmeme kružnicu, rozstrihneme ju, vytvorenú šnôrku zauzlíme a napokon oba voľné konce opäť spojíme“. Uzavretá priestorová krivka, ktorá vznikla opísanou „operáciou“, je topologicky vnorenou kružnicou do trojrozmerného priestoru.

Pod zauzleným anuloidom budeme v tejto práci rozumieť iba regulárnu plochu, ktorá vznikne podobným zauzlením rotačného anuloidu (rotačnej plochy, nie telesa) v trojrozmernom priestore \mathbf{E}^3 . Zauzlený anuloid je plocha, ktorá nemá samoprieniky a singulárne body, je uzavretá, a jej obálkou je opäť anuloid. To znamená, že zauzlením anuloidu nevznikne iná, nová topologická štruktúra, resp. nejaký iný typ uzla než pôvodný. Dôsledkom je skutočnosť, že existuje nekonečne veľa rôznych foriem zauzlených anuloidov.

Z geometrického hľadiska môžeme považovať zauzlený anuloid za obalovú plochu, ktorá vznikne spojitým pohybom sféry v priestore po krivke ležiacej na rotačnom anuloide tak, aby nedochádzalo k samoprienikom. Takáto krivka je vo všeobecnosti trajektóriou špeciálneho zloženého rotačného pohybu okolo dvoch mimobežných osí - Eulerovho pohybu, nazýva sa Eulerova trajektória a je bližšie opísaná v [1]. Prostá Eulerova trajektória v základnom tvare je uzavretá priestorová krivka bez viacnásobných bodov, zobrazená na obr. 1, vľavo; jej kolmým priemetom do roviny kolmej na os otáčania ²o je súmerná rovinná krivka, Pascalova závitnica.

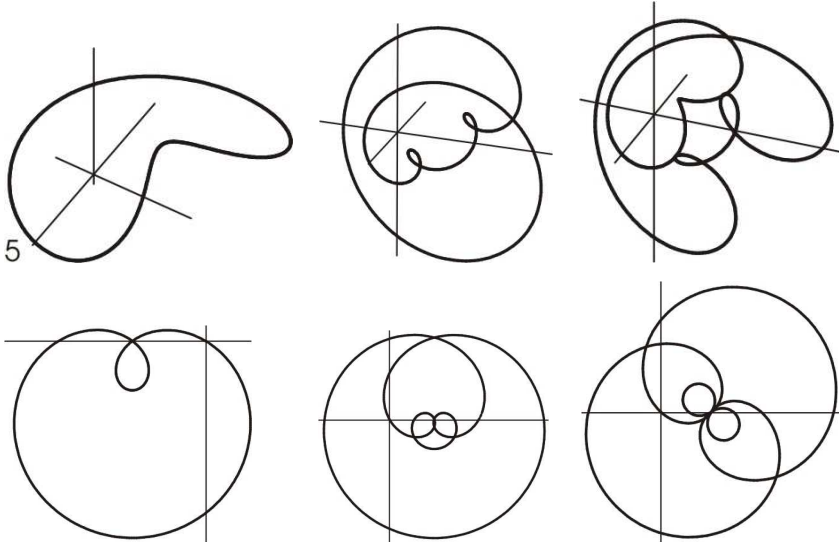
Nech je daný bod $A = (a, 0, 0, 1)$ na súradnicovej osi x , ktorý sa pohybuje Eulerovým pohybom zloženým z dvoch otáčaní, okolo súradnicovej osi $z = {}^1o$ a súčasne okolo osi 2o rovnobežnej so súradnicovou osou x vo vzdialenosti $d \neq 0$, ${}^2o \parallel x$, určenej rovnicou $y = d$. Trajektória pohybu bodu je analyticky reprezentovaná spojitou diferencovateľnou bodovou funkciou jednej reálnej premennej v , ktorá má na intervale $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ tvar

$$\mathbf{r}(v) = (a \cos k\pi v, a \sin k\pi v \cos l\pi v + d(1 - \cos l\pi v), a \sin k\pi v \sin l\pi v - d \sin l\pi v, 1).$$

Eulerova trajektória leží na anuloide s osou v osi otáčania 2o , stredom v bode $\mathbf{S} = (0, d, 0, 1)$ na súradnicovej osi y a polomerom rovnajúcim sa vzdialenosti a pohybujúceho sa bodu od osi otáčania 1o . Súradnice bodov Eulerovej trajektórie vyhovujú implicitnej rovnici takéhoto anuloidu

$$(x^2 + (y - d)^2 + z^2 + d^2 - a^2)^2 = 4d^2((y - d)^2 + z^2).$$

Niekoľko foriem Eulerovej trajektórie určených násobkami k a l uhlových rýchlostí jednotlivých otáčaní je ilustrovaných na obr. 1 vľavo, v strede a vpravo, s dvojicami parametrov $a = 5$, $(k, l) = (2, 2), (2, 4), (4, 6)$.



Obr. 1: Formy Eulerovej trajektórie a ich pôdorysy

2 Zauzlený anuloid ako cyklická dvojsová rotačná plocha Eulerovho typu 1. formy

Plochy v skupine všeobecných dvojsových rotačných plôch Eulerovho typu (úplná klasifikácia je v [2]) môžeme vytvoriť pohybom riadiacej kružnice g

ležiacej v rovine obsahujúcej prvú, vnútornú os otáčania 1o , ktorá je reprezentovaná vektorovou funkciou

$$\mathbf{r}(u) = (a + r \cos 2\pi u \quad 0 \quad b + r \sin 2\pi u \quad 1), u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad a, b, r \in \mathbb{R}, r \neq 0.$$

Parametrické rovnice tejto podskupiny plôch Eulerovho typu sú pre $(u, v) \in \langle 0, 1 \rangle^2$

$$x(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \cos k\pi v$$

$$y(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \sin k\pi v \cos l\pi v - (b + r \sin 2\pi u) \sin l\pi v + d(\cos l\pi v - 1)$$

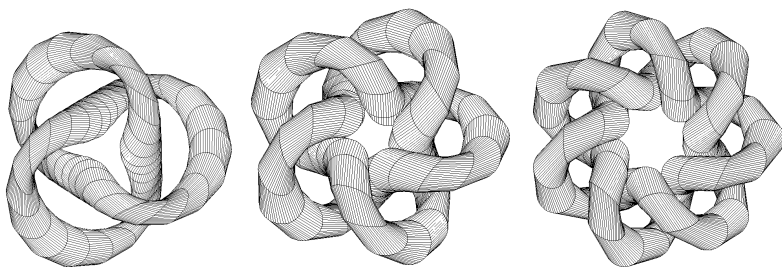
$$z(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \sin k\pi v \sin l\pi v + (b + r \sin 2\pi u) \cos l\pi v + d \sin l\pi v.$$

Zauzlený anuloid vznikne pri hodnotách tvarovacích parametrov, ktoré spĺňajú nasledujúce vzťahy

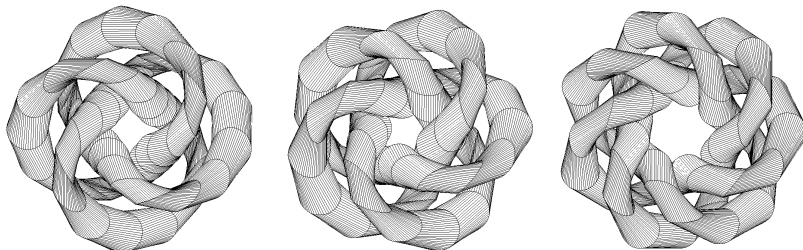
$$b = 0, a < d, a > r, k \text{ a } l \text{ sú párne čísla}$$

Rôzne modifikácie zauzleného anuloidu možno modelovať ďalšími tvarovacími charakteristikami - násobkami uhlov jednotlivých otáčaní k a l . Počet navinutí v smere otáčania okolo druhej osi otáčania, počet ramien, je $l/2$, počet navinutí okolo prvej osi, počet zauzlení, udáva hodnota $k/2$.

Jednoduchý netriviálny zauzlený anuloid (trojlístok - trefoil) je na obr. 2 vľavo, tvarovacie charakteristiky sú $a = 5, b = 0, d = 10, r = 3, (k, l) = (6, 4)$. Ďalšie zobrazené formy sú určené rovnakými tvarovacími parametrami a, b, d, r a hodnotami $(k, l) = (10, 4), (14, 4)$, plochy majú 2 spletené ramená, počet zauzlení je 3, 5 a 7. Na obr. 3 sú zobrazené zauzlené anuloidy s hodnotami charakteristík $a = 5, b = 0, d = 12, r = 3, (k, l) = (8, 6), (10, 6), (14, 6)$, sú vytvorené zauzlením troch ramien 4, 5 a 7 krát.

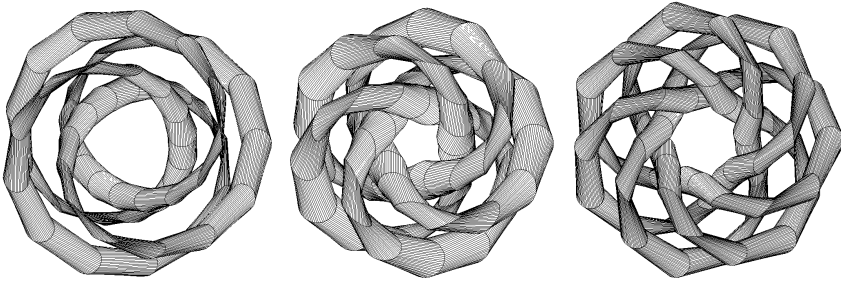


Obr. 2: Zauzlené anuloidy 1. formy, dvojrámenné



Obr. 3: Zauzlené anuloidy 1. formy, trojrámenné

Zauzlením štyroch ramien vznikne ďalšia modifikácia zauzleného anuloidu, tvarovacie parametre zobrazených plôch sú $a = 5$, $b = 0$, $d = 12$, $r = 2$, $(k, l) = (6, 8)$, $(10, 8)$, $(14, 8)$, teda štyri ramená sú zauzlené 3, 5 a 7 krát.



Obr. 4: Zauzlené anuloidy 1. formy, štvorramenné

3 Zauzlený anuloid ako cyklická dvojsová rotačná plocha Eulerovho typu 2. formy

Ak je riadiacou čiarou plochy kružnica ležiaca v rovine vonkajšej osi 2o určená vektorovou funkciou

$$\mathbf{r}(u) = (a + r \cos 2\pi u, b + r \sin \pi u, 0, 1), u \in \langle 0, 1 \rangle, a, b, r \in \mathbb{R}, r \neq 0,$$

potom parametrické rovnice tejto podskupiny plôch Eulerovho typu 2. formy sú pre $(u, v) \in \langle 0, 1 \rangle^2$ v tvare

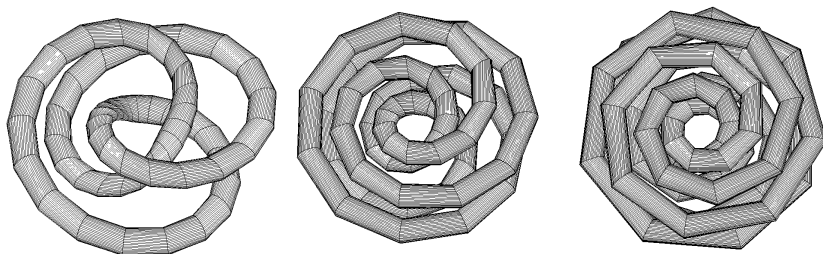
$$x(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \cos k\pi v - (b + r \sin 2\pi u) \sin k\pi v$$

$$y(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \sin k\pi v \cos l\pi v + (b + r \sin 2\pi u) \cos k\pi v \cos l\pi v + d(\cos l\pi v - 1)$$

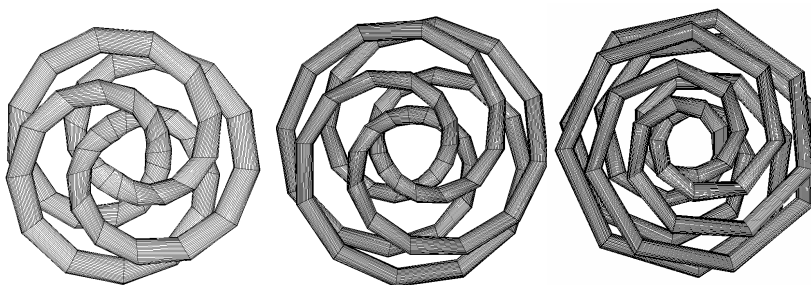
$$z(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \sin k\pi v \sin l\pi v + (b + r \sin 2\pi u) \cos k\pi v \sin l\pi v + d \sin l\pi v.$$

Rôzne modifikácie zauzleného anuloidu 2. formy možno modelovať tvarovacími charakteristikami – $b = 0$, násobky uhlov jednotlivých otáčaní k a l . Počet navinutí v smere otáčania okolo druhej osi otáčania, počet ramien, je $l/2$, počet navinutí okolo prvej osi, počet zauzlení, udáva hodnota $k/2$.

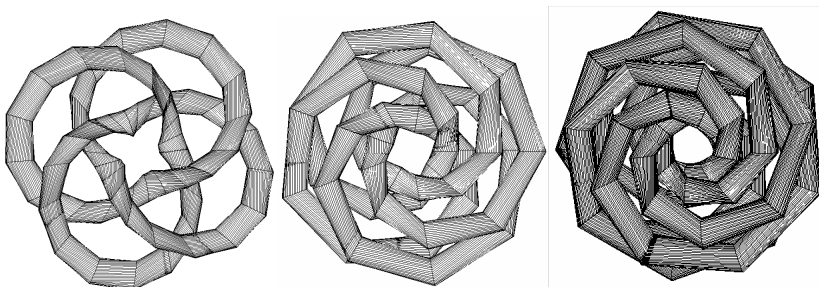
Zauzlené anuloidy 2. formy sú zobrazené na obr. 5, hodnoty parametrov pre jednotlivé formy zobrazené postupne zľava doprava sú: $a = 10$, $b = 0$, $d = 17$, $r = 3$, $(k, l) = (4, 6)$, $(4, 10)$, $(4, 14)$. Na obr 6. sú ukážky modifikácií určených parametrami $a = 10$, $b = 0$, $d = 17$, $r = 3$, $(k, l) = (6, 8)$, $(6, 10)$, $(6, 14)$, na obr. 7 sú ilustrácie zauzlených anuloidov určené násobkami uhlových rýchlostí $(k, l) = (8, 6)$, $(8, 10)$, $(8, 14)$.



Obr. 5: Zauzlené anuloidy 2. formy - dvojzuzlové



Obr. 6: Zauzlené anuloidy 2. formy – trojzuzlové



Obr. 7: Zauzlené anuloidy 2. formy – štvoruzlové

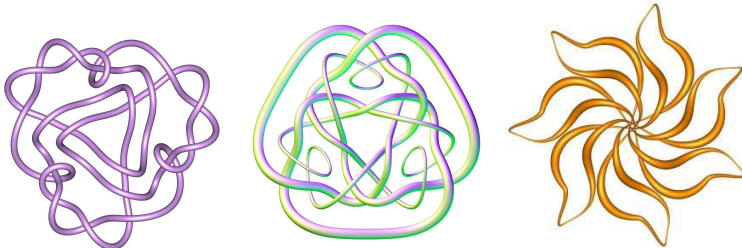
Niektoré komplexné tvary zauzlených anuloidov sú tvarovo také zaujímavé, že sa dajú využiť ako malé umelecké formy, pripomínajúce mozaikové motívy, krajky a vyšívané emblémy. Ukážky takýchto estetických objektov, ktoré sú voľne modifikovanými formami zauzlených anuloidov sú na obr. 8.

4 Záver

Vzhľadom na to, že existuje nekonečne veľa rôznych foriem zauzlených anuloidov, nie všetky tieto formy sa dajú získať ako špeciálne dvojsové rotačné plochy Eulerovho typu, ale mnohé sú modelované na základe iných princípov. K dispozícii je rozsiahla literatúra zaoberajúca sa štúdiom

zauzlených anuloidov, v ktorej sa uvedená problematika rozoberá z rôznych hľadísk a na rôznej teoretickej, či praktickej úrovni. Publikácia [3] je úvodom do teórie uzlov a topológie plôch, poukazuje na vzájomné súvislosti týchto dvoch oblastí a na ich súvislosti s teóriou grafov a teóriou grúp. Kniha je zrozumiteľne napísaná a obsahuje množstvo ilustrácií, vyžaduje iba znalosť stredoškolskej matematiky. Kniha [4] je pohľadom na teóriu uzlov z historického hľadiska, ukazuje, že vytváranie uzlov možno považovať za jednu z najstarších a najrozšírenejších techník v umení, tkáčstve, moreplavectve, kódovaní, šifrovaní, stavebníctve, architektúre, a v mnohých iných aplikáciách a praktických činnostiach ovplyňujúcich rozvoj ľudskej civilizácie.

Niektoré zaujímavé a podnetné zdroje sa dajú nájsť aj na Internete, kde sú k dispozícii aj mnohé interaktívne aplikácie umožňujúce modelovanie zauzlených anuloidov on-line priamo na webe. Stránka na adrese [5] je kompletne venovaná informáciám o dostupných zdrojoch s odkazmi na všetky aspekty – teória, umenie, modelovanie, videá, galéria.



Obr. 8: Zauzlené anuloidy, voľné formy

Literatúra

- [1] D. Velichová: *Trajektórie zložených rotačných pohybov*, G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku, ISSN 1335- X, roč. 3, č. 5, 2006, str. 47-64.
- [2] D. Velichová: *Klasifikácia dvojosových rotačných plôch*, G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku, ISSN 1335- X, roč. 4, č. 7, 2007, str. 63-82.
- [3] N. D. Gilbert, T. Porter: *Knots and Surfaces*, Oxford University Press, 1997 (original 1994).
- [4] J. C. Turner, P. Van De Griend: *History and Science of Knots*, World Scientific Publishing Co., 1996.
- [5] <http://www.earlham.edu/~peters/knotlink.htm>

Abstract. Special subgroup of two-axial surfaces of revolution of Euler type, knotted tori, is presented, their analytic representation and some of their specific intrinsic properties and shape characteristics are derived and discussed, and several representatives of interesting shapes are illustrated in the paper.

Calibration of the Camera for the Pure Translation Motion

Šárka Voráčová

*Dept. of applied mathematics, Fac. of Transportation Sciences, CTU Prague
Na Florenci 25, 110 00 Prague, Czech Republic
email:voracovar@fd.cvut.cz*

Abstract. The paper presents a method for obtaining affine structure from an image sequence taken by a translating camera with constant unknown intrinsic parameters. The relationship between two images is determined by the Fundamental matrix. We propose a geometrical method for estimating the fundamental matrix of pure translation and we will also discuss methods for upgrading the projective reconstruction to an affine and metric reconstruction of the scene.

Key words: Epipolar geometry, Autocalibration, Reconstruction of the scene

1 Introduction

Inferring three-dimensional information from images taken from different viewpoints is a central problem in computer vision. A traditional approach to analysis of perspective images is to measure and model the camera that took the image. Camera calibration is the process of determining the internal camera geometric and optical characteristics and 3D position and orientation of the camera. The papers [1, 2, 5, 8] represent some of the approaches to camera calibration.

In many applications camera calibration is not possible. In that case we cannot extract any metric information, but a projective structure is still possible. If we assume that the camera parameters do not change between successive views, the projective invariants can even be used to calibrate the cameras from three or more views [3, 8]. Furthermore, if we can introduce some knowledge of the scene into the projective structure, we can obtain affine and even metric reconstruction. For example, by specifying a plane at infinity, an affine structure can be computed, by specifying the image of absolute conic we obtain a metric reconstruction of the scene.

A typical system for the construction of 3-D models from two views operates in three phases. In the first phase a set of matched points (i.e., pixels in the two views that are the images of the same point in the real world), are established between the two images. In the second phase, the identified matched points are used to derive the relative locations, orientations and other parameters of the cameras. This process usually requires iterative solution of a set of non-linear equations. In a third phase the locations of 3-D points are computed.

In the following we give a brief review of reconstruction of the scene from two views. For more detailed treatments regarding the stereo vision the reader is referred to the [14], or relevant chapters in the books [5, 7].

2 Two view geometry

Two perspective images of a single rigid object are related by the so-called epipolar geometry, which can be described by a 3×3 singular matrix. If the internal (intrinsic) parameters of the images (e.g., the focal length, the coordinates of the principal point, etc) are known, we can work with the normalized image coordinates, and the matrix is known as the essential matrix [12]; otherwise, we have to work with the pixel image coordinates, and the matrix is known as the fundamental matrix [4, 5]. It contains all geometric information that is necessary for establishing correspondences between two images, from which three-dimensional structure of the perceived scene can be inferred.

2.1 Projective matrix

We assume the pinhole camera which performs the perspective transformation of 3D space on a projection plane. In homogenous coordinate from embedded affine space the central projection could be given by mapping:

$$\begin{pmatrix} 1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1, -f \frac{x_1}{x_3}, -f \frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix},$$

where f denotes the focus length of the camera (intrinsic parameter). The homogenous coordinates of 3D point X in a world coordinate system and its image homogenous coordinates X_1 are related by composition of central projection and affine mapping in to the image coordinates or pixels, hence it's given by equation

$$X_1 = PX$$

Where P is 3×4 matrix known as the perspective projective matrix of the camera. The matrix can be decomposed as

$$P = K[t; R]$$

where K is 3×3 intrinsic parameter matrix (calibration matrix), mapping the normalized image coordinates to the image coordinates. K has following well known form

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -m_x f & b f & x_0 \\ 0 & -m_y f & y_0 \end{pmatrix},$$

where m_x , m_y and b represent scale and skew of the image coordinate system and vector t gives the position of the image origin. Vector t and matrix R

represent respectively the translation vector and rotation matrix defining the rigid displacement between the two cameras.

2.2 Fundamental matrix

Consider the case of two cameras. For algebraic consideration we use the first camera coordinate system as the world coordinate system. Then the camera matrices are in form $P_1 = K_1 [0I]$; $P_2 = K_2 [tR]$. In order for X_1, X_2 to be matched image points, the following equation must be satisfied.

$$X_1^T F X_2 = 0 \quad (1)$$

Fundamental matrix F is in form.

$$F = K_1^{-T} t_M R K_2^{-T}, \quad (2)$$

where t_M is the skew-symmetric matrix defined by vector t such that $t_M x = t \times x$ for all 3D vector x . Since $\det t_M = 0$, $\det F = 0$, the fundamental matrix F is of rank two. The matrix F has only 7 degree of freedom, because it is only defined up to scalar factor.

The fundamental matrix is the algebraic representation of epipolar geometry. For each point X_1 in first image, there exists a corresponding epipolar line e_2 in the second image given by equation $e_2 = F^T X_1$. The epipoles are the right (left) null space of the F .

One of the most significant properties of fundamental matrix is that the matrix may be used to determine the camera matrices of the two views. Camera matrices P_1, P_2 are determined up to the projective transformation. Papers [1, 3, 8] has shown that it is possible to use these projective invariants to compute the camera calibration. These approaches use geometric relation between two views which is contained in Fundamental matrix. The fundamental matrix play a crucial role in application of 3D Computer Vision, thus it is very important to develop precise techniques to compute it.

2.3 Special configuration - translation

A special configuration arises from a particular relationship between the translation direction and the direction of the rotation axis. Such cases are important firstly because they occur in practice and secondly because the fundamental matrix has a special form and thus additional properties.

In considering pure translation of the camera, one may consider the equivalent situation in which the camera is stationary and the object undergoes a translation t . In this situation points in 3D space move on straight lines parallel to t . Vanishing point of all trajectories is epipole for both views.

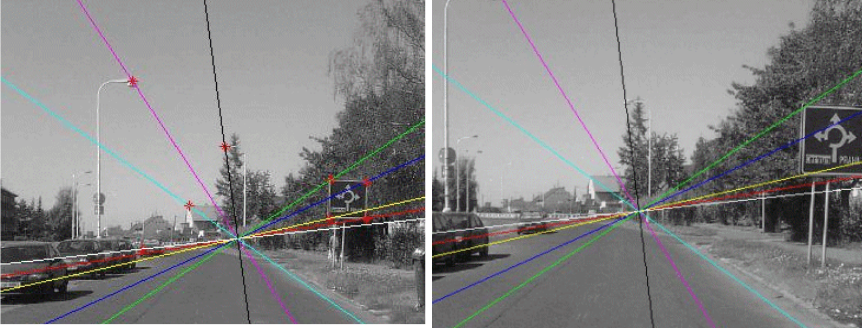


Fig. 1 – Pure translation. The epipoles have the same coordinates in both images and the same epipolar lines are overlaid.

Assuming the camera with the same intrinsic parameters (Fig. 1) the both epipoles has the same image coordinates. Each epipolar plane intersects both images in the parallel epipolar line with the same position within the picture (auto-epipolar) and moreover all 3D points U at infinity ($U \in \pi_\infty$) projects in to the vanishing points with the identical image coordinates $U_1=U_2$. In this case it is possible to carry out affine reconstruction from two views. This is easily verified formally, but it is also part of our common experience that as one moves objects at a great distance do not appear to move-only the nearby objects move. Thanks to identical infinite homography we can obtain an affine reconstruction but metric reconstruction of the scene isn't possible without any further information about scene or displacement of the camera.

Suppose the displacement t , R between the two cameras is pure translation and the pictures was taken with the same camera, which yields $K_1=K_2=K$. The projection matrices of cameras are in form $P_1 = K [0 I]$, $P_2 = K [t I]$.

Then the formula for fundamental matrix (2) reduces in to the form

$$F = K^{-T} t_M K^{-1} = (Kt)_M = (E_2)_M,$$

hence the fundamental matrix is skew-symmetric matrix and has only 2 degrees of freedom, which correspond to the position of the epipole.

The fundamental matrix $F = (E_2)_M = (E_1)_M$ can be estimated linearly, it is easy to see that the epipole can be uniquely determined from two point correspondences. The only degeneracy configuration is if the two 3D points are coplanar with both camera centres. Once we have the fundamental matrix, we also know the epipolar point E_2 . For an affine reconstruction we can choose the camera matrices $P_1 = [O I]$; $P_2 = [E_2 I]$.

2.4 The eight point algorithm

In the following we explain the geometrical interpretation of eight point algorithm applied on over determined pure translation motion. Eight point algorithm is one of the most cited algorithm. The advantage of this method is that it leads to a non iterative computation. The eight point algorithm was introduced by Longuet-Higgings [12].

Equation (1) is linear and homogenous in the 9 unknown elements of matrix F . If we give 8 matched points in general position we can determine a unique solution for F , defined up to scalar factor. In practice we are given much more than 8 matches and we use a least-squares method to minimize

$$\sum_i \left({}^iX_1^T \cdot F \cdot {}^iX_2 \right)^2 \quad (3)$$

Let fundamental matrix has the form

$$F = (E_2)_M = \begin{pmatrix} 0 & -e_y & e_x \\ e_y & 0 & -1 \\ -e_x & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

If the point in the first image has the coordinates ${}^iX_1 = (1, {}^ix, {}^iy)$, than the corresponding epipolar line has coefficients ${}^ie_1 = F^T {}^iX_1 = ({}^ix e_y - {}^iy e_x, {}^iy - e_y, -{}^ix + e_x)$. The least-squares method minimizes (3) which give for pure translation

$$\sum_i \left(({}^iy - e_y)^2 + ({}^ix - e_x)^2 \right) \cdot d^2({}^iX_1, {}^ie_1),$$

Where $d(X_I, e_I)$ denotes the Euclidean distance of the point X_I of the epipolar line $e_I = (e_{1w}, e_{1x}, e_{1y})$. In the optimal case image points lie on their epipolar lines, but from noisy data the distances are usually nonzero.

That means that minimizing $({}^iy - e_y)^2 + ({}^ix - e_x)^2$ is the same than favoring the fundamental matrix with the epipoles near the image, so the linear algorithm shifts the epipoles toward the image center. On the contrary, where the points to be matched are close to the epipole then the determination of the epipolar line is more unstable, since any uncertainty in the slope of the epipolar line.

3 Conclusion

We can summarize, than using of the widespread eight point algorithm for pure translation motions brings the drawbacks due the combination of two properties:

1. If the epipole is in the image, the fundamental matrix is inaccurate.
2. The minimizing criteria favoring the fundamental matrix with epipoles

References

- [1] P. Bearsdley, D. Murray, A Zisserman: Camera Calibration Using Multiple Images, Proc of ECVV-92, LNCS-Series Vol. 588, Springer-Verlag, pp. 312-320, 1992
- [2] H. A. Beyer: Accurate Calibration of CCD Cameras, Proc. of IEEE Comp. Vision and Pattern Recognition Conference, pp. 96-101, 1992
- [3] O. Faugeras, Q. Luong: Self-calibration of Moving Camera from Point Correspondences and Fundamental Matrices, International Journal of Computer Vision, 1, 5-40, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004
- [4] O. Faugeras, Q. Luong: A stability Analysis of the Fundamental Matrix, Proceedings of the European Conference on Computer Vision, Stockholm, 1994, pp. 577 - 588
- [5] O. Faugeras: Three-Dimensional Computer Vision: a Geometric Viewpoint, MIT Press, 1993
- [6] G. Golub, C. Loan: Matrix Computation, The John Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1996
- [7] R. I. Hartley, A. Zisserman: Multiple View Geometry in Computer Vision, Cambridge University Press, 2000
- [8] R. Hartley: An Algorithm for Self Calibration from Several Views, Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1994, pp. 908-912
- [9] R.I. Hartley: In Defense of the Eight-point Algorithm, IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 19 (6), pp. 580-593, 1997
- [10] M. Kočandrlová, H. Lakomá: Jednosnímková fotogrametrie, Proc. of Symposium on Computer Geometry, SCG 2006, Vol. 15, pp. 79-84, 2006
- [11] D. Liebowitz, A. Zisserman: Metric Rectification for Perspective Images of Planes, Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1998, pp. 482-488
- [12] H.C. Longuet-Higgins: A Computer Algorithm for Reconstructing a Scene from Two Projections, Nature, Vol.293,10,1981
- [13] R. Pospíšilová: Kritické konfigurace pro výpočet kamery, sborník 25. konference GCG, 2006
- [14] R.Y. Tsai, T.S. Huang: The Perspective View of Three Points. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 6, pp 13-27, 1984
- [15] Z. Zhang: Determining the Epipolar Geometry and its Uncertainty, International Journal of Computer Vision, 27(2), 1998, pp.161-195

Other properties of monotone rectangular polygons

Edita Vranková

*Dept. of mathematics and computer science, Fac. of Education Univ. of Trnava
Priemyselná 4, 918 43 Trnava, Slovak Republic
e-mail: evrankov@truni.sk*

Abstract. In the last-year contribution we showed the influence of some symmetry and monotony of rectangular polygons on the geometric structure of the set $D(M,N)$. Now, the aim is to show other properties of D -monotone rectangular polygons and to find some criterion of D -monotony of a rectangular polygon interesting from algorithmic point of view.

Key words: Monotone polygon, rectangular polygon, the set $D(M,N)$.

1 Introduction

“Cutting and packing” tasks are very important in engineering practice (the sheet metal forming, automobile industry) but also in clothing or shoe industry. There are solved tasks which lead to interactive or automatic placements of plane geometrical figures without overlapping into some planar domain when only translations of figures are allowed.

In practice the figures are approximated almost always by (non-convex) polygons. Every two different placed polygons cannot be overlapping each other. Very useful theoretical tool for solving this task can be the set $D(M,N)$ of all dense placements of moving polygon M and fixed polygon N in plane E_2 [1], [3], [5]. The complexity of construction of this set depends proportionally to geometrical properties (convexity, rectangularity and monotony) of polygons M, N . We want to study other properties of monotone rectangular polygons and we try to find some criterion of rectangular polygon monotony.

2 Monotony of rectangular polygons

Rectangular parts occur relatively often in the engineering practice. If M, N are harmonic [4] rectangular polygons and at least one from them is non-convex then the set $D(M,N)$ ¹ is the boundary of an open set $O(M,N)$ [3, Th. 4.1], [5] and it is rectangular generalized simple closed broken line (it can contain degenerated parts - points or segment lines) [4, Prop. 1]. If both polygons M, N are convex then the set $D(M,N)$ is the boundary of a convex polygon $I(M,N)$ [3, Th. 6.7], [5]. The aim

¹ $D(M,N) = \{x \in E_2; M(x), N \text{ are densely placed, i.e. } \partial M(x) \cap \partial N \neq \emptyset$
and $\text{int}M(x) \cap \text{int}N = \emptyset\}$,

where $M(x) = M + (x - o)$ is the translated position of polygon $M = M(o)$ to the (reference) point x and where point o is called *origin* in plane E_2 .

of all studies for construction of $D(M,N)$ is to construct it for arbitrary polygons M, N . According to [2] there exists such the group of „good non-convex“ polygons that the set $D(M,N)$ not contains any degenerated parts and it is the boundary of the set $I(M,N)$ [2, Theorem]. That is way we will study another properties of these - monotone polygons, particularly rectangular ones.

2.1 Monotony of polygons

First, in this chapter we remind for arbitrary polygons some results from articles [5], [6] and add some new ones.

According to definition from [2] polygon $M = a_1 \dots a_n$ is *monotone with respect to line D* (or *D -monotone*) if after suitable labeling of the vertices there exists a number $k, 1 < k < n$ such that the orthogonal projections of the oriented sides $a_i a_{i+1}$ into a arbitrary line parallel to the line D are equally oriented line segments for all $i = 1, \dots, k-1$ and for all $i = k, \dots, n$, where $a_{n+1} = a_1$. The line D will be called the *warp-line* of monotony polygon M .

The arbitrary perpendicular to the warp-line D of D -monotone polygon $M = a_1 \dots a_n$ will be called *D -perpendicular*. The lines P_i perpendicular to line D and containing vertices $a_i, i = 1, \dots, n$ will be called *vertex D -perpendiculars*, the lines P_1 and P_k containing vertices a_1 and a_k end *D -perpendiculars*. The lines D_i parallel to the line D and containing vertices $a_i, i = 1, \dots, n$ will be called *vertex D -parallels*. The interior angles $a_n a_1 a_2$ or $a_{k-1} a_k a_{k+1}$ of polygon M will be called *end angles*.

R e m a r k 1. It is obvious that the vertices a_1, a_k divide the boundary of polygon M on two D -monotone simple broken lines $a_1 a_2 \dots a_k$ (*first boundary line*) and $a_k a_{k+1} \dots a_n a_1$ (*second boundary line*), $1 < k < n$. Let D^{1k} be line $a_1 a_k$, then we can analogically define for D -monotone polygon which is also D^{1k} -monotone all mentioned notions with respect to the line D^{1k} . But, D -monotone polygon must not be D^{1k} -monotone.

The basis for study of D -monotony of (arbitrary) polygons is following proposition mentioned in [6] which has above all theoretical importance.

Proposition 1 [2, Proposition 1]. A generalized polygon is a D -monotone polygon if and only if every line orthogonal to line D intersects the boundary of the polygon in **at most two points**.

The fundamental properties of a D -monotone polygons are evident:

- a) The line D cannot be perpendicular to any side of D -monotone polygon,
- b) D -monotone polygon M lies in the plane strip $P_1 P_k$ determined by end D -perpendiculars P_1 and P_k ,
- c) only simple polygons (their boundary is one simple closed broken line) can be D -monotone,
- d) the line segment with (different) endpoints which are intersection points of D -perpendicular with boundary of D -monotone polygon M , whole lies in M .

According to the following proposition there suffices to find only points of intersection lines D_i with the boundary of D -monotone polygon M .

Proposition 2. A polygon is a D -monotone polygon if and only if every vertex D -perpendicular P_i , different from P_1 and P_k , intersects the boundary of the polygon in **two different points** (Fig. 1).

P r o o f of this proposition can be found in paper [6].

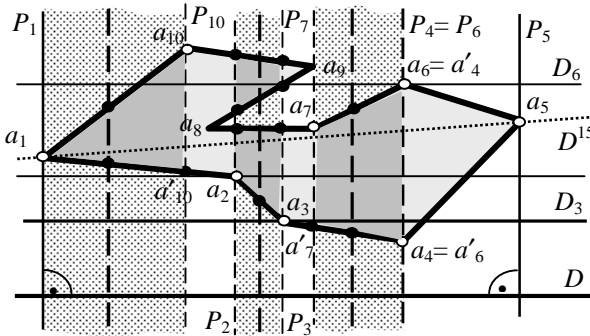


Fig. 1: To proposition 2 and theorem 1

Following geometrical result is more interesting from the algorithmic point of view. Its truth follows from the definition of D -monotony, properties of orthogonal projection in the plane and elementary geometry experience.

Theorem 1. The polygon $M = a_1a_2 \dots a_n$ is a D -monotone if and only if vertices a_{i-1}, a_{i+1} lie in the opposite half-planes with boundary line P_i for all $i = 2, \dots, k-1$ and for all $i = k+1, \dots, n$ (Fig. 1).

2.2 Other properties of monotony of rectangular polygons

The mentioned experience and results hold for arbitrary polygons, i.e. **also for rectangular**. But these have also several specific properties. That is why we are going to formulate other results right away for rectangular polygons². At first we are going to study some properties of rectangular D -monotone polygon and then we try to formulate D -monotony of rectangular polygon conditions.

The definition and orthogonality of D -monotone polygon M implicate other following fundamental properties of D -monotone **rectangular** polygons:

- a) the warp-line D cannot be perpendicular or parallel to any side of a D -monotone polygon (i.e. also any D -perpendicular),
- b) D -monotone polygon M lies in the plane strip P_1P_k ,

² We are going to interest for non-convex rectangular polygons. If q is the number of interior angles with size 270° of rectangular non-convex polygon, then the number of all vertexes is $2q + 4$ (the proof is possible by means of mathematical induction).

c) the interior end angles $a_n a_1 a_2$, resp. $a_{k-1} a_k a_{k+1}$ are right.

D -monotony of rectangular polygons is possible to find out by theorem 1 and also **particularly** by following theorem equivalent to [5, Th. 5], which truth results from rectangularity of M and orthogonality of lines P_i and D_i .

Theorem 2. The rectangular polygon $M = a_1 a_2 \dots a_n$ is a D -monotone if and only if vertices a_{i-1}, a_{i+1} lie in the same half-plane with boundary line D_i for all $i = 2, \dots, k-1$ and for all $i = k+1, \dots, n$.

R e m a r k 3. If a D -monotone polygon is not rectangular, then vertices a_{i-1}, a_{i+1} must not lie in the same half-plane with boundary line D_i .

Following proposition describes the set of all lines D such that the given rectangular polygon is D -monotone with respect to them.

Proposition 3. Let rectangular polygon $M = a_1 a_2 \dots a_n$ be D -monotone, then (Fig. 2)

a) one from half-lines with initial point a_1 or a_k on line D_1 or D_k parallel to line D , lies inside end angle $a_n a_1 a_2$ or $a_{k-1} a_k a_{k+1}$. In other words, the vertices a_n, a_2 or a_{k-1}, a_{k+1} lie in the opposite half-plane with boundary line D_1 or D_k ,

b) the polygon M is monotone also with respect to every other line containing vertex a_1 or a_k and such that one from its half-lines with initial point a_1 or a_k lies inside end angle (right) $a_n a_1 a_2$ or $a_{k-1} a_k a_{k+1}$.

Corollary 1. If the rectangle polygon $M = a_1 a_2 \dots a_n$ is D -monotone, then it is also D^{1k} -monotone, $1 < k < n$.

R e m a r k 4. If D -monotone polygon is not rectangular, then it must not be D^{1k} -monotone. Note that D^{1k} -monotony of polygon is D -monotony where $D = D^{1k}$.

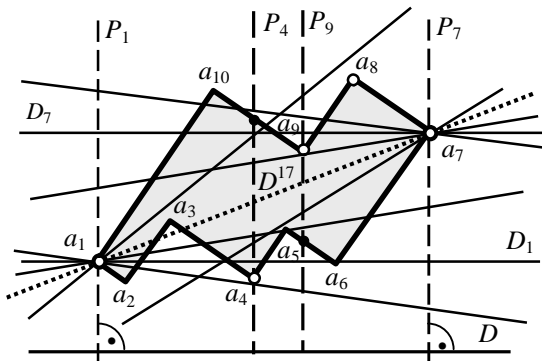


Fig. 2: To proposition 3

Corollary 2. If the rectangle polygon $M = a_1 a_2 \dots a_n$ is D -monotone, then it is not monotone with respect to any D -perpendicular or any D^{1k} -perpendicular.

We are interesting now in question, whether it is possible to determine some criterion of rectangular polygon D^{1k} -monotony, which is different from

criteria by theorems 1 and 2. It seems that the answer is positive. The **main results** are given in the following theorem also interesting from algorithmic viewpoint and in its corollary.

Theorem 3. The rectangular polygon $M = a_1 a_2 \dots a_n$ is D^{1k} -monotone if and only if after suitable labeling of the vertices there exists an odd number k , $1 < k < n$ such that interior end angles $a_n a_1 a_2$, $a_{k-1} a_k a_{k+1}$ and interior angles $a_{2i-1} a_{2i} a_{2i+1}$ are right for all $i = 1, 2, \dots, (k-1)/2$ and for all $i = 1, 2, \dots, n/2$ and remaining interior angles have size 270° . In other words, end interior angles are right, even interior angles are right and odd interior angles (within end angles) have size 270° (Fig. 3).

P r o o f. The truth of necessary condition results from fundamental properties of D^{1k} -monotony of rectangular polygon M , theorem 2 and proposition 3a). The oddness of number k is evident because every part of boundary M has odd number of vertices between end vertices a_1, a_k .

Now, we prove truth of sufficient condition. Let be after suitable labeling of the vertices M there exists odd number k , $1 < k < n$ such that interior angles with vertices a_1, a_k are right, even interior angles are right and odd interior angles (within end angles) have size 270° . With respect to rectangularity of M it holds that vertices a_{i-1}, a_{i+1} lie in the same half-plane with boundary line D_i parallel to D^{1k} for all $i = 2, \dots, k-1$ and for all $i = k+1, \dots, n$. According to theorem 2 and proposition 3b) it holds that polygon M is D^{1k} -monotone.

Corollary 3. The polygon M is not monotone with respect to any line if and only if it has four neighboring interior angles with sizes $90^\circ, 270^\circ, 270^\circ, 90^\circ$ or $270^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 270^\circ$.

Theorem 3 and corollary 3 are important from practical viewpoint because by testing interior angles of given rectangular polygon we obtain result whether the polygon is monotone with respect to some line and also which line is it.

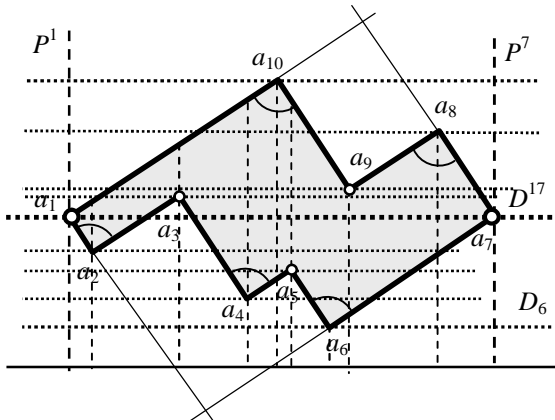


Fig. 3: Rectangular D^{1k} -monotone polygon

2.3 Notes on number of vertices of the set $D(M,N)$ of monotone rectangular polygons M, N

According above mentioned in this chapter, if M, N are D -monotone polygons then the set $D(M,N)$ is the boundary of the monotone polygon $I(M,N)$ and it is simple closed broken line. Second result means that the set $D(M,N)$ is possible obtain analogically as in the case of convex polygons M, N . Then it can be expect that also for number vertices of the set $D(M,N)$ of D -monotone polygons M, N hold equal proposition as for convex polygons M, N . We will concern in detail with this problem in next research.

3 Conclusion

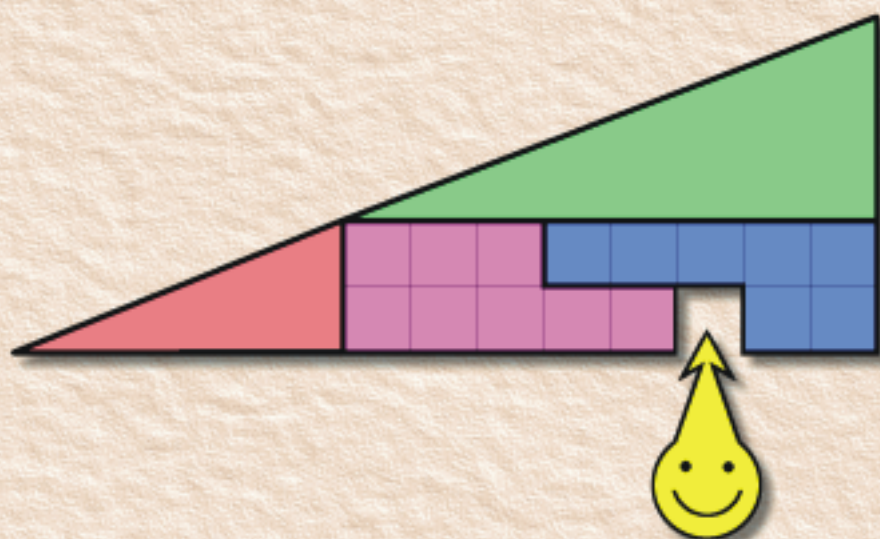
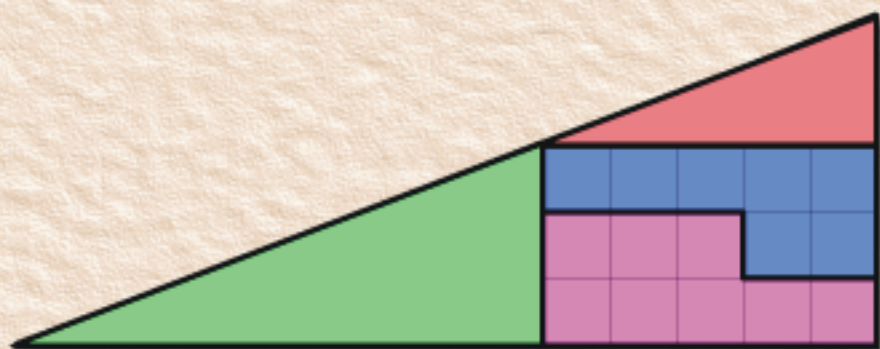
A monotony of rectangular polygons is very important property from practical algorithmic viewpoint. The monotony of polygons M, N is “transferred” into the set $D(M,N)$ and it simplifies construction of the set $D(M,N)$. This is main reason, why we studied criterions of a monotony of rectangular polygons.

Acknowledgements

The author has been supported by the VEGA Grant No. 1/2006/05

References

- [1] M. Božek: *On Dense Placements of Polygons*, Proc. of the 10th Spring School on Computer Graphics and its Applications, UK Bratislava, 1994, pp. 233-239
- [2] M. Božek: *Dense Placements of Monotone Polygons*. Proc. of Symposium on Comp. Geom. SCG'2005, Kočovce, vol.14. Bratislava: STU Bratislava, 2005, ISBN 80- 227-2278-2, pp. 9-14
- [3] E. Vranková: *Construction of the Set of the Dense Placements of Two Polygons Using Central Symmetry Via Union Method*, Ph.D. Thesis (in Slovak), Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University Bratislava, 2000.
- [4] E. Vranková: *Some Properties of the Set Dense Placements of Congruent Polygons* (in Slovak), Proc. of Symposium on Comp.Geom. SCG'2005, Kočovce, Vol.14, STU Bratislava, 2005, ISBN 80- 227-2278-2, pp. 87-92.
- [5] E. Vranková: *On Symmetry and Monotony in Placement of Mutually Congruent Rectangular Polygons*, Sborník 26. konference o geometrii a počítačové grafice, GCG'2006, Nové Město na Moravě, JČU České Budějovice, ČR, 2006, ISBN 80-7040-902-9, pp. 301-306.
- [6] E. Vranková: *Monotony of Rectangular Polygons and their Dense Placements*, Proc. of Symposium on Comp. Geom. SCG'2007, Kočovce, vol.16. Bratislava: STU Bratislava, pp. 144-151.



ISBN 978-80-85763-41-6