MA2 - 5. konzultace

Křivkový a plošný integrál

1 Křivkový integrál

1.1 Pojem oblouku a křivky

Křivku si budeme představovat jako souvislou čáru, která bude hladká až na několik výjimečných bodů (může tedy být v některých bodech "zlomená") a která může také protínat sama sebe. Pro jednodušší práci si proto obecnou křivku sestavíme ze snadněji uchopitelných částí, kterým budeme říkat oblouk.

1.1.1 Pojem oblouku

Definice oblouku: Množinu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme *oblouk* právě když existuje zobrazení $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^n$, pro které platí

- $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle) = \mathcal{C}$.
- φ je spojité a spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ (tj. jednotlivé složky $\varphi_i : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}$ jsou spojité a spojitě diferencovatelné na daném intervalu a v krajních bodech α a β je toto chápáno jednostranně),
- φ je prosté na $\langle \alpha, \beta \rangle$ a $\varphi'(t) = \left(\varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t)\right) \neq (0, \ldots, 0)$ pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$,

Zobrazení φ nazveme *(hladkou) parametrizací oblouku* $\mathcal{C}$. Při dané parametrizaci budeme bod $\varphi(\alpha)$ nazývat počáteční a bod $\varphi(\beta)$ koncový bod oblouku a společně jim budeme říkat krajní body oblouku.

Poznámka (geometrická a fyzikální interpretace): Jak vidíme, oblouk sám sebe nikde neprotíná (a to ani v krajních bodech).

Pro $t_0 \in (\alpha, \beta)$ je vektor

$$\varphi'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)}{t - t_0}, \ldots, \frac{\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)}{t - t_0} \right) \in \mathbb{R}^n$$

tečným vektorem k oblouku v bodě $a = \varphi(t_0)$. Pokud parametr t budeme chápat jako čas, pak $a = \varphi(t_0)$ je poloha v okamžiku t_0 a $\vec{v} = \varphi'(t_0)$ je okamžitý vektor rychlosti v okamžiku t_0 (a v bodě a). Naše požadavky tak říkají, že oblouk $\mathcal{C}$ projíždíme z jednoho konce na druhý a přitom se v žádném bodě (kromě případných krajů) nezastavujeme.

Všechny další pojmy, které budeme chtít pro oblouk (a následně křivku) zavést, bychom chtěli mít závislé pouze na množině $\mathcal{C}$ (a nanejvýše ještě na její orientaci - viz dále), ale ne na volbě způsobu, jak ji zrovna parametrizujeme. Skutečně to tak nakonec bude a k tomu se bude hodit následující věta. Ta říká to, co se dá intuitivně očekávat, a sice že parametrizace oblouku se dají jedna převádět na druhou jen pomocí transformace jejich definičních oborů.

Věta (o přechodech mezi parametrizacemi): Nechť $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^n$ a $\psi : \langle \gamma, \delta \rangle \to \mathbb{R}^n$ jsou dvě hladké parametrizace téhož oblouku $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak existuje (jednoznačně definovaná) prostá spojitě diferencovatelná *monotonní* funkce, a sice $h = \psi^{-1} \circ \varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \langle \gamma, \delta \rangle$ taková, že

$$\varphi = \psi \circ h \ .$$

1.1.2 Orientace oblouku

Zde si zavedeme orientaci oblouku. Postup, který si zvolíme (pomocí tečného pole) se může zdát na první pohled zbytečně složitý, ale výsledné pojmy pak využijeme pro integrál 2. druhu a navíc analogicky pak můžeme postupovat i u plochy.

Definice jednotkového tečného pole: Nechť $\mathcal{C}$ je oblouk. Zobrazení

$$\vec{T} : \mathcal{C} \smallsetminus \{\text{krajní body}\} \to \mathbb{R}^n$$

takové, že pro každý bod $a \in \mathcal{C} \smallsetminus \{\text{krajní body}\}$ je $\vec{T}(a)$ tečný vektor k danému oblouku $\mathcal{C}$ a $\|\vec{T}(a)\| = 1$ nazýváme *jednotkové tečné vektorové pole* (daného oblouku).

Věta (o spojitých jednotkových tečných polích): Nechť $\mathcal{C}$ je oblouk.

- Při zadané parametrizaci $\varphi : \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{R}^n$ oblouku $\mathcal{C}$ je zobrazení $\vec{T}_\varphi : \mathcal{C} \smallsetminus \{\text{krajní body}\} \to \mathbb{R}^n$ definované jako
$$\vec{T}_\varphi(a) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$$
kde $a = \varphi(t) \in \mathcal{C}$ pro $t \in (\alpha,\beta)$, *spojité* jednotkové tečné vektorové pole.
- Pro $\mathcal{C}$ existují právě dvě *spojitá* jednotková tečná vektorová pole, která jsou navzájem opačná.
- Pro parametrizace φ a ψ jsou následující podmínky ekvivalentní:
  (a) $\vec{T}_\varphi = \vec{T}_\psi$,
  (b) přechodová funkce (z věty výše) mezi ψ a φ je rostoucí,
  (c) obě parametrizace mají stejné počáteční body (a tedy i stejné koncové body).

  Jestliže je splněna některá z těchto podmínek, říkáme, že parametrizace φ a ψ jsou *stejně orientované*. V opačném případě říkáme, že parametrizace φ a ψ jsou *opačně orientované*.

Poznámka: Pro danou parametrizací $\varphi : \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{R}^n$ lze opačně orientovanou parametrizaci vždy vyrobit např. jako

$$\widetilde{\varphi}(t) \coloneqq \varphi(\alpha+\beta-t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle\alpha,\beta\rangle\ .$$

Definice orientace oblouku: *Orientace oblouku* $\mathcal{C}$ je zadána výběrem jednoho ze dvou spojitých tečných polí.

1.1.3 Pojem křivky a její orientace

Definice křivky a její orientace: Množinu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme *křivka* právě když se skládá z konečně mnoha na sebe navazujících (orientovaných) oblouků $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_k$ (tj. koncový bod jednoho oblouku je počátečním bodem následného oblouku).

Orientaci oblouku $\mathcal{C}_i$ (danou odpovídajícím polem $\vec{T}_i$) zde vyžadujeme proto, abychom mohli mluvit o počátečním a koncovém bodu daného oblouku. Vektorové pole $\vec{T}$ určené souborem polí $(\vec{T}_1,\cdots,\vec{T}_k)$ pak považujeme za *jednotkové tečné pole křivky* $\mathcal{C}$, kterým jsme zadali její *orientaci*. Toto pole $\vec{T}$ je tedy definováno na celé křivce až na konečně mnoho jejích bodů.

Obecněji: Vektorová pole na křivce budeme považovat za totožná, pokud se budou rovnat na celé křivce $\mathcal{C}$ až na konečně mnoho bodů. Tímto ztotožněním vlastně říkáme, že orientace křivky nezávisí na jejím rozkladu na jednotlivé oblouky.

Poznámka: Orientaci křivky už nemůžeme (až na “evidentní” případy) zadávat jen volbou počátečního a koncového bodu, protože např. u smyček na křivce nebo u kružnice a podobných uzavřených křivek bychom nevěděli, jaký způsob procházení zvolit. A dále - jestliže $\mathcal{C}$ bude značit křivku orientovanou zvoleným jednotkovým tečným polem $\vec{T}$, pak opačně orientovanou křivku (vzhledem k té naší zvolené orientaci) můžeme značit (poměrně názorně) jako

$$-\mathcal{C} \ .$$

Speciálně pak zavedeme, že $-(-\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Definice parametrizace křivky: Pokud máme křivku $\mathcal{C}$ vyjádřenou tak, že existuje zobrazení $\varphi : \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{R}^n$ takové, že

- $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle) = \mathcal{C}$,
- existuje dělení intervalu $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = \beta$ takové, že na každém podintervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$ je φ hladkou parametrizací nějakého oblouku $\mathcal{C}_i := \varphi\Big(\langle t_{i-1}, t_i\rangle\Big)$.

nazveme zobrazení φ *parametrizací křivky* $\mathcal{C}$. Parametrizace pak vytváří i *orientaci křivky* (výše uvedeným způsobem pomocí tečného pole).

Poznámka: Z definice parametrizace φ křivky speciálně plyne, ze zobrazení φ je spojité na $\langle\alpha,\beta\rangle$. Křivka pak může být v některých bodech "zlomená", ale stále to má být souvislá čára. Křivka také může protínat sama sebe a vektor rychlosti chceme mít nenulový až na konečně mnoho výjimek.

Dále poznamenejme, že orientace křivky v příkladech může být zadána i jinak, např. posloupností několika bodů nebo "podle/proti směru hodinových ručiček"apod. Pokud parametrizace, kterou pak pro výpočet volíme, nemá požadovaný *zadaný* směr, musíme tomu přizpůsobit i případně znaménko integrálu (tj. když počítáme práci silového pole podél křivky).

Př. (parametrizace křivky)

Zparametrizujte křivku

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \& \quad z \geq 0$$

s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

(Tím se myslí toto: jestliže $\mathcal{C}$ promítneme do roviny xy, pak vzniklá křivka $\widetilde{\mathcal{C}}$ v této rovině má orientaci proti směru hodinových ručiček - to je ten tzv. kladný smysl).

Řešení:
Rovnice $x^2 + y^2 = 2x$ je to samé jako $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (což je válec).

Křivka představuje tedy průnik kuželu s válcem jehož poloměr je 1 a osa kužele leží v plášti válce. Parametrizaci uděláme pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 = h^2 \quad \& \quad r^2 = 2r\cos\varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 2\cos\varphi$, $h = r = 2\cos\varphi$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = 2\cos^2\varphi \ , \quad y(\varphi) = 2\cos\varphi\sin\varphi \ , \quad z(\varphi) = 2\cos\varphi \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle$$

která má požadovanou orientaci.

K parametrizaci lze využít i posunuté válcové souřadnice:

$$x = 1 + r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = h$$

Zkuste si to sami.

1.2 Délka křivky

Délku oblouku $\mathcal{C}$ můžeme buď definovat jako supremum délek lomených čar, které ji aproximují (to je velmi přirozená definice, ale vyžaduje pak více dokazování) nebo jako délku dráhy, kterou urazí bod, jehož pohyb v čase je dán parametrizací $\varphi : \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathcal{C}$. Jelikož změnu dráhy Δs během krátkého časového úseku Δt počítáme jako $\Delta s = \|\vec{v}\| \cdot \Delta t$, kde $\vec{v}$ je vektor (okamžité) rychlosti, tak si délku oblouku $\mathcal{C}$ můžeme přirozeně definovat také jako

$$\ell(\mathcal{C}) := \int_{\alpha}^{\beta} \|\varphi'(t)\| \, dt$$

kde $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i'(t)\right)^2}$. Důležité pak je ukázat, že tato definice nezávisí na zvolené parametrizaci (což není těžké). A jak je vidět, nezávisí tím ani na orientaci oblouku.

Pro křivku $\mathcal{C}$ skládající se z oblouků $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ pak zavedeme délku přirozeně jako

$$\ell(\mathcal{C}) := \sum_{i=1}^{k} \ell(\mathcal{C}_i)$$

Opět je potřeba ukázat, že délka nezávisí na rozkladu na oblouky.

Př. (délka křivky)
Určete délku cykloidy Γ s parametrizací

$$\varphi : \quad x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \le t \le 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

Řešení:
Délka křivky Γ s parametrizací φ se vypočítá jako

$$\ell(\Gamma) = \int_{a}^{b} \|\varphi'(t)\| \, dt \ \left(= \int_{\Gamma} 1 \, ds \right),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky Γ. Máme

$$\varphi'(t) = \left(1 - \cos t, \ \sin t\right)$$

a

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1\ ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\ dt = \left\{ {}^{2u=t}_{2du=dt} \right\} = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos(2u)}\ du =$$

$$= \left\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \right\} = 4\int_0^{\pi} \sin u\ du = 8\ .$$

1.3 Křivkový integrál z funkce (Křivkový integrál 1.druhu)

Když máme definováno, co je to délka oblouku, můžeme nyní už zavést pojem integrálu ze (spojité) funkce f podél oblouku $\mathcal{C}$. Oblouk si rozdělíme na (navazující) úseky $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m$ a vezmeme si sumu

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot \ell(\mathcal{D}_i), \quad \text{kde} \quad x_i \in \mathcal{D}_i \quad \text{je nějaký zvolený bod.}$$

Dá se ukázat, že jestliže se průměry $\operatorname{diam}(\mathcal{D}_i)$ množin $\mathcal{D}_i$ blíží k nule, tyto aproximační sumy se blíží k hodnotě, která pro nás bude hledaným integrálem a která se dá spočítat vztahem

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\|\ dt,$$

kde $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{C}$ je vhodná parametrizace oblouku $\mathcal{C}$.

Ukážeme si, že výraz napravo skutečně nezávisí na volbě parametrizace (a tím ani na volbě orientace oblouku!):

Důkaz: Pro parametrizaci $\psi : \langle c, d\rangle \to \mathcal{C}$ podle věty o přechodu existuje hladká funkce $h : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$, že $\varphi = \psi \circ h$, takže $\varphi'(t) = \psi'(h(t)) \cdot h'(t)$ a tudíž

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\|\ dt = \int_a^b f\Big(\psi\big(h(t)\big)\Big) \cdot \|\psi'\big(h(t)\big)\| \cdot \underbrace{|h'(t)|}_{h'(t)\cdot \operatorname{sgn}\left(h'(t)\right)}\ dt = \left\{ \begin{array}{c} \tau = h(t) \\ d\tau = h'(t)\,dt \end{array} \right\} =$$

$$= \operatorname{sgn}(h') \cdot \int_{h(a)}^{h(b)} f\big(\tau\big) \cdot \|\psi'\big(\tau\big)\|\ d\tau = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sgn}(h') = +1 : h(a) = c, h(b) = d \\ \operatorname{sgn}(h') = -1 : h(a) = d, h(b) = c \end{array} \right\} = \int_c^d f\big(\tau\big) \cdot \|\psi'\big(\tau\big)\|\ d\tau\ .$$

Pro křivku $\mathcal{C}$ skládající se z oblouků $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ opět definujeme integrál jako

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds := \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathcal{C}_i} f\ ds$$

(opět se ukáže, že nezávisí na rozkladu na oblouky).

Pokud $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{C}$ je parametrizace křivky, platí analogický vztah jako pro oblouk, tedy

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\|\ dt,$$

Př. (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: horní polovina kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $(\frac{1}{2},0)$ jdoucí v kladném smyslu z bodu $(1,0)$ do bodu $(0,0)$;
- $\mathcal{C}_2$: úsečka jdoucí z bodu $(0,0)$ do bodu $(-1,2)$.

Řešení:

• parametrizace $\mathcal{C}_1$: Křivka splňuje rovnici $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_1: \quad x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos t, \quad y=\tfrac{1}{2}\sin t \quad \text{pro} \quad 0\le t\le\pi.$$

$$\varphi_1'(t): \quad x'(t)=-\tfrac{1}{2}\sin t, \quad y'(t)=\tfrac{1}{2}\cos t \qquad \text{a} \qquad \|\varphi_1'(t)\|=\sqrt{(-\tfrac{1}{2}\sin t)^2+\tfrac{1}{4}\cos^2 t}=\tfrac{1}{2}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_1}\sqrt{x^2+y^2}\ ds=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{x^2+y^2}_{|\varphi_1(t)}\cdot\|\varphi_1'(t)\|\ dt=\int\limits_0^{\pi}\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos t)^2+(\tfrac{1}{2}\sin)^2t}\ dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\cos t}\ dt=\left[\begin{smallmatrix}2u=t\\2du=dt\end{smallmatrix}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos(2u)}\ du=$$

$$=\left\{\cos(2u)=\cos^2 u-\sin^2 u\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\ du=\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

• parametrizace $\mathcal{C}_2$: $\varphi_2(t)=(0,0)+t(-1,2)=(-t,2t), \quad t\in\langle 0,1\rangle$

$$\varphi_2'(t)=(-1,2) \qquad \text{a} \qquad \|\varphi_2'(t)\|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}_2}\sqrt{x^2+y^2}\ ds=\int\limits_0^{1}\sqrt{x^2+y^2}_{|\varphi_2(t)}\cdot\|\varphi_2'(t)\|\ dt=\int\limits_0^{1}5t\ dt=\frac{5}{2}\ .$$

Celkem tedy máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}}(x+y)\,ds=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\mathcal{C}_i}(x+y)\,ds=\frac{5+\sqrt{2}}{2}$$

1.4 Křivkový integrál z vektorového pole (Křivkový integrál 2.druhu)

Integrál z vektorového pole $\vec{F}$ podél dané *orientované* křivky $\mathcal{C}$ budeme počítat jako práci síly podél této křivky s jednotkovym tečným polem $\vec{T}$ (jež určuje orientaci křivky $\mathcal{C}$). Protože na práci silového pole $\vec{F}$ se podílí jen složka $\underbrace{(\vec{F}\cdot\vec{T})}_{skal.\ souč.}\cdot\vec{T}$, která je rovnoběžná s okamžitým směrem pohybu (tj. složka v/proti tečnému směru) bude příspěvek k celkové práci na malé části dráhy Δs v okolí bodu $a\in\mathcal{C}$ dán jako $\Big(\vec{F}(a)\cdot\vec{T}(a)\Big)\Delta s$. Proto si práci pole definujeme pomocí integrálu 1. druhu (tj. integrálu z funkce) jako

$$\int\limits_{\mathcal{C}}\vec{F}\cdot d\vec{s}:=\int\limits_{\mathcal{C}}\underbrace{(\vec{F}\cdot\vec{T})}_{\text{funkce}}\,ds$$

Poznámka: Při změně orientace křivky $\mathcal{C}$ na $-\mathcal{C}$, tj. jestliže si vezmeme pole $\vec{T}' = -\vec{T}$ dostaneme

$$\int_{-\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{-\mathcal{C}} (\vec{F}\cdot\vec{T}')\, ds = \int_{-\mathcal{C}} (\vec{F}\cdot(-\vec{T}))\, ds = -\underbrace{\int_{-\mathcal{C}} (\vec{F}\cdot\vec{T})\, ds}_{\text{integrál 1.druhu}} = -\int_{\mathcal{C}} (\vec{F}\cdot\vec{T})\, ds = -\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

(kde jsme použili, že integrál 1. druhu nezávisí na orientaci.)

Integrál z pole tedy *závisí* na orientaci křivky a při změně orientace křivky mění znaménko.

Jestliže nyní budeme mít parametrizaci $\varphi : \langle a,b\rangle \to \mathcal{C}$, která bude odpovídat zvolené orientaci (dané jednotkovým tečným polem $\vec{T}$), pak bude platit $\vec{T}(\varphi(t)) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$ (až na konečně mnoho vyjímek) a my tak dostaneme vztah

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}} (\vec{F}\cdot\vec{T}) ds = \int_a^b \left(\vec{F}(\varphi(t))\cdot\frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}\right)\cdot\|\varphi'(t)\|\ dt = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt\ .$$

Pokud parametrizace φ je v opačném směru než námi zvolená orientace $\mathcal{C}$, pak máme

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_a^b \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt\ .$$

Př. (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2+1)\ dx + 2z\ dy + x^2\ dz$$

kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \& \quad x = y \quad \& \quad z \ge 0$$

je křivka s orientací od bodu $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ do bodu $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y^2+1,\ 2z,\ x^2)$. Křivka představuje průnik horní části sféry a roviny kolmé k základně. Je to tedy polovina kružnice. Ukážeme si na ní, jak můžeme využívat známých transformací souřadnic pro nalezení parametrizaci křivek.

Vzhledem k rovnicím určujícím naší křivku $\mathcal{C}$ můžeme dobře využít sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu pro $\mathcal{C}$ dostaneme

$$r^2 = 1 \quad \& \quad r\sin\vartheta(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \quad \& \quad r\cos\vartheta \ge 0$$

Vzhledem ke geometrickému náhledu a těmto rovnicím si vezmeme tuto volbu pro jednotlivé parametry:

$$r = 1 \quad \& \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \& \quad -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$$

Může se zdát zvláštní brát si úhel ϑ i pro záporné hodnoty, ale vzhledem k tomu, že se měří od kladné části osy z a úhel φ máme teď pevně zvolený, to je v pořádku. Dostáváme tak parametrizaci:

$$\varphi: \quad x(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta\ , \quad y(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta\ , \quad z(\vartheta) = \cos\vartheta \quad \text{pro} \quad \vartheta \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle$$

kterou bychom mohli koneckonců snadno dostat i z geometrického náhledu nebo při dosazení $x = y$ do rovnice $x^2+y^2+z^2 = 1$ (tj. zparametrizováním elipsy $2y^2+z^2 = 1$). Tato parametrizace odpovídá i zvolené orientaci $\mathcal{C}$.

Zápis na základě původní definice integrálu 2. druhu bude:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (y^2+1,\ 2z,\ x^2)_{|(x(t),y(t),z(t))}\cdot\begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\\ z'(t)\end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\tfrac{1}{2}\sin^2 t+1,\ 2\cos t,\ \tfrac{1}{2}\sin^2 t)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\tfrac{1}{2}\sin^2 t+1)\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t + 2\cos t\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \tfrac{1}{2}\sin^2 t\cdot\sin t\Big)\ dt = \cdots$$

Zde si ukážeme ještě, že pro výpočet můžeme využít i formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}} (y^2+1)\ dx + 2z\ dy + x^2\ dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((y^2(\vartheta)+1)\cdot\frac{dx}{d\vartheta} + 2z(\vartheta)\cdot\frac{dy}{d\vartheta} + x^2(\vartheta)\cdot\frac{dz}{d\vartheta}\Big)\ d\vartheta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta+1)\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta + 2\cos\vartheta\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta\cdot\sin\vartheta\Big)\ d\vartheta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta+1)\cos\vartheta\ d\vartheta + \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2\vartheta}_{\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}}\ d\vartheta - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^3\vartheta}_{\text{lichá funkce}}\ d\vartheta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\tfrac{1}{6}\sin^3\vartheta + \sin\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\ .$$

1.5 Konzervativní pole. Potenciál.

Definice konzervativního pole: Spojité vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme *konzervativní*, pokud práce síly z bodu A do bodu B (v případě že dané body lze propojit alespoň jednou křivkou ležící v U) nezávisí na způsobu, jakým oba body propojíme (na bodech A a B ale záviset může). V tom případě pro tuto práci volíme značení $\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s}$.

Věta (o potenciálu): Následující podmínky jsou ekvivalentní pro spojité vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$:

- pole $\vec{F}$ je konzervativní na U,

- práce pole $\vec{F}$ podél jakékoliv uzavřené křivky $\mathcal{C} \subseteq U$ je nulová,
- existuje funkce (tzv. *potenciál*) $f : U \to \mathbb{R}$, že $\mathrm{grad}(f) = \vec{F}$.

Pak platí, že

$$\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = \int_A^B \mathrm{grad}(f)\ d\vec{s} = f(B) - f(A)\ .$$

Definujme si tzv. rotaci pole jako

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\quad -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z},\quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Věta: Pro spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^3$ (tj. v dimenzi 3) platí:

- $\vec{F}$ je konzervativní $\Rightarrow \mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$
  (podmínka $\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací potenciálu f)
- Jestliže množina U je *jednoduše souvislá* a $\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ (všude na U), pak $\vec{F}$ je konzervativní.

Definice jednoduše souvislé množiny: Množina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže se jakákoliv uzavřená křivka v U dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu.

Příkladem jednoduše souvislé množiny je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
Příkladem otevřené množiny, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "přímka" nebo torus (tj. "pneumatika").

Poznámka: Nulová rotace je obecně opravdu jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$$

na množině $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.
Máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) = \vec{0}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je nenulová:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1\ d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x,y,z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{na} \qquad U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x,y,z) = \mathrm{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{na} \qquad U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

Př. (konzervativní pole, potenciál)
Dokažte, že pole $\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y,\quad y^2+x,\quad ze^z)$ je konzervativní, najděte jeho potenciál a hodnotu práce síly z bodu $A = (0,1,0)$ do $B = (-1,1,0)$.

Řešení:
Protože máme najít potenciál pole, je ověřování podmínky o nulové rotaci celkem zbytečné. Počítání rotace pole nám sice rozhodne o existenci potenciálu, ale neurčí jeho tvar. Ten musíme zjistit dalším výpočtem, jehož postup v sobě také zahrnuje (případné) zjištění neexistence potenciálu (viz dále). Pokud by nás zajímala skutečně pouze (ne)existence potenciálu, je jednodušší a rychlejší spočítat rotaci. Ale pokud chceme přímo potenciál najít, použijeme následující postup (hledání potenciálu) a v tom případě je počítání rotace zbytečné a jen zdržuje.

Výpočet rotace uděláme zde pouze z cvičných důvodů:

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0-0,\quad 0-0,\quad 1-1) = \vec{0}\ .$$

Rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ (což je jednoduše souvislá množina) a pole $\vec{F}$ potenciál má (ale nic dalšího se tím nedozvíme).

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \tag{1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x \tag{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z\ . \tag{3}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2+y)\ dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\ dz = (z-1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1,1,0) - f(0,1,0) = -2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}\ .$$

- -

A jak nám náš postup rozhodne o případné neexistenci potenciálu? Pokud po dosazení průběžného tvaru potenciálu do další rovnice zjistíme, že tato nová rovnice nemá řešení, pak potenciál nemůže existovat. Jak by k něčemu takovému mohlo dojít? Předpokládejme např., že druhá složka pole je trochu jiná, dejme tomu, že je tvaru $F_2 = y^2 - x$. Z první rovnice $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = x^2 + y$ opět dostaneme, že potenciál musí být tvaru $f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + C(y, z)$ a když ho nyní dosadíme do druhé rovnice $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = y^2 - x$ (se změněnou složkou F_2) tak dostaneme, že

$$y^2 - x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y, z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = y^2 - 2x.$$

Nalevo je funkce závislá pouze na y a z, ale už ne na x, zatímco napravo je funkce závislá také na x. Takovouto rovnici nelze splnit, tedy potenciál v tomto případě neexistuje (bez ohledu na to, jaká je třetí složka F_3 našeho pole).

2 Plošný integrál

Technické záležitosti:

V dalším se budeme zabývat plochami (dvojrozměrnými objekty) a tedy v důsledku i dvojnými integrály. U ploch budeme pracovat i s jejich okraji. K tomu účelu se v této části omezíme jen na ty oblasti integrace v $\mathbb{R}^2$, které jsou sestaveny z konečně mnoha základních oblastí (tj "ne-zobecněných"), protože u těch máme dobře definovaný "okraj".

2.1 Pojem plochy

Motivace: Typickým příkladem plochy bude pro náš graf (hladká) funkce dvou proměnných (tzv. elementární plocha). Z těchto částí pak "slepíme"obecnou plochu. Co se týče orientace (a orientovatelnosti) tohoto slepení - menší plochy si dokážeme orientovat a podle tzv. pravidla pravé ruky určíme orientace jejich okrajů. Jestliže plochy slepujeme tak, aby orientace krajů šly "proti sobě", pak výsledek považujeme za orientovatelnou plochu s orientací zadanou na každé z jejich menších částí.

2.1.1 Pojem (elementární) plochy a okraje

Definice elementární plochy: Množinu $M \subseteq \mathbb{R}^3$ nazýváme *elementární plochou*, jestliže

$$M = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} \mid z = g(x, y)\}$$

kde

- g je spojitá funkce na základní oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$,
- g je spojitě diferencovatelná na vnitřku D°,
- množina $g(\partial D) \subseteq \mathbb{R}^3$ je křivka (to nastane např. pokud g se da rozšířit na větší otevřenou množinu E a je na E spojitě diferencovatelná).

(Další elementární plochy získame cyklickými permutacemi proměnných.)

Krajem elementární plochy M rozumíme křivku $K(M) := g(\partial D)$.

Definice plochy: Množina $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se nazývá *plocha*, jestliže je "slepením elementárních ploch pomocí jejich krajů"v tomto smyslu: existují elementární plochy $M_1, \ldots, M_k$ takové, že

- $M = \bigcup_{i=1}^k M_i$
- pro $i \neq j$ je $M_i \cap M_j \subseteq K(M_i) \cap K(M_j)$ a množina $M_i \cap M_j$ je buď prázdná nebo je to křivka (tj. elementární plochy slepujeme pomocí krajů a chceme, aby toto slepení tvořilo nepřerušovanou křivku),
- pro navzájem různé indexy i, j, ℓ je množina $M_i \cap M_j \cap M_\ell$ buď prázdná nebo jednobodová (tedy: společnou křivkou slepujeme vždy jen dvě elementární plochy a ne více).

Kraj plochy M sestavíme z takových bodů krajů elementárních ploch M_i, které jsou v právě jedné z množin $K(M_i)$ a protože tím bychom pořád ještě nemuseli dostat to, co si jako kraj představujeme (měli bychom přerušované úseky), tak tuto množinu ještě uzavřeme, tedy

$$K(M) := \overline{\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \exists!\ i \in \{1, \ldots, k\}\ a \in K(M_i)\}}$$

Je samozřejmě potřeba ukázat, že definice kraje plochy nezávisí na zvoleném rozkladu M na elementární plochy.

V některých případech se může i stát, že kraj plochy bude prázdná množina (např. u sféry).

Teď si definujeme pojem parametrizace plochy. Abychom ho mohli používat v co nejobecnějších případech, které se nám naskytnou, bude tento pojem složitější než u křivky a to hlavně kvůli případným problematickým bodům na kraji plochy.

Definice parametrizace plochy: Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je plocha. Zobrazení $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : U \to M$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, nazýváme *parametrizací plochy*, jestliže

- $\Phi(U) = M$
- Φ je spojité na U; $\Phi(\partial U)$ je křivka
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- v každém bodě $u = (s,t) \in U^\circ$ má matice $\Phi'(u)$ (která je typu 3×2) lineárně nezávislé sloupce:

$$\Phi'(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}(u) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(u) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}(u) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(u) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial s}(u) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}(a) \end{pmatrix} =: \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}(u),\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(u) \right)$$

  neboli $\frac{\partial \Phi}{\partial s}(u)$ a $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(u)$ vektory jsou lineárně nezávislé, což je také ekvivalentní podmínce

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(u) \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}(u) \neq \vec{0}\ .$$

  (Proměnné s a t budeme nazývat parametry).

Křivky s předpisem $\varphi(\cdot) := \Phi(\cdot, t_0)$ (pro pevně zvolené t_0) a $\psi(\cdot) := \Phi(s_0, \cdot)$ (pro pevně zvolené s_0) nazýváme *souřadnicové křivky*. Jsou to křivky, které leží na ploše M a přenášejí čtvercovou souřadnicovou síť z původní oblasti parametrizace U na křivočarou souřadnicovou síť na ploše M.

Geometrický význam vektorů $\frac{\partial \Phi}{\partial s}(u)$ a $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(u)$ je ten, že to jsou tečné vektory k souřadnicovým křivkám v bode $a = \Phi(u)$ na ploše M a tedy oba tyto (nenulové) vektory jsou tečné k ploše.

Pro elementární plochu (z naší definice) je zobrazení $\Phi : D \to M$ zadané jako

$$\Phi(x,y) := (x, y, g(x,y))$$

(tzv. *kartézskou*) parametrizací této elementární plochy a Φ je *prosté na celé množině* D. Tento typ parametrizace budeme celkem často používat.

Pojmy, které budeme chtít pro plochu M zavést, bychom chtěli opět mít závislé pouze na množině M (a nanejvýše ještě na její orientaci - viz dále), ale ne na volbě způsobu, jak ji zrovna parametrizujeme. K tomu se bude hodit následující věta, která pro elemetární plochy říká, že parametrizace se dají jedna převádět na druhou jen pomocí transformace jejich definičních oborů.

Věta (o přechodech mezi parametrizacemi): Nechť $\Phi : U \to M$ a $\Psi : V \to M$ jsou dvě hladké parametrizace téže plochy M, $\Phi(\partial V) = \Psi(\partial U)$ a nechť Φ je *prosté na celé množině* U. Pak pro zobrazení $H := \Phi^{-1} \circ \Psi : V \to U$ platí, že

- $\Psi = \Phi \circ H$,
- H je spojité na množině V,
- H prosté a spojitě diferencovatelné na V° (tj. vnitřku V)
- $\det H' \neq 0$ na V°.

2.1.2 Orientace (elementární) plochy a související orientace okraje

Jak nyní definovat orientaci plochy a vůbec pojem toho, že plochu orientovat lze? (U křivek jsme problém orientovatelnosti řešit nemuseli, protože křivka je totiž - na rozdíl od plochy - orientovatelná vždy).

Tady si opět nejdříve zavedeme orientaci pro elementární plochu a spolu s tím hned i to, jak by měla orientace elementární plochy souviset s orientací jejího okraje.

Definice jednotkového normálového pole: Nechť M je elementární plocha. Zobrazení

$$\vec{N} : M \setminus \{\text{okraj}\} \to \mathbb{R}^n$$

takové, že pro každý bod $a \in M \setminus \{\text{okraj}\}$ je $\vec{N}(a)$ normálový vektor k dané elementární ploše M a $\|\vec{N}(a)\| = 1$ nazýváme *jednotkové normálové pole* (dané elem. plochy).

Věta (o spojitých jednotkových normálových polích): Nechť M je elementární plocha.

- Při zadané parametrizaci $\Phi : U \to M$ takové, že $\Phi(\partial U) \subseteq$ *okraj*, je zobrazení $\vec{N}_\Phi : M \setminus \{\text{okraj}\} \to \mathbb{R}^n$ definované jako

  $$\vec{N}_\Phi(a) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s}(u) \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}(u)}{\|\frac{\partial \Phi}{\partial s}(u) \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}(u)\|}$$

  kde $a = \Phi(u) \in M$ pro $u = (s,t) \in U^\circ$, *spojité* jednotkové normálové pole.

  (Toto pole nazývejme *odvozené jednotkové normálové pole* pro parametrizaci Φ. Všimněte si, že pořadí vektorů ve vektorovém součinu odpovídá pořadí příslušných proměnných!)

- Pro M existují právě dvě *spojitá* jednotková normálová pole, která jsou navzájem opačná.

Definice orientace elem. plochy: *Orientace elementární plochy* M je zadána výběrem jednoho ze dvou spojitých normálových polí.

Definice odvozené orientace okraje elementární plochy: Mějme elementární plochu

$$M = \{(x,y,z) \in D \times \mathbb{R} \mid z = g(x,y)\}$$

(kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je základní oblast integrace) a její kartézskou parametrizaci $\Phi : D \to M$,

$$\Phi(x,y) := (x, y, g(x,y)) \ .$$

Nechť orientace plochy je dána normálovým polem $\vec{N}_\Phi$ (tj. s pořadím proměnných x, y). V tom případě si budeme orientovat uzavřenou křivku ∂D (která je okrajem oblasti D) v kladném směru (tj. proti směru hodin. ručiček). Tato orientace nyní určuje *odvozenou orientaci* (tj. tečné pole) uzavřené křivky $K(M) = \Phi(\partial D)$, která je zase okrajem naší elementární plochy M.

A dále, jestliže vezmeme k oběma polím z předchozího textu (tj. k normálovému plochy i k tečnému křivky) současně opačně orientovaná pole, pak o křivce budeme opět říkat, že má *odvozenou orientaci*. Zkráceně budeme říkat, že orientace obou útvarů (tj. elem. plochy a jejího kraje) jsou v souladu (nebo, že si navzájem odpovídají).

Tuto (možná na první pohled složitější) definici můžeme popsat následujícím způsobem:

Pravidlo pravé ruky: Jestliže pravá ruka je položená na orientovanou plochu tak, že vektor normálového pole plochy vchází do její dlaně a natažený palec ukazuje dovnitř plochy, pak ostatní natažené prsty ukazují směr orientace okraje plochy.

Definice: Nechť M je plocha a $M_1, \ldots, M_k$ její rozklad na elem. plochy (viz definice) a nechť $\vec{N}_i$ jsou zvolené orientace elem. ploch M_i a $\vec{T}_i$ odpovídající orientace jejich krajů.

Plochu M nyní nazveme *orientovatelnou* (se zvolenou orientací $\vec{N}$ danou souborem polí $(\vec{N}_1, \ldots, \vec{N}_k)$) právě když

- pro každé $i \neq j$ a pro každé $a \in K(M_i) \cap K(M_j)$ bude $\vec{T}_i(a) = -\vec{T}_j(a)$ až na konečně mnoho vyjímek.

Orientaci $\vec{T}$ kraje $K(M)$ pak zadáme pomocí odpovídajícího souboru polí $(\vec{T}_1, \dots, \vec{T}_k)$. A zase řekneme, že orientace plochy $\vec{N}$ a jejího kraje $\vec{T}$ jsou v souladu (nebo, že si odpovídají).

Smyslem této definice je slepovat elementární plochy tak, aby orientace křivek na společné hraně šly proti sobě a vzájemně se tak "vyrušily".

Příkladem orientovatelné (ne-elementární) plochy je např. sféra nebo povrch krychle a naopak příkladem plochy, co se nedá orientovat je tzv. Möbiův list.

2.2 Obsah plochy

Obsah elementární plochy $M \subseteq \mathbb{R}^3$ můžeme buď definovat jako suprémum obsahu mnohostěnu složeného z trojúhelníků (tzv. triangulace plochy), který ji aproximuje, což je opět velmi přirozená definice, a opět dost pracná anebo můžeme postupovat následujícím způsobem:

Vezmeme si kartézskou parametrizaci $\Phi : D \to M$ (bez újmy na obecnosti tvaru)

$$\Phi(x, y) := (x, y, g(x, y)) \ .$$

Základní oblast $D \subseteq \mathbb{R}^2$ rozdělíme na malé obdélníky $D_i = \langle x_i + \Delta x \rangle \times \langle y_i + \Delta y \rangle$ (nepřesné "neobdélníkové" tvary u hranice budou pak v dalším celkovém součtu nevýznamné). Obsah plochy M_i, která je grafem funkce nad obdélníkem D_i můžeme aproximovat jako obsah rovnoběžníku daného tečnou rovinou plochy v bodě $u_i = (x_i, y_i)$ nad obdélníkem D_i. Rovnoběžník je tedy určen vektory

$$\Phi'(u_i)[\Delta x \cdot \vec{e}_1] = \Delta x \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u_i) \quad \text{a} \quad \Phi'(u_i)[\Delta y \cdot \vec{e}_2] = \Delta y \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u_i)$$

kde $\vec{e}_i$ jsou vektory standardní báze v $\mathbb{R}^2$. Jeho obsah spočítáme pomocí vektorového součinu tedy jako

$$\left\| \Delta x \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u_i) \ \times \ \Delta y \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u_i) \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u_i) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u_i) \right\| \cdot \Delta x \cdot \Delta y \ .$$

Tedy obsah plochy chceme aproximovat sumou

$$\sum_i \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u_i) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u_i) \right\| \cdot \Delta x \cdot \Delta y \ .$$

Definice obsahu elementární plochy: Obsah elementární plochy M při *kartézské* parametrizaci $\Phi : U \to M$ definujeme jako

$$S(M) := \iint_U \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| \, dx \, dy \ ,$$

Ukážeme si, že tato definice nezávisí na zvolené parametrizaci elementární plochy a tím ani na její orientaci.

Nejdříve si dokážeme pomocné tvrzení: Pro (sloupcové) vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ a matici $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ položme

$$\underbrace{(\vec{u}', \ \vec{v}')}_{matice\ typu\ 3\times 2} \ := \ \underbrace{(\vec{u}, \ \vec{v})}_{matice\ typu\ 3\times 2} \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a\vec{u} + c\vec{v}, \ b\vec{u} + d\vec{v}) \ .$$

Pak platí

$$\vec{u}' \times \vec{v}' = (a\vec{u} + c\vec{v}) \times (b\vec{u} + d\vec{v}) = ad \cdot \vec{u} \times \vec{v} + ab \cdot \underbrace{\vec{u} \times \vec{u}}_{=0} + cd \cdot \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} + bc \cdot \vec{v} \times \vec{u} =$$

$$= (ad - bc) \cdot \vec{u} \times \vec{v} = \det(\mathbb{A}) \cdot \vec{u} \times \vec{v} \ .$$

Protože kartézká parametrizace $\Phi : U \to M$ elementární plochy M je prosté zobrazení, tak pro jinou parametrizaci $\Psi : V \to M$ máme (podle předchozí věty) přechodové zobrazení $H : V \to U$, že $\Psi = \Phi \circ H$, a pro derivaci máme

$$\Psi'(\alpha,\beta) = \Phi'(H(\alpha,\beta)) \cdot H'(\alpha,\beta)$$

neboli

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}, \ \frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \ \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{|H(\alpha,\beta)} \cdot H'(\alpha,\beta)$$

a podle pomocného tvrzení je

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\Psi}{\partial\beta} = \det H'(\alpha,\beta) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}_{|H(\alpha,\beta)} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}_{|H(\alpha,\beta)}\right) .$$

Tudíž máme

$$\iint\limits_V \left\| \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\Psi}{\partial\beta} \right\| \, d\alpha \, d\beta = \iint\limits_V \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right\|_{|H(s,t)} \cdot \left| \det H'(\alpha,\beta) \right| \, d\alpha \, d\beta = \left\{ \begin{array}{c} H : V \to U \\ H(\alpha,\beta) = (x,y) \end{array} \right\} =$$

$$= \iint\limits_U \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right\| \, dx \, dy \ .$$

což jsme chtěli dokázat.

Definice obsahu plochy: Pro plochu M skládající se z elem. ploch $M_1, \ldots, M_k$ definujeme její obsah jako

$$S(M) := \sum_{i=1}^{k} S(M_i)$$

(opět se ukáže, že nezávisí na rozkladu na elem. plochy).

Př. (obsah plochy)
Spočítejte obsah plochy M, která je částí válce $x^2 + y^2 = 1$ a je vymezena rovinami $z = 0$ a $z = x + 1$.

Řešení:
Plocha je určena jako

$$M : \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \le z \le x + 1.$$

Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$$

s definičním oborem

$$U : \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le z \le 1 + \cos\varphi.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (-\sin\varphi, \ \cos\varphi, \ 0) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial z} &= (\ 0, \ 0, \ 1) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \tfrac{\partial\Phi}{\partial z} &= (\ \cos\varphi, \ \sin\varphi, \ 0) \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right\| = 1.$$

Takže pro obsah máme

$$S(M) = \iint\limits_M 1 \; dS = \iint\limits_U \underbrace{\left\| \tfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \tfrac{\partial \Phi}{\partial z} \right\|}_{=1} \; dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{1+\cos\varphi} 1 \; dz \; d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 1 + \cos\varphi \; d\varphi = 2\pi + \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \; d\varphi}_{=0} = 2\pi.$$

2.3 Plošný integrál z funkce (Plošný integrál 1.druhu)

Nyní budeme postupovat podobně jako u integrálu funkce podél křivky.

Když víme, co je to obsah elementární plochy, můžeme zavést pojem integrálu ze (spojité) funkce f na ploše M s *konečným* obsahem $S(M) < \infty$. Plochu si rozdělíme na menší plochy $K_1, \ldots, K_m$ a vezmeme si sumu

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot S(K_i), \quad \text{kde} \quad x_i \in K_i \quad \text{je nějaký zvolený bod.}$$

Dá se zase ukázat, že jestliže se průměry $\operatorname{diam}(K_i)$ množin K_i blíží k nule, pak se tyto aproximační sumy blíží k hodnotě, která pro nás bude hledaným integrálem a která se dá spočítat vztahem

$$\iint\limits_M f \; dS = \iint\limits_U f(\Phi(s,t)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| \; ds \; dt \; ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je parametrizace elementární plochy.

Ukážeme si alespoň, že výraz napravo nezávisí na volbě parametrizace (a tím ani na volbě orientace plochy!):

Důkaz: Pro parametrizaci $\Psi : V \to M$ podle věty o přechodu existuje přechodové zobrazení $H : V \to U$, že $\Psi = \Phi \circ H$, takže

$$\iint\limits_V (f \circ \Psi)(\alpha, \beta) \cdot \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right\| \; d\alpha \; d\beta = \iint\limits_V (f \circ \Phi \circ H)(\alpha, \beta) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|_{|H(\alpha,\beta)} \cdot \left| \det H'(\alpha, \beta) \right| \; d\alpha \; d\beta =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} H : V \to U \\ H(\alpha, \beta) = (s,t) \end{array} \right\} = \iint\limits_U (f \circ \Phi)(s,t) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| \; ds \; dt \; .$$

Pro plochu M skládající se z elem. ploch $M_1, \ldots, M_k$ opět definujeme integrál jako

$$\iint\limits_M f \; dS := \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{M_i} f \; dS$$

(opět se ukáže, že nezávisí na rozkladu na elem. plochy).

Pokud $\Phi : U \to M$ je parametrizace plochy, platí analogický vztah jako pro elem. plochu, tedy

$$\iint\limits_M f \; dS = \iint\limits_U f(\Phi(s,t)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| \; ds \; dt,$$

Př. (plošný integrál z funkce)

Spočítejte

$$\iint_M x^2 z + y^2 z \; dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Řešení:
Plochu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \;\&\; z \geq 0\}$ parametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad 2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = (-2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad 0 \quad)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = (\;\; 2\cos\vartheta\cos\varphi, \quad 2\cos\vartheta\sin\varphi, \quad -2\sin\vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\| = 4|\sin\vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint_M x^2 z + y^2 z \; dS = \iint_U \left(8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right) \cdot 4|\sin\vartheta| \; dS = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \right) =$$

$$= 2\pi \Big[8\sin^4\vartheta \Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

2.4 Plošný integrál z vektorového pole (Plošný integrál 2.druhu)

Tok vektorového pole $\vec{F} : M \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ si nyní už definujeme podobně jako práci pole podél křivky, jen s tím rozdílem, že teď nás bude zajímat normálové pole $\vec{N}$.

Na toku pole $\vec{F}$ se podílí jen složka $\underbrace{(\vec{F} \cdot \vec{N})}_{\textit{skal. souč.}} \cdot \vec{N}$, která je kolmá na plochu v daném bodě (a která jde ve/proti směru orientace plochy v daném bodě). Příspěvek k celkovému toku na malé části plochy ΔS v okolí bodu $a \in M$ je dán jako $\left(\vec{F}(a) \cdot \vec{N}(a)\right)\Delta S$. Proto si práci pole definujeme pomocí integrálu 1. druhu (tj. integrálu z funkce) jako

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} := \iint_M \underbrace{(\vec{F} \cdot \vec{N})}_{\text{funkce}} dS$$

Poznámka: Při změně orientace plochy M na $-M$, tj. jestliže si vezmeme pole $\vec{N}' = -\vec{N}$ dostaneme

$$\int_{-M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{-M} (\vec{F} \cdot \vec{N}')\, dS = \int_{-M} (\vec{F} \cdot (-\vec{N}))\, dS = -\underbrace{\int_{-M} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dS}_{\text{integrál 1.druhu}} = -\int_{M} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dS = -\int_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

(kde jsme použili, že integrál 1. druhu nezávisí na orientaci.)

Integrál z pole tedy *závisí* na orientaci plochy a při změně orientace plochy mění znaménko.

Mějme nyní parametrizaci $\Phi : U \to M$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^2$, pro kterou orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ souhlasí se zadanou orientací plochy M danou norm. polem $\vec{N}$. To znamená, že pro zvolenou orientaci danou jednotkovým normálovým polem $\vec{N}$ bude platit, že

$$\vec{N} \circ \Phi = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|}$$

(až na množinu skládající se z konečně mnoha křivek).

Pak dostaneme vztah

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_M (\vec{F} \cdot \vec{N}) dS = \iint_U \left[\vec{F}\big(\Phi(s,t)\big) \cdot \vec{N}\big(\Phi(s,t)\big) \right] \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| ds\, dt =$$

$$= \iint_U \left[\vec{F}\big(\Phi(s,t)\big) \cdot \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|} \right] \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| ds\, dt = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(s,t)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) ds\, dt\ .$$

Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.

Př. (plošný integrál z vektorového pole - tok)

Spočítejte

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení:

Plochu S zparametrizujeme přirozeně jako graf funkce:

$$\Phi(x,y) = \left(x,\ y,\ 1 - x^2 - y^2\right)$$

s definičním oborem

$$U : \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(1, \quad 0, \quad -2x\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(0, \quad 1, \quad -2y\right)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(2x, \quad 2y, \quad 1\right).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dS \;=\; \iint_U (x,y,1-x^2-y^2)\cdot\begin{pmatrix}2x\\2y\\1\end{pmatrix}dS \;=$$

$$= \iint_U \left(1+x^2+y^2\right)\,dS = \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2)r\;dr d\varphi = \left(\int_0^1 (1+r^2)r\;dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\;d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi\left[\frac{(1+r^2)^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = 2\pi\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

Poznámka: Ke zjištění hodnoty integrálu můžeme použít i Gaussovu větu (viz později), protože tok pole podstavou $x^2+y^2\le 1$, $z=0$ je v tomto případě nulový (neboť pole je rovnoběžné s podstavou).