Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 4

Cálculo funcional.

Fecha de entrega: 7 de septiembre 2012

---

1. (a) Sea H un espacio de Hilbert, sean $\varphi : \mathbb{R} \to (a,b)$, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ y $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ como en problema 3 del taller 3. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f|_{[a_0,b_0]} \subseteq I[a_0,b_0]$ para cada subintervalo compacto $[a_0,\, b_0]$ de (a,b). Muestre:

   (i) $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(\lambda)\,\mathrm{d}F_\lambda$ para todo $[\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$.

   (ii) Sea $x \in H$. Entonces $\displaystyle\int_{a+0}^{b-0} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x$ existe si y solo si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(f\circ\varphi)(\lambda)\,\mathrm{d}F_\lambda x$ existe.[1]

   (b) Sea H un espacio de Hilbert y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $A \in L(H)$ un operador autoadjunto y $B := \varphi(A)$. Muestre $(f\circ\varphi)(A) = f(B)$.

2. Sea $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ definido por

$$(Ax)(t) := a(t)x(t), \qquad t \in (0,1), \quad x \in L_2(0,1).$$

   (a) Muestre que A es autoadjunto.

   (b) Encuentre $m := \inf_{x\in H, \|x\|=1}\langle Ax,\, x\rangle$ y $M := \sup_{x\in H, \|x\|=1}\langle Ax,\, x\rangle$.

   (c) Encuentre la resolución espectral de A.

3. Sean A y B operatores acotadas autoadjuntas en un espacio de Hilbert H con resoluciones espectrales $(E_A(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ y $(E_B(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Si $A \geq B$, entonces[2] $\dim E_A(\lambda) \leq \dim E_B(\lambda)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Sea H un espacio e Hilbert y $A \in L(H)$.

   (a) Muestre que $\displaystyle\mathrm{Exp}(A) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$ converge en norma. Muestre que $\big(\mathrm{Exp}(A)\big)^* = \mathrm{Exp}(A^*)$. En particular, $\mathrm{Exp}(A)$ es autoadjunto y $\big(\mathrm{Exp}(\mathrm{i}A)\big)^* = \mathrm{Exp}(-\mathrm{i}A)$ si A es autoadjunto.

   (b) Muestre que $\mathrm{Exp}(A) = \exp(A)$ si A es autoadjunto y $\exp(A)$ es definido a traves del cálculo funcional.

---

[1] $\displaystyle\int_{a+0}^{b-0} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x := \lim_{\substack{\lambda_1\searrow a\\ \lambda_2\nearrow b}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}(f\circ\varphi)(\lambda)\,\mathrm{d}F_\lambda x := \lim_{\substack{\lambda_1\searrow -\infty\\ \lambda_2\nearrow\infty}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}(f\circ\varphi)(\lambda)\,\mathrm{d}F_\lambda\, x$

[2] usando la notación $\dim P := \dim(\mathrm{rg}\, P)$ para una proyección ortogonal P.