Komplexní analýza a transformace
B3B01KAT1
Matematika-komplexní proměnná a integrální transformace
A8B01MCT
Lecture Notes

Jan Hamhalter
https://math.fel.cvut.cz/en/people/hamhalte/

Katedra matematiky, FEL ČVUT

23. října 2022

Hlavní témata

- Funkce komplexní proměnné
- Fourierova transformace, Laplaceova transformace, Z-transformace

Literatura

- J. Hamhalter, J. Tišer: *Funkce komplexní proměnné.* Skripta FEL ČVUT, 2017.
- H. A. Priestly: *Introduction to Complex Analysis.* Oxford University Press, 2003.

Co se mimo jiné naučíme a co poznáme:

- Komplexní čísla mají svůj geometrický život. Rovina je sféra bez bodu. Kružnice a přímky jsou totéž! Komplexní operace generují fraktální geometrii.
- Uvidíme, že exponenciální funkce je periodická a logaritmovat lze vše kromě nuly.
- Komplexní diferencovatelné funkce se výrazně liší od reálných diferencovatelných funkcí. Jsou to právě funkce, které se rovnají součtu své Taylorovy řady (tj. jsou to „nekonečné polynomy").
- Naučíme se systematicky aproximovat funkce mocninnými a Laurentovými řadami.

- Pomocí komplexních transformací převrátíme signál vzůru nohama a uvidíme rozložení jeho frekvencí. Typický signál má ryze komplexní spektrum.
- Naučíme se řešit diferenciální rovnice pomocí komplexních integrálních transformací. Uvidíme, že spojité i diskrétní dynamické systémy (input-output aparatura) jsou vlastně komplexní funkcí.
- Fibonacciho čísla řeší rovnici

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$$

$y_0 = y_1 = 1$. Diskrétní problém? Vidíme, že y_n roste v podstatě geometrickou řadou? Odpověd dá rychle integrál a řada v komplexním oboru.

Komplexní analýza je mostem (sjednocením) digitalního (diskrétního) a analogového (spojitého) světa

Například Tustinova transformace, $T > 0$,

$$z \to \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

spojuje diskrétní a spojitý systém. Je bijekcí mezi otevřeným jednotkovým kruhem a levou polorovinou (vlastnost Möbiovy transformace).

Kvantová částice je typicky zadána posloupností komplexních čísel.

Svět je komplexní!

1. Komplexní čísla a geometrie komplexní roviny

Historie: Zavedení komplexních čísel bylo motivováno snahou hledat kořeny polynomů.

- Geronimo Cardano (1501–1576) - vzorce pro řešení kvadratické a kubické rovnice
- René Descartes (1596–1615) - pojem imaginárního řešení
- Carl Friedrich Gauss (1777–1855) - korektní zavedení komplexních čísel, komplexní rovina
- William Rowan Hamilton (1805–1856) - komplexní čísla jako dvojice čísel reálných, zavedl i kvaterniony

Chceme model rozšiřující množinu reálných čísel $\mathbb{R}$
a obsahující element (imaginární jednotku) i tak, že $i^2 = -1$.

1.1. Definice. Symbolem $\mathbb{C}$ označíme množinu uspořádaných dvojic $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ s následujícími operacemi:

- Sčítání: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Násobení: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\mathbb{C}$ ... množina komplexních čísel

$(1, 0) \cdot (x, y) = (x, y)$,

$(0, 1) \cdot (x, y) = (-y, x)$ a tedy pro $i \sim (0, 1)$ platí
$i^2 = (-1, 0) \sim -1$.

Obecně: $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \sim x + iy$.

- komplexní čísla se násobí jako dvojčleny s využitím $i^2 = -1$.

Terminologie a značení

$z = x + i\,y, \quad x, y \in \mathbb{R}$

$x = \operatorname{Re} z \ldots$ reálná část, $\quad y = \operatorname{Im} z \ldots$ imaginární část

$\overline{z} = x - i\,y \ldots$ číslo komplexně sdružené

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\,\overline{z}} \ldots$ absolutní hodnota (modul)

Algebraické zákony:

$z_1\,z_2 = z_2\,z_1, \quad z_1\,(z_2\,z_3) = (z_1\,z_2)\,z_3,$
$z_1\,(z_2 + z_3) = z_1\,z_2 + z_1\,z_3.$

Pravidla pro konjugaci:

(i) $\overline{\overline{z}} = z,$

(ii) $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w},$

(iii) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2},$

(iv) $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2\,i},$

(v) $|z| = |\overline{z}|.$

Komplexní (Gaussova) rovina

$\operatorname{Re} z \ = |z| \cdot \cos\varphi \qquad \operatorname{Im} z \ = |z| \cdot \sin\varphi.$

Argument: $z \neq 0$

$$\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)\}.$$

Hlavní hodnota argumentu: $z \neq 0$

$$\arg z \in \operatorname{Arg} z, \quad \arg z \in (-\pi, \pi\rangle.$$

Příklad: $z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{3}).$

$|z_1| = \sqrt{2}, \ \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\varphi \Rightarrow \arg z_1 = \frac{\pi}{4}.$

$|z_2| = \sqrt{2}, \cos\varphi = \frac{1}{2}, \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \arg z_2 = -\frac{\pi}{3}.$

Geometrický význam sčítání:

$$a \in \mathbb{C} \qquad z \to z + a$$

…posun v rovině o vektor a.

Geometrický význam násobení:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) =$$

$$|z_1| \cdot |z_2| [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)]$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Tedy

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg z_1 + \arg z_2 \in \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2).$$

$$z \to z\,a, \text{ kde } a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

…otočení o úhel φ kolem počátku a pak stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem $|a|$.

Příklad:
Je dán trojúhelník s vrcholy $1+i$, i, $-1+2i$. Otočte tento trojúhelník o pravý úhel vzhledem k počátku.

otočené vrcholy:
$i(1+i) = -1+i$,
$i^2 = -1$,
$i(-1+2i) = -2-i$

další varianta: $1-i, 1, 2+i$.

- Dělení – inverzní operace k násobení

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

- Geometrická interpretace dělení:

$$z \to \frac{z}{a} \qquad a = |a|(\cos\varphi + i \sin\varphi), a \neq 0$$

…otočení o úhel $-\varphi$ a stejnolehlost s koeficientem $\frac{1}{|a|}$.

Příklad:

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

1.2. Věta. *Moivreova věta.*
Pro $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *platí*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Příklad:

$$(1+i)^n = \sqrt{2^n}\left(\cos n\tfrac{\pi}{4} + i\sin n\tfrac{\pi}{4}\right).$$

- Binomická rovnice: $z^n = a$

$$|z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$|z| = \sqrt[n]{|a|}, \quad n\varphi = \psi + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\psi + 2k\pi}{n}$$

Stačí vzít $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
…vrcholy pravidelného n-úhelníka na kružnici $|z| = \sqrt[n]{|a|}$.

Příklad: Nalezněte $\sqrt[4]{1-i}$. Tj. řešíme rovnici $z^4 = a$, $a = 1 - i$.
$|a| = \sqrt{2}, \psi = -\frac{\pi}{4}$

úhly: $-\frac{\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{15\pi}{16}, \frac{23\pi}{16}$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\right) \\ z_2 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right) \\ z_3 &= -z_1 \\ z_4 &= -z_2. \end{aligned}$$

„Odmocniny v komplexním oboru jsou víceznačné funkce.“

Vzdálenost bodů z_1, z_2: $|z_1 - z_2|$.

Nerovnosti

1. $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \le |z|$
2. $|z + w| \le |z| + |w|$ (trojúhelníková nerovnost)
3. $|z + w| \ge \big| |z| - |w| \big|$
4. $|z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

Důkaz (2)

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 + (w\overline{z} + z\overline{w}) = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \le |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} |z| &= |z+w-w| \leq |z+w|+|w| \\ |w| &= |z+w-z| \leq |z+w|+|z| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z|-|w| &\leq |z+w| \\ |w|-|z| &\leq |z+w| \end{aligned}$$

(4) Podle trojúhelníkové nerovnosti

$$|z| = |\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{Re} z| + |i \operatorname{Im} z| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

Poznámka: Na $\mathbb{C}$ nedefinujeme uspořádání!
Zápis $a \leq b$ implikuje $a, b \in \mathbb{R}$.

Cvičení – důležité geometrické útvary v rovině a jejich popis:

- $|z - a| = r$, $r > 0$, $a \in \mathbb{C}$
- $|z - a| \geq r$, $r > 0$, $a \in \mathbb{C}$
- $[z_1, z_2] = \{z_1 + t(z_2 - z_1) \mid t \in [0, 1]\}$ úsečka
- $\operatorname{Re} z \geq 5$
- $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$
- $a \neq b$, $|z - a| = |z - b|$ ... osa úsečky $[a, b]$.

Rovnice kružnice:

$$A\, z\overline{z} + \overline{a}\, z + a\overline{z} + C = 0,$$

kde $A \neq 0$, C jsou reálná čísla, a je komplexní a $a\overline{a} - AC > 0$.
Ekvivalentní zápis:

$$\left| z + \frac{a}{A} \right| = \sqrt{\frac{a\,\overline{a} - AC}{A^2}}.$$

(výpočet tabule)

Rovnice přímky:

$$\overline{a}\, z + a\, \overline{z} + C = 0,$$

kde $a \neq 0$ je komplexní a C je reálné číslo.

Zobecněná kružnice (circline) = kružnice nebo přímka

Inverzní body vůči přímce jsou body osově sdružené.

Inverzní body vůči kružnici $|z-a|=r$:
body α, β ležící na polopřímce procházející středem kružnice, pro které platí

$$|\alpha-a|\cdot|\beta-a|=r^2.$$

$$K = \{z \mid |z - a| = r\}$$

Kruhová inverze vůči K je zobrazení

$$f(z) = a + \frac{r^2}{\overline{z - a}}.$$

Kruhová inverze najde k danému bodu bod inverzní.

• transformace $z \to 1/\overline{z}$ realizuje kruhovou inverzi vůči jednotkové kružnici.

Rozšířená rovina komplexních čísel a Riemannova sféra

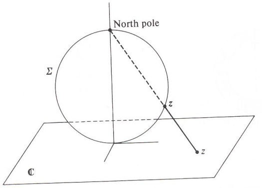
Riemannova sféra

$$S : x^2 + y^2 + (u - 1/2)^2 = \frac{1}{4}$$

neboli

$$x^2 + y^2 + u^2 = u.$$

$\Phi(z)$ ... stereografická projekce $\mathbb{C}$ na $S \setminus N$, kde $N = [0, 0, 1]$. Pro $z = x + iy$ je $\Phi(z)$ průsečík přímky spojujících z a N se sférou S. Φ je vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{C}$ na $S \setminus \{N\}$.



Analytické vyjádření stereografické projekce:

přímka:

$$[0,0,1] + t[(x,y,0) - (0,0,1)] = [tx, ty, 1-t].$$

Dosazeno do rovnice sféry:

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 = 1 - t$$

$$t^2(1+x^2+y^2) - t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

$$\Phi(x+iy) = \left[\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right].$$

- Co odpovídá rovnoběžkám?

Kružnice se středem v počátku.

- Co odpovídá kulovému vrchlíku?

Vnějšek kruhu se středem v počátku.

Jaké útvary v $\mathbb{C}$ se zobrazí na kružnice na S?

Každá kružnice je průnik S s rovinou

$$ax + by + cu = d.$$

Složky Φ musí vyhovovat této rovnici, tj.

$$\frac{ax}{1+x^2+y^2} + \frac{by}{1+x^2+y^2} + \frac{c(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} = d$$

$$\Rightarrow (c-d)(x^2+y^2) + ax + by = d.$$

$c \neq d \ldots$ rovnice kružnice

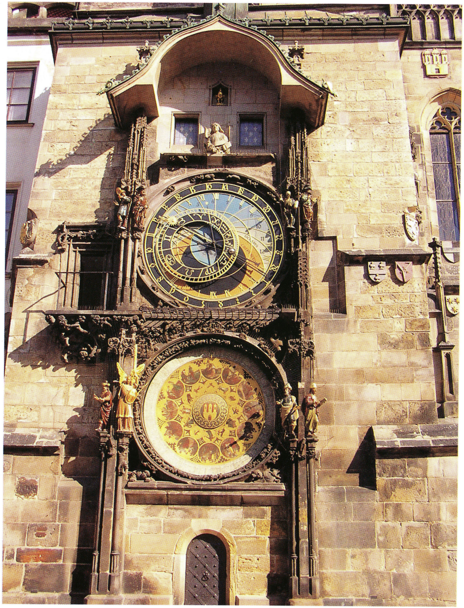
$c = d \ldots$ rovnice přímky (právě když jdeme přes severní pól)

kružnice na $S \longleftrightarrow$ zobecněné kružnice v $\mathbb{C}$.

Klaudios Ptolemaios (100–160 n.l.)

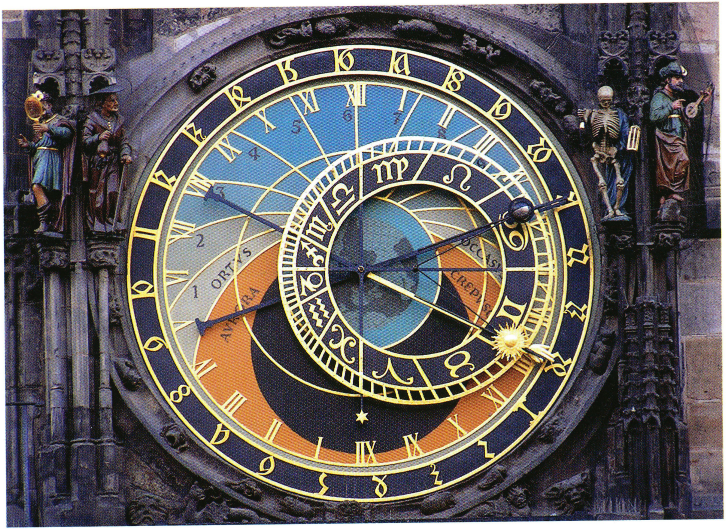
Ptolemaiova věta

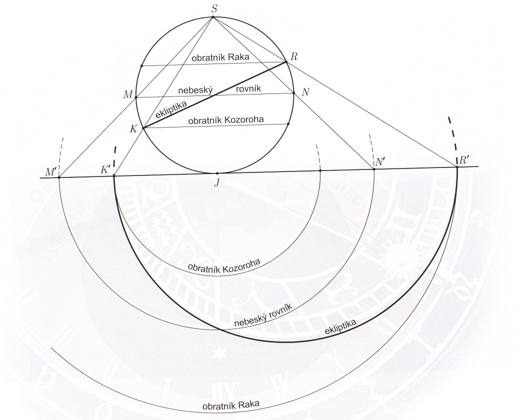
Každá kružnice na kulové ploše, jež neprochází jejím severním pólem, se při inverzní stereografické projekci zobrazí na kružnici.



Obr. 2. Staroměstský orloj v Mezinárodním roce astronomie 2009 (foto Pavel Křížek).

M. Křížek, L. Somer, A. Šolcová: *Deset matematických vět o pražském orloji*, Pokroky Matematiky Fyziky a Astronomie **54** (2009), 281–300.





Obr. 2. Stereografická projekce obratníků Raka a Kozoroha, nebeského rovníku a ekliptiky (nahoře bokorys, dole půdorys). Průměr $|JS|$ dané koule je roven poloměru $|JN'|$ stereografické projekce rovníku.

poloměr sféry: asi 40 cm

zajímavé kružnice: ekliptika, obratník raka, obratník kozoroha, obzorník, den a noc, . . .

Zavedení nekonečna v komplexním oboru:

Na sféře se blížíme k $N \iff |z| \to \infty$.

$N \sim \infty \quad S \sim \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widetilde{\mathbb{C}}$ ... rozšířená komplexní rovina

Rozšířená aritmetika: pro $a \in \mathbb{C}$.

$-\infty = \infty$, $a \pm \infty = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$, $\frac{a}{0} = \infty$ pro $a \neq 0$.

2. Základní pojmy analýzy v $\mathbb{C}$

• Základem analýzy je pojem limity, k tomu potřebujeme pojem okolí bodu $z \in \mathbb{C}$.

$$U(z) = U(z, \varepsilon) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\}.$$

…ε-okolí bodu z, ($\varepsilon > 0$).

$$U(z, \varepsilon) \setminus \{z\}$$

…prstencové okolí bodu z.

$$U(\infty, \varepsilon) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > \varepsilon\}$$

…okolí nekonečna.

2.1. Definice. Posloupnost $(z_n) \subset \mathbb{C}$ má limitu $z \in \widetilde{\mathbb{C}}$, jestliže pro každé okolí $U(z)$ platí, že pouze konečně mnoho členů posloupnosti (z_n) neleží v $U(z)$.

2.2. Tvrzení.

1. $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ *právě tehdy, když* $\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0$.
2. $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ *právě tehdy, když* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ *a současně* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.
3. $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ *právě tehdy, když* $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

Důkaz: (1), (3) Zřejmé
(2)

$$|\operatorname{Re}(z - z_n)|, |\operatorname{Im}(z - z_n)| \le |z - z_n| \le |\operatorname{Re}(z - z_n)| + |\operatorname{Im}(z - z_n)|$$

Příklad

- $z_n = (1 + \frac{1}{n})^n + i \cos \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n + i \lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n} = e + i$

- $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty.$

Tato limita neexistuje v oboru reálných čísel!

2.3. Definice.

1. Bod $z \in M$ je vnitřním bodem množiny M, jestliže existuje okolí $U(z, \varepsilon)$, pro které je $U(z, \varepsilon) \subset M$.
2. Bod $z \in \mathbb{C}$ se nazývá hraničním bodem množiny M, jestliže pro každé jeho okolí $U(z, \varepsilon)$ platí

$$U(z, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset \text{ a současně } U(z, \varepsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus M) \neq \emptyset.$$

3. Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá hranice množiny M a značí se ∂M.
4. Uzávěr $\overline{M}$ množiny M je definován jako $M \cup \partial M$. Množiny, pro které platí, že $M = \overline{M}$ se nazývají uzavřené.
5. Množiny, jejichž každý bod je vnitřní, se nazývají otevřené.

1. $\partial(M) = \partial(\mathbb{C} \setminus M)$.
2. M je uzavřená právě tehdy, když $\partial M \subset M$.
3. M je otevřená právě tehdy, když $M \cap \partial M = \emptyset$.
4. M je uzavřená $\Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus M$ je otevřená.
5. $\emptyset$ a $\mathbb{C}$ jsou otevřené a uzavřené zaroveň.

„Souvislý celek nelze roztrhnout na dvě části.“

2.4. Definice. Množina $D \subset \mathbb{C}$ neni souvislá, jestliže existují dvě otevřené množiny G a H v $\mathbb{C}$ takové, že

1. $D \subset G \cup H$ (pokrýváme),
2. $G \cap D \neq \emptyset$ a $H \cap D \neq \emptyset$ a $G \cap H \cap D = \emptyset$. (netriviálni disjunktni pokrytí)

V opačném případě nazýváme množinu D souvislou.

2.5. Tvrzení. *Úsečka $[a, b]$ je souvislá množina.*

Důkaz: přednáška – tabule

2.6. Definice. Souvislá otevřená množina se nazývá oblast.

2.7. Věta. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená neprázdná množina. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Každé dva body z G lze spojit lomenou čarou ležící v G.*
2. *G je oblast.*

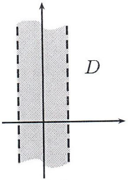
Důkaz: přednáška – tabule, skripta

2.8. Definice. Množina $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá konvexní, jestliže lze každé dva body z G spojit úsečkou ležící v G.

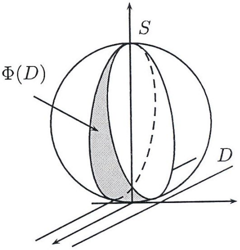
2.9. Tvrzení. *Otevřená konvexní množina je oblast.*

- Opačné tvrzení neplatí!

Budeme zacházet s oblastmi, které „nemají díry“.



(a)



(b)

2.10. Definice. Oblast $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže její steregrafická projekce $\Phi(G)$ na Riemannovu sféru má souvislý doplněk.

2.11. Tvrzení. *Omezená oblast $G \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá právě tehdy, když $\mathbb{C} \setminus G$ je souvislá množina.*

2.12. Tvrzení. *Otevřená konvexní množina G je jednoduše souvislá.*

Důkaz: Lze předpokládat, že $0 \in G$. Dva body v doplňku $\Phi(G)$ lze spojit poledníky procházejícími přes severní pól. Detaily: přednáška – tabule.

3. Holomorfní funkce

3.1. Funkce komplexní proměnné

3.1. Definice. $f : D(f) \to \mathbb{C}$, $D(f) \subset \mathbb{C}$ je komplexní funkce.

---

možné interpretace:

• $f(x + iy) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$

dvojice reálných funkcí – vektorové pole.

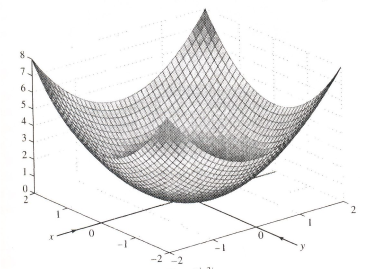
$\operatorname{Re} f = u, \operatorname{Im} f = v$.

• $z \to f(z)$ . . . jistá transformace roviny

Příklad: $f(z) = z^2$.

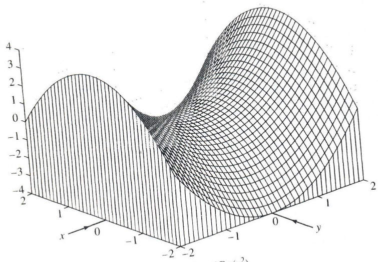
$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2; \qquad v(x, y) = 2xy$$



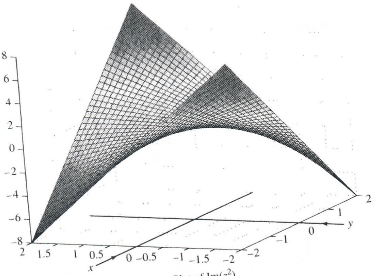
Plot of $|z^2|$

(a)



Plot of Re(z^2)

(b)



Plot of Im(z^2)

geometricky:

$$|z|(\cos\varphi + i\ \sin\varphi) \to |z|^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

například: 1. kvadrant $\to$ horní polorovina;
horní polorovina $\to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Deformace souřadnicové sítě:

$\operatorname{Re} z = c \to \{(c^2 - t^2) + i2ct \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$c = 0 \ldots \mathbb{R}^-$

$c \neq 0 \ldots$ parabola.

3.2. Definice. Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce a $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Řekneme, že f má limitu $A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ v bodě z_0, jestliže pro každé okolí $U(A, \varepsilon)$ existuje okolí $U(z_0, \delta)$ takové, že každý bod $z \in U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ se zobrazí do $U(A, \varepsilon)$.

Řekneme, že f je spojitá v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, jestliže

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Příklady:
1) $\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ neexistuje.
2) $\lim_{z \to \infty} z^2 = \infty$.
3) $\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty$ na rozdíl od reálného oboru!

Funkce $f(z) = \arg z$ je spojitá v $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Přechodem přes zápornou část reálné osy zaznamenáme skok 2π.

3.2. Diferencovatelnost komplexních funkcí

3.3. Definice. Komplexní funkce $f(z)$ má v bodě $z \in \mathbb{C}$ derivaci, jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Hodnota této limity se označuje $f'(z)$.

Dvourozměrnost limity má silné důsledky.

Pro derivování platí běžná pravidla se stejným důkazem jako v reálném oboru.

---

1. $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.
2. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$.
3. $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ je-li $g(z) \neq 0$.
4. $[f(g(z))]' = f'(g(z))g'(z)$.
5. Je-li g inverzní funkce k funkci f, pak

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$$

za předpokladu, že derivace $f'(g(z))$ existuje a je nenulová.

Příklad: Určete $f'(z)$ pro $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

Ověříme indukcí: $n = 1 \ldots f'(z) = 1$.
Nechť hypotéza platí pro n. Pak

$$(z^{n+1})' = (z \cdot z^n)' = z^n + z \cdot n \cdot z^{n-1} = (n+1)z^n.$$

Příklad: $f(z) = \operatorname{Re} z$.

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\operatorname{Re} h}{h}$$

Limita pro $h \to 0$ tohoto výrazu neexistuje (testujte limity po osách). Toto f je příklad spojité funkce, která nemá derivaci v žádném bodě. Najdete takto snadno příklad reálné funkce s týmiž vlastnostmi?

3.4. Věta. *Nechť f je diferencovatelná v bodě $z = x + iy$. Pak reálná složka u i imaginární složka v funkce f mají parciální derivace v bodě (x, y). Tyto parciální derivace splňují následující Cauchy-Riemannovy podmínky:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Navíc platí, že

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Důkaz: $f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$.
Jdeme po reálné ose:

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).
\end{aligned}
$$

Jdeme po imaginární ose:

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{i\,h} + i\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{i\,h} \\
&= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y).
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.
$$

$\Longrightarrow$ Cauchy-Riemannovy podmínky.

Příklad: $f(z) = \overline{z}$, $f(z) = x - iy$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$.
Tedy f nemá derivaci v žádném bodě.

Příklad: $f(z) = 1$ pro $\operatorname{Re} z \neq 0 \wedge \operatorname{Im} z \neq 0$; $f(z) = 0$ jinak.
Parciální derivace u a v jsou v bodě $(0,0)$ nulové, nicméně

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

neexistuje.

3.5. Věta. *Komplexní funkce $f(z)$ má v bodě $z = x + iy$ derivaci právě tehdy, když její složky u a v splňují Cauchy-Riemannovy podmínky a mají obě totální diferenciál v bodě (x, y).*

Spojitost parciálních derivací + Cauchy-Riemannovy podmínky $\Rightarrow$ existence derivace.

3.3. Holomorfní funkce

3.6. Definice. Funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže má derivaci v každém bodě množiny G. Funkce f je holomorfní v bodě z_0, je-li holomorfní v nějakém okolí bodu z_0.

3.7. Tvrzení. *Je-li f holomorfní v otevřené množině G, pak je v G spojitá.*

Důkaz zcela stejný jako v reálném případě.

3.8. Věta. *Má-li funkce f nulovou derivaci v oblasti G, pak je konstantní.*

Důkaz: nulovost derivace $\Rightarrow$ nulovost parciálních derivací složek + věta o střední hodnotě $\Rightarrow$ f je konstantní.

Další význam derivace – zachování úhlů, konformita.

$\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ ... parametrizace křivky C.
$t \in [a, b]$. Ať $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in (a, b)$.

Tečna ke křivce v bodě $\varphi(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$, ...

$$z = \varphi(t_0) + s\varphi'(t_0);\ s \in \mathbb{R}.$$

Křivky s parametrizacemi $\varphi_1(t)$, $t \in [a, b]$, $\varphi_1'(t) \neq 0$, pro všechna $t \in (a, b)$

a $\varphi_2(s)$; $s \in [c, d]$, $\varphi_2'(s) \neq 0$, pro všechna $s \in (c, d)$.

úhel křivek v bodě $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(s_0)$ = úhel tečen ...

$$\arg \varphi_1'(t_0) - \arg \varphi_2'(s_0)$$

Co se děje v transformaci $z \to f(z)$ s úhly?

3.9. Věta. Věta o zachování úhlu. *Nechť f je holomorfní v oblasti G. Předpokládejme, že $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(s)$ jsou parametrizace dvou křivek C_1 a C_2 ležících v G, které se protínají v bodě $z = \varphi_1(t_0) = \varphi_2(s_0)$. Ať $\varphi_1'(t_0) \neq 0$, $\varphi_2'(s_0) \neq 0$. Nechť $f'(z) \neq 0$. Pak f zachová úhel mezi křivkami C_1 a C_2.*

Důkaz:

$$\frac{(f \circ \varphi_1)'(t_0)}{(f \circ \varphi_2)'(s_0)} = \frac{f'(z)\varphi_1'(t_0)}{f'(z)\varphi_2'(s_0)} = \frac{\varphi_1'(t_0)}{\varphi_2'(s_0)}$$

Z toho vyplývá:

$\arg(f\circ\varphi_1)'(t_0) - \arg(f\circ\varphi_2)'(s_0) = \arg\varphi_1'(t_0) - \arg\varphi_2'(s_0)$ *mod* 2π.

Příklad: $f(z) = z^2$. Uvažujme dvě kolmé přímky

$$p_1 = \{1 + it \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad t = 1,$$

$$p_2 = \{s + i \mid s \in \mathbb{R}\}, \qquad s = 1.$$

$$f(p_1) = \{1 - t^2 + 2it \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

$$f(p_2) = \{s^2 - 1 + 2is \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Vektory tečen jsou kolmé:
$(-2t, 2)$ tj. pro $t = 1$ je vektor tečny $(-2, 2)$,
$(2s, 2)$ tj. pro $s = 1$ je vektor tečny $(2, 2)$.

Pro $z = 0$ je $f'(z) = 0$ a úhly se nezachovají.

3.10. Definice. Holomorfní funkce v otevřené množině G se nazývá konformní, jestliže $f'(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$.

3.11. Tvrzení. *Složení dvou konformních zobrazení je konformní zobrazení. Inverze k prostému konformnímu zobrazení je konformní.*

Založeno na skutečnosti, že $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$ a $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$.

Holomorfní a harmonické funkce

Předpokládejme, že

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

f je holomorfní v G a u, v mají spojité parciální derivace druhého řádu v G. Vezměme Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

První identitu derivujme podle x a druhou podle y. Dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Tedy u splňuje Laplaceovu rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

v G.

Taktéž v splňuje Laplaceovu rovnici.

Funkce splňující Laplaceovu rovnici se nazývají harmonické.

Závěr: Reálná a imaginární složka holomorfní funkce je harmonická.

3.4. Elementární funkce

Afinní funkce

$$f(z) = az + b, \qquad a \neq 0,\ b \in \mathbb{C}.$$

Složení rotace, stejnolehlosti a posunu.

$f'(z) = a$

f je holomorfní v $\mathbb{C}$, $f(\infty) = \infty$.

Polynomy

polynom stupně n:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Holomorfní funkce v $\mathbb{C}$, konformní až na konečně mnoho bodů.

3.12. Věta. *Základní věta algebry.*
Každý polynom stupně alespoň jedna má alespoň jeden komplexní kořen.

Lineární lomené zobrazení (Möbiova transformace)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0, c \neq 0.$$

Neboli

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{1}{c^2}(bc - ad)}{z + \frac{d}{c}}$$

Tedy f je složení afinních zobrazení, kruhové inverze vůči jednotkovému kruhu a osové souměrnosti dle reálné osy.

• Složením lineárních lomených zobrazení je lineární lomené zobrazení.

• Lineární lomené zobrazení je prosté, jeho inverze je opět lineární lomené zobrazení.

Dodefinování v rozšířené komplexní rovině:

$$f(\infty) = \frac{a}{c} \qquad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

Příklad: Nalezněte Möbiouvu transformaci, která zobrazí polorovinu $\operatorname{Im} z > 0$ na otevřený jednotkový kruh.

Řešení:
$\operatorname{Im} z > 0 \Leftrightarrow |z - i| < |z + i| \Leftrightarrow \frac{|z-i|}{|z+i|} < 1$
Tedy $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

Důležitý princip:

3.13. Věta. *Lineární lomené zobrazení zachová zobecněné kružnice a body inverzní vůči nim.*

Rozšíření definice: střed kružnice je sdružený s ∞. Princip platí i pro tuto dvojici.

Poznámka: Princip se týká zachování kružnic na sféře. Pokud je lineární lomené zobrazení tvaru $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, pak

$$f(\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}) = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}.$$

Přímka se tedy zobrazí buď na přímku, nebo na kružnici bez bodu a/c.

Příklad: $f(z) = i\frac{1+z}{1-z}$. Určete obraz jednotkové kružnice.

$1 \in \mathcal{K} \to \infty$ a tedy obraz je přímka. (Stačí tedy vzít obraz dvou bodů.)

$$\infty \to -i,$$

$$0 \to i$$

implikuje, že i a $-i$ jsou sdružené, a tedy obraz je jejich osa – reálná osa.

Racionální funkce

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

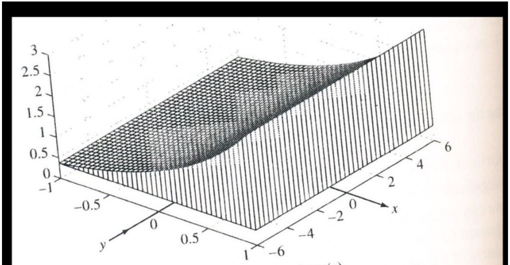
kde p a q jsou polynomy.

Racionální funkce f je holomorfní v $\mathbb{C}$ až na kořeny polynomu q.

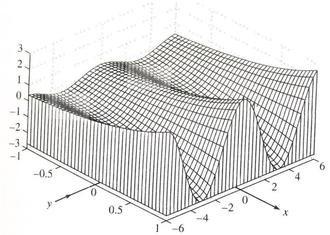
Exponenciální funkce

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)), z \in \mathbb{C}.$$

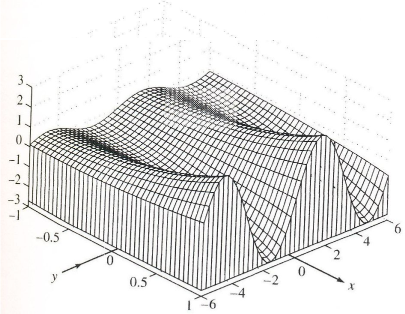
$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \sin y.$$



(a) Magnitude of exp(z)



(b) Re (exp z)



(c) Im (exp z)

Cauchy-Riemannovy podmínky + spojitost derivací – e^z je holomorfní v $\mathbb{C}$.

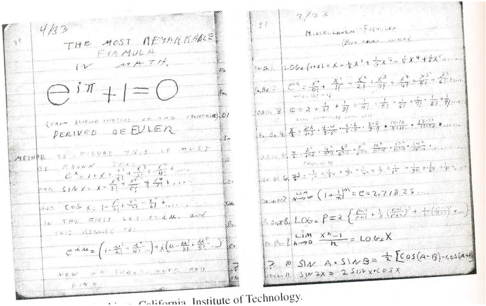
$$e^{z\prime} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

$$\boxed{e^{z\prime} = e^z}$$

$e^z \neq 0 \Rightarrow e^z$ je konformní v $\mathbb{C}$.

Eulerova identita:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$



Některé vlastnosti exponenciální funkce:

1. $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$
2. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
3. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$. Perioda $2\pi i$!

Příklad: Řešte rovnici $e^a = z$, kde $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$e^a = |z| \cdot (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)).$$

$$\Longrightarrow \qquad \operatorname{Re} a = \ln |z|, \qquad \operatorname{Im} a = \arg z \; + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Množina řešení je

$$\{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Deformace souřadnicové sítě:

$$v_c = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = c\}.$$

$$e^z = e^{c+iy} = e^c \cdot e^{iy}, \quad y \in \mathbb{R}$$

…kružnice s poloměrem e^c.

$$h_c = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = c\}$$

$$e^z = e^{x+ic} = e^x \cdot e^{ic}, \quad x \in \mathbb{R}$$

…polopřímka bez počátku, úhel c.

Příklad: Na co zobrazí e^z následující množiny?
(a) $\{z \mid -\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\}$,
(b) $\{z \mid -\pi \leq \operatorname{Re} z \leq \pi\}$,
(c) $\{z \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \ln \pi\}$.

Logaritmus

$z \neq 0$

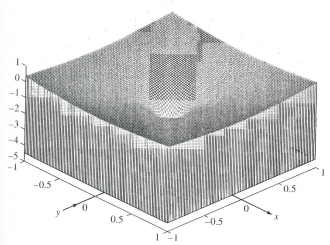
$$\operatorname{Ln} z = \{\ln |z| + i \arg z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Hlavní větev logaritmu

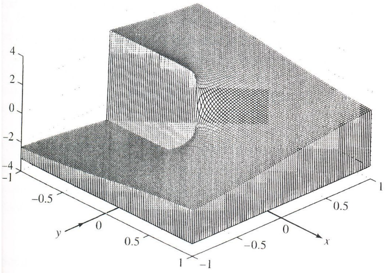
$z \neq 0$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Hlavní větev logaritmu je inverzní funkcí k e^z na množině $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$.



(a) Re(Log z)



(b) Im(Log z)

Příklady:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} 1 &= \{2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}, \\ \ln 1 &= 0, \\ \ln(1+i) &= \ln\sqrt{2} + i\pi/4, \\ \ln(-1) &= \pi i. \end{aligned}$$

- $\ln z$ je spojitá funkce na množině $D = \mathbb{C} \setminus \{-t \mid t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$.

Zkoumejme diferencovatelnost funkce $\ln z$ na množině D.
Definujme funkci $f(z)$ na otevřeném pásu

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

$$f(z) = e^z \,.$$

Funkce $f(z)$ je prostá a její obor hodnot je oblast D.
Inverzní funkce $g(z)$ k funkci $f(z)$ je funkce

$$g : D \to P : z \to \ln z \,.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))} = \frac{1}{e^{\ln z}} = \frac{1}{z} \,.$$

Závěr:

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \text{ na } D \,.$$

Goniometrické a hyperbolické funkce

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Osbornova pravidla:

$$\cos iz = \cosh z, \qquad \sin iz = i \sinh z.$$

Reálné a imaginární složky: $(x, y \in \mathbb{R})$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

výpočet ze vzorce, součtové vzorce, ...

Identity platí stejně.

$\sin z \; = 0 \Leftrightarrow z = k\pi,\, k \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad z \notin \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \\ \operatorname{cotg} z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad z \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Pro derivace platí stejné vzorce jako v reálném oboru.
Např.:

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Cyklometrické funkce

mnohoznačné funkce:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &= \{a \in \mathbb{C} \mid \sin a = z\} \\ \operatorname{Arccos} z &= \{a \in \mathbb{C} \mid \cos a = z\} \end{aligned}$$

Dají se logaritmicky vyjádřit:

$$\operatorname{Arcsin} z = \{-ia \mid a \in \operatorname{Ln}(iz + w), w \in \sqrt{1 - z^2}\}$$

Výpočet:

$$\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = z.$$

substituce: $p = e^{ia}$.

$$p - \frac{1}{p} = 2iz \iff p^2 - 2iz\, p - 1 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

Příklad: Rovnice $\operatorname{tg} a = z$ má řešení právě tehdy, když $z \notin \{i, -i\}$. Množinou řešení je

$$\frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Výpočet:

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{i(e^{ia}+e^{-ia})} = \frac{e^{2ia}-1}{i(e^{2ia}+1)}$$

Substituce: $e^{2ia} = p$

$$p-1 = iz(p+1) \iff p = \frac{1+iz}{1-iz},\ z \neq -i$$

$$e^{2ia} = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

$z \neq i$. Pak

$$a \in \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Můžeme definovat větve:

$$\operatorname{arctg} z \ = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Tato funkce je diferencovatelná právě tehdy, když $\frac{1+iz}{1-iz} \notin (-\infty, 0)$. Domácí cvičení:

$$\frac{1+iz}{1-iz} \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \Longleftrightarrow z \in \{it \mid |t| > 1\}.$$

Derivace této funkce:

$$\begin{aligned}(\operatorname{arctg} z)' &= \frac{1}{2i} \frac{1-iz}{1+iz} \cdot \frac{i(1-iz)-(1+iz)(-i)}{(1-iz)^2} = \cdots \\ &= \frac{1}{(1+iz)(1-iz)} = \frac{1}{z^2+1}.\end{aligned}$$

4. Integrální reprezentace holomorfní funkce

4.1. Křivkový integrál a primitivní funkce

Motivace: hledáme primitivní funkci.

4.1. Definice. Množina C se nazývá oblouk, jestliže existuje spojité zobrazení

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$$

intervalu $[a, b]$ na množinu C splňující následující podmínky:

1. φ je prosté zobrazení,
2. φ má spojitou a nenulovou derivaci na (a, b). V krajních bodech existují jednostranné drivace.

4.2. Definice. Množina $C \subset \mathbb{C}$ se nazývá křivka, jestliže existuje spojité zobrazení

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad \varphi([a, b]) = C$$

takové, že $[a, b]$ lze rozdělit na konečně mnoho podintervalů tak, že na každém dílčím intervalu má φ vlastnosti (i) a (ii) v definici oblouku. Navíc žádame, aby φ bylo prosté zobrazení až na konečně mnoho bodů.

Zobrazení φ se nazývá parametrizací oblouku nebo křivky C.

Křivka se nazývá uzavřená, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$. Křivka se nazývá jednoduchá, jestliže $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ pro všechna $s \neq t$ s výjimkou počátečního a koncového bodu.

Tečný vektor . . . $\varphi'(t)$.

Délka křivky . . . $l(C) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Orientace . . . způsob probíhání křivky, kladná a záporná.

Příklady:
1. Úsečka $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= a + t(b-a), \qquad t \in [0,1], \\ \varphi'(t) &= b - a. \end{aligned}$$

2. Elipsa se středem $1 + i$, poloosy $a = 1, b = 2$, osy rovnoběžné se souřadnou soustavou.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 + i + \cos t + 2i\,\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi], \\ \varphi'(t) &= -\sin t + 2i\,\cos t. \end{aligned}$$

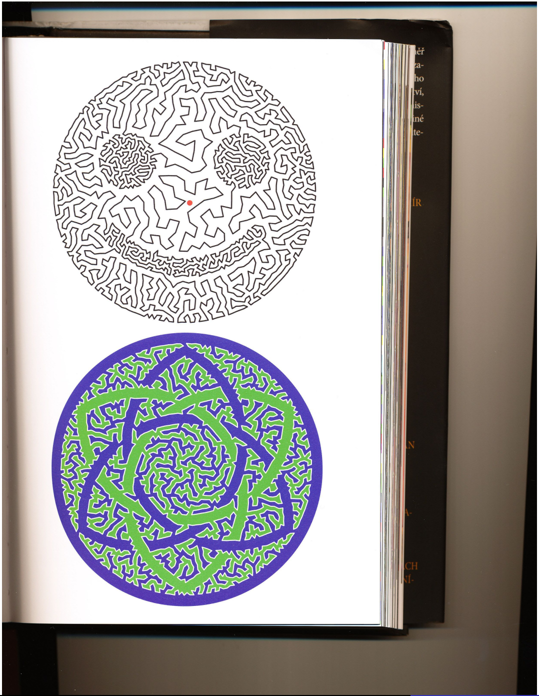
3. Elipsa, stejné parametry, osy rovnoběžné s osami kvadrantů.

$$\varphi(t) = 1 + i + e^{\frac{i\pi}{4}}(\cos t + 2i \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi],$$
$$\varphi'(t) = e^{\frac{i\pi}{4}}(-\sin t + 2i \cos t).$$

4.3. Definice. Uzavřená jednoduchá křivka se nazývá Jordanova křivka.

4.4. Věta. *Jordanova věta.*
Je-li C Jordanova křivka, pak
$\mathbb{C} \setminus C$ je sjednocením omezené oblasti a neomezené oblasti.

$\mathrm{Int}(C)$ ... omezená oblast, vnitřek křivky,
$\mathrm{Ext}(C)$ ... neomezená oblast, vnějšek křivky.



4.5. Definice. Nechť C je křivka s parametrizací $\varphi : [a, b] \to C$ a nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je funkce spojitá v bodech křivky C. Křivkový integrál funkce f podél křivky C je (komplexní číslo)

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad: $\int_C (z - z_0)^k\,\mathrm{d}z$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a C je kladně orientovaná kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem $r > 0$.

$$\varphi(t) = z_0 + r\,e^{it}, \qquad t \in [0, 2\,\pi].$$

$$\varphi'(t) = r\,i\,e^{it}.$$

$$\int_C (z - z_0)^k \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^k \, e^{i\,kt} i \, r \, e^{i\,t} \, \mathrm{d}t = r^{k+1} \, i \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} \, \mathrm{d}t$$

Je-li $k = -1$, je výsledek $2\pi i$.
Je-li $k \neq -1$, pokračujeme:

$$= i \, r^{k+1} \left[\frac{e^{i\,(k+1)t}}{i\,(k+1)} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

$$\boxed{\int_C (z - z_0)^k \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & k = -1 \\ 0 & k \neq -1. \end{cases}}$$

Vyjádření komplexního integrálu pomocí křivkového integrálu z vektorového pole – viz tabule. Křivkový integrál je stejný pro všechny parametrizace dávající stejnou orientaci. (Nedokazuje se – viz skripta)

Značení:
$-C$ ... křivka s opačnou orientací
$C_1 + C_2$ ... napojení navazujících křivek C_1 a C_2.

Vlastnosti křivkového integrálu:

- $\int_C f(z) + g(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_C g(z)\,\mathrm{d}z$,
- $\int_C \alpha f(z)\,\mathrm{d}z = \alpha \int_C f(z)\,\mathrm{d}z, \quad \alpha \in \mathbb{C}$,
- $\int_{-C} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$,
- $\int_{C_1+C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Technické příklady:

Příklad 1. $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$, C je úsečka $C = [i, 1]$.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t + (1-t)i, \quad t \in [0,1], \\ \varphi'(t) &= 1 - i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \frac{1}{t + (1-t)i} \cdot (1-i)\,\mathrm{d}t \\ &= (1-i)\int_0^1 \frac{t-(1-t)i}{t^2+(1-t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{-i-1+2t}{2t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= (1-i)\int_0^1 \frac{-i}{2t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{2t}{2t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -i\int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4t-2}{2t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$2t^2 - 2t + 1 = \frac{1}{2}[4(t - \frac{1}{2})^2 + 1]$$

Pokračování výpočtu:

$$\begin{aligned}
&- i\int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4t - 2}{2t^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t \\
&= -i\left[\operatorname{arctg} 2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln|2\,t^2 - 2t + 1|\right]_0^1 \\
&= -i\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Příklad 2.
$\int_C z^2\,\mathrm{d}z$, kde C je kladně orientovaná křivka – sjednocení intervalu $[-R, R]$ ($R > 0$) na reálné ose a horní polokružnice se středem v počátku a poloměrem R.

$$\varphi_1(t) = t, \qquad t \in [-R, R].$$

$$\int_{-R}^{R} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{2}{3}R^3.$$

$$\varphi_2(t) = R\,e^{it}, \qquad t \in [0, \pi].$$

$$\int_0^{\pi} R^2\,e^{2it}\,i\,R\,e^{it}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}R^3 e^{3it}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{3}R^3.$$

$$\int_C z^2\,\mathrm{d}z = 0$$

4.6. Věta. Odhad modulu křivkového integrálu. *Nechť C je křivka a $f(z)$ funkce spojitá v bodech křivky C. Pak*

$$\boxed{\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in C} |f(z)| \cdot l(C).}$$

Důkaz – přednáška.

Používáme ve variantě:
Je-li $|f(z)| \leq M$ pro všechna $z \in C$, pak

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq M \cdot l(C).$$

Příklad: Odhadněte velikost $\int_C 1/z\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $|z-1| = 2$.

$$\left|\int_C 1/z\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in C} \frac{1}{|z|} \cdot 4\pi \leq 4\pi.$$

Příklad: Určete limitu

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{-az^2}\,\mathrm{d}z,$$

kde $a > 0$ a C_R je úsečka $[R, R + ip]$, kde $R, p > 0$.

Řešení:
$z \in C_R \Leftrightarrow z = R + iy,\ y \in [0, p]$.

$$|e^{-az^2}| = |e^{-a(R^2+2iRy-y^2)}| = e^{-aR^2} e^{ay^2} \le e^{-aR^2} e^{ap^2}.$$

$$\left|\int_{C_R} e^{-az^2}\,\mathrm{d}z\right| \le e^{-aR^2} e^{ap^2} \cdot p \ \to 0 \text{ pro } R \to \infty.$$

Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí $(f_n(z))$ k funkci $f(z)$ na množině $M \subset \mathbb{C}$ znamená

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in M} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

4.7. Tvrzení. *Jestliže $(f_n(z))$ je posloupnost spojitých funkcí stejnoměrně konvergujících k funkci f na křivce C, pak*

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz:

$$\left| \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int_C f_n(z) - f(z)\,\mathrm{d}z \right|$$

$$\leq \sup_{z\in C} |f_n(z) - f(z)| \cdot l(C) \to 0,\ n \to \infty.$$

4.8. Tvrzení. *Nechť f je funkce spojitá v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{[z_0,z_0+h]} f(z)\,\mathrm{d}z = f(z_0).$$

Důkaz:

$$\left|\frac{1}{h}\int_{[z_0,z_0+h]} f(z)\,\mathrm{d}z - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_0^1 f(z_0+th)h\,\mathrm{d}t - f(z_0)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 [f(z_0+th) - f(z_0)]\,\mathrm{d}t\right|$$

f je spojitá v bodě $z_0 \Longrightarrow$ pro každé předepsané ε je

$$|f(z_0+th) - f(z_0)| < \varepsilon$$

pro dostatečně malá $|h|$. Tedy i

$$\left|\frac{1}{h}\int_{[z_0,z_0+h]} f(z)\,\mathrm{d}z - f(z_0)\right| \le \varepsilon.$$

Primitivní funkce je v reálném případě konstruována jako neurčitý integrál $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Každá spojitá reálná funkce má funkci primitivní.

V komplexním oboru je situace složitější – více možností křivek vedoucích k danému bodu.

4.9. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Funkce $F(z)$ se nazývá funkce primitivní k funkci $f(z)$ na množině G, jestliže

$$F'(z) = f(z) \qquad \text{pro každé } z \in G.$$

4.10. Definice. Křivkový integrál funkce f na oblasti G nezávisí na cestě, jestliže

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

pro všechny křivky $C_1, C_2 \subset G$ se stejným koncovým a počátečním bodem.

Nezávislost na cestě odpovídá konzervativnímu poli ve fyzice.

4.11. Tvrzení. *Křivkový integrál funkce f v oblasti G nezávisí na cestě právě tehdy, když*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

pro každou uzavřenou křivku C ležící v G.

4.12. Věta. Newtonova-Leibnizova formule. *Nechť $F(z)$ je primitivní funkce k funkci $f(z)$ na oblasti G. Nechť C je křivka ležící v G s počátečním bodem z_1 a koncovým bodem z_2. Pak platí*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1).$$

Důkaz: $\varphi : [a, b] \to C$ parametrizace křivky C.

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \big[F(\varphi(t))\big]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= F(z_2) - F(z_1).\end{aligned}$$

Důsledek: Má-li f primitivní funkci, pak její křivkový integrál nezávisí na cestě.

• $\operatorname{Re} z$ je příklad funkce spojité v $\mathbb{C}$, která nemá primitivní funkci, neboť např. $\int_C \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z = i \neq 0$, kde C je hranice jednotkového čtverce s vrcholy $0,\ 1,\ 1+i,\ i$.

Příklad: $\int_C 1/z\,\mathrm{d}z$, $C \ldots [i, 1]$.

$$\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln 1 - \ln i = -i\frac{\pi}{2}.$$

4.13. Věta. *Nechť G je oblast a $f(z)$ spojitá funkce na G. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Funkce $f(z)$ má primitivní funkci na oblasti G.*
2. *Křivkový integrál funkce $f(z)$ nezávisí na cestě.*
3. $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ *pro každou uzavřenou (Jordanovu) křivku C ležící v G.*

Důkaz: přednáška, skripta.

Příklad:
$\int_C z^2 \, \mathrm{d}z$, kde C je kladně orientovaná křivka – sjednocení intervalu $[-R, R]$ ($R > 0$) na reálné ose a horní polokružnice se středem v počátku a poloměrem R.

Funkce $z \mapsto z^2$ má v $\mathbb{C}$ primitivní funkci, a tudíž integrál je nulový.

4.14. Věta. *Funkce $f(z)$ má v konvexní oblasti G primitivní funkci právě tehdy, když $\int_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0$ pro každý obvod trojúhelníka C ležícího v G.*

4.2. Cauchyova věta

Cauchy 1814 – za předpokladu spojitosti derivace, použil vpodstatě Greenovu větu.

Goursant v pozdním 19 století – obecný případ.

4.15. Věta. *Cauchyova věta. Nechť f je holomorfní funkce v jednoduše souvislé oblasti. Pak*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

pro každou uzavřenou křivku $C \subset G$.

Důsledek: Každá holomorfní funkce má v jednoduše souvislé oblasti primitivní funkci.

Důkaz Cauchyovy věty pomocí Greenovy věty – skripta, přednáška.

Příklad:

$$\int_C \frac{z}{(z-1)^3(z^2+z+1)}\,\mathrm{d}z = 0,$$

kde C je jakákoliv Jordanova křivka mající body

$$1, \quad -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}i}{2}$$

ve své vnější oblasti.

- V Cauchyově větě je důležité, aby se vnitřní oblast křivky dala „zabalit“ do jednoduše souvislé množiny.
- Předpoklad jednoduché souvislosti je v Cauchyově větě podstatný – integrál funkce $\frac{1}{z}$ přes jednotkovou kružnici je roven $2\pi i$.

Příklad: Aplikace Cauchyovy věty na výpočet Fourierova obrazu gaussovské funkce.

Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-ipt}\, \mathrm{d}t,$$

kde p je reálný parametr, pomocí Laplaceova integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t+\frac{ip}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}}\,\mathrm{d}t = e^{-\frac{p^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t+\frac{ip}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

(substituce $u = t + \frac{ip}{2}$)

$$= e^{-\frac{p^2}{4}} \int_{-\infty+\frac{ip}{2}}^{\infty+\frac{ip}{2}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Ukážeme, že

$$\int_{-\infty+\frac{ip}{2}}^{\infty+\frac{ip}{2}} e^{-u^2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

což dá výsledek

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\,pt} dt = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{p^2}{4}}.$$

Předpokládejme, že $p > 0$.
Vezměme kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $-R$, R, $R + ip$, $-R + ip$ jako křivku C_R a uplatněme Cauchyovu větu na funkci $f(z) = e^{-z^2}$. Dostaneme

$$\int_{C_R} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Horizontální úsečky C_1, C_3, vertikální C_2, C_4. Na základě předchozího příkladu máme pro $i = 2, 4$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Limitním přechodem $R \to \infty$ v identitě

$$\sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty+ip/2}^{\infty+ip/2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

4.16. Věta. *Princip deformace.*
Předpokládejme, že C_1 a C_2 jsou Jordanovy křivky s kladnou orientací takové, že

$$\mathrm{Int}\ C_1 \cup C_1 \subset \mathrm{Int}\ C_2 .$$

Nechť $z_0 \in \mathrm{Int}\ C_1$. Předpokládejme, že f je holomorfní v každém bodě množiny $\mathrm{Int}\ C_2 \cup C_2$ kromě bodu z_0. Pak

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz: přednáška.

Příklad: Ukažte, že

$$\int_C \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i,$$

kde C je kladně orientovaná Jordanova křivka mající z_0 ve své vnitřní oblasti.

Řešení: Princip deformace zredukuje na kružnici a využije se předchozí příklad.

4.3. Cauchyův integrální vzorec a jeho důsledky

4.17. Věta. *Cauchyův integrální vzorec.*
Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Pro každou kladně orientovanou Jordanovu křivku C ležící v G a pro každý bod $z_0 \in \operatorname{Int} C$ platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = f(z_0).$$

Možnost rekonstrukce všech hodnot z hraniční křivky.

Důkaz: přednáška, skripta.

Příklady:

1. $f(z) \equiv 1$.

$$\int_C \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i,$$

je-li C kladně orientovaná Jordanova křivka mající bod z_0 ve svém vnitřku.

2.

$$\int_C \frac{\cos z}{(z-1)(z-5)^2}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná Jordanova křivka obsahující bod 1 ve svém vnitřku a bod 5 ve svém vnějšku.

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z-5)^2}, \qquad z_0 = 1.$$

$$\int_C \frac{\cos z}{(z-1)(z-5)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{\cos 1}{16} = \frac{\pi i \cos 1}{8}.$$

4.18. Definice. Funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ se nazývá celistvá.

4.19. Věta. *Liouvilleova věta.*
Omezená celistvá funkce je konstantní.

Důkaz – přednáška

4.20. Věta. *Základní věta algebry.*
Každý polynom stupně alespoň jedna má alespoň jeden komplexní kořen.

Důkaz: $P(z)$ polynom stupně alespoň jedna.
Sporem: Je-li $P(z)$ nenulové pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pak $\frac{1}{P(z)}$ je omezená celistvá funkce, a tedy konstantní funkce, což je spor.

5. Reprezentace holomorfní funkce mocninnou řadou

5.1. Mocninné řady

Cíl – rozvoj v Taylorovu řadu, „digitalizace funkce“.

5.1. Definice. Řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

se nazývá mocninná řada se středem v bodě z_0 a koeficienty a_n. Částečné součty řady jsou funkce

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n (z - z_0)^n.$$

• Mocninná řada konverguje bodově k funkci f na množině $M \subset \mathbb{C}$, jestliže pro všechna $z \in M$

$$|S_m(z) - f(z)| \to 0 \text{ pro } m \to \infty.$$

• Mocninná řada konverguje stejnoměrně k funkci f na množině $M \subset \mathbb{C}$, jestliže

$$\sup_{z \in M} |S_m(z) - f(z)| \to 0 \text{ pro } m \to \infty.$$

Funkce, která je součtem mocninné řady, je „nekonečný polynom“.

Příklady

- geometrická řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

Konverguje právě tehdy, když $|z| < 1$, se součtem

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}.$$

Otázka stejnoměrné konvergence:

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^{m} z^n = \frac{1 - z^{m+1}}{1-z}.$$

Na $M = \{z \mid |z| < 1\}$ nemáme stejnoměrnou konvergenci, neboť:

$$\sup_{z\in M} |S_m(z) - S(z)| = \sup_{z\in M} \left| \frac{1 - z^{m+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \sup_{z\in M} \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|} = \infty.$$

Avšak pro $M_\varrho = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varrho\}$, $0 < \varrho < 1$, máme stejnoměrnou konvergenci, neboť:

$$\sup_{z \in M} \left| \frac{z^{m+1}}{1-z} \right| \leq \frac{\varrho^{m+1}}{1-\varrho} \to 0 \text{ pro } m \to \infty.$$

Příklady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n.$$

Odmocninové kritérium :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}|z| = |z|.$$

Řada absolutně konverguje právě pro $|z| < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|z| = 0.$$

Řada konverguje absolutně v $\mathbb{C}$.

5.2. Tvrzení. *Konverguje-li řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *pro* $w \in \mathbb{C}$*, pak konverguje absolutně na množině*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < |w - z_0|\}.$$

Důkaz: $z_0 = 0$.
Z konvergence pro $z = w$ vyplývá omezenost členů řady, tedy existuje konstanta $M \geq 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n| \, |w|^n \leq M.$$

Pro $z \in \mathbb{C}$ s $|z| < |w|$ volme ϱ tak, že $|z| < \varrho < |w|$. Pak můžeme odhadnout

$$|a_n z^n| = |a_n| \cdot |z|^n \leq |a_n| \, \varrho^n = |a_n||w|^n \frac{\varrho^n}{|w|^n} \leq M \frac{\varrho^n}{|w|^n}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{\varrho^n}{|w|^n} < \infty$, a proto $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |z|^n < \infty$.

5.3. Definice. Poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ je definován jako

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n < \infty\}.$$

Důsledek Tvrzení 5.2:

Je-li R poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, pak tato řada

1. konverguje absolutně pro všechna z s $|z - z_0| < R$;
2. nekonverguje pro žádné z s $|z - z_0| > R$.

Příklady:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $R = 1$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n$, $R = 1$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R = \infty$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$. Podílové kritérium:

$$\frac{(n+1)!\,|z|^{n+1}}{n!\,|z|^n} = (n+1)\,|z| \to \infty \text{ pro } z \neq 0.$$

$R = 0$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, kde

$$a_n = \begin{cases} m, & n = 2^m; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocná řada: $\sum_{m=1}^{\infty} m z^{2^m}$. Odmocninové kritérium:

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m\,|z^{2^m}|} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} \cdot |z|^{\frac{2^m}{m}} = \begin{cases} 0, & |z| < 1; \\ \infty, & |z| > 1 \end{cases}$$

$$\implies R = 1.$$

Problematika stejnoměrné konvergence:

5.4. Věta. *Weierstrassovo kritérium.*
Platí-li pro posloupnost funkcí $f_n(z)$, že

$$|f_n(z)| \leq a_n \qquad \text{pro všechna } z \in M,$$

kde

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konverguje stejnoměrně na množině M.

Důkaz: Bodová konvergence plyne ze srovnávacího kritéria.

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z) \right| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \to 0$$

pro $N \to \infty$.

5.5. Věta. *Pokud má mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *poloměr konvergence* $R > 0$*, pak konverguje stejnoměrně na každém kruhu* $\{z \mid |z - z_0| < \varrho\}$*, kde* $\varrho < R$.

Důkaz: Pro $z \in \{z \mid |z - z_0| < \varrho\}$ máme

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| \, \varrho^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \varrho^n < \infty.$$

Aplikujeme Weirstrassovo kritérium.

Jaké jsou vlastnosti funkce

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n\,?$$

5.6. Věta. *Nechť $R > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$. Funkce*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n \tag{1}$$

je holomorfní v kruhu $|z - z_0| < R$ a platí pro ni, že

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(z-z_0)^{n-1} = a_1+2\,a_2(z-z_0)+3\,a_3\,(z-z_0)^2+\cdots\,. \tag{2}$$

„Derivace řady člen po členu“

Důkaz: Řady v (1) a (2) mají stejný poloměr konvergence (viz výše).
$z_0 = 0$, $|z| < R$

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right]\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right|.$$

Volme $\delta \in (0, R - |z|)$ a $|h| < \delta$. (Binomická formule.)

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right| = \left| \frac{1}{h} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \right|$$

$$\leq |h| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^{k-2} \leq \frac{|h|}{\delta^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} \delta^k$$

$$\leq \frac{|h|}{\delta^2} [\,|z| + \delta]^n.$$

Použitím tohoto odhadu dostáváme:

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{\delta^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot (|z|+\delta)^n \to 0 \text{ pro } h \to 0.$$

Příklady:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1},$$

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, z^{n-2}.$$

5.7. Věta. *Funkce* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *má na kruhu konvergence* $|z - z_0| < R$ *mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *derivace všech řádů, přičemž platí, že*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \, n \, (n-1) \cdots (n-k+1) \, (z - z_0)^{n-k}.$$

Speciálně dostáváme

$$\boxed{f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k!}.$$

Důsledky:

Koeficienty řady jsou určeny hodnotami součtu na libovolně malém okolí bodu z_0.

Princip neurčitých koeficientů:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

na jistém okolí bodu z_0 implikuje

$$a_n = b_n \text{ pro všechna n.}$$

5.8. Věta. *Integrace člen po členu.*
Má-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *poloměr konvergence* $R > 0$, *pak funkce*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

je primitivní funkce k funkci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

na množině $\{z \mid |z - z_0| < R\}$.

Příklad: Nalezněte součet řady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n.$$

Řešení:

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n \right)'.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^{n-1} = z \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = z \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$f(z) = z \left(\frac{z}{(1-z)^2} \right)' = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}.$$

5.9. Věta. *Integrální vyjádření koeficientů.*
Předpokládejme, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

a $R > 0$ *je poloměr konvergence řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$*. Pro jakoukoliv kladně orientovanou Jordanovu křivku* $C \subset \{z \mid |z - z_0| < R\}$ *obsahující bod* z_0 *ve své vnitřní oblasti platí*

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz.}$$

Důkaz:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \int_C \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}z$$

a díky stejnoměrné konvergenci na každém kruhu $|z-z_0| < \varrho < R$ dále máme

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_C (z-z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}z = a_n \cdot 2\pi i.$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

5.10. Věta. *Jednoznačnost analytické funkce.*
Funkce $f(z)$ je dána součtem mocninné řady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

s kladným poloměrem konvergence R. Nechť existuje posloupnost (z_k) neobsahující z_0 tak, že $f(z_k) = 0$ pro všechna k a $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$. Pak f je nulová funkce.

Důkaz: indukcí dokážeme, že $a_n = 0$ pro všechna n.
1. $a_0 = f(z_0) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = 0$.
2. $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots =$$
$$= (z - z_0)^n \underbrace{[a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots]}_{g(z)}.$$

$g(z_k) = 0$, a tedy $a_n = 0$.

5.2. Taylorovy řady

5.11. Definice. Nechť $f(z)$ je funkce mající všechny derivace v bodě z_0. Taylorova řada funkce $f(z)$ v bodě z_0 je mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

5.12. Věta. *Existence Taylorova rozvoje.*
Nechť $f(z)$ je holomorfní funkce v oblasti G. Nechť K je kružnice se středem v bodě z_0 taková, že $\operatorname{Int} K \subset G$. Pak existuje mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergující v $\operatorname{Int} K$ tak, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pro všechna $z \in \operatorname{Int} K$.

5.13. Důsledek. *Holomorfní funkce má v otevřené množině derivace všech řádů!*

Důkaz: r ...poloměr kružnice K.
Volme $0 < \varrho < r$ a označme $K_\varrho = \{z \mid |z - z_0| = \varrho\}$. Vyjdeme z Cauchyova vzorce pro $z \in \operatorname{Int} K_\varrho$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\varrho} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w.$$

$|w - z_0| = \varrho$:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}}.$$

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{\varrho} < 1.$$

Tedy

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Omezenost f: $|f(w)| \leq M$ na K_ϱ.

$$\left| f(w) \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| \leq M \cdot \frac{|z-z_0|^n}{\varrho^{n+1}} = M \cdot \frac{1}{\varrho} \left(\frac{|z-z_0|}{\varrho} \right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z-z_0|}{\varrho} \right)^n < \infty.$$

Weierstrassovo kritérium implikuje stejnoměrnou konvergenci, a tedy záměnou integrálu a řady:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\varrho} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \, \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{K_\varrho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right) \cdot (z - z_0)^n
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ existence rozvoje s koeficienty

$$
a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\varrho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w.
$$

Zbytek věta o jednoznačnosti.

Zobecněný Cauchyův vzorec:
Je-li $f(z)$ holomorfní v otevřené množině G, $z_0 \in \operatorname{Int} C$, kde C je kladně orientovaná Jordanova křivka, pro kterou platí $C \cup \operatorname{Int} C \subset G$, pak

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w.}$$

5.14. Věta. *Věta o jednoznačnosti.*
Je-li $f(z)$ holomorfní funkce v oblasti G a existuje-li prostá posloupnost $(z_k) \subset G$ s $\lim_{k\to\infty} z_k = a \in G$ taková, že $f(z_k) = 0$ pro všechna k, pak

$$f(z) = 0 \text{ pro všechna } z \in G.$$

Důkaz – přednáška, skripta.

5.15. Příklad.

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

v bodě $z_0 \neq a$.

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-z_0+z_0-a} = \frac{1}{z_0-a} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-z_0}{z_0-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-z_0)^n}{(z_0-a)^{n+1}}.$$

Pro $|z-z_0| < |z_0-a|$. Postupná derivace:

$$\left(\frac{1}{z-a}\right)^{(k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z-a)^k}$$

$$\Longrightarrow f(z) = \sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k+1}}{(z_0-a)^{n+1}} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)!} (z-z_0)^{n-k+1}.$$

5.16. Příklad.

$$f(z) = e^z, \quad z_0 = 0.$$

$f^{(n)}(0) = 1$ pro všechna n.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

5.17. Příklad. Goniometrické funkce:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$f(z) = \ln z, \quad z_0 = 1.$

$$f'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Integrace člen po členu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1} + c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n + c$$

$f(1) = 0 \Rightarrow c = 0.$

$$\boxed{\ln z \;= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n, \qquad |z-1| < 1.}$$

5.18. Příklad.

$$f(z) = \operatorname{arctg} z, \quad z_0 = 0.$$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \qquad |z| < 1.$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + c.$$

$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0.$

$$\boxed{\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad |z| < 1.}$$

Leibnizova formule

$$(f(z)g(z))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z)$$

Důkaz indukcí: 1. $n = 1$: OK.

2. Platí pro n, pak platí pro $n+1$:

$$[f(z)g(z)]^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(z)\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f^{(k)}(z)\, g^{(n-k+1)}(z) + f^{(k+1)}(z) g^{(n-k)}(z)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k+1)}(z) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(z) g^{(n-k+1)}(z)$$

$$= f(z) g^{(n+1)}(z) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{=\binom{n+1}{k}} f^{(k)}(z) g^{(n-k+1)}(z)$$

$$+ f^{(n+1)}(z) g(z).$$

5.19. Věta. *Násobení mocninných řad.*
Nechť pro bod z_0 mají funkce $f(z)$ a $g(z)$ v okolí bodu z_0 Taylorovy rozvoje

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Pak funkce $h(z) = f(z)g(z)$ má v daném okolí bodu z_0 Taylorův rozvoj

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

kde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}.$$

Důkaz:

$$c_n = \frac{1}{n!}h^{(n)}(z_0) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(z_0)g^{(n-k)}(z_0)$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot k!a_k(n-k)!b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}.$$

Mocninné řady násobíme jako polynomy.

Příklad: Napište počáteční členy Taylorova rozvoje funkce $f(z) = e^{-(z-1)^2} \cdot \ln z$ pro $z_0 = 1$.

$$\left(1-(z-1)^2+\frac{(z-1)^4}{2!}+\cdots\right)\cdot\left((z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\frac{(z-1)^4}{4}+\cdots\right)$$

$$= (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} - \frac{2(z-1)^3}{3} + \cdots$$

6. Reprezentace holomorfní funkce Laurentovou řadou

6.1. Laurentovy řady

Motivace:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Pro $|z| < 1$ je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Co pro $|z| > 1$?

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1/z - 1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

6.1. Definice. Řada tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$
$$= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots ,$$

kde $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel a $z_0 \in \mathbb{C}$, se nazývá Laurentova řada se středem v bodě z_0 a koeficienty $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá regulární část Laurentovy řady,
řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá hlavní část Laurentovy řady.

Laurentova řada konverguje v daném bodě $z \in \mathbb{C}$, konverguje-li současně v tomto bodě její hlavní i regulární část. Její součet je přitom definován jako součet regulární a hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

6.2. Definice. Řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

se nazývá Laurentova řada se středem v bodě ∞.

Řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n}{z^n}$ se nazývá hlavní část.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ se nazývá regulární část.

Otázka konvergence řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$:

1. regulární část: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$... mocninná řada se středem z_0 a poloměrem konvergence R_2.

2. hlavní část $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots$.
Substituce: $w = \frac{1}{z-z_0}$.

$$a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \cdots$$

– mocninná řada s poloměrem konvergence R.
$R_1 = \frac{1}{R}$ ... poloměr konvergence hlavní části.
Hlavní část konverguje absolutně pro $|z-z_0| > R_1$.

Zobecněné mezikruží: $0 \leq R_1, R_2 \leq \infty$

$$P(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-z_0| < R_2\}$$

6.3. Věta. *Nechť* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *je Laurentova řada s poloměrem konvergence hlavní části* R_1 *a regulární části* R_2*. Je-li* $R_1 < R_2$*, pak Laurentova řada konverguje absolutně v mezikruží* $P(z_0, R_1, R_2)$ *a nekonverguje v žádném bodě mimo uzávěr tohoto mezikruží.*

Příklady: 1.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}(z-1)^n.$$

Regulární část:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(z-1)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}}|z-1| = 1/2|z-1| < 1 \Longrightarrow |z-1| < 2.$$

Hlavní část:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-|n|}(z-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}}\frac{1}{|z-1|} = \frac{1}{2}\frac{1}{|z-1|} < 1 \Longrightarrow |z-1| > \frac{1}{2}.$$

Závěr: mezikruží konvergence $P\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$.

2.

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n.$$

$$R_1 = \frac{1}{2}, \qquad R_2 = \frac{1}{3}.$$

Závěr: Nekonverguje v žádném bodě.

3.

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n$$

Konverguje v $P(0, 1, \infty)$.

Otázka stejnoměrné konvergence:

6.4. Věta. *Konverguje-li Laurentova řada v mezikruží $P(z_0, R_1, R_2)$, kde $R_1 < R_2$, pak konverguje stejnoměrně v každém mezikruží $P(z_0, \varrho_1, \varrho_2)$, kde $R_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < R_2$.*

Důkaz: přednáška, skripta.

Funkce $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ je holomorfní v oblasti $P(z_0,R_1,R_2)$. Existují totiž dvě holomorfní funkce g,h tak, že

$$f(z)=g(z-z_0)+h\left(\frac{1}{z-z_0}\right).$$

Opačná otázka: Má funkce holomorfní v mezikruží rozvoj v Laurentovu řadu?

6.5. Věta. *Cauchyův vzorec pro mezikruží.*
Nechť C_1, C_2 *jsou kladně orientované Jordanovy křivky takové, že* $C_1 \subset \operatorname{Int} C_2$. *Nechť* f *je funkce holomorfní v otevřené množině* $O \supset \overline{\operatorname{Int} C_2 \setminus \operatorname{Int} C_1}$. *Pak pro každé* $z \in \operatorname{Int} C_2 \setminus (C_1 \cup \operatorname{Int} C_1)$ *je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right).$$

Důkaz: Přednáška, skripta.

6.6. Věta. *Rozvoj v Laurentovu řadu.*
Nechť $f(z)$ je funkce holomorfní v mezikruží $P(z_0, r, R)$, kde $0 \leq r < R \leq \infty$. Pak existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ tak, že

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in P(z_0, r, R).$$

Přitom

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

kde C je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v $P(z_0, r, R)$ a $z_0 \in \operatorname{Int} C$.

Důkaz: 1. Existence rozvoje

$z_0 = 0$, $z \in P(0, r, R)$.

Volme ϱ_1, ϱ_2 s $r < \varrho_1 < |z| < \varrho_2 < R$.

$C_1 \ldots |z| = \varrho_1$

$C_2 \ldots |z| = \varrho_2$

kladná orientace

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right).$$

$w \in C_1$:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{z(\frac{w}{z}-1)} = -f(w)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}}.$$

Odhad hodnoty:

$$|f(w)|\frac{|w|^n}{|z|^{n+1}} \leq \left(\max_{w\in C_1}|f(w)|\right)\frac{1}{|z|}\frac{\varrho_1^n}{|z|^n}$$

Jelikož $\frac{\varrho_1}{|z|} < 1$, dá horní odhad konvergentní číselnou řadu. Tedy $\sum_0^\infty f(w)\frac{w^n}{z^{n+1}}$ konverguje stejnoměrně pro $w \in C_1$.

$$\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{C_1} f(w)w^n\,\mathrm{d}w\right)\cdot\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Rozvoj pro C_2 vede na regulární část – viz věta o Taylorově rozvoji.

Jednoznačnost a integrální vyjádření koeficientů:

$$f(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, w^k \qquad \Big|\cdot \frac{1}{w^{n+1}}$$

$$\frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, w^{k-n-1} \qquad \Big| \int_C dw$$

$$\int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_C w^{k-n-1}\,\mathrm{d}w$$

$$\int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w = 2\pi i\, a_n.$$

Příklady:

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)},\quad z_0=0,\quad \text{v } P(0,2,3).$$

$$f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}.$$

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}2^{-n-1}\,z^n.$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=-\infty}^{-1}2^{-n-1}\,z^n,\qquad 2<|z|<3.$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}, \quad z_0 = 0, \qquad |z| > 2.$$

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

Derivace člen po členu:

$$-\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-n-1) \frac{2^n}{z^{n+2}}$$

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{2^n}{z^{n+2}}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} (-n-1) 2^{-n-2} z^n.$$

$$f(z) = z^2 e^{1/z}, \quad z_0 = \infty,$$

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{n!} = z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{z^n}.$$

$$f(z) = \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right), \quad z_0 = \infty$$

$$g(z) = \ln(1 + z), \qquad z_0 = 0$$

$$g'(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Integrace:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + c$$

$c = 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{z^{n+1}}, \qquad |z| > 1.$$

6.2. Singularity

6.7. Definice. Nechť f je funkce holomorfní v prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C} \cup \infty$ a bod z_0 není v definičním oboru funkce f. Pak se bod z_0 nazývá izolovaným singulárním bodem (singularitou) funkce f. Řekneme, že z_0 je

1. odstranitelná singularita funkce f, jestliže existuje vlastní limita f v bodě z_0;
2. pól funkce f, jestliže $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
3. podstatná singularita funkce f, jestliže f nemá limitu v bodě z_0.

Příklad: $\frac{\sin z}{z} \ldots 0, \infty; \quad e^{1/z} \ldots 0, \infty$

6.8. Věta. *Nechť f je funkce holomorfní a omezená na prstencovém okolí bodu z_0. Pak z_0 je odstranitelná singularita funkce f. Dodefinujeme-li navíc funkci f v bodě z_0 její limitou, stane se f holomorfní v bodě z_0.*

Nemá analogii v reálném oboru ... $\sin(1/x)$, $\sin x$, $\operatorname{sgn} x$, $\frac{x^2}{|x|}$.

Důkaz:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Pro $n = 1, 2, \ldots$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w)(w - z_0)^{n-1} \, \mathrm{d}w.$$

C je kružnice o poloměru r a středu z_0.

Omezenost f znamená:

$$|f(w)(w-z_0)^{n-1}| \leq M$$

na jistém okolí bodu z_0. Tedy

$$|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} M \cdot 2\pi r = Mr.$$

Protože r může být libovolně malé, máme

$$|a_{-n}| = 0$$

pro všechna $n = 1, 2, \ldots$ Tedy hlavní část Laurentova rozvoje je nulová.

Póly mají jemnější klasifikaci vystihující rychlost konvergence k ∞. Souvisí s řádem kořene holomorfní funkce.

6.9. Tvrzení. *Nechť f je funkce holomorfní v bodě z_0, která není identicky rovna nule na žádném okolí bodu z_0. Pak existuje (jediné) číslo* $\in \{0, 1, 2, \dots\}$ *tak, že*

$$f(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \qquad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Číslo k se nazývá násobnost (řád, stupeň) kořene z_0 funkce f.

Poznámka: $k = 0$ není kořenem,
$k = \infty$ by znamenalo nulovost na celém okolí. Tvrzení vyplývá ze skutečnosti, že nulovost všech derivací znamená nulovost Taylorova rozvoje.

---

z_0 je kořenem násobnosti k právě tehdy, když

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1} + \cdots = (z-z_0)^k g(z),$$

kde $g(z)$ je holomorfní v bodě z_0 a $g(z_0) \neq 0$.

Je-li z_0 pól funkce $f(z)$, pak $f(z) \neq 0$ pro všechna $z \in P$, kde P je nějaké prstencové okolí bodu z_0. Funkce $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ je holomorfní v tomto prstencovém okolí a platí, že $\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$. Bod z_0 je tedy odstranitelná singularita funkce h. Dodefinováním $h(z_0) = 0$ se z_0 stane kořenem funkce h.

Řád (stupeň, násobnost) pólu z_0 funkce $f(z)$ je definován jako stupeň kořene z_0 funkce $h(z)$.

Bod z_0 je pólem násobnosti $k \Longleftrightarrow \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k \, g(z)$, kde $g(z)$ je holomorfní a nenulová v bodě z_0.

6.10. Tvrzení. *Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je pólem funkce f násobnosti k právě tehdy, když*

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k},$$

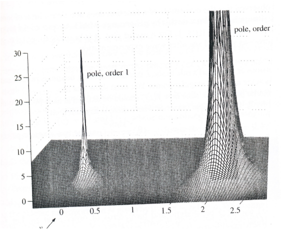
kde h je holomorfní a nenulová v bodě z_0.

Každý pól má svůj řád – konvergence k ∞ je „kvantovaná“ a ne libovolná jako v reálném oboru.

Příklady:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2}.$$

Jednoduchý pól 0 a dvojnásobný pól 2.



$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^8}.$$

Bod 0 je pól násobnosti 5.

$$f(z) = \frac{e^{z-1} - 1}{(z-1)^3}.$$

Bod 1 je pól násobnosti 2.

6.11. Definice. Nechť f je holomorfní v prstencovém okolí nekonečna. Řekneme, že ∞ je pól funkce f řádu k, jestliže

$$f(z) = z^k g(z),$$

kde g je holomorfní funkce s vlastní nenulovou limitou v ∞.

∞ je pól násobnosti k $\Longleftrightarrow$ 0 je pól řádu k funkce $g(z) = f(1/z)$.

Příklad: ∞ je pól násobnosti 2 funkce $f(z) = z^2 e^{1/z}$.

6.12. Věta. *Nechť*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \left(resp. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \right)$$

je Laurentův rozvoj funkce f v prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C} \cup \infty$. Potom platí:

1. *Funkce f má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu právě tehdy, když $a_n = 0$ pro všechna $n < 0$.*
2. *Funkce f má v bodě z_0 pól násobnosti k právě tehdy, když $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$.*
3. *Funkce f má v bodě z_0 podstatnou singularitu právě tehdy, když nekonečně mnoho koeficientů v hlavní části Laurentovy řady je nenulových.*

Důkaz (2)

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k},$$

kde g je holomorfní a nenulová v z_0.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \qquad b_0 \neq 0$$

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n =$$

$$= \frac{b_0}{(z - z_0)^k} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + b_k + b_{k+1}(z - z_0) + \cdots$$

Příklady:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots$$

0…dvojnásobný pól

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

0…podstatná singularita, ∞ …odstranitelná singularita

$$f(z) = \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

∞ je podstatná singularita

$$f(z) = z^2 e^{1/z} = z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{z^n}$$

∞ je pól násobnosti 2

6.3. Reziduum

Motivace: integrální vyjádření koeficientů Laurentovy řady

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

dá ve speciálním případě

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \, dz.$$

Laurentovým rozvojem se středem v dané singularitě rozumíme Laurentův rozvoj v nějakém prstencovém okolí singularity.

6.13. Definice. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ (resp. $z_0 = \infty$) je singularita funkce f. Koeficient a_{-1} (resp. $-a_1$) Laurenotva rozvoje f v bodě z_0 se nazývá reziduum funkce f v bodě z_0.

Značení: $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$ nebo $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$.

Příklady:

$$\operatorname*{res}_{0} \frac{\sin z}{z^3} = 0$$

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} z^2 e^{1/z} = -\frac{1}{3!}.$$

$$z^2 e^{1/z} = z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{z^n}$$

Reziduum – co zbyde po integraci kolem bodu. Například, je-li C dostatečně velká záporně orientovaná kružnice se středem v nule, je pro singularitu ∞:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_C \frac{a_n}{z^n}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{a_1}{z}\,\mathrm{d}z = -a_1 2\pi i = 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z)\,.$$

Některé metody výpočtu rezidua (mimo Laurentův rozvoj):

6.14. Tvrzení. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je k-násobný pól funkce f. Pak*

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big[(z-z_0)^k f(z) \Big].}$$

Důkaz:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \cdots$$

$$(z-z_0)^k f(z)$$
$$= a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big[(z-z_0)^k f(z) \Big] = (k-1)!\, a_{-1} + k!\, a_0(z-z_0) + \cdots .$$

Limitou $z \to z_0$ konverguje poslední výraz k $(k-1)!\, a_{-1}$.

Příklad:

$$\operatorname*{res}_{2i} \frac{z+2}{(z-2i)^2(z+1)} = \lim_{z\to 2i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z+2}{z+1}\right) = \lim_{z\to 2i} \frac{-1}{(z+1)^2} = \frac{3+4i}{25}.$$

Speciálně pro jednonásobný pól platí

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\, f(z).$$

6.15. Tvrzení. *Nechť f a g jsou funkce holomorfní v $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť z_0 je jednonásobný kořen funkce g (tj. $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$). Pak*

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.}$$

Příklady:

$$f(z) = \frac{z^3 + 1}{\sin z}$$

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

$$f(z) = \operatorname{cotg} z$$

$$\operatorname*{res}_{k\pi} f(z) = \operatorname*{res}_{k\pi} \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1.$$

6.16. Tvrzení. *Nechť f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a g má v bodě z_0 jednonásobný pól. Pak*

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z_0} f(z)g(z) = f(z_0)\operatorname*{res}_{z_0} g(z).}$$

Důkaz: přednáška, skripta.

Příklad:

$$\operatorname*{res}_{k\pi} z^3 \operatorname{cotg} z \; = (k^3\pi^3)\operatorname*{res}_{k\pi} \operatorname{cotg} z \; = k^3\pi^3.$$

Případ ∞. Má-li f odstranitelnou singularitu v ∞, pak

$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = a_0.$$

6.17. Tvrzení.

1. *Nechť f má v ∞ odstranitelnou singularitu. Pak*

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z[f(\infty) - f(z)],$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z).$$

2. *Má-li f v ∞ pól řádu k, pak*

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z\to\infty} \left[z^{k+2} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}z^{k+1}} f(z) \right].$$

Příklad:

$$\operatorname*{res}_{\infty} e^{1/z} = \lim_{z\to\infty} z(1 - e^{1/z}) = -1.$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} e^{1/z} = \lim_{z\to\infty} z^2 (e^{1/z})' = -1.$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} \frac{e^{1/z}}{2z} = \lim_{z\to\infty} -z \frac{e^{1/z}}{2z} = -\frac{1}{2}.$$

7. Reziduová věta a její aplikace

7.1. Reziduová věta

Motto: Jacques Hadamard (1865-1963): „Nejkratší cesta mezi dvěma pravdami v reálném oboru vede přes obor komplexní.“

7.1. Věta. *Reziduová věta.*
Nechť G je oblast a $f(z)$ funkce holomorfní v množině $G \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Nechť C je kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v $G \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ a mající ve svém vnitřku body $z_1, z_2, \dots, z_k$, $k \leq n$. Předpokládejme dále, že G obsahuje vnitřní oblast křivky C. Potom

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f(z).$$

Cauchyův vzorec i Cauchyova věta se dají chápat jako důsledek Reziduové věty.
Víme již, že reziduová věta platí pro jednu singularitu.

Důkaz: $H_j(z)$ ... součet hlavní části Laurentova rozvoje v bodě z_j. Jedná se o funkci holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$. Položme

$$g(z) = f(z) - H_1(z) - H_2(z) - \cdots - H_k(z).$$

g je (po dodefinování) v bodech z_j holomorfní v G. Dle Cauchyovy věty:

$$0 = \int_C g(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{k} \int_C H_j(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_C f(z)\,\mathrm{d}z - 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f(z).$$

7.2. Důsledek. *Je-li funkce $f(z)$ holomorfní v $\mathbb{C}$ až na konečně mnoho bodů $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$, pak*

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_i} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Důkaz: Pro kladně orientovanou Jordanovu křivku C mající body $z_1, z_2, \dots, z_k$ ve svém vnitřku platí

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_k} f(z),$$

$$-\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z).$$

Příklady:

$$\int_C \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2}\,\mathrm{d}z,$$

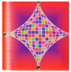
kde C je kladně orientovaná asteroida $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}$.

Singularity uvnitř: $1,-1$, jednoduché póly.

$$\operatorname*{res}_{1} \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2} = \frac{1}{2\cdot(-2)^2} = \frac{1}{8}.$$

$$\operatorname*{res}_{-1} \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2} = \frac{1}{(-2)\cdot(-4)^2} = -\frac{1}{32}.$$

$$\int_C \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{32}\right) = \frac{3\pi}{16} i.$$



$$\int_C \frac{1}{1+z^{100}}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice $|z| = 2$.
Celkem sto singularit $z_1, z_2, \ldots, z_{100}$. (Tvoří vrcholy pravidelného stoúhelníka na jednotkové kružnici.)

$$\sum_{k=1}^{100} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) = -\operatorname*{res}_{\infty} f(z).$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} -\frac{z}{1+z^{100}} = 0.$$

$$\int_C \frac{1}{1+z^{100}}\,\mathrm{d}z = 0.$$

$$\int_C \sin\frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice $|z| = 2$.

$$\sin\frac{z}{z+1} = \sin\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \sin 1 \cos\frac{1}{z+1} - \cos 1 \sin\frac{1}{z+1}.$$

$$\cos\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(z+1)^{-2k}}{(2k)!} \Longrightarrow \operatorname*{res}_{-1} \cos\frac{1}{z+1} = 0.$$

$$\sin\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(z+1)^{-2k-1}}{(2k+1)!} \Longrightarrow \operatorname*{res}_{-1} \sin\frac{1}{z+1} = 1.$$

Závěr:

$$\int_C \sin\frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}z = -2\pi i \cos 1.$$

6.2. **Výpočet určitých integrálů**

a) Integrály racionálních funkcí $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

P, Q …polynomy s reálnými koeficienty,
$\deg Q > \deg P + 1$, Q nemá reálné kořeny.

C_R ($R > 0$)…kladně orientovaná křivka skládající se z úsečky
$L_R = [-R, R]$ a oblouku kružnice
$K_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Číslo R zvolme tak, aby všechny singularity funkce f v polorovině $\operatorname{Im} z > 0$ ležely uvnitř křivky C_R. Podle reziduové věty

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\{z \mid Q(z)=0, \operatorname{Im} z>0\}} \operatorname*{res}_{w=z} f(w).$$

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{L_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{K_R} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

$$\int_{L_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Ukážeme, že

$$\lim_{R\to\infty} \int_{K_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Existuje okolí nekonečna U, tak, že

$$\left|\frac{z^2 P(z)}{Q(z)}\right| \le M, \qquad \text{tj.} \qquad \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \le \frac{M}{|z|^2}, \qquad z \in U.$$

$$\left|\int_{K_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \ell(K_R)\cdot \max_{z\in K_R} |f(z)| \le \pi R \cdot \frac{M}{R^2} = \frac{\pi M}{R} \to 0$$

pro $R \to \infty$.

Závěr:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\{z \mid Q(z)=0,\, \operatorname{Im} z>0\}} \operatorname*{res}_{w=z} \frac{P(w)}{Q(w)}.}$$

Příklad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x, \qquad a>0.$$

$$\operatorname*{res}_{z=ai} \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z\to ai} \left((z-ai)^2 \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\right)' = \lim_{z\to ai} \left(\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to ai} \frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{1}{4ai}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ai} \frac{P(z)}{Q(z)} = 2\pi i \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{2a}.$$

b) Integrály z goniometrických funkcí $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$.

$R(x, y)$ ... racionální funkce definovaná na jednotkové kružnici.

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int_C R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz},}$$

kde C je kladně orientovaná jednotková kružnice.

Odvození : přednáška, skripta.

Příklad:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\cos x}, \qquad a > b > 0.$$

Položme

$$F(z) = \frac{1}{a + b\frac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{iz} = \frac{2}{i} \frac{1}{bz^2 + 2az + b}.$$

Funkce $F(z)$ má singularity v kořenech polynomu

$$bz^2 + 2az + b,$$

tj. v bodech

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \qquad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

$|z_1| < 1$, $|z_2| > 1$ (protože $z_1 z_2 = \frac{b}{b} = 1$).

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{2}{ib(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{4\pi}{b(z_1 - z_2)}$$
$$= \frac{4\pi}{b} \cdot \frac{1}{\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

c) integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{ix}\, \mathrm{d}x$,

kde R je racionální funkce s reálnými koeficienty, nemá póly na reálné ose, $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$.

Dle Eulerovy identity:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos x \,\mathrm{d}x + i \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin x \,\mathrm{d}x.$$

7.3. Věta. *Jordanovo lemma.*
Nechť K_r je polokružnice $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Předpokládejme, že $f(z)$ je spojitá funkce definovaná na průniku jistého okolí nekonečna s horní polorovinou. Označme

$$M(r) = \max_{z\in K_r} |f(z)|.$$

Jestliže $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$, *pak* $\lim_{r\to\infty} \int_{K_r} f(z) e^{iz}\, \mathrm{d}z = 0$.

Důkaz:

$$\int_{K_r} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi f(re^{it})e^{ire^{it}} \cdot ire^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Protože $|f(z)| \leq M(r)$ na K_r, můžeme odhadnout

$$\left| \int_{K_r} f(z)e^{iz}\, dz \right| \leq rM(r) \cdot \int_0^\pi |e^{ire^{it}}|\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Pro $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ máme $e^{iz} = e^{ix-y}, |e^{iz}| = e^{-y}$. Pro $z = re^{it}$ dá výše uvedená identita $\left|e^{ire^{it}}\right| = e^{-r\sin t}$.

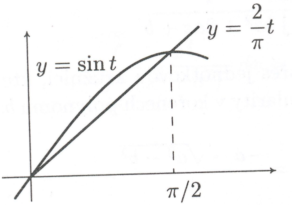
Dle (3) dostaneme

$$\left| \int_{K_r} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z \right| \leq rM(r) \cdot \int_0^\pi e^{-r\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Pro $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ platí nerovnost

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$$

(konkavita).



Díky symetrii funkce sinus k bodu $\pi/2$ máme

$$\int_0^{\pi} e^{-r \sin t} \, \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t} \, dt.$$

Platí tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}\,\mathrm{d}t \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\frac{2}{\pi}t}\,\mathrm{d}t < 2\int_0^{\infty} e^{-r\frac{2}{\pi}t}\,\mathrm{d}t = 2\frac{1}{\frac{2}{\pi}r} = \frac{\pi}{r}.$$

Závěr:

$$\left|\int_{K_r} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z\right| \le rM(r)\frac{\pi}{r} = \pi M(r) \to 0 \text{ pro } r \to \infty.$$

Pro racionální funkci R s $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$ platí Jordanovo lemma, a proto můžeme postupovat stejně jako v bodě (**a**). Tímto získáme

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{ix}\, \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\{z\in\mathbb{C} \mid z \text{ je pól } R,\, \operatorname{Im} z>0\}} \operatorname*{res}_{w=z} R(w)\, e^{iw}.}$$

Příklad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx =$$

$$= 2\pi i \operatorname*{res}_{2i} \frac{e^{iz}}{z^2+4} = 2\pi i \frac{e^{-2}}{2\cdot 2i} = \frac{\pi}{2} e^{-2}.$$

d) Obcházení jednoduchých pólů

7.4. Tvrzení. *Předpokládejme, že funkce f má jednoduchý pól v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť C je oblouk kružnice o středu z_0 a poloměru ϱ parametrizovaný funkcí*

$$\varphi(t) = z_0 + \varrho e^{it}, \qquad t \in [\varphi, \varphi + \alpha],$$

kde $0 \leq \varphi < \varphi + \alpha < 2\pi$*. Pak*

$$\lim_{\varrho \to 0+} \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = i\alpha \operatorname*{res}_{z_0} f(z).$$

Důkaz: Skutečnost, že f má v bodě z_0 jednoduchý pól, znamená, že $f(z)$ je možno vyjádřit:

$$f(z) = \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{z - z_0} + g(z),$$

kde g je funkce holomorfní v z_0. Je tedy

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \int_C g(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Přitom

$$\int_C \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi}^{\varphi+\alpha} \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{\varrho e^{it}} \cdot i\varrho e^{it}\,\mathrm{d}t$$

$$= i \operatorname*{res}_{z_0} f(z) \int_{\varphi}^{\varphi+\alpha} \mathrm{d}t = i\alpha \operatorname*{res}_{z_0} f(z).$$

Funkce g je omezená v jistém okolí bodu z_0. Pro $\varrho \to 0+$ konverguje délka křivky k nule.

$$\Longrightarrow \left| \int_C g(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \alpha\varrho \cdot \max_{z \in C} |g(z)| \to 0 \ \text{ pro } \varrho \to 0+.$$

Závěr:

$$\lim_{\varrho\to 0+} \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = i\alpha \operatorname*{res}_{z_0} f(z).$$

Příklad: Newtonův integrál
(detaily přednáška)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Integrujeme přes velké polokružnice (Jordanovo lemma) a malé polokružnice kolem bodu 0 (předchozí tvrzení),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = \pi i \operatorname*{res}_{0} \frac{e^{iz}}{z} = \pi i.$$

8. Fourierova transformace

8.1. Fourierovy řady

- zpracování periodické funkce, spektrální rozklad

předpoklady:

1. $$f(t) : [a, a+T] \to \mathbb{C}, T > 0$$

   nebo f je periodická funkce s periodou T.

2. f je integrovatelná tj.

$$\int_a^{a+T} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Fourierova řada v komplexním tvaru funkce f je řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$
$$= \cdots + c_{-2} e^{-2i\omega t} + c_{-1} e^{-i\omega t} + c_0 + c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{2i\omega t} + \cdots$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)\, e^{-in\omega t}\, \mathrm{d}t.$$

Fourierovy koeficienty funkce f, c_n ($n \in \mathbb{Z}$) „poměřují“ $f(t)$ s periodickým pohybem $e^{in\omega t}$, tj. násobnými harmonickými kmitočty.

Princip: Spojité funkce integrovatelné s kvadrátem se stejnými Fourierovými koeficienty jsou stejné. Fourierovy koeficienty kódují funkce, charakterizují je ve frekvenční oblasti.

Důkaz tohoto faktu je obtížnější.

Je-li f je reálná funkce, pak $c_{-n} = \overline{c_n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz: $f(t)$ je reálné:

$$
\begin{aligned}
T\,c_n &= \int_a^{a+T} f(t)\, e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^{a+T} f(t)\, \cos n\omega t\,\mathrm{d}t - i \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t, \\
T\,c_{-n} &= \int_a^{a+T} f(t)\, e^{in\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t + i \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

a tedy $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Je-li f reálná funkce, pak můžeme sloučit dva komplexně sdružené členy dohromady a dostat tak čistě reálnou řadu. Pro $n \geq 1$ máme:

$$\begin{aligned}
&c_n\, e^{in\omega t} + c_{-n}\, e^{-in\omega t} \\
&= c_n\,(\cos n\omega t + i \sin n\omega t) + c_{-n}\,(\cos n\omega t - i \sin n\omega t) \\
&= (c_n + c_{-n})\, \cos n\omega t + (i\, c_n - ic_{-n})\, \sin n\omega t \\
&= 2\,\mathrm{Re}\, c_n \cos n\omega t - 2\,\mathrm{Im}\, c_n \sin n\omega t.
\end{aligned}$$

Označme

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t,$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t.$$

Kosinově-sinový tvar:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega t + b_n \sin n\omega t.$$

Amplituda:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Transformační vztahy mezi koeficienty pro $n \geq 1$:

$$a_n = 2\ \mathrm{Re}\,c_n, \qquad c_n = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2},$$

$$b_n = -2\ \mathrm{Im}\,c_n, \qquad c_{-n} = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}.$$

Důležité je, že Fourierovy koeficienty umožní zrekonstruovat funkci (jsou vlastně souřadnicemi vůči nekonečné bázi).
V některých případech je funkce přímo rovna součtu své Fourierovy řady.

8.1. Věta. *Dirichletova věta.*
Je-li reálná funkce f s periodou T po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci, pak

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

8.2. Přímá a zpětná Fourieova transformace

Motivace: spektrální rozklad obecné neperiodické funkce v nekonečné časové oblasti, nediskrétní škála frekvencí, koreluje funkci s harmonickými funkcemi $g(t) = e^{i\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

8.2. Definice. Nechť f je komplexní funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Funkce $\hat{f}$ definovaná předpisem

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

se nazývá Fourierova transformace funkce f.
Funkce $\check{f}$ definovaná předpisem

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}t, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

se nazývá inverzní Fourierova transformace funkce f.

Za definiční obor se považuje množina všech $\omega \in \mathbb{R}$, pro které existují příslušné integrály.

Konvence:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Hlavní hodnota integrálu.

Poznámka:

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi\, \check{f}(-\omega).$$

Značení a terminologie: $F : f \to \hat{f}$, $F^{-1} : f \to \check{f}$.

Fourierova transformace a inverzní Fourierova transformace:
Ff, $f(t) \doteq \hat{f}(\omega)$, $F\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$.

Postačující podmínka pro existenci Fourierovy transformace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty.$$

Pak totiž: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\, e^{-i\omega t}|\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$.

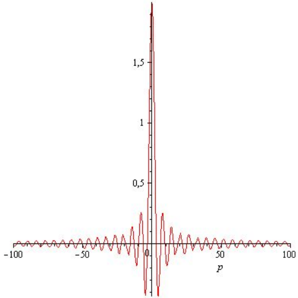
Značení: $L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty\}$.

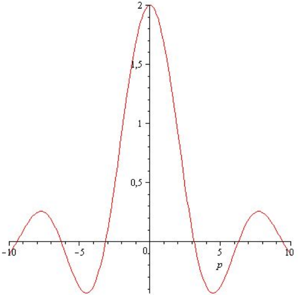
8.3. Příklad. Obraz bránové funkce, $a > 0$:

$$f_a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-a, a]; \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$\hat{f}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{t=-a}^{t=a} = \frac{e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}}{i\omega} = 2\frac{\sin a\omega}{\omega}.$$





8.4. Příklad.

$$\check{f}_a(\omega) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}_a(-\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(-a\omega)}{-\omega} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin a\omega}{\omega}.$$

8.5. Příklad. Obraz gaussovské funkce:

$$f(t) = e^{-at^2}, \qquad a > 0.$$

Víme již, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-it\omega}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Na základě toho (substituce $u = \sqrt{a}\, t$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-it\omega}\,\mathrm{d}t = 1/\sqrt{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{-iu\,\omega/\sqrt{a}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

8.6. Příklad. Vybíjení kondenzátoru, $\alpha > 0$:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^\infty e^{-\alpha\, t}\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(\alpha + i\omega)t}\, \mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{-1}{\alpha + i\omega} e^{-(\alpha + i\omega)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha + i\omega}.$$

Fourierovy obrazy racionálních funkcí - aplikace reziduové věty

Předpoklady: P a Q jsou polynomy, $\deg Q > \deg P$ a Q nemá reálné kořeny.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, e^{it}\, \mathrm{d}t = 2\pi i \sum_{\{z \mid Q(z)=0, \operatorname{Im} z>0\}} \operatorname*{res}_{w=z} \frac{P(w)}{Q(w)}\, e^{iw}}$$

Při výpočtu Fourierovy transformace racionální funkce $\frac{P}{Q}$ potřebujeme integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t.$$

Ten se dá substitucí převést na integrál výše:

Substituce pro $\omega \neq 0$:
$u = -\omega t,\ \mathrm{d}u = -\omega\,\mathrm{d}t.$

Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(-\frac{u}{\omega})}{Q(-\frac{u}{\omega})}\, e^{iu}\,\frac{\mathrm{d}u}{|\omega|}.$$

Označíme-li

$$R(z) = \frac{P(-\frac{z}{\omega})}{Q(-\frac{z}{\omega})},$$

máme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi i}{|\omega|} \sum_{\left\{z \,\middle|\, Q\left(\frac{-z}{\omega}\right)=0,\ \mathrm{Im}\, z>0\right\}} \operatorname*{res}_{w=z} R(w)e^{iw}.$$

8.7. Příklad.

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}.$$

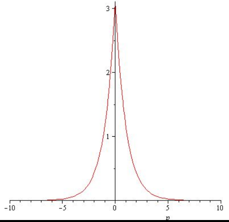
$\omega \neq 0$:

$$R(z) = \frac{1}{\frac{z^2}{(-\omega)^2}+1} = \frac{\omega^2}{z^2+\omega^2}.$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2\pi i}{|\omega|} \operatorname*{res}_{i|\omega|} \frac{\omega^2}{z^2+\omega^2} e^{iz} = \frac{2\pi i\,\omega^2}{|\omega|} \cdot \frac{e^{-|\omega|}}{2i|\omega|} = \pi e^{-|\omega|}.$$

Pro $\omega = 0$ dopočítáme ze spojitosti obrazu nebo z definice:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = [\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^{\infty} = \pi.$$



Souvislost Fourierovy transformace a Fourierovy řady

Předpokládejme, že f je periodická funkce s periodou $T > 0$ taková, že

$$\int_a^{a+T} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty.$$

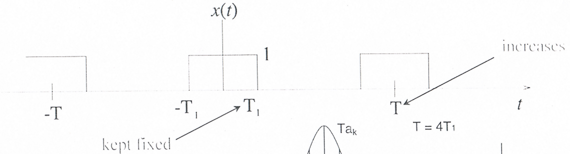
Označme $\mathbf{1}_{[a,a+T]}$ charakteristickou funkci intervalu $[a, a+T]$ a

$$f_T = \mathbf{1}_{[a,a+T]} \cdot f.$$

Pro Fourierův koeficient c_n, funkce f platí

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) \, e^{-in\omega_0 t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \, \hat{f}_T(n\omega_0) \, ,$$

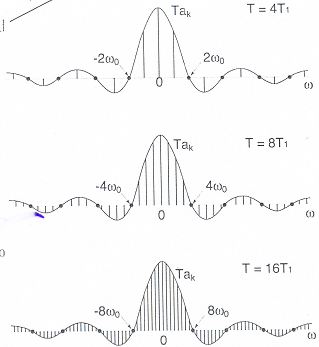
Motivating Example: Square wave



$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

$$\Downarrow$$

$$Ta_k = \left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$$



Discrete frequency points become denser in ω as T increases

8.8. Věta. *Věta o inverzní Fourierově transformaci.*
Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. *Je-li* f *spojitá na* $\mathbb{R}$ *a* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, *pak*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$

   pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

2. *Jsou-li* f *a* f' *po částech spojité funkce na* $\mathbb{R}$, *pak*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$

   pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Význam:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega,$$

$\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$,
aproximující součty tohoto integrálu:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \hat{f}(\omega_i)(\omega_{k+1} - \omega_k)\, e^{i\omega_k t}$$

jsou kombinací harmonických funkcí $\omega_k(t) = e^{i\omega_k t}$.
Hodnota $|\hat{f}(\omega)|$ udává amplitudu.

8.9. Důsledek. *Dvě spojité funkce z $L^1(\mathbb{R})$ jsou stejné, mají-li stejnou Fourierovu transformaci.*

Důkaz: $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ spojité, $\hat{f} = \hat{g}$. Pro $h = f - g$ máme

$$\hat{h} = 0,$$

a tedy $h = 0$.

8.10. Příklad.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\,\frac{\sin\omega}{\omega}\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega.$$

Podle Příkladu 8.3 máme

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } t \in (-1,1); \\ 1/2, & \text{je-li } t \in \{\pm 1\}; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jinými slovy inverzním obrazem funkce $h : \omega \mapsto 2\,\frac{\sin\omega}{\omega}$ je funkce g.

Speciální případ $t = 0$ vede na Newtonův integrál.

8.11. Věta. *Základní gramatika Fourierovy transformace.*

1. *Posun ve vzoru:*

$$F\{f(t-a)\} = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega).$$

2. *Změna měřítka (scaling):*

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), a \neq 0.$$

3. *Pravidlo konjugace:*

$$F\{\overline{f(-t)}\} = \overline{\hat{f}(\omega)}.$$

4. *Posun obrazu, modulace vzoru:*

$$F\{e^{iat}f(t)\} = \hat{f}(\omega - a).$$

Důkaz:

1. $F\{f(t-a)\} = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)$:

$$F\{f(t-a)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\, e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

(substituce $u = t - a$)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u+a)}\,\mathrm{d}u$$

$$= e^{-i\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u}\,\mathrm{d}u = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega).$$

2. $$F\{f(at)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\, e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

(substituce $u = a\,t,\ \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t$)

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega \frac{u}{a}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

3. $$F\{\overline{f(-t)}\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-t)}\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t$$

(substituce $u = -t$)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}\, e^{i\omega u}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)\, e^{-i\omega u}}\, \mathrm{d}u$$
$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega u}\, \mathrm{d}u} = \overline{\hat{f}(\omega)}.$$

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{iat}\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(\omega - a)\, t}\, \mathrm{d}t = \hat{f}(\omega - a).$$

8.12. Příklad.

$$e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} \doteq e^{-i\omega} \sqrt{2\,\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\,\omega^2}.$$

8.13. Příklad.

$$\sin t\, e^{-t^2} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2\,i}\, e^{-t^2} \doteq \frac{1}{2\,i}\sqrt{\pi}\left[e^{-\frac{(\omega-1)^2}{4}} - e^{-\frac{(\omega+1)^2}{4}}\right].$$

8.14. Příklad. Předpokládejme, že platí věta o inverzní Fourierově transformaci. Jaké reálné funkce mají reálný Fourierův obraz?

Řešení: $\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$, a tedy $f(-t) = f(t)$. Jsou to pouze sudé funkce.

8.15. Příklad. Nalezněte obraz funkce $g(t) = f(2t-3)$ pomocí obrazu funkce f.

Řešení:

$$\begin{array}{ccccc} f(t) & \longrightarrow & f(t-3) & \longrightarrow & f(2t-3) \\ \hat{f}(\omega) & \longrightarrow & e^{-3i\omega}\hat{f}(\omega) & \longrightarrow & \dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}i\omega}\hat{f}\left(\dfrac{\omega}{2}\right). \end{array}$$

8.16. Věta. *Riemannovo-Lebesgueovo lemma.*
Je-li $f \in L^1(\mathbb{R})$, pak $\hat{f}$ je spojitá funkce a platí

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

8.17. Věta. *Obraz derivace.*
Nechť f je spojitě diferencovatelná funkce a $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Pak

$$\boxed{F\{f'(t)\}(\omega) = i\omega\, \hat{f}(\omega).}$$

Důkaz:

$$f' \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0).$$

Tedy existuje limita $\lim_{t\to\pm\infty} f(t)$. Tato limita musí být rovna nule, neboť $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Nyní použijeme metodu per-partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-i\omega\, t}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\, e^{-i\omega t} \Big]_{t=-\infty}^{t=\infty} + i\,\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega\, t}\,\mathrm{d}t$$
$$= i\omega\hat{f}(\omega).$$

8.18. Příklad. $f(t) = e^{-a\,t^2}, a > 0$. Pak

$$f'(t) = -2\,a\,t\,e^{-a\,t^2} \doteq i\,\omega\,\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Důsledek:
Jsou-li $f, f', \dots, f^{(k)}$ spojité funkce z $L^1(\mathbb{R})$, pak

$$f^{(k)}(t) \doteq (i\,\omega)^k\,\hat{f}(\omega)$$

a dle Riemannova-Lebesgueova lemmatu

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \omega^k \hat{f}(\omega) = 0.$$

8.19. Věta. *Derivace obrazu.*
Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$ *a* $(t \mapsto t\,f(t)) \in L^1(\mathbb{R})$*. Pak*

$$\boxed{F\{t\,f(t)\}(\omega) = i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f}(\omega).}$$

8.20. Příklad. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = t\,e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Řešení:

$$t\,e^{-\frac{t^2}{2}} \doteq i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{-\omega^2}{2}} = -i\sqrt{2\pi}\,\omega\,e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

Konvoluce je operace na množině integrovatelných funkcí.
Motivace: Co odpovídá ve Fourierově transformaci součinu funkcí?

8.21. Definice. Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Konvoluce funkcí f a g je funkce $h = f * g$ daná vztahem

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s.}$$

8.22. Příklad. $h = f_a * f_a$, kde f_a je bránová funkce.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(s)\, f_a(t-s)\,\mathrm{d}s.$$

Integrujeme 1 přes průnik intervalů

$$[-a, a] \cap [t - a, t + a].$$

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < -2a; \\ t + 2a, & t \in [-2a, 0]; \\ 2a - t, & t \in [0, 2\,a]; \\ 0, & t > 2\,a. \end{cases}$$

8.23. Věta. *Obraz konvoluce.*
Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pak pro $h = f * g$ platí

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega).$$

Důkaz: Založen na záměně pořadí integrace.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,g(t-s)\,\mathrm{d}s\right)}^{h(t)} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)\,e^{-i\omega(t-s)}\,\mathrm{d}t\right)}_{\text{posun } u=t-s} f(s)\,e^{-i\omega s}\,\mathrm{d}s$$

$$= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,e^{-i\omega u}\,du\right)}_{\hat{g}(\omega)} \cdot \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{-i\omega s}\,\mathrm{d}s\right)}_{\hat{f}(\omega)}.$$

8.24. Příklad. Trojúhelník:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -2a; \\ t + 2a, & t \in [-2a, 0]; \\ 2\,a - t, & t \in [0, 2\,a]; \\ 0, & t > 2\,a. \end{cases}$$

Platí $f(t) = f_a(t) * f_a(t)$.

Podle věty o obrazu konvoluce:

$$\hat{f}(\omega) = \left(2\,\frac{\sin a\omega}{\omega}\right)^2 = \frac{4\sin^2 a\omega}{\omega^2}.$$

8.25. Příklad. Určete konvoluci $f * g$ funkcí

$$f(t) = e^{-at^2},$$
$$g(t) = e^{-bt^2},$$

kde $a, b > 0$.

Fourierova transformace:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} e^{-\frac{\omega^2}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Inverze:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\, e^{-\left(\frac{ab}{a+b}\right)t^2}.$$

8.26. Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$y''(t) - y(t) = e^{-t^2}.$$

Fourierova transformace:

$$-\omega^2 \hat{y}(\omega) - \hat{y}(\omega) = F\{e^{-t^2}\}(\omega).$$

$$-y(t) = \left[e^{-t^2} * F^{-1}\left\{\frac{1}{1+\omega^2}\right\}\right](t).$$

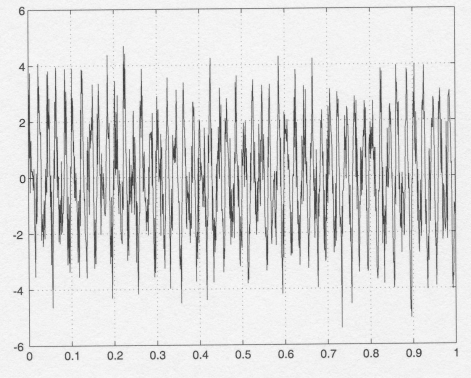
$$F^{-1}\left\{\frac{1}{1+\omega^2}\right\}(t) = \frac{1}{2}\, e^{-|t|}.$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|}\, e^{-s^2}\, \mathrm{d}s.$$

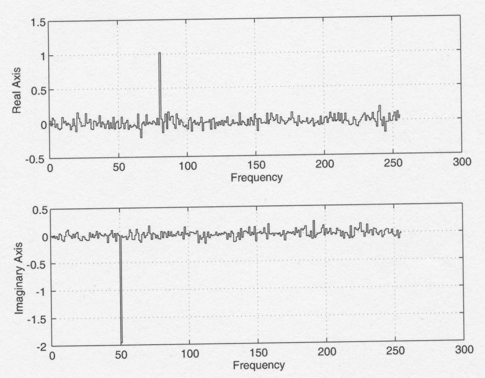
Fourierova transformace je základem oborů:

- teorie signálů
- harmonická analýza
- kvantová mechanika
- waveletová analýza
- parciální diferenciální rovnice
- atd.

Ilustrace k detekci nosného signálu:
signál:



Reálná a imaginární složka Fourierovy reprezentace:



odhalí kompozici kosinové a sinové vlny

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 80t) + 2\sin(2\pi \cdot 50t) + \text{šum}.$$

9. Laplaceova transformace

9.1. Přímá Laplaceova transformace

9.1. Definice. Předpokládejme, že f je komplexní funkce definovaná na intervalu $[0,\infty)$. Laplaceova transformace funkce f je komplexní funkce F (proměnné s) daná vztahem

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-s\,t}\,\mathrm{d}t.$$

Za definiční obor Laplaceova obrazu považujeme množinu všech komplexních s splňujících $\operatorname{Re} s>0$, pro která existuje výše uvedený integrál.

- LT zpracuje na rozdíl od FT i nestabilní systémy.
- LT je motivována LTI systémy.

Konvence:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Často ztotožňujeme $f(t)$ a $\mathbf{1}(t)f(t)$.

Značení: $F = \mathcal{L}f$, $f \doteq F$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Přímá Laplaceova transformace je zobrazení $f \to \mathcal{L}f$.

Příklady:

$$f(t) = \mathbf{1}(t).$$

$\operatorname{Re} s > 0$,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s}.$$

$$f(t) = e^{at},\ a \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

$$f(t) = \cos t, \qquad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}.$$

$$f(t) = \sin t, \qquad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})\right\} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{2i}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}.$$

9.2. Definice. Funkce f definovaná na kladné části reálné osy se nazývá funkce třídy $\mathcal{L}_0$ (též předmět standardního typu), jestliže

1. f je po částech spojitá,
2. f je nejvýše exponenciálního růstu, tj. existují konstanty $\alpha, M \geq 0$ tak, že

$$|f(t)| \leq M\, e^{\alpha\, t} \qquad \text{pro všechna } t \geq 0.$$

Číslo α se přitom nazývá index růstu funkce f.

- Každá omezená po částech spojitá funkce je v $\mathcal{L}_0$; 0 je index růstu.
- Funkce
$$f(t) = t^n,$$
kde $n \in \mathbb{N}$ je parametr, je v $\mathcal{L}_0$, neboť
$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^n}{e^{\alpha\, t}} = 0$$
pro všechna $\alpha > 0$.
Množina $\mathcal{L}_0$ je uzavřena na lineární kombinace a součiny.
V důsledku toho je $p \in \mathcal{L}_0$ pro každý polynom p.

- Exponenciální funkce

$$f(t) = e^{at}, \qquad a \in \mathbb{C}$$

je v množině $\mathcal{L}_0$; $\operatorname{Re} a$ je indexem růstu.
Tedy každý kvazipolynom (součin polynomu a exponenciální funkce) je v $\mathcal{L}_0$.

- e^{t^2} není v $\mathcal{L}_0$. Důvod: Funkce

$$\frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}}$$

má limitu ∞ pro $t \to \infty$, pro každé $\alpha > 0$, a tedy nemůže být omezená.

• Laplaceova transformace je definována pro širší třídu funkcí než transformace Fourierova.

9.3. Věta. *Základní gramatika Laplaceovy transformace.*

1. *(Linearita.)*
   Nechť $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Pak*

$$\mathcal{L}\{\alpha f_1 + \beta f_2\} = \alpha\mathcal{L}\{f_1\} + \beta\mathcal{L}\{f_2\}.$$

2. *(Věta o substituci.)*
   Nechť $f \in \mathcal{L}_0$ *a nechť* $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$. *Pak, pro* $a \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a).$$

3. *(Věta o změně měřítka.)*
   Nechť $f \in \mathcal{L}_0$ *a nechť* $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$. *Pak, pro* $k > 0$,

$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right).$$

Důkaz: stejně jako v případě Fourierovy transformace.

Příklady: Nechť $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2} + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Podobně:

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{s}{\omega} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2} + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}.$$

9.4. Věta. *Věta o derivaci obrazu.*
Předpokládejme, že f je po částech spojitá funkce na intervalu $(0,\infty)$ a $c>0$ je takové, že konverguje integrál

$$\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-ct}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Pak Laplaceova transformace F funkce f je definována v polorovině $\{s\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > c\}$ a je v této polorovině holomorfní. Platí dále, že

$$F(s)' = -\int_0^\infty tf(t)\, e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{tf(t) \doteq -\frac{d}{ds}F(s)}$$

Důkaz: přednáška.

9.5. Věta. *Předpokládejme, že $f \in \mathcal{L}_0$ má Laplaceův obraz F. Pak platí následující tvrzení:*

1. *Existuje $\alpha \geq 0$ tak, že F je holomorfní v polorovině $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \alpha\}$,*
2. $\lim_{\operatorname{Re} s \to \infty} F(s) = 0$.

Důkaz: (i) z předchozí věty, α – index růstu.

Důkaz: (ii)

$$|f(t)| \leq M\, e^{\alpha t}.$$

Vezměme s takové, že $\operatorname{Re} s > \alpha$.

$$\left| \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\infty M\, e^{\alpha t} e^{-\operatorname{Re} st}\, \mathrm{d}t$$

$$= \left[M\, \frac{e^{(\alpha - \operatorname{Re} s)\, t}}{\alpha - \operatorname{Re} s} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{M}{\operatorname{Re} s - \alpha} \xrightarrow{\operatorname{Re} s \to \infty} 0.$$

9.6. Důsledek. *Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ s Laplaceovým obrazem F, pak existují konstanty $M, \alpha \geq 0$ takové, že*

$$|F(s)| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} s - \alpha}$$

pro všechna s splňující $\operatorname{Re} s > \alpha$.

Příklad:

$$f(t) = t^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \mathcal{L}\{t \cdot \mathbf{1}\}(s) = -\left(\frac{1}{s}\right)' = \frac{1}{s^2}.$$

Postupně indukcí:

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.}$$

Doposud spojité funkce, nyní funkce se skokem.
Translace funkce:
$a > 0$,

$$f(t-a)\mathbf{1}(t-a) = \begin{cases} f(t-a), & t > a; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

9.7. Věta. *Věta o translaci.*
Pro funkci f s Laplaceovým obrazem F a pro a > 0 platí

$$\boxed{\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s).}$$

Důkaz:

$$\int_0^\infty \mathbf{1}(t-a)f(t-a)\, e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

(substituce $u = t - a$)

$$= \int_0^\infty f(u)\, e^{-s(a+u)}\, du = e^{-as}\int_0^\infty f(u)e^{-su}\,\mathrm{d}u$$

$$= e^{-as}F(s).$$

Modifikace:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t-a)f(t)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}(s)}$$

Příklady:

$a > 0$

$$\mathbf{1}(t-a) \doteq e^{-as}\frac{1}{s}.$$

Spočtěte obraz funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,2); \\ e^t, & t \geq 2. \end{cases}$$

$$f(t) = \mathbf{1}(t-2)e^t.$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-2s}\,\mathcal{L}\{e^{t+2}\}(s) = e^{-2s}e^2\frac{1}{s-1}.$$

Konečný impuls:

$0 < a < b$.

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, b); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$h(t) = f(t)[\mathbf{1}(t-a) - \mathbf{1}(t-b)].$$

9.8. Příklad. Spočtěte obraz konečného impulsu, $a > 0$,

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, 2a); \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení:

$$f(t) = \mathbf{1}(t-a) - \mathbf{1}(t-2a) \doteq e^{-as}\frac{1}{s} - e^{-2as}\frac{1}{s}.$$

9.9. Věta. *Obraz periodické funkce.*
Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ periodická funkce s periodou $T > 0$, pak Laplaceův obraz funkce f je funkce

$$F(s) = \frac{\int_0^T f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t}{1 - e^{-sT}}.$$

Důkaz: Funkce

$$f(t) - \mathbf{1}(t - T) f(t - T)$$

je rovna funkci $f(t)$ na intervalu $[0, T]$ a je nulová jinde. Její obraz je tedy funkce

$$G(s) = \int_0^T f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t.$$

Na druhé straně je ovšem podle věty o translaci obraz této funkce roven funkci

$$F(s) - e^{-sT}F(s) = G(s).$$

Z této identity plyne okamžitě požadovaný vztah.

9.10. Příklad. Nalezněte obraz periodického prodloužení funkce

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, 2a]; \\ 0 & \text{jinak}; \end{cases}$$

s periodou $T = 2a$.

Řešení: $T = 2a$.

$$\mathbf{1}(t-a) - \mathbf{1}(t-2a) \doteq e^{-sa}\frac{1}{s} - e^{-2sa}\frac{1}{s}.$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-as} - e^{-2as}}{1 - e^{-2as}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-as}(1 - e^{-as})}{(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})}$$
$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-as}}{1 + e^{-as}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + e^{as}}.$$

V některých případech se dá Laplaceova transformace mocninné řady počítat člen po členu.

9.11. Věta. *„Laplacování člen po členu".*
Předpokládejme, že $f \in \mathcal{L}_0$ a jsou splněny následující dvě podmínky:

1. *Pro všechna $t \geq 0$ platí*
$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$
2. *Řada*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}}$$
konverguje v jistém okolí nekonečna.

Pak pro Laplaceův obraz F funkce f platí
$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

9.12. Příklad.

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Zkoumejme konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n+1)! \, s^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \, s^{2n+1}}.$$

Tato řada má stejný (vnitřní) poloměr konvergence jako řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^{2n+1}},$$

která konverguje pro $|s| > 1$. Pro Laplaceův obraz F máme

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \, s^{2n+1}} \quad \text{pro } \operatorname{Re} s > 1.$$

9.13. Věta. *Věta o obrazu n-té derivace.*
Nechť funce f má derivace do $n-$tého řádu, které náleží do třídy $\mathcal{L}_0$. Předpokládejme dále, že existují vlastní limity $f^{(k)}(0+)$, $0 \leq k \leq n$. Označme F Laplaceův obraz funkce f. Pak

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)\\ &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+).\end{aligned}}$$

Důkaz založen na metodě per partes – viz přednáška.

Řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transfromace

Řešte diferenciální rovnici:

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^t,$$
$$y(0+) = 1, \quad y'(0+) = 1.$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s),$$
$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) - y(0+) = sY(s) - 1.$$
$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2 Y(s) - sy(0+) - y'(0+) = s^2 Y(s) - s - 1.$$

Transformace rovnice:

$$s^2 Y(s) - s - 1 - 2s\, Y(s) + 2 + 2Y(s) = \tfrac{1}{s-1},$$
$$(s^2 - 2s + 2)\, Y(s) = \frac{1}{s-1} + s - 1 = \frac{s^2 - 2s + 2}{s-1},$$
$$Y(s) = \frac{1}{s-1}, \text{ a tedy } \underline{y(t) = e^t}.$$

Nutno znát inverzní transformaci.

9.2. Inverzní Laplaceova transformace

Nutná podmínka pro existenci vzoru v $\mathcal{L}_0$ je holomorfnost v jisté pravé polorovině a nulová limita funkce pro $\operatorname{Re} s \to \infty$. Do této kategorie spadají racionální funkce.

9.14. Tvrzení. *Je-li $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, kde P and Q jsou polynomy, $\deg Q > \deg P$, pak F je Laplaceovým obrazem funkce z $\mathcal{L}_0$.*

Algoritmus: rozklad na částečné zlomky

$$\boxed{\frac{e^{at} t^{n-1}}{(n-1)!} \doteq \frac{1}{(s-a)^n}.}$$

9.15. Příklad.

$$F(s) = \frac{2(s^2-1)}{(s^2+1)^2}.$$

Rozklad na částečné zlomky:

$$F(s) = \frac{A}{(s+i)^2} + \frac{B}{(s+i)} + \frac{C}{(s-i)^2} + \frac{D}{(s-i)}.$$

Po výpočtu:

$$F(s) = \frac{1}{(s+i)^2} + \frac{1}{(s-i)^2} \doteq e^{-it}\, t + e^{i\,t} t = 2t \,\cos t.$$

9.16. Příklad.

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

$$F(s) = \frac{A}{s+i} + \frac{B}{(s+i)^2} + \frac{C}{s-i} + \frac{D}{(s-i)^2}.$$

Body $\pm i$ jsou póly druhého řádu funkce F.

$$\begin{aligned} A = \operatorname*{res}_{-i} F(z) &= \lim_{s \to -i} \left[F(s)\,(s+i)^2 \right]' \\ &= \lim_{s\to -i} \left(\frac{1}{(s-i)^2} \right)' = \frac{-2}{(-i-i)^3} = \frac{i}{4}. \end{aligned}$$

$$C = \overline{A} = -\frac{i}{4}.$$

$$B = \lim_{s \to -i} F(s)(s+i)^2 = \frac{1}{(-i-i)^2} = -\frac{1}{4}.$$

$$D = \overline{B}.$$

Vzor:

$$f(t) = -\frac{1}{4} t\, e^{-it} - \frac{1}{4} t\, e^{i\,t} + \frac{i}{4}\, e^{-i\,t} - \frac{i}{4} e^{it} =$$

$$= -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \sin t.$$

Obecnější než racionální funkce jsou funkce holomorfní v okolí nekonečna mající v nekonečnu nulovou limitu.

9.17. Věta. *Věta o rozkladu.*

Nechť F je holomorfní funkce v okolí nekonečna s Laurentovým rozvojem

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s^n}.$$

Pak F je Laplaceovým obrazem funkce

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1}.$$

9.18. Příklad.

$$F(s) = \frac{1}{s}\, e^{-\frac{1}{s}}.$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{1!s^2} + \frac{1}{2!s^3} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s^{k+1}}.$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^k}{k!}.$$

Integrální formule a metoda reziduí

Odvození integrálního vyjádření:

Předpoklady:
$f \in \mathcal{L}_0$, f' po částech spojitá,
$f(t) = 0$ pro $t < 0$. Existuje $\alpha > 0$ tak, že

$$|f(t)| \leq M\, e^{\alpha\, t}, \qquad t \geq 0.$$

Pro $x > \alpha$ je

$$\left(t \mapsto f(t)\, e^{-x\, t}\right) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Zvolme pevně $s = x + i\, y$, kde $x > \alpha,\ y \in \mathbb{R}$.
Počítejme hodnotu Laplaceovy transformace v bodě s:

$$\mathcal{L}f(s) = F(x + i\, y) = \int_0^\infty (f(t)\, e^{-x\, t})\, e^{-i\, y\, t}\, \mathrm{d}t.$$

Jinými slovy

$$F(x + i\, y) = F\{f(t)e^{-xt}\}(y).$$

Můžeme použít větu o inverzní Fourierově transformaci aplikovanou na funkci

$$t \mapsto f(t)\, e^{-x\, t}.$$

V bodech spojitosti funkce $f(t)$ máme:

$$f(t)\, e^{-x\, t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + i\, y)\, e^{i\, y\, t}\, \mathrm{d}y, \qquad t > 0.$$

Odtud

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x\, t} e^{i\, y\, t} F(x + i\, y)\, dy.$$

Tento integrál se dá interpretovat jako křivkový integrál přes přímku: Zvolme nejdříve úsečku C_R, s krajními body

$$x - i\, R, \quad x + i\, R, \qquad R > 0.$$

Parametrizace této úsečky je

$$\varphi(y) = x + i\, y, \quad \varphi'(y) = i; \qquad y \in [-R, R].$$

$$\int_{C_R} F(s)e^{s\,t}\,\mathrm{d}s = \int_{-R}^{R} F(x+i\,y)\,e^{x\,t}\,e^{i\,y\,t}\,i\,\mathrm{d}y.$$

Tedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} F(s)\,e^{s\,t}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(x+iy)\,e^{xt+i\,yt}\,\mathrm{d}y.$$

Limitou pro $R \to \infty$ dostaneme

Riemannův–Mellinův vzorec

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_x} F(s)\,e^{s\,t}\,\mathrm{d}s.$$

L_x ... Bromwichova linie. Přímka daná parametrizací

$$\varphi(t) = x + i\,t, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Též používáme zápis

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i + x}^{\infty i + x} F(s)\, e^{s\,t}\, \mathrm{d}s.}$$

Všimněme si, že na x, $x > \alpha$ nezáleží.

Jak vypočítat integrál $\int_{-\infty i+a}^{\infty i+a} F(s)\, e^{s\,t}\, \mathrm{d}s$, $a > 0$?

Předpokládejme, že uvedený integrál existuje.

Technické předpoklady:

1. Laplaceův obraz F se dá rozšířit na funkci holomorfní v $\mathbb{C}$ vyjma spočetně mnoha izolovaných singulárních bodů $s_1, s_2, \ldots$ ležících v polorovině $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s < a\}$.
2. Existuje posloupnost polokružnic

$$K_n = \{s \in \mathbb{C} \mid |s - a| = R_n, \operatorname{Re} s \leq a\}$$

s poloměry $R_n \to \infty$ tak, že

$$\int_{K_n} F(s)\, e^{s\,t}\, \mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

Technické předpoklady implikují pomocí reziduové věty, že

$$\boxed{\int_{-\infty i+a}^{\infty i+a} F(s)\, e^{s\,t}\, ds = 2\pi i \sum_n \operatorname*{res}_{s=s_n} F(s)\, e^{s\,t}.}$$

Metoda reziduí:

$$\boxed{f(t) = \sum_n \operatorname*{res}_{s=s_n} F(s)\, e^{s\,t}.}$$

Dá se použít u některých důležitých funkcí jako racionální funkce a obrazy periodických funkcí. Dá odhad vzoru, ve všech případech je možno výsledek ověřit zkouškou.

Testovací příklady:

9.19. Příklad.

$$F(s) = \frac{1}{s^2}.$$

$$f(t) = \operatorname*{res}_{s=0} \frac{e^{s\,t}}{s^2} = \lim_{s\to 0} (e^{s\,t})' = te^0 = t.$$

9.20. Příklad.

$$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad a > 0.$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname*{res}_{s=ia} \frac{s}{s^2+a^2} e^{s\,t} + \operatorname*{res}_{s=-ia} \frac{s}{s^2+a^2} e^{s\,t} \\ &= \frac{ai}{2ai}\, e^{i\,a\,t} + \frac{-ai}{-2ai}\, e^{-i\,a\,t} = \frac{1}{2} e^{i\,a\,t} + \frac{1}{2} e^{-i\,a\,t} = \cos at. \end{aligned}$$

9.21. Poznámka. *Pokud je singularita s_n pólem prvního řádu funkce F, pak*

$$\operatorname*{res}_{s=s_n} F(s)\, e^{s\,t} = (\operatorname*{res}_{s_n} F) \cdot e^{s_n\,t}.$$

9.22. Příklad.

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t \operatorname*{res}_{1} F + e^{2t} \operatorname*{res}_{2} F + e^{3t} \operatorname*{res}_{3} F \\ &= \frac{e^t}{2} - e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}. \end{aligned}$$

9.23. Příklad.

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)(s-3)}.$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{res}_{s=1} \frac{e^{st}}{(s-1)^2(s-2)(s-3)} = \lim_{s\to 1}\left(\frac{e^{st}}{(s-2)(s-3)}\right)' \\
&= \lim_{s\to 1}\left(\frac{t\,e^{st}}{(s-2)(s-3)} - \frac{2s-5}{(s-2)^2(s-3)^2}\,e^{st}\right) \\
&= \frac{3}{4}e^t + t\frac{1}{2}e^t.
\end{aligned}$$

Ostatní singularity jsou jednoduché póly, a tedy

$$f(t) = \frac{3}{4}\,e^t + t\frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}.$$

9.24. Příklad.

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

Singularity $\pm i$, póly druhého řádu.

$$\operatorname*{res}_{s=i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} = \lim_{s\to i}\left[\frac{e^{st}}{(s+i)^2}\right]'$$
$$= \lim_{s\to i} \frac{te^{st}(s+i)^2 - e^{st}2(s+i)}{(s+i)^4} = \frac{-t\,e^{it}}{4} - \frac{ie^{it}}{4}.$$

Podobně

$$\operatorname*{res}_{s=-i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} = \frac{-te^{-it}}{4} + \frac{1}{4}ie^{-it}.$$

Závěr:

$$f(t) = -\frac{1}{2}t\,\cos t + \frac{1}{2}\,\sin t.$$

9.25. Příklad.

$$F(s) = \frac{1}{s(1+e^s)}.$$

Singularity: $0, e^s = -1$, tj. $s_n = (2n+1)i\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Aplikujeme metodu reziduí:

$$\operatorname*{res}_{s=0} \frac{e^{st}}{s(1+e^s)} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}.$$

Pro $s_n = (2n+1)\,\pi i$:

$$\operatorname*{res}_{s_n} \left(\frac{e^{st}}{s(1+e^s)}\right) = \frac{e^{ts_n}}{s_n \underbrace{e^{s_n}}_{=-1}} = -\frac{e^{t(2n+1)\,\pi i}}{(2n+1)\pi i}.$$

$$
\begin{aligned}
f(t) =& \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{t\,(2n+1)\pi\, i}}{(2n+1)\pi\, i} \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\,\pi t] \,+ i\sin[(2n+1)\,\pi t]}{(2n+1)\pi i} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi t]}{(2n+1)}.
\end{aligned}
$$

Dostáváme takto periodickou funkci s periodou $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Na základě této informace jsme dokonce schopni explicitně stanovit danou funkci.

$$\frac{1}{s(1+e^s)} = \frac{G(s)}{1-e^{-2s}}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1-e^{-2s}}{s(1+e^s)} = \frac{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}{s(1+e^{-s})e^s} \\ &= \frac{1}{s}\,e^{-s} - \frac{1}{s}\,e^{-2s} \doteq \mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2). \end{aligned}$$

Budeme se teď věnovat zobecnění této metody.

Metoda odštěpení polů

Motivace:

kvazipolynom: $p(t)\, e^{at} \ldots p$ je polynom, $a \in \mathbb{C}$.

Laplaceův vzor	*Laplaceův obraz*
součet kvazipolynomů	racionální funkce $s \mapsto \frac{P(s)}{Q(s)}$
součet funkcí „kvazipolynom$\cdot \mathbf{1}(t-a)$“	součet funkcí tvaru $s \mapsto \frac{P(s)}{Q(s)}\, e^{-as}, \quad a \geq 0$
konečné impulsy dané kvazipolynomy	součet funkcí tvaru $s \mapsto \frac{P(s)}{Q(s)}\, e^{-as}, \quad a \geq 0$
periodické funkce z kvazipolynomů	součet funkcí $s \mapsto \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{e^{-as}}{1-e^{-sT}}, \quad a \geq 0,\, T > 0$
součet všech funkcí výše	součty součet všech funkcí výše

Takovéto funkce vznikají při řešení systémů diferenciálních a integro-diferenciálních rovnic, popisují lineární dynamické systémy.

Typická situace:

$$\boxed{\underbrace{Y(s)}_{\mathcal{L}\text{-obraz výstupu}} = \underbrace{F(s)}_{\text{přenosová funkce}} \cdot \underbrace{X(s)}_{\mathcal{L}\text{-obraz vstupu}}}$$

Přenosová funkce je obvykle ryze lomená funkce, jejíž singularity mají zápornou reálnou část.

To nás vede k úloze nalézt vzor k funkci typu

$$\boxed{F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{e^{-as}}{1 - e^{-sT}}, \qquad a \geq 0, T > 0}.$$

Je možno použít metodu reziduí pro případ $a = 0$ a pak posun pro obecné a, singularity jsou dvojího typu:

1. Kořeny polynomu Q.
   Je-li s_1 kořen polynomu Q, pak je pólem řádu k funkce F.
   Výpočet rezidua vede k funkci typu

$$p_{k-1}(t)e^{s_1 t}, \qquad \text{kde } p_{k-1} \text{ je polynom stupně } k-1.$$

   Vyplyne z konkrétních výpočtů.
2. Kořeny rovnice $e^{-Ts} = 1$, tj. body

$$\frac{2\pi ni}{T} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

   Nekonečně těchto bodů není kořenem polynomu Q.
   V těchto bodech má F jednonásobné poly. Výpočtem reziduí pak dostaneme funkce typu

$$t \mapsto c_n \, e^{\frac{2n\pi i}{T} t}, \qquad c_n \in \mathbb{C}.$$

   Součet těchto funkcí je periodická funkce s periodou $T > 0$ (dostaneme ji ve formě Fourierovy řady).

Závěr: Vzor f je tvaru

$$\boxed{f(t) = \underbrace{h(t)}_{\text{součet kvazipolynomů, neustálená složka}} + \underbrace{g(t)}_{\text{periodická funkce s periodou } T}.}$$

9.26. Příklad.

$$F(s) = \frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{1-e^{-3s}}.$$

Vzor f má tvar:

$$f(t) = A\,e^{2t} + g(t).$$

Toto g je funkce s periodou 3.

$$\operatorname*{res}_{s=2} \frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{1-e^{-3s}}\, e^{st} = \frac{1}{1-e^{-6}}\, e^{2t}.$$

$$A = \frac{1}{1-e^{-6}}.$$

$$F(s) = \frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{1-e^{-3s}} = \frac{A}{s-2} + \frac{H(s)}{1-e^{-3s}}.$$

Funkce H je obraz konečného impulzu délky 3 generující funkci g. Pronásobením funkcí

$$(1-e^{-3s})$$

dostáváme

$$H(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{A(1-e^{-3s})}{s-2} \doteq e^{2t} - A\,e^{2t} + A\,e^{2(t-3)}\mathbf{1}(t-3).$$

$$g(t) = (1-A)e^{2t}, \qquad t \in [0,3).$$

$$g(t) = -0,002458\,e^{2t}, \qquad t \in [0,3).$$

Dále se periodicky opakuje.

Např.

$$\begin{aligned} f(100) &= Ae^{200} + g(100) = Ae^{200} + g(99+1) \\ &= Ae^{200} + (1-A)e^{2}. \end{aligned}$$

9.27. Příklad.

$$F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-s})}.$$

0…dvojnásobný pól.

$$\operatorname*{res}_{s=0} F(s)e^{st} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{se^{st}}{1-e^{-s}}\right)'$$

$$= \lim_{s\to 0} e^{st}\,\frac{(1+ts)(1-e^{-s}) - se^{-s}}{(1-e^{-s})^2}$$

(2× l'Hospitalovo pravidlo)

$$= \frac{2t+1}{2}.$$

$$f(t) = \frac{2t+1}{2} + g(t),$$

kde g má periodu 1.

Fourierovo vyjádření funkce g: pro $n \neq 0$:

$$\operatorname*{res}_{s=2n\pi i} F(s)e^{st} = \frac{e^{2n\pi ti}}{2n\pi i},$$

$$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{e^{2n\pi ti}}{2n\pi i} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi t}{n}.$$

Explicitní vyjádření:

$$F(s)=\frac{1}{s(1-e^{-s})}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2s}+\frac{H(s)}{1-e^{-s}}.$$

$$\begin{aligned}H(s)&=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})-\frac{1}{2s}(1-e^{-s})\\&\doteq 1-t+(t-1)\mathbf{1}(t-1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{1}(t-1).\end{aligned}$$

$$g(t)=\frac{1}{2}-t,\qquad t\in[0,1).$$

$$f(t)=t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t=1,\qquad t\in[0,1).$$

$$f(t)=t+\frac{1}{2}+g(t-1)=t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-(t-1)=2,\qquad t\in[1,2).$$

Tedy

$$f(t)=n,\qquad t\in[n-1,n).$$

9.28. Příklad. Určete analyticky inverzní Laplaceův obraz funkce

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)\,(s+2)\,(1-e^{-s})}.$$

$$\operatorname*{res}_{-1} e^{st}\,F(s) = \frac{e^{-t}}{1-e} = A\,e^{-t}, \quad A = \frac{1}{1-e}.$$

$$\operatorname*{res}_{-2} e^{st}\,F(s) = -\frac{e^{-2t}}{1-e^{2}} = B\,e^{-2t}, \quad B = \frac{-1}{1-e^{2}}.$$

Perioda je 1.

$$\frac{1}{(s+1)\,(s+2)\,(1-e^{-s})} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{G(s)}{1-e^{-s}}.$$

Odtud

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)\,(s+2)} - \frac{A\,(1-e^{-s})}{s+1} - \frac{B\,(1-e^{-s})}{s+2}$$
$$= \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1} - \frac{A\,(1-e^{-s})}{s+1} - \frac{B\,(1-e^{-s})}{s+2}.$$

Pro $t \in [0, 1)$ je periodická část

$$g(t) = -e^{-2\,t} + e^{-t} - A\,e^{-t} - B\,e^{-2\,t} = (1-A)\,e^{-t} - (1+B)\,e^{-2\,t}.$$

Závěr:

$$f(t) = A\,e^{-t} + B\,e^{-2\,t} + g(t).$$

Predikce: pro velká t je $f(t)$ skoro periodická funkce.

10. Z-transformace

10.1. Přímá Z-transformace

Motivace: zpracování diskrétního signálu, vzorkování, umožňuje použít analytické operace na diskrétní objekty.

$$\mathcal{Z} : (a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Otázka: Pro jaké posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ v jistém okolí nekonečna?

10.1. Tvrzení. *Řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

konverguje v nějakém okolí nekonečna právě tehdy, když existují konstanty $M \geq 0$ a $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$|a_n| \leq M\, e^{cn} \qquad \textit{pro všechna } n. \tag{5}$$

Důkaz: Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje ve vnějšku kruhu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R'\}$. Její součet

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

je na této oblasti holomorfní funkce.
Zvolme kladně orientovanou kružnici C se středem v počátku, ležící v $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R'\}$, tj. s poloměrem $R > R' > 0$.

Podle integrálního vyjádření koeficientů Laurentovy řady (tady je třeba řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ interpretovat jako řadu se středem v počátku) máme

$$
\begin{aligned}
|a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z^{-n+1}} \, \mathrm{d}z \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^{1-n}} \cdot \max_{z \in C} |F(z)| \cdot 2\pi R \\
&= R^n \cdot \underbrace{\max_{z \in C} |F(z)|}_{=M} .
\end{aligned}
$$

Tedy

$$|a_n| \leq M e^{n \ln R}.$$

Opačná implikace: předpokádejme, že platí odhad (5):

$$\frac{|a_n|}{|z|^n} \leq M\frac{(e^c)^n}{|z|^n}.$$

Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\frac{(e^c)^n}{|z|^n}$$

je pro $|z| > e^c$ geometrická řada s absolutní hodnotou kvocientu

$$\frac{e^c}{|z|} < 1.$$

Dle srovnávacího kritéria konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ pro všechna z taková, že $|z| > e^c$.

Značení:

Z_0 ... množina všech komplexních posloupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, které jsou nejvýše exponenciálního růstu, tj.

$$|a_n| \leq M\,e^{cn} \qquad \text{pro všechna } n,$$

kde $M \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Ekvivalentně: pro $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ existuje $M \geq 0$ a $a > 0$ tak, že

$$|a_n| \leq M\,a^n \qquad \text{pro všechna } n.$$

- Každá omezená posloupnost je v Z_0.
- Každá posloupnost $(p(n))_{n=0}^{\infty}$, kde p je polynom, je v Z_0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{e^n} = 0.$$

  Tedy například

$$|p(n)| \leq e^n$$

  pro dostatečně velká n.
- Vzorkování kvazipolynomu je v Z_0.
- $(n^n)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^{cn}} = \lim_{n\to\infty} e^{n(\ln n - c)} = \infty.$$

- $(n!)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$.
  Podílové kritérium pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{z^n}$:

$$\frac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} \cdot \frac{|z|^n}{n!} = \frac{n+1}{|z|} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

  Nekonverguje v žádném bodě.

10.2. Definice. Z-obraz posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je funkce

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Značení:

$$\mathcal{Z}(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z), \qquad (a_n)_{n=0}^{\infty} \doteq F(z)$$

K_0 ... funkce holomorfní v okolí ∞ mající v ∞ vlastní limitu.

10.3. Věta. *Z-transformace je prosté zobrazení množiny Z_0 na množinu K_0.*

Důkaz: Věta o Laurentově rozvoji.

10.4. Příklad.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 0, 4, 0, 0, \ldots).$$

$$F(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^3}.$$

$z \neq 0.$

10.5. Příklad.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{index } m}, 0, 0, \ldots) = (\delta_{mn})_{n=0}^{\infty}.$$

$$F(z) = \frac{1}{z^m}.$$

10.6. Příklad.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}.$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = e^{\frac{1}{z}}.$$

$$z \neq 0.$$

10.7. Příklad.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (c, c, c, \ldots), \quad c \in \mathbb{C}.$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{z^n} = c\frac{1}{1-1/z} = \frac{cz}{z-1},$$

$|z| > 1.$

10.8. Příklad.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots).$$

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \cdots = \frac{\frac{1}{z}}{1 - 1/z^2} = \frac{z}{z^2 - 1}.$$

$|z| > 1.$

10.9. Příklad. Víme, že se posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zobrazí na funkci $(z \mapsto F(z))$. Jaká posloupnost se zobrazí na funkci $(z \mapsto F(z^2))$?

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

$$F(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{2n}}.$$

Tedy posloupnost

$$(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \ldots)$$

má Z-obraz $F(z^2)$.

10.10. Příklad.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a^n)_{n=0}^{\infty}, \qquad a \in \mathbb{C}.$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \frac{z}{z-a}.$$

$|z| > |a|$.

10.11. Věta. *Základní gramatika Z-transformace.*
Předpokládejme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$*, přičemž*

$$\mathcal{Z}(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z).$$

Pak platí

1. *(Linearita)*

$$\mathcal{Z}(c_1\, a_n + c_2\, b_n)_{n=0}^{\infty} = c_1 \mathcal{Z}(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2\, \mathcal{Z}(b_n)_{n=0}^{\infty}$$

   pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$*.*

2. *(Multiplikace)*

$$\mathcal{Z}(a^n\, a_n)_{n=0}^{\infty} = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

   pro všechna $a \neq 0$*.*

3. *(Derivace obrazu)*

$$\mathcal{Z}(n\, a_n)_{n=0}^{\infty} = -zF'(z).$$

Důkaz:

1.

$$\mathcal{Z}\,(c_1\, a_n + c_2\, b_n)_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_1\, a_n + c_2\, b_n}{z^n}$$

$$= c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} = c_1 \mathcal{Z}(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2 \mathcal{Z}(b_n)_{n=0}^{\infty}.$$

2.

$$\mathcal{Z}(a^n\, a_n)_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n\, a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(\frac{z}{a})^n} = F\left(\frac{z}{a}\right).$$

3.

$$F'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} -na_n \frac{1}{z^{n+1}}.$$

$$-zF'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_n}{z^n} = \mathcal{Z}(n\, a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

10.12. Příklad.

$$(c+2a^n)_{n=0}^{\infty}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\,(c+2\,a^n)_{n=0}^{\infty} &= \mathcal{Z}\,(c)_{n=0}^{\infty}+2\mathcal{Z}\,(a^n)_{n=0}^{\infty}\\ &= \frac{cz}{z-1}+2\,\frac{z}{z-a}, \quad |z|>\max(1,|a|).\end{aligned}$$

10.13. Příklad.

$$(\sin\omega n)_{n=0}^{\infty}\,.$$

$$\sin n\omega = \frac{1}{2i}(e^{i\omega n}-e^{-i\omega n}).$$

$$\begin{aligned}F(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega}}-\frac{z}{z-e^{-i\omega}}\right) &= \frac{1}{2i}\,\frac{z^2-ze^{-i\omega}-z^2+ze^{i\omega}}{z^2-2z\cos\omega+1}\\ &= \frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}.\end{aligned}$$

10.14. Příklad.

$$\left(a^n \sin n\omega\right)_{n=0}^{\infty}.$$

$$Z\left(a^n \sin n\omega\right)_{n=0}^{\infty} = \frac{\frac{z}{a}\sin\omega}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2\frac{z}{a}\cos\omega + 1} =$$

$$= \frac{az\sin\omega}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2}.$$

10.15. Příklad.

$$(n)_{n=0}^{\infty}.$$

$$Z\,(n)_{n=0}^{\infty} = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2}$$

10.16. Příklad.

$$\left(n^2\right)_{n=0}^{\infty}.$$

$$Z\left(n^2\right)_{n=0}^{\infty} = -z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = -z\,\frac{(z-1)^2 - z2(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

Takto je možno získat obraz každého polynomu.

10.17. Příklad.

$$(a^n\, n)_{n=0}^{\infty}.$$

$$F(z) = \frac{\frac{z}{a}}{(\frac{z}{a}-1)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}.$$

10.18. Věta. *Posun doprava.*

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* k *je nezáporné celé číslo. Definujme posloupnost* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *vztahem*

$$b_n = \begin{cases} a_{n-k}, & \text{jestliže } n \geq k; \\ 0, & \text{jestliže } n < k. \end{cases}$$

Pak

$$\boxed{\mathcal{Z}\,(b_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{z^k}\,F(z),}$$

kde F *je obraz* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Též:

$$\boxed{(a_{n-k}\mathbf{1}(n-k))_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{1}{z^k}F(z).}$$

$$\boxed{(\overbrace{0,\dots 0}^{k}, a_0, a_1, \dots) \doteq \frac{1}{z^k}F(z).}$$

Důkaz:

$$Z\,(b_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{a_0}{z^k} + \frac{a_1}{z^{k+1}} + \frac{a_2}{z^{k+2}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{z^k}(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots) = \frac{1}{z^k}F(z).$$

10.19. Příklad.

$$(0,0,0,1,1,1,\cdots)$$

$$(1)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z}{z-1}$$

$$(0,0,0,1,1,1,\cdots) \doteq \frac{1}{z^3}\frac{z}{z-1}.$$

10.20. Věta. *Translace vlevo.*
Předpokládejme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *má* $Z-$*obraz* F *a* k *je celé nezáporné číslo. Definujme posloupnost* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *rovností*

$$b_n = a_{n+k} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Pak

$$\mathcal{Z}\,(b_n)_{n=0}^{\infty} = z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{z^n} \right].$$

$$\boxed{(a_k, a_{k+1}, \ldots) \doteq z^k \left(F(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right)}$$

Důkaz:

$$\mathcal{Z}\,(b_n)_{n=0}^{\infty} = a_k + \frac{a_{k+1}}{z} + \frac{a_{k+2}}{z^2} + \cdots$$

$$z^k\left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{a_n}{z^n}\right] = z^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n} - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{a_n}{z^n}\right)$$

$$= z^k\left(\frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{z^{k+2}} + \cdots\right) = a_k + \frac{a_{k+1}}{z} + \frac{a_{k+2}}{z^2} + \cdots$$

10.21. Příklad.

$$(\sin 5\omega, \sin 6\omega, \ldots)$$

$$F(z) = z^5\left(\frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\,\cos\omega + 1} - \frac{\sin\omega}{z} - \frac{\sin 2\omega}{z^2} - \frac{\sin 3\omega}{z^3} - \frac{\sin 4\omega}{z^4}\right)$$

10.22. Příklad.

$$\left((n+3)^2\right)_{n=0}^{\infty}.$$

$$\left(n^2\right)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

$$F(z) = z^3\left(\frac{z^2+z}{(z-1)^3} - 0 - \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2}\right) = \frac{z^5+z^4}{(z-1)^3} - z^2 - 4z.$$

Diference posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je definována rovností

$$\Delta(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_{n+1} - a_n)_{n=0}^{\infty}\,.$$

Diference vyšších řádů:

$$\Delta^k(a_n)_{n=0}^{\infty} = \Delta\Delta^{k-1}(a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Příklady:

$$\begin{aligned}\Delta^2(a_n)_{n=0}^{\infty} &= \Delta\,(a_{n+1} - a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_{n+2} - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n))_{n=0}^{\infty} \\ &= (a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n)_{n=0}^{\infty}\,.\end{aligned}$$

$$\Delta\,(n)_{n=0}^{\infty} = (1)_{n=0}^{\infty}\,.$$

$$\Delta^2\,(n)_{n=0}^{\infty} = (0)_{n=0}^{\infty}\,.$$

10.23. Tvrzení. *Nechť* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *se* Z*-obrazem* $F(z)$*. Pak*

$$\mathcal{Z}\,(\Delta a_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)F(z) - za_0.$$

Důkaz:

$$(a_{n+1})_{n=0}^{\infty} = (a_1, a_2, \ldots) \doteq z[F(z) - a_0].$$

$$\Delta(a_n)_{n=0}^{\infty} \doteq zF(z) - za_0 - F(z).$$

10.24. Definice. Předpokládejme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$. Konvoluce těchto posloupností je posloupnost

$$(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty},$$

definovaná vztahem

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}, \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \, b_0 \\ c_1 &= a_0 \, b_1 + a_1 \, b_0 \\ c_2 &= a_0 \, b_2 + a_1 \, b_1 + a_2 \, b_0 \end{aligned}$$

10.25. Příklad.

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} = (n+1)_{n=0}^{\infty}$$

10.26. Příklad.

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (e^n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1+e, 1+e+e^2, \dots)$$

10.27. Příklad. Co je konvoluce s posloupností $(0, 1, 0, 0, \dots)$?

$$(0, 1, 0, 0, \dots) * (a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots).$$

10.28. Příklad. Co je konvoluce s posloupností

$$(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k}, 1, 0, \dots) = (\delta_{kn})_{n=0}^{\infty}?$$

$$(\delta_{kn})_{n=0}^{\infty} * (a_n)_{n=0}^{\infty} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k}, a_0, a_1, \dots).$$

Posun doprava o k pozic.

10.29. Věta. *Věta o konvoluci.*
Předpokládejme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$,
$\mathcal{Z}(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z)$, $\mathcal{Z}\,(b_n)_{n=0}^{\infty} = G(z)$.
Pak

$$\boxed{\mathcal{Z}[(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}] = F(z) \cdot G(z).}$$

Důkaz:

$$F(z)G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{z^m}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) \frac{1}{z^n} = Z[(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}].$$

10.30. Příklad.

$$(n+1)_{n=0}^{\infty} = (1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} \doteq \left(\frac{z}{z-1}\right)^2$$

10.31. Příklad.

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (e^n)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-e} = \frac{z^2}{(z-1)(z-e)}.$$

10.32. Příklad. Určete posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pro kterou platí

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (2^n)_{n=0}^{\infty} = (4^n)_{n=0}^{\infty} .$$

$$\mathcal{Z}(a_n)_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{z}{z-2} = \frac{z}{z-4}.$$

$$\mathcal{Z}(a_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{z-2}{z-4} = 1 + \frac{2}{z-4}$$
$$\doteq \left(\delta_{n0} + 2 \cdot \mathbf{1}(n-1)4^{n-1}\right)_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 8, 32, \ldots).$$

10.33. Příklad. Pro jakou posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ platí, že

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$$

pro všechna $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$?

$$F(z) \cdot G(z) = G(z),$$

$$F(z) = 1,$$

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 0, \dots).$$

Důsledek: Konvolutivní součin je komutativní, asociativní a má jednotkový prvek.

Význam konvoluce

$$L : Z_0 \mapsto Z_0$$

$$\text{vstup} \mapsto \text{výstup}$$

1. Zobrazení L je translačně invariantní, tj. jestliže $L(a_n)_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$, pak

$$L(\mathbf{1}(n-k)a_{n-k})_{n=0}^{\infty} = (\mathbf{1}(n-k)b_{n-k})_{n=0}^{\infty}.$$

2. Zobrazení L je lineární, tj.

$$L(c_1\,(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2\,(b_n)_{n=0}^{\infty} + \cdots) = c_1\,L(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2\,L\,(b_n)_{n=0}^{\infty} + \cdots$$

Předpokládejme, že

$$L(1, 0, \ldots) = (b_0, b_1, \ldots).$$

vstup:

$$a_0(1,0,0,\dots)+a_1(0,1,0,0,\dots)+\dots$$

výstup:

$$\begin{array}{lllllll}
a_0\cdot & (b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \dots) & +\\
a_1\cdot & (0, & b_0, & b_1, & b_2 & \dots) & +\\
a_2\cdot & (0, & 0, & b_0, & b_1, & \dots) & +\\
\dots & \dots & \dots & & & & \\
\hline
 & (a_0b_0, & a_0b_1+a_1b_0, & a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0, & \dots & &)
\end{array}$$

Závěr:
Odezva na $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je
$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * L(1,0,0,\dots)$ neboli

$$\boxed{L(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * L(1,0,0,\dots).}$$

10.34. Tvrzení. *Je-li* $\mathcal{Z}(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z)$, *pak*

$$\mathcal{Z}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty} = \frac{zF(z)}{z-1}.$$

Důkaz:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z}{z-1} F(z).$$

10.35. Příklad.

$$\mathcal{Z}\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \doteq \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

10.2. Inverzní Z-transformace

$$\mathcal{Z}^{-1} : K_0 \to Z_0$$

$$F(z) \mapsto (a_n)_{n=0}^{\infty}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Metody výpočtu:

- rozvoj v Laurentovu řadu
- integrální forma, reziduová věta

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku, ležící v oblasti, kde je obraz holomorfní

Podle reziduové věty:

$$\boxed{a_n = \sum_{z_i} \operatorname*{res}_{z=z_i} \left(F(z)\, z^{n-1}\right).}$$

Suma přes singularity ležící uvnitř C.

- přímé vzorce

$$a_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

$$a_1 = \lim_{z\to\infty} z(F(z) - a_0)$$

$$a_2 = \lim_{z\to\infty} z^2\left(F(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right)$$

$$a_{n+1} = (-1)^{n+1} \lim_{z\to\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)!}[z^n F(z)]^{(n+1)}.$$

- známé obrazy
- konvoluce

10.36. Příklad.

$$F(z) = \sin \frac{1}{z}$$

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \\ a_{2n} &= 0 \end{aligned}$$

10.37. Příklad.

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-e)}$$

$$F(z) = \frac{1}{1-e}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e}\right)$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} \doteq (0, 1, 1, \ldots)$$

$$\frac{1}{z-e} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-e} \doteq (0, 1, e, e^2, \ldots)$$

$$\mathcal{Z}^{-1} F(z) = \frac{1}{1-e}(0, 0, 1-e, 1-e^2, \ldots).$$

10.38. Příklad.

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-e)}.$$

Metodou reziduí:

$$a_0 = \lim_{z\to\infty} F(z) = 0.$$

$n \geq 1$:

$$a_n = \operatorname*{res}_{z=1} \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-e)} + \operatorname*{res}_{z=e} \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-e)}$$
$$= \frac{1}{1-e} + \frac{e^{n-1}}{e-1} = \frac{1-e^{n-1}}{1-e}.$$

10.39. Příklad.

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$F(z) = \frac{1}{z}\frac{z}{(z-1)^2} \doteq (0, 0, 1, 2, 3, ...).$$

Metodou reziduí:
$n \geq 1$:

$$a_n = \operatorname*{res}_{z=1} \frac{z^{n-1}}{(z-1)^2} = \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^{n-1} = n - 1.$$

10.40. Příklad. Pomocí Z-transformace nalezněte součet

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

Řešení:

$$(n^2) \doteq \frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) \doteq \frac{z}{z-1}\,\frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=1} \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4} z^{n-1} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{3!}\left(z^{n+2} + z^{n+1}\right)'''$$
$$= \frac{1}{3!}\left[(n+2)(n+1)n + (n+1)n(n-1)\right] = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1).$$

10.3. Diferenční rovnice

Motivace: teorie signálů, numerické řešení pariálních diferenciálních rovnic, ladder networks,...

Diferenční rovnice mají podobnou strukturu jako rovnice diferenciální, hledá se řešení ve tvaru posloupnosti vyhovující počátečním podmínkám.

Řešení těchto rovnic pomocí Z-transformace je diskrétní analogie řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace.

10.41. Příklad.

$$y_{n+2} + 2\,y_{n+1} + y_n = 0,$$
$$y_0 = y_1 = 1$$

(homogenní diferenční rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty)

$$(y_n)_{n=0}^{\infty} \doteq Y(z).$$

$$(y_{n+1})_{n=0}^{\infty} \doteq z[Y(z) - y_0] = z(Y(z) - 1).$$

$$\begin{aligned}(y_{n+2})_{n=0}^{\infty} &\doteq z^2\left[Y(z) - y_0 - \frac{y_1}{z}\right] \\ &= z^2\left[Y(z) - 1 - \frac{1}{z}\right] = z^2 Y(z) - z^2 - z.\end{aligned}$$

Provedeme transformaci rovnice:

$$z^2 Y(z) - z^2 - z + 2zY(z) - 2z + Y(z) = 0.$$

$$Y(z)(z^2 + 2z + 1) = z^2 + 3z.$$

$$Y(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2}.$$

Provedeme inverzní transformaci:
$n \geq 1$:

$$y_n = \operatorname*{res}_{z=-1} \frac{(z^2+3z)z^{n-1}}{(z+1)^2} = \lim_{z\to -1}(n+1)z^n + 3nz^{n-1}$$
$$= (n+1)(-1)^n + 3n(-1)^{n-1} = (-1)^n(1-2n).$$

$$(y_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1, -3, 5, \ldots).$$

Mnohdy dává lepší představu než numerický výpočet, ve kterém se hromadí zaokrouhlovací chyby:

10.42. Příklad.

$$y_{n+2} = \frac{10}{3} y_{n+1} - y_n,$$

$$y_0 = 1,\ y_1 = \frac{1}{3}.$$

Transformace:

$$z^2 \left[Y(z) - 1 - \frac{1}{3z} \right] = \frac{10}{3} z \left[Y(z) - 1 \right] - Y(z)$$

$$Y(z) \left(z^2 - \frac{10}{3} z + 1 \right) = z^2 + \frac{z}{3} - \frac{10}{3} z = z^2 - 3z$$

$$Y(z) = \frac{z^2 - 3z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})} = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \doteq \left(3^{-n} \right)_{n=0}^{\infty}$$

Numerický výpočet na tři platné číslice dá nesmyslné výsledky: $y_0 = 1,\ y_1 = 0,333, \ldots, y_6 = -0,092, \ldots, y_{10} = -5,65$

10.43. Příklad. Fibonacciho čísla

Fibonacci (1212): *Liber Abaci*

Úloha o populaci králíků:

Každý pár se zreprodukuje po dvou měsících.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Posloupnost se řídí zákonem

$$\overbrace{y_{n+2}}^{\text{co bude}} = \overbrace{y_{n+1}}^{\text{co je}} + \overbrace{y_n}^{\text{přírůstek}},$$

$$y_0 = y_1 = 1.$$

Transformace rovnice:

$$z^2\left[Y(z) - 1 - \frac{1}{z}\right] = z[Y(z) - 1] + Y(z)$$

$$(z^2 - z - 1)Y(z) = z^2$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

Inverze:

$$z\,\frac{z}{z^2 - z - 1} = z\,\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

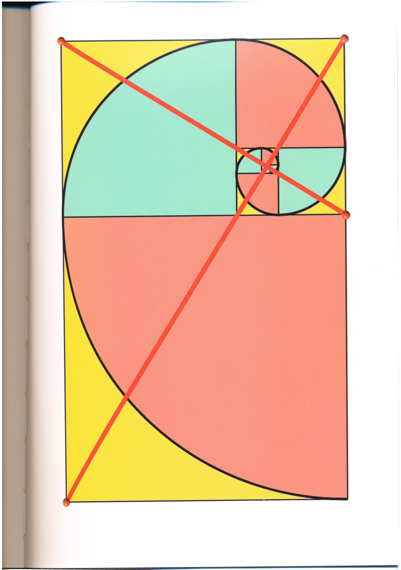
$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Binet (1786–1856)

Kombinace dvou geometrických řad, jedna z nich mizí v nekonečnu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,61803.$$

Souvisí s poměrem zlatého řezu.



10.44. Příklad.

$$\Delta^2 y_n + y_n = 0,$$

$$y_0 = 1,\ \Delta y_0 = 0.$$

$$\Delta\,(y_n)_{n=0}^{\infty} \doteq (z-1)\,Y(z) - z$$

$$\Delta^2\,(y_n)_{n=0}^{\infty} \doteq (z-1)[(z-1)\,Y(z)-z]-0 = (z-1)^2\,Y(z)-z(z-1)$$

$$[(z-1)^2+1]\,Y(z) = z(z-1)$$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{z(z-1)}{(z-1)^2+1} = \frac{z^2-z}{z^2-2z+2} \\
&= z\frac{z-1}{(z-1-i)(z-1+i)} = z\left(\frac{A}{z-1-i}+\frac{B}{z-1+i}\right) \\
&= \frac{1}{2}z\left(\frac{1}{z-1-i}+\frac{1}{z-1+i}\right).
\end{aligned}$$

$$y_n = \frac{1}{2}[(1+i)^n + (1-i)^n] = \mathrm{Re}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

10.45. Příklad.

$$\Delta^2 y_n = 2,$$

$$y_0 = 0,\ \Delta y_0 = 1.$$

$$\Delta^2 (y_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)^2 Y(z) - z$$

$$Y(z)(z-1)^2 = 2\frac{z}{z-1} + z$$

$$Y(z) = \frac{2z}{(z-1)^3} + \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\operatorname*{res}_{z=1} \frac{z^n}{(z-1)^3} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2}(z^n)'' = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$y_n = n(n-1) + n = n^2$$

10.46. Příklad. Rovnice s konvolučním jádrem

$$y_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} 2^k \, y_{n-k} = 1,$$

$$y_0 = y_1 = 0.$$

$$z^2 Y(z) + \frac{z}{z-2} Y(z) = \frac{z}{z-1}.$$

$$Y(z) = \frac{z-2}{(z-1)^3}$$

$$y_n = \operatorname*{res}_{z=1} \frac{(z-2)z^{n-1}}{(z-1)^3} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2}(z^n - 2z^{n-1})''$$

$$= \frac{1}{2} n(n-1) - (n-1)(n-2) = (n-1)\left(2 - \frac{n}{2}\right)$$

10.47. Příklad. Vyjádřete vzorcem řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} - 2y_n = a_n,$$

kde $y_0 = 0$ a $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je obecná posloupnost ze Z_0.

Transformace:

$$zY(z) - 2Y(z) = F(z),$$

kde $F(z)$ je obraz $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z-2} \doteq \left(\mathbf{1}(n-1)2^{n-1}\right)_{n=0}^{\infty} * (a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Pro $n \geq 1$:

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{n-k}.$$

10.48. Příklad.

$$y_{n+3} + y_n = a_n,$$

$$y_0 = y_1 = y_2 = 0.$$

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z^3 + 1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^3+1} &= \frac{1}{z^3}\frac{1}{1+\frac{1}{z^3}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{3(n+1)}} \\
&\doteq (0,0,0,1,0,0,-1,0,0,1,0,0,-1,\dots)
\end{aligned}$$

$$y_n = a_{n-3} - a_{n-6} + a_{n-9} - \dots$$

10.49. Příklad. Pomocí diferenčních rovnic určete součet

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}.$$

Řešení:

$$y_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}.$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{n+1}{2^{n+1}},$$

$$y_0 = 0.$$

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{2z}{(2z-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{1}{2}\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$zY(z) - Y(z) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}.$$

$$Y(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$\operatorname*{res}_{z=1} \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}\frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 2$$

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}\frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{2})^2} &= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{z^{n+1}}{z-1}\right)' \\ &= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)z^n(z-1) - z^{n+1}}{(z-1)^2} \\ &= 2\left[\frac{n+1}{2^n}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\right] = -\frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

$$y_n = 2 - \frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$