Příklady na lineární závislost:

1. Rozhodněte o lineární závislosti vektorů $\vec{a} = (1, 1, 2), \vec{b} = (-1, 1, 2), \vec{c} = (1, 1, 0)$.

Řešení: Podle definice jsou vektory závislé právě tehdy, když existuje alespoň jedna jejich netriviální lineární kombinace rovnající se nulovému vektoru. Takže hledáme řešení rovnice
$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{o}$
takové, že
$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.
Dosadíme
$\alpha(1, 1, 2) + \beta(-1, 1, 2) + \gamma(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$,
vypočteme na levé straně
$(\alpha - \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta) = (0, 0, 0)$
a na základě rovnosti vektorů vytvoříme soustavu tří rovnic o třech neznámých
$\alpha - \beta + \gamma = 0$
$\alpha + \beta + \gamma = 0$
$2\alpha + 2\beta = 0$.
Upravíme (od druhé rovnice odečteme první)
$\alpha - \beta + \gamma = 0$
$2\beta = 0$
$2\alpha + 2\beta = 0$.
Z druhé rovnice vidíme, že $\beta = 0$, dosadíme do třetí a vidíme, že $\alpha = 0$ a po dosazení do první vidíme, že i $\gamma = 0$.
Tedy existuje jediné řešení $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, které je triviální, netriviální lineární kombinace rovnající se nulovému vektoru tedy neexistuje a vektory jsou podle definice lineárně nezávislé.

2. Rozhodněte o lineární závislosti vektorů $\vec{a} = (1, 1, 2), \vec{b} = (-1, 1, 2), \vec{c} = (-1, 3, 6)$.

Řešení: Podle definice jsou vektory závislé právě tehdy, když existuje alespoň jedna jejich netriviální lineární kombinace rovnající se nulovému vektoru. Takže hledáme řešení rovnice
$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{o}$
takové, že
$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.
Dosadíme
$\alpha(1, 1, 2) + \beta(-1, 1, 2) + \gamma(-1, 3, 6) = (0, 0, 0)$,
vypočteme na levé straně
$(\alpha - \beta - \gamma, \alpha + \beta + 3\gamma, 2\alpha + 2\beta + 6\gamma) = (0, 0, 0)$

a na základě rovnosti vektorů vytvoříme soustavu tří rovnic o třech neznámých
$\alpha - \beta - \gamma = 0$
$\alpha + \beta + 3\gamma = 0$
$2\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0.$
Upravíme (od druhé rovnice odečteme první, od třetí dvojnásobek první)
$\alpha - \beta - \gamma = 0$
$2\beta + 4\gamma = 0$
$4\beta + 8\gamma = 0$
a třetí rovnici vynecháme, neboť je dvojnásobkem druhé
$\alpha - \beta - \gamma = 0$
$2\beta + 4\gamma = 0.$
Z druhé rovnice vidíme, že zvolíme-li $\gamma = 1$, pak $\beta = -2$ a po dosazení do první vidíme, že $\alpha = -1$.
Tedy kromě triviálního řešení $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, existuje i řešení netriviální $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, -2, 1)$, a kromě triviálni lineární kombinace , která se nulovému vektoru rovná vždy, existuje i netriviální lineární kombinace rovnající se nulovému vektoru a vektory jsou podle definice lineárně závislé.
Poznámka: Těch netriviálních řešení je samozřejmě víc, pro daný účel ale stačí jakékoliv z nich.

3. Rozhodněte o lineární závislosti polynomů $P(x) = x^2 + x + 2, Q(x) = -x^2 + x + 2, R(x) = -x^2 + 3x + 6$.

Řešení: Podle definice jsou polynomy závislé právě tehdy, když existuje alespoň jedna jejich netriviální lineární kombinace rovnající se nulovému polynomu, tj. nule. Takže hledáme řešení rovnice
$\alpha P(x) + \beta Q(x) + \gamma R(x) = 0$
takové, že
$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0).$
Dosadíme
$\alpha(x^2 + x + 2) + \beta(-x^2 + x + 2) + \gamma(-x^2 + 3x + 6) = 0,$
vypočteme na levé straně
$(\alpha - \beta - \gamma)x^2 + (\alpha + \beta + 3\gamma)x + (2\alpha + 2\beta + 6\gamma) = 0$
a na základě rovnosti polynomů vytvoříme soustavu tří rovnic o třech neznámých
$\alpha - \beta - \gamma = 0$
$\alpha + \beta + 3\gamma = 0$
$2\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0.$
Ta je stejná jako v příkladu 2. takže kromě triviálního řešení $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, existuje i řešení netriviální $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, -2, 1)$, a kromě triviálni lineární kombinace , která se nulovému polynomu rovná vždy, existuje i netriviální lineární kombinace rovnající se nulovému polynomu a polynomy jsou podle definice lineárně závislé.

4. Nechť jsou dány lineárně nezávislé polynomy P, Q, R. Vyšetřete lineárni závislost polynomů $P+Q+2R$, $-P+Q+2R$ a $P+Q$.

Řešení: Podle definice jsou polynomy závislé právě tehdy, když existuje alespoň jedna jejich netriviální lineární kombinace rovnající se nulovému polynomu, tj. nule. Takže hledáme řešení rovnice
$\alpha(P+Q+2R)+\beta(-P+Q+2R)+\gamma(P+Q)=0$,
kterou upravíme
$(\alpha-\beta+\gamma)P+(\alpha+\beta+\gamma)Q+(2\alpha+2\beta)R=0$.
Polynomy P, Q, R jsou lineárně nezávislé, proto se jejich lineární kombinace může rovnat nule, jen tehdy, je-li triviální, tj. má nulové všechny koeficienty, takže
$\alpha-\beta+\gamma=0$
$\alpha+\beta+\gamma=0$
$2\alpha+2\beta=0$.
Tuto soustavu jsme již řešili v příkladu 1., existuje jediné řešení $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$, které je triviální, netriviální lineární kombinace polynomů $P+Q+2R$, $-P+Q+2R$ a $P+Q$ rovnající se nule tedy neexistuje a tyto polynomy jsou podle definice lineárně nezávislé.