

Vícenásobné integrály-neřešené úlohy M2 M3

Karel Pospíšil

1 Dvojný integrál

1.1 $\iint_A xy \, dx \, dy$, $A = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2, x < 0, y > 0\}$

$$[\int_0^R \int_{\pi/2}^{\pi} r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \, d\varphi \, dr = -\frac{1}{8} R^4]$$

1.2 $\iint_A xy \, dx \, dy$, $A = \{(x, y); (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$

$$[\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+r \cos(\varphi))(2+r \sin(\varphi)) r \, d\varphi \, dr = 2\pi]$$

1.3 $\iint_A x^2 - 1 \, dx \, dy$, $A = \{(x, y); 1 \leq (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4, y > 0\}$

$$[\int_1^2 \int_0^{\pi} ((1+r \cos(\varphi))^2 - 1) r \, d\varphi \, dr = \frac{15\pi}{8}]$$

1.4 $\iint_A x - 2y \, dx \, dy$, $A = \{(x, y); x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

$$[\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} x - 2y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x - 2y \, dy \, dx = -\frac{3}{20}]$$

1.5 Odvoďte vzorec pro objem koule o poloměru R pomocí dvojného integrálu.

$$[2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2 (\cos(\varphi))^2 - r^2 (\sin(\varphi))^2} r \, d\varphi \, dr = \frac{4}{3} R^3 \pi]$$

2 Trojný integrál

2.1 $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$, A je omezena plochami $x = 0, y = 0, z = 0, z = 3, x + y = 2$

$$[\int_0^3 \int_0^2 \int_0^{2-y} x \, dx \, dy \, dz = 4]$$

2.2 $\iiint_A xyz \, dx \, dy \, dz$, A je omezena plochami $x = y^2, y = x^2, z = 0, z = xy$

$$[\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \int_0^{xy} xyz \, dz \, dx \, dy = \frac{1}{96}]$$

2.3 Odvoďte vzorec pro objem koule o poloměru R pomocí trojného integrálu.

$$\left[\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin(\phi) \, d\phi \, d\varphi \, dr = \frac{4}{3} R^3 \pi \right]$$