Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

Herbstsemester 2021

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 5

Aufgabe 5.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

5.1a) Die Vektoren $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem vom $\mathbb{R}^3$.

(i) Richtig.

√ (ii) Falsch.

Der $\mathbb{R}^3$ ist 3-dimensional. Nach Satz 4.3 (ii) können weniger als 3 Vektoren nicht erzeugend sein, was impliziert, dass die Aussage falsch ist.

5.1b) In welchen Fällen bilden die Vektoren kein minimales Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

√ (i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

Die Vektoren sind nicht minimal, da der vierte Vektor die Summe aus den ersten drei ist. Also liegt der vierte Vektor im Erzeugnis der ersten drei.

√ (ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

Diese zwei Vektoren erzeugen nicht den $\mathbb{R}^3$, da zum Beispiel $(1, 0, -1)^\top$ nicht in deren Erzeugnis liegt.

Aufgabe 5.2

Multiple Choice: Online abzugeben.

5.2a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\surd$ (i) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann hat das homogene Gleichungssystem

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + ... + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = 0$$

nichttriviale Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Richtig. Denn die Definition von linear abhängig war gerade, dass eine nichttriviale Linearkombination der Vektoren den Nullvektor ergibt. Die Koeffizienten λ_1,..., λ_n dieser Linearkombination lösen dann das obige Gleichungssystem.

$\surd$ (ii) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.

Richtig. Denn die Dimension eines Vektorraums ist die Anzahl Basisvektoren und damit auch die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren. Da $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, können höchstens n Vektoren linear unabhängig sein, und damit also $k \leq n$ (Satz 4.3).

(iii) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

Falsch. Ein Erzeugendensystem ist nicht notwendigerweise linear unabhängig, es kann mehr Vektoren als nötig haben, um den Vektorraum aufzuspannen. Die minimale Anzahl Vektoren in einem Erzeugendensystem, so dass dieses eben noch erzeugend ist, ist gerade die Dimension des Vektorraums, hier also n (Satz 4.3). Es kann aber durchaus auch $k > n$ sein.

$\surd$ (iv) Seien $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

Richtig. Eine Basis ist ein linear unahängiges Erzeugendensystem, in anderen Worten ein minimales Erzeugendensystem. Die minimale Anzahl Vektoren in einem Erzeugendensystem, so dass dieses eben noch erzeugend ist, ist gerade die Dimension des Vektorraums, hier n. Somit muss sogar gelten $k = n$ (Satz 4.3), insbesondere also $k \leq n$.

$\surd$ (v) Die Vektoren eines Erzeugendensystems können linear abhängig sein.

Richtig. Denn ein Erzeugendensystem ist nicht notwendigerweise ein minimales Erzeugendensystem (= Basis).

(vi) Falls die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

Falsch. Für $k < n$ können die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k$ linear unabhängig sein, ohne eine Basis für $\mathbb{R}^n$ zu sein.

5.2b) In welchen Fällen bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

$\checkmark$ (i) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\checkmark$ (ii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

Für ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ brauchen wir nach Satz 4.3 mindestens 3 Vektoren. Genau dann wenn wir 3 linear unabhängige Vektoren auswählen können, bilden alle Vektoren zusammen ein Erzeugendensystem.
Dies lässt sich wie folgt einsehen:

(i) Die ersten drei Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig. Deshalb handelt es sich hier um ein Erzeugendensystem.

(ii) Durch Anwenden des Gaussverfahren

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 3\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \\(-1)\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

sehen wir, dass die Matrix den Rang 3 hat. Deshalb handelt es sich auch hier um ein Erzeugendensystem.

(iii) Der dritte Vektor ist 2-mal der erste, somit sind die drei Vektoren linear abhängig und können somit kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ sein.
Die lineare Abhängigkeit sieht man formal aus der Tatsache, dass

$$2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = 0.$$

5.2c) In welchen Fällen bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\surd$ (ii) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

Eine Basis ist ein Erzeugendensystem, das aus linear unabhängigen Vektoren besteht. Nach Satz 4.3 besteht eine Basis im $\mathbb{R}^3$ aus genau 3 Vektoren.

(i) Die Vektoren können keine Basis sein, da es vier Vektoren sind.

(ii) Die Vektoren bilden eine Basis, da sie gem. Aufgabe 6.1b) ein Erzeugendensystem sind und es genau drei Vektoren sind. Aus Satz 4.3 folgt damit, dass sie zusätzlich erzeugend und damit eine Basis sind.

(iii) Die Vektoren sind keine Basis, da sie gem. Aufgabe 6.1b) kein Erzeugendensystem sind.

Aufgabe 5.3

Bestimmen Sie in den folgenden zwei Fällen, ob die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig oder linear unabhängig sind. Geben Sie eine Begründung an.

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Lösung: Betrachte die k Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ im Vektorraum V.

$a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ sind **linear unabhängig**, falls aus $x_1 a^{(1)} + \cdots + x_k a^{(k)} = 0$ folgt, dass $x_1 = \cdots = x_k = 0$ gilt. Sonst heissen sie **linear abhängig**.

Somit sind die Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ genau dann linear unabhängig, wenn das zugehörige homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ mit $A = [a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}]$ nur die triviale Lösung $x = 0$ hat. Nach Korollar 1.3 ist dies äquivalent zu $r = k$, wobei r den Rang des Gleichungssystemes $Ax = 0$ bezeichnet.

In dieser Aufgabe ist $V = \mathbb{R}^n$ (mit $n = 3$ oder 4). Der Rang (und somit die lineare Abhängigkeit) kann mit Hilfe des Gaussverfahrens überprüft werden: Schreibe $A = [a^{(1)} \ \ldots \ a^{(k)}]$. Mit dem Gauss-Algorithmus können wir $r = \text{Rang}\, A$ bestimmen.

Zudem können wir noch folgendes Resultat benutzen: Für einen Vektorraum V der Dimension n gilt allgemein (Satz 4.3 aus dem Buch): Falls $k > n$, sind $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ linear <u>abhängig</u>.

a)

$$\begin{array}{r|rrr|} \hline 2 & 2 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\to} \begin{array}{r|rrr|} \hline & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_2}{\to} \begin{array}{r|rrr|} \hline & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array},$$

also gilt $k = 3$, $r = 2$.

Da $r < k$, sind die Vektoren linear abhängig.

Hier sieht man die lineare Abhängigikeit auch direkt, da eine Liste von Vektoren, die den Nullvektor enthält, linear abhängig ist.

b)

$$\begin{array}{r|rrr|} \hline 2 & 2 & -1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\to} \begin{array}{|rrr|} \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

also gilt $k = r = 3$. Da $r = k$, sind die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 5.4

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie minimale Erzeugendensysteme im Kern und im Bild jeder dieser Matrizen.

Lösung: $\underline{\mathrm{Kern}(A)}$ ist definiert als die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Wir lösen also dieses Gleichungssystem mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist $x_3 = s \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_2 = \frac{8s}{2} = 4s$ und $x_1 = -2 \cdot (4s) - 3s = -11s$. Damit haben wir

$$\mathrm{Kern}(A) = \left\{ s \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein Erzeugendensystem des Kerns von A ist dann trivialerweise

$$\begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Und diese ist minimal, da das Erzeugendensystem nicht aus null Elementen bestehen kann.

$\underline{\mathrm{Bild}(A)}$ ist definiert als $\{Ax \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}^3\}$, also alle Elemente die wir durch Anwenden von A erhalten. Mittels Lösen von $Ax = (1,0)^\top$ und Lösen von $Ay = (0,1)^\top$, erhalten wir, dass

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Elemente von $\mathrm{Bild}(A)$ sind. Nebenbei, wir erhalten als mögliche Lösung von $Ax = (1,0)^\top$ und Lösung von $Ay = (0,1)^\top$, zum Beispiel $x = (-7, 5/2, 1)^\top$, $y = (-12, 9/2, 1)^\top$. Da das Erzeugnis von $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ganz $\mathbb{R}^2$ ist, also $\mathrm{span}\{(1,0)^\top, (0,1)^\top\} = \mathbb{R}^2$, sehen wir schnell, dass auch $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^2$. Da $\mathbb{R}^2$ nicht von nur einem Vektor erzeugt werden kann, ist $(1,0)^\top, (0,1)^\top$ ein minimales Erzeugendensystem.

Wir gehen analog vor für $\underline{\mathrm{Kern}(B)}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow x_2 = 0,\ x_1 = 0.$$

Damit haben wir

$$\mathrm{Kern}(B) = \{0\}.$$

und $\{0\}$ hat kein Erzeugendensystem.

Für $\underline{\mathrm{Bild}(B)}$, haben wir dass $Bx = (1,0)^\top$, für $x = (4, -3/2)^\top$, und dass $By = (0,1)^\top$, für $y = (-1, 1/2)^\top$. Somit gilt $(1,0)^\top, (0,1)^\top \in \mathrm{Bild}(B)$ und dadurch $\mathrm{span}\{(1,0)^\top, (0,1)^\top\} \subset \mathrm{Bild}(B)$. Wir sehen rasch, dass $\mathrm{Bild}(B) = \mathbb{R}^2$ und dass $\{(1,0)^\top, (0,1)^\top\}$ ein Erzeugendensystem ist, welches minimal ist, da ein einzelner Vektor nicht $\mathbb{R}^2$ erzeugen kann.

Für $\underline{\operatorname{Kern}(C)}$ erhalten wir mittels Gaussverfahren

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 16 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt $x_4 = s \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_3 = t \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_2 = \frac{-4s}{2} = -2s$ und $x_1 = -4s - 2t - 2 \cdot (-2s) = -2t$. Die Lösungsmenge ist damit also

$$\operatorname{Kern}(C) = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Vektoren

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bilden ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Kern}(C)$ (dies folgt direkt aus der Beschreibung des Kernes). Wir zeigen, dass diese auch minimal sind. Dies folgt aus der Behauptung, dass die zwei Vektoren linear unabhängig sind. (Denn andernfalls würde einer der beiden Vektoren den anderen Vektor im Erzeugnis haben.) Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit mittels folgendem Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Die einzige Lösung ist die triviale Lösung (das heisst, die Nulllösung). Dies lässt sich einfach durch Rückwärtseinsetzen finden. Somit ist $(-2, 0, 1, 0)^\top, (0, 2, 0, 1)^\top$ ein minimales Erzeugendensystem.

Für $\underline{\operatorname{Bild}(C)}$ betrachte, dass $Cx = (1, 0)^\top$, für $x = (0, 0, 2, -3/4)^\top$, und dass $Cy = (0, 1)^\top$, für $y = (0, 0, -1/2, 1/4)^\top$. Somit gilt $(1, 0)^\top, (0, 1)^\top \in \operatorname{Bild}(C)$ und dadurch $\operatorname{span}\{(1, 0)^\top, (0, 1)^\top\} \subset \operatorname{Bild}(C)$. Wir sehen rasch, dass $\operatorname{Bild}(C) = \mathbb{R}^2$ und dass $\{(1, 0)^\top, (0, 1)^\top\}$ ein Erzeugendensystem ist, welches minimal ist, da ein einzelner Vektor nicht $\mathbb{R}^2$ erzeugen kann.

Für $\underline{\operatorname{Kern}(D)}$ erhalten wir mittels Gaussverfahren

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \end{array}\right)$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir die Lösungsmenge

$$\operatorname{Kern}(D) = \left\{ t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Vektoren

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Kern}(C)$ (dies folgt direkt aus der Beschreibung des Kernes). Wir zeigen, dass diese auch minimal sind. Dies folgt aus der Behauptung dass die drei Vektoren linear unabhängig sind. (Denn andernfalls würden zwei der anderen Vektoren den dritten Vektor im Erzeugnis haben.) Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit mittels folgendem Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{via 4. Zeile}]{\text{Elim. 2. Spalte}} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{via 2. Zeile}]{\text{Elim. 3. Spalte}} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die einzige Lösung ist die triviale Lösung (das heisst, die Nulllösung). Dies lässt sich einfach durch Rückwärtseinsetzen sehen. Somit ist $(-3,0,2,0,1)^\top, (1,0,-2,1,0)^\top, (2,1,0,0,0)^\top$ ein minimales Erzeugendensystem.

Für $\underline{\mathrm{Bild}(D)}$ beachte, dass $Dx = (1,0,0)^\top$ keine Lösung hat. Darum gehen wir nun anders vor. Betrachte die Vektoren $v_1 = De_1, v_2 = De_2, v_3 = De_3, v_4 = De_4, v_5 = De_5$, wobei $e_1 = (1,0,0,0,0)^\top, e_2 = (0,1,0,0,0)^\top, ..., e_1 = (0,0,0,0,1)^\top$, somit $v_1 = (-1,2,-3)^\top, v_2 = (2,-4,6)^\top, v_3 = (-2,5,-1)^\top, v_4 = (-3,8,1)^\top, v_5 = (1,-4,-7)^\top$. Nun ist klar, dass v_1 bis v_5 Elemente von $\mathrm{Bild}(D)$ sind, und somit auch deren Erzeugnis. Aber das System $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ist nicht minimal. Wir sehen rasch, dass $v_2 = -2v_1$. Dann behaupten wir, dass v_4, v_5 im Erzeugnis von v_1, v_3 liegen, also $v_4, v_5 \in \mathrm{span}\,\{v_1, v_3\}$. Dies zeigen wir indem wir das Gleichungssystem $(v_1, v_3 \mid v_4, v_5)$ lösen, also

$$\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & -4 \\ -3 & -1 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gausselimination}} \left(\begin{array}{rr|rr} -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Mittels Rücksubstitution erhalten wir, dass $v_4 = -v_1 + 2v_3$ und $v_5 = 3v_1 - 2v_3$. Somit ist $\{v_2, v_4, v_5\} \subset \mathrm{span}\,\{v_1, v_3\}$. Dass $\{v_1, v_3\}$ linear Unabhängig ist, vor allem also minimal, sehen wir schnell. Somit ist $\mathrm{Bild}(D) = \mathrm{span}\,\{v_1, v_3\}$, also

$$\mathrm{Bild}(D) = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

und $\{v_1, v_3\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(D)$.

Bemerkung 1: Wenn das Gleichungssystem (Matrix | Einheitsvektor), keine Lösung hat, ist es so, dass ein minimales Erzeugendensystem des Bildes dieser Matrix weniger Elemente hat, als die Dimension des Bild-Raumes.

Bemerkung 2: Bei allen 4 Matrizen war die Summe aus der Anzahl der Vektoren eines minimalen Erzeugendensystemes im Bild und aus der Anzahl der Vektoren eines minimalen Erzeugendensystemes im Kern gleich der grösseren Anzahl aus Spalten respektive Zeilen der jeweiligen Matrix. Dies ist im Allgemeinen ein bewiesener Fakt. Nähere Informationen finden wir unter dem Stichwort 'Rangsatz'.

Aufgabe 5.5

Gegeben sei der Vektorraum der stetigen Funktionen $V := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$, das ist der Raum aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Betrachten wir die drei Funktionen

$$f_1(x) = \sin(x)\,, \quad f_2(x) = \cos(x)\,, \quad f_3(x) = x\,\cos(x)\,.$$

Alle drei Funktionen sind Elemente von V. Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear unabhängig in V sind.

Lösung: Wir müssen zeigen, dass wenn gilt

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 \equiv 0\,,$$

für bestimmte $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, dann folgt, dass $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Das Zeichen '$\equiv$' bezeichnet eine Funktionengleichung, das heisst für jedes x muss die linke Seite in der Gleichung, also $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$, und die rechte Seite, also 0, die Null-Funktion, gleich sein. Diese Bezeichnung wird nicht von allen Autoren benutzt.

Wir zeigen dies nun. Für drei verschiedene $x \in \mathbb{R}$, wir wählen $x = 0, x = \pi/2, x = \pi$, erhalten wir die drei Bedingungen,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cdot 0 \,+\, \alpha_2 \cdot 1 \,+\, \alpha_3 \cdot 0 \cdot 1 &= 0\,,\\
\alpha_1 \cdot 1 \,+\, \alpha_2 \cdot 0 \,+\, \alpha_3 \cdot \tfrac{\pi}{2} \cdot 0 &= 0\,,\\
\alpha_1 \cdot 0 \,+\, \alpha_2 \cdot (-1) \,+\, \alpha_3 \cdot \pi \cdot (-1) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit Zahlen. Aus der ersten und zweiten Bedingung lesen wir heraus, dass $\alpha_2 = 0$ und $\alpha_1 = 0$. Dies verwenden wir, um mit der dritten Bedingung $\alpha_3 = 0$ zu finden. Somit haben wir gezeigt, dass wenn $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 \equiv 0$, dann folgt $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Also sind f_1, f_2, f_3 linear unabhängig.

Aufgabe 5.6 Spaltenraum und Kern einer Matrix

Geben Sie, sofern möglich, für die nachfolgenden Teilaufgaben jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ an, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt.

5.6a) Eine Basis des Spaltenraums von A ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1\\2\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\-1 \end{bmatrix} \right\}$ und eine Basis für $\mathrm{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1\\1\\2 \end{bmatrix} \right\}$.

Lösung: Da der Spaltenraum von A (d.h., $\mathrm{Bild}(A)$) in $\mathbb{R}^3$ enthalten ist, muss gelten, dass $m = 3$. Da $\mathrm{Kern}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt, muss $n = 3$ gelten. Die Matrix A besteht folglich aus drei Spalten, wobei $\left\{ \begin{bmatrix} 1\\2\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\-1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des Spaltenraums von A ist.

Betrachten wir die zweite Bedingung, dass $\left\{ \begin{bmatrix} 1\\1\\2 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des Kerns ist. Schreiben wir die Bedingung um, erhalten wir $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1\\1\\2 \end{bmatrix} \right\}$, also

$$\begin{aligned}
&A \begin{bmatrix} 1\\1\\2 \end{bmatrix} = 0\\
&\Leftrightarrow (A)_{:,1} + (A)_{:,2} + 2(A)_{:,3} = 0. \qquad (5.6.1)
\end{aligned}$$

Es erfüllt somit jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Anforderungen, für welche Gleichung (5.6.1) gilt mit

$$\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1\\2\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\-1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{span}\{(A)_{:,1},\, (A)_{:,2},\, (A)_{:,3}\} = \mathrm{Bild}(A).$$

Dies gilt zum Beispiel, wenn wir $(A)_{:,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(A)_{:,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ wählen und mittels (5.6.1) den Vektor $(A)_{:,1}$ berechnen:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Eine andere Möglichkeit ist $(A)_{:,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(A)_{:,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ und wir erhalten $(A)_{:,3}$ aus (5.6.1):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

5.6b) Eine Basis des Spaltenraums von A ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ und eine Basis für $\operatorname{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Lösung: Auch hier ist sofort klar, dass wir eine 3×3-Matrix suchen. Die Basis des Kerns gibt uns analog zur vorhergehenden Teilaufgabe:

$$\begin{aligned} & A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (A)_{:,1} + (A)_{:,2} = 0 \quad \text{und} \quad (A)_{:,1} + (A)_{:,3} = 0. \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

Es erfüllt somit jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Anforderungen, welche (5.6.2) erfüllt sowie

$$\operatorname{span}\{(A)_{:,1},\, (A)_{:,2},\, (A)_{:,3}\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dies gilt zum Beispiel für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix},$$

(wir wählen $(A)_{:,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und erhalten $(A)_{:,3}$ und $(A)_{:,3}$ aus (5.6.2)).

5.6c) Der Spaltenraum von A enthält die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und eine Basis für $\operatorname{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Lösung: Die gesuchte Matrix A muss eine 4×4-Matrix sein. Die Basis des Kerns gibt uns eine Bedingung an die Spalten von A:

$$\begin{aligned} & A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (A)_{:,1} + 2(A)_{:,2} + (A)_{:,4} = 0. \end{aligned} \tag{5.6.3}$$

Als weitere Bedingung muss gelten

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \operatorname{span}\{(A)_{:,1}, (A)_{:,2}, (A)_{:,3}, (A)_{:,4}\}. \tag{5.6.4}$$

Wir suchen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche (5.6.3) und (5.6.4) erfüllt. Dies gilt zum Beispiel für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

(wir wählen $(A)_{:,1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ und $(A)_{:,2} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, womit (5.6.4) erfüllt ist, und wir erhalten $(A)_{:,4}$ aus (5.6.3). Nun können wir $(A)_{:,3}$ unter der Bedingung, dass $\dim \mathrm{Bild}(A) = 3$, frei in $\mathbb{R}^4$ wählen. Diese Bedingung stellt sicher, dass $\dim \mathrm{Kern}(A) = 1$ ist und $\mathrm{Kern}(A)$ damit wirklich die verlangte Basis besitzt.)

5.6d) Der Spaltenraum von A ist gleich dem Zeilenraum von A und $\mathrm{Kern}(A)$ wird von den Vektoren $\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$ aufgespannt.

Lösung: Wir suchen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, für welche $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Bild}(A^T)$ gilt, sowie

$$A \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] = 0 \quad \text{und} \quad A \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right] = 0.$$

Letzteres ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & -(A)_{:,1} - 2(A)_{:,2} + 3(A)_{:,3} = 0 \quad \text{und} \quad 5(A)_{:,1} - 2(A)_{:,2} - 3(A)_{:,3} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (A)_{:,1} = (A)_{:,2} = (A)_{:,3}, \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

da der Kern von

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

von $(1,1,1)^T$ aufgespannt wird. Mit dem Ansatz

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

ist die Bedingung $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Bild}(A^T)$ genau dann erfüllt, wenn

$$\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Bild}\left(\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \right) = \mathrm{Bild}\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \right) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Da der Kern von A zweidimensional ist, kann nicht $a = b = c = 0$ gelten, und somit muss $a = b = c \neq 0$ erfüllt sein. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass genau alle nichttrivialen Vielfache der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

die Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 5.7

5.7a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ und begründen Sie Ihre Antwort:

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}.$$

Lösung: Eine Basis besteht aus erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren. Es muss also gelten: $r = k = n = 3$.

$$\begin{array}{r} -2 \\ \\ 1 \end{array}\begin{array}{|rrrrrr|} \hline -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{r} \\ \\ -1 \end{array}\begin{array}{|rrrrrr|} \hline 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\overset{(E)_2}{\rightarrow} \begin{array}{|rrrrrr|} \hline 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Wir können also z. B. die Pivot-Vektoren als Basis wählen:

$$\left\{ \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix} \right\}.$$

Wir können aber statt des 4. Vektors $\begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}$ auch den 6. Vektor $\begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}$ nehmen, wie man durch Vertauschen der entsprechenden Spalten im Gaussschema leicht sieht. Ebenso können wir statt des 2. Vektors $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ den 5. Vektor $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ oder statt des 1. Vektors $\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$ den 3. Vektor $\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$ nehmen.

Als Basis könnte man auch eine andere Kombination, wie zum Beispiel

$$\left\{ \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix} \right\},$$

wählen, aber die Tatsache, dass diese Auswahl eine Basis bildet, sieht man anhand vom Schema nicht.

5.7b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix}a\\a\\1+a\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\b\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}c\\c\\b+c\end{bmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Lösung: Sei U der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Die Dimension von U ist gleich der Anzahl Vektoren, die in U eine Basis bilden. Schreibe nun

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \end{bmatrix}.$$

Aus der Vorlesung (im Buch auf Seite 83) wissen wir, dass gilt:
Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren von A ist gleich $r = \operatorname{Rang} A$.
Eine Basis von U kann also höchstens aus r Vektoren bestehen (sonst sind sie nicht mehr linear unabhängig und bilden keine Basis). Es gilt also $d := \dim U \leq r$.
Wegen Satz 4.3 i) aus dem Buch wissen wir zudem, dass mehr als d Vektoren linear abhängig in U sind. Es folgt also, dass $\dim U = \operatorname{Rang} A$, somit können wir die Dimension von U mit dem Gaussverfahren berechnen.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \end{array}}$$

Fall $a = b = 0$:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c \\ 1 & 2 & c \end{array}} \overset{(c\neq 0)}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

- falls $c = 0$, gilt $d = r = 1$,
- falls $c \neq 0$, gilt $d = r = 2$.

Fall $a = 0, b \neq 0$:

- für $c = 0$ gilt

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & b \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \text{ also } d = r = 2,$$

- für $c \neq 0$ gilt

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & b+c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \end{array}} \text{ also } d = r = 3.$$

Fall $a \neq 0$:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \end{array}} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & b-\frac{c}{a} \end{array}} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ 0 & 2 & b-\frac{c}{a} \\ 0 & 0 & \frac{b(c-ab)}{2a} \end{array}}$$

- falls $\frac{b(c-ab)}{2a} = 0$ (also falls $b = 0$ oder $c = ab$): $d = r = 2$,
- falls $\frac{b(c-ab)}{2a} \neq 0 : d = r = 3$.

Aufgabe 5.8

Sei $\mathcal{P}_4$ der Raum der Polynome mit Grad strikt kleiner als 4. Die Monome 1, x, x^2, x^3 bilden eine Basis von $\mathcal{P}_4$, aber dies ist natürlich nicht die einzige Basis.
Die sogenannten Legendre-Polynome sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1, \quad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!}\frac{d^i}{dx^i}(x^2-1)^i \text{ für } i > 0.$$

Zeigen Sie, dass P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_4$ bilden.

Lösung: Wichtig für uns ist folgende Tatsache, die aufgrund der Isomorphie jedes reellen, n-dimensionalen Vektorraums zum $\mathbb{R}^n$ gilt (siehe Seite 82 im Buch):
Sei V ein reeller, n-dimensionaler Vektorraum. Weiter sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Dann gilt: Eine Liste von Vektoren aus V ist genau dann eine Basis von V, wenn die entsprechenden Koordinatenvektoren bezüglich $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Wir bestimmen die Koordinatenvektoren der Legendre-Polynome bezüglich der Monombasis und überprüfen, dass diese eine Basis bilden. Wir beginnen mit dem Ausführen der Differentiation:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Jetzt bestimmen wir die Koordinaten $p^{(i)} \in \mathbb{R}^4$ des Vektors P_i für $i = 0, \ldots, 3$ bezüglich der Monombasis $a^{(0)} = 1$, $a^{(1)} = x$, $a^{(2)} = x^2$, $a^{(3)} = x^3$.

Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}
P_0 = 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3,\\
P_1 = x &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3,\\
P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot x + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3,\\
P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x &= 0 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{5}{2} \cdot x^3.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die folgenden Koordinatenvektoren:

$$p^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, dass die Koordinatenvektoren linear unabhängig sind. Anwenden des Gaussverfahrens ist hier einfach: Wir landen direkt beim Endschema

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}}$$

Somit sind die Koordinatenvektoren linear unabhängig. Damit ist der Rang gleich 4. Wir können somit folgern, dass die Koordinatenvektoren $p^{(0)}$, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden und damit sehen wir, dass die Legendre-Polynome P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_4$ bilden.

Aufgabe 5.9 Kern und Bild

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\operatorname{Kern}(A)$ und $\operatorname{Bild}(A)$.

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass für eine $m \times n$-Matrix C gilt:

i) $b \in \operatorname{Bild}(C) \Leftrightarrow Cx = b$ besitzt mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $x \in \operatorname{Kern}(C) \Leftrightarrow x$ löst $Cx = 0$.

iii) $\dim \operatorname{Bild}(C) + \dim \operatorname{Kern}(C) = r + (n-r) = n$, wobei $r = \operatorname{Rang} C$.

iv) $\operatorname{Bild}(C) = \operatorname{span}\{c^{(1)}, \ldots, c^{(n)}\}$, wobei $c^{(i)}$ die i-te Spalte von C bezeichnet.

Löse also zunächst $Ax = 0$ mit Gausselimination:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Wähle } x_4 = \alpha \in \mathbb{R},\ x_3 = \beta \in \mathbb{R},$$

$$2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(x_4 - x_3) = \frac{3}{2}(\alpha - \beta),$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}(\beta - 3\alpha)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit ist

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\operatorname{Kern}(A)$. Aus iii) folgt ausserdem, dass $\dim \operatorname{Bild}(A) = 4 - \dim \operatorname{Kern}(A) = 2$. Wegen iv) können wir also zwei linear unabhängige Spaltenvektoren von A als Basis von $\operatorname{Bild}(A)$ wählen. Aus dem obigen Gauss-Schema sieht man, dass zum Beispiel

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linear unabhängig sind. Somit ist

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\operatorname{Bild}(A)$.