# Reflexe kategorie všech pořádkových hypergrup v kategorii všech kvazipořádkových hypergrup

ŠÁRKA HOŠKOVÁ
Katedra matematiky, Universita obrany Brno, Kounicova 65, 612 00 Brno
*E-mail: sarka.hoskova@seznam.cz*

**Abstrakt**: In various mathematical branches to certain structures there are associated some other structures, linked with them somehow. E.g. abelian groups to groups, ordered sets to quasi-ordered sets, complete metric spaces to metric spaces, orderings to quasiorderings, complete lattices to lattices, integral domains to fields, $T_1$-topological spaces to topological spaces etc. It is well known that this situation can be describe in a unique way. The tools for this aim are furnished by category theory.

This contribution is devoted to the description of one such a construction. First the necessary concepts from the theory of hyperstructures are introduced (hyperoperations, hypergroups, homomorphism of hyperstructures). Then order and quasi-order hypergroups are defined and their basic properties are presented.

The main goal is to show that the category of order hypergroups forms the full subcategory of the category of all quasi-order hypergroups. For this purpose some notions concerning reflective subcategories are reminded. At the end a generalization of quasi-order hypergroups is mentioned for which the similar result can be proved.

**Klíčová slova**: Hyperoperation, hyperstructure, order hypergroup, reflective subcategory, quasi-order hypergroups.

**2000 MSC:** 18A40, 20F55, 20F60, 20N20.

V různých matematických disciplínách jsou určitým strukturám přiřazeny jistým způsobem s nimi svázané nové struktury, např.

- obecným grupám abelovské grupy,
- kvaziuspořádaným množinám uspořádané množiny,
- metrickým prostorům úplné metrické prostory,
- svazům úplné svazy,
- oborům integrity pole,
- topologickým prostorům $T_1$-topologické prostory apod.

Ukazuje se, že tuto situaci lze obecně jednotným způsobem popsat. Nástroje k tomu nám poskytuje teorie kategorií.

Nejprve však uvedeme základní pojmy z teorie hyperstruktur.

**Definice 1.** *Hypergrupoid* je dvojice $(H, \cdot)$, kde $H$ je neprázdná množina a zobrazení $H \times H \to P^\star(H)$ je binární hyperoperace. ($P^\star(H)$ je systém všech neprázdných podmnožin množiny$H$).

**Definice 2.** *Polohypergrupa* je dvojice $(H,\cdot)$, kde hyperoperace „$\cdot$“ je asociativní tj. pro každou trojici prvků $a,b,c \in H$ platí $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$. (zde $A\cdot B = \bigcup\{a\cdot b; a\in A, b\in B\}$ pro každou dvojici množin $A \neq \emptyset \neq B$, $A,B \subseteq H$).

**Definice 3.** *Kvazihypergrupou* budeme rozumět hypergrupoid $(H,\cdot)$ splňující reprodukční axiom — $a\cdot H = H = H\cdot a$, pro každý prvek $a \in H$.

**Definice 4.** *Hypergrupa* je polohypergrupa $(H,\cdot)$, která navíc splňuje reprodukční axiom.

**Definice 5.** Nechť $(H,\cdot)$ a $(G,*)$ jsou hypergrupy. Zobrazení $\varphi\colon H \to G$, pro něž platí $\varphi(a\cdot b) \subseteq \varphi(a) * \varphi(b)$ pro libovolné $a,b \in H$, se nazývá *inkluzní homomorfismus*.

Následující pojem byl zaveden J. Chvalinou v práci [3].

**Definice 6.** Hypergrupu $(H,\cdot)$, splňující podmínky

(i) $a \in a^2 = a^3$ pro každé $a \in H$,
(ii) $a\cdot b = a^2 \cup b^2$ pro každou dvojici $a,b \in H$

nazveme *kvazipořádkovou hypergrupou*. Pokud je navíc splněna podmínka jednoznačné odmocniny

(iii) jestliže $a,b \in H$, $a^2 = b^2$, pak $a = b$,

pak se hypergrupa $(H,\cdot)$ nazývá *pořádková hypergrupa*.

Je možné ukázat, viz práce Chvaliny [3] či Corsiniho [2], že předchozí pojmy jsou ekvivalentní s následujícími:

**Definice 7.** Hypergrupa $(H,\cdot)$ se nazývá *kvazipořádková* (*pořádková*), jestliže existuje kvaziuspořádání (uspořádání) „$\leq$“ na $H$ takové, že

$$x\cdot y = U_{\leq}(x) \cup U_{\leq}(y) \qquad \text{pro } x,y \in H.$$

Přitom pro $x \in H$ značí $U_{\leq}(x)$ horní konec určený prvkem $x$, tj. $U_{\leq}(x) = \{a \in H; x \leq a\}$.

Dále připomeňme základní pojmy z teorie kategorií.

**Definice 8.** *Kategorie* $\mathbb{C}$ se skládá z:

- třídy Ob, jejíž prvky nazýváme $\mathbb{C}$-objekty,
- třídy Mor, jejíž prvky nazýváme $\mathbb{C}$-morfismy,
- dvojice zobrazení „dom“ a „cod“ z Mor do Ob (tzv. definiční obor a obor hodnot morfismu $f$),
- zobrazení „$\circ$“ (neboli skládání) z $D = \{(f,g)\colon f,g \in \mathrm{Mor}, \text{ kde } \mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)\}$ do Mor. Obraz dvojice $(f,g)$ z $D$ v tomto zobrazení je obvykle označován $f\circ g$.

Přitom musí být splněny následující axiomy:

(i) Je-li $(f,g) \in D$, potom $\mathrm{dom}\, f\circ g = \mathrm{dom}(g)$ a $\mathrm{cod}(f\circ g) = \mathrm{cod}(f)$.
(ii) Jsou-li $(f,g)$ a $(g,h)$ v $D$, pak $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$.
(iii) Každému objektu $A \in \mathrm{Ob}$ přísluší identický morfismus $e \in \mathrm{Mor}$, takový, že $\mathrm{dom}(e) = A = \mathrm{cod}(e)$, přičemž $(e,e) \in D$ a $e\circ f = f$ pro $(e,f) \in D$, $g\circ e = g$ pro $(g,e) \in D$.

(iv) Pro každou dvojici objektů $A, B \in \mathrm{Ob}$ je $\hom_{\mathbb{C}}(A, B) = \{f\colon f \in \mathrm{Mor}, \text{kde } \mathrm{dom}(f) = A, \mathrm{cod}(f) = B\}$ množina.

**Definice 9.** Kategorie $\mathbb{C}$ se nazývá *podkategorie* kategorie $\mathbb{D}$, jestliže

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ je podtřídou $\mathrm{Ob}(\mathbb{D})$,
- $\mathrm{Mor}(\mathbb{C})$ je podtřídou $\mathrm{Mor}(\mathbb{D})$, přičemž pro libovolné $A, B$ z $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ je $\hom_{\mathbb{C}}(A, B)$ podmnožinou $\hom_{\mathbb{D}}(A, B)$,
- pro dva morfismy $f, g$ z $\mathrm{Mor}(\mathbb{C})$, pro něž $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{cod}\, g$, jsou součiny $f \circ_{\mathbb{C}} g$ a $f \circ_{\mathbb{D}} g$ stejné v obou kategoriích.

Jestliže pro libovolné dva objekty $A, B$ z $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ platí

$$\hom_{\mathbb{C}}(A, B) = \hom_{\mathbb{D}}(A, B),$$

říkáme že $\mathbb{C}$ je *úplná podkategorie* kategorie $\mathbb{D}$.

Množství konstrukcí v rozličných matematických disciplínách vytváří tzv. *reflexi.* Ta ve formě funktoru zvaného *reflektor* a pojmu *reflektivní podkategorie* představují důležitou součást teorie kategorií.

**Definice 10.** Je dána kategorie $\mathbb{B}$ a její podkategorie $\mathbb{A}$. $\mathbb{A}$-*reflexí* objektu $B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ rozumíme dvojici $(A_B, r_B)$, (kde $A_B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A})$ a $r_B$ je $\mathbb{B}$-morfismus z $B$ do $A_B$) takovou, že platí: jestliže $A'$ je nějaký objekt v $\mathbb{A}$ a $f$ je $\mathbb{B}$-morfismus z $B$ do $A'$, potom existuje právě jeden $\mathbb{A}$-morfismus $\bar{f}\colon A_B \to A'$ tak, že platí $\bar{f} \circ r_B = f$, tj. diagram (D1) komutuje.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[dr, "f"'] & A_B \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & A' \end{tikzcd} \tag{D1}$$

Příklady důležitých reflexí v nejrůznějších kategoriích.

A. kategorie všech relací — kategorie všech kvaziuspořádání (reflexí je doplnění na tranzitivní a reflexivní obal),

B. kategorie všech svazů — kategorie všech úplných svazů (reflexí je zúplnění daného svazu),

C. kategorie všech komutativních, kancelativních (platí zákon o krácení) pologrup — kategorie všech komutativních grup (reflexí je vnoření dané pologrupy do její podílové grupy),

D. kategorie všech oborů integrity — kategorie všech polí (reflexí je vnoření oboru integrity do jeho podílového tělesa),

E. kategorie všech relací — kategorie všech symetrických relací (reflexí je symetrizace „doplněním“ dané relace),

F. kategorie všech metrických prostorů — kategorie všech úplných metrických prostorů (reflexí je úplný obal daného prostoru),

G. kategorie všech kvaziuspořádaných množin — kategorie všech uspořádaných množin (reflexí je tzv. antisymetrizace daného kvaziuspořádání),

H. kategorie všech grup — kategorie všech abelovských grup (reflexí dané grupy je faktorgrupa podle jejího komutantu),

I. kategorie všech topologických prostorů — kategorie všech topologických $T_1$ prostorů (reflexí je faktorprostor daného prostoru).

Pro formulaci hlavního výsledku budeme potřebovat následující označení.

Nechť $(H,\cdot)$ je kvazipořádková hypergrupa. Definujme binární relaci „$\rho$“ na množině $H$ takto: Pro $a,b\in H$ položme

$$a\,\rho\,b \text{ tehdy a jen tehdy, když } a\cdot b\cdot a=a^2 \text{ a } b\cdot a\cdot b=b^2.$$

Snadno lze ověřit, že tato relace je ekvivalencí na $H$.

Označme $r_H$ přirozený morfismus, který prvku z $H$ přiřazuje odpovídající třídu v rozkladu určeném ekvivalencí $\rho$.

Dále budeme definovat na třídách rozkladu $H/\rho$ hyperoperaci $\star\colon H/\rho\times H/\rho\to\mathscr{P}^*(H/\rho)$ takto:

$$X\star Y=\{Z; Z\in H/\rho; Z\cap(x\cdot y)\neq\emptyset \text{ pro nějaká } x\in X, y\in Y\}.$$

Hlavní výsledek lze potom zformulovat takto:

**Věta 1.** *Nechť $\mathbb{QOHG}$ je kategorie všech kvazipořádkových hypergrup a jejich inkluzních homomorfismů a nechť kategorie pořádkových hypergrup $\mathbb{OHG}$ je její úplnou podkategorií.*

*Potom dvojice $\big(r_H,(H/\rho,\star)\big)$ je $\mathbb{OHG}$-reflexe hypergrupy $(H,\cdot)\in\mathrm{Ob}(\mathbb{QOHG})$, tj. $\mathbb{OHG}$ je úplná reflexivní podkategorie v kategorii $\mathbb{QOHG}$.*

Nechť $(H,\cdot)\in\mathrm{Ob}(\mathbb{QOHG})$, $(G,\circ)\in\mathrm{Ob}(\mathbb{OHG})$ a $\varphi\colon H\to G$ je inkluzní homomorfismus. Tvrzení předchozí věty znázorňuje následující komutativní diagram, který vyjadřuje, že lze nalézt právě jeden morfismus $\psi$ tak, že platí $\psi\circ r_H=\varphi$.

$$\begin{tikzcd} (H,\cdot) \arrow[r, "r_H"] \arrow[dr, "\varphi"'] & (H/\rho,\star) \arrow[d, dotted, "\psi"] \\ & (G,\circ) \end{tikzcd} \tag{D2}$$

Výsledek předcházející věty lze dokázat i pro obecnější struktury, tzv. *subkvazipořádkové hypergrupy* — viz článek [7].

# Literatura


[1] Corsini, P.: *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore, Tricesimo, (1993).

[2] Corsini, P., Leoreanu. V.: *Applications of Hyperstructure Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Hardbound, ISBN 1-4020-1222-5, (2003).

[3] Chvalina, J.: *Commutative hypergroups in the sence of Marty and orderd sets*, Proceedings of the Summer School 1994, Horní Lipová, Czech Republic.

[4] Chvalina, J.: Funkcionální grafy, kvaziuspořádané množiny a komutativní hypergrupy, *Masarykova Universita, Brno 1995.*

[5] Chvalina, J., Hošková, Š.: *The unique square root condition for quasi-order hypergroups and the corresponding reflector for the category of all order-hypergroups,* Proc. of International Conference Aplimat 2004, 471–476, Bratislava, Slovakia.

[6] Herrlich, H., Strecker, G.: Category Theory, *Allyn and Bacon, Boston 1973.*

[7] Hošková, Š.: *Upper order hypergroups as a reflective subcategory of subquasi-order hypergroups*, zasláno do Italian Journal of Pure and Applied Mathematics.

[8] Marty, F.: *Sur une généralisation de la notion de groupe*, Huitième Congr. math. Scan. (1934), Stockholm, 45–49.

[9] Vougiouklis, T.: *Hyperstructures and their Representations*,Hadronic Press Monographs in Mathematics, Palm Harbor Florida (1994).