D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2021

Prof. Richard Pink

Musterlösung Serie 7

Lineare Unabhängigkeit, Basis

1. Sei $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_2$ und sei

$$S := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \subset K^5.$$

Finde ein minimales Erzeugendensystem $S' \subset S$ von $\langle S \rangle$.

Lösung: Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_5 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

und sei

$$A := \begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{pmatrix}$$

die Matrix der Grösse 5×5 mit den Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_5$.

Wir wenden das Gaussverfahren auf A an und achten darauf, dass wir nur Operationen verwenden, die sowohl in $\mathbb{Q}$ als auch in $\mathbb{F}_2$ erlaubt sind, also insbesondere teilen wir nicht durch 2. Sei W die invertierbare Matrix, die durch Linksmultiplikation unsere Gaussoperationen ergibt. Wir erhalten die Zeilenstufenform

$$WA = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Seien w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 die Spaltenvektoren von WA. Für alle $1 \leqslant i \leqslant 5$ gilt $w_i = Wv_i$ und daher auch $W^{-1}w_i = v_i$. Wir sehen, dass $w_4 = w_1 - w_3$ ist. Durch Multiplikation mit W^{-1} gilt $v_4 = v_1 - v_3$ und daher ist $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ bereits ein Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$. Für $K = \mathbb{Q}$ sind w_1, w_2, w_3, w_5 linear unabhängig und mit Aufgabe 1 für die Matrix W^{-1} folgt, dass auch v_1, v_2, v_3, v_5 linear unabhängig sind. Daher ist $S' = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$ im Fall $K = \mathbb{Q}$. Für $K = \mathbb{F}_2$ haben wir die zusätzliche Gleichung $w_5 = w_1 + w_2 - w_3$, aber die Vektoren w_1, w_2, w_3 sind immer noch linear unabhängig. Aus den gleichen Gründen wie vorher ist $S' = \{v_1, v_2, v_3\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$ im Fall $K = \mathbb{F}_2$.

2. Im $\mathbb{R}^5$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wähle aus v_1, v_2, v_3, v_4 bzw. w_1, w_2, w_3, w_4 Vektoren aus, die eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ bzw. $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ bilden.

Lösung: Man sieht direkt, dass $v_2 = -v_3$ ist. Durch Anwenden des Gausverfahrens auf die Matrix mit den Spalten v_1, v_3, v_4 erhält man eine invertierbare 5×5 Matrix W, sodass

$$W \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Da die Spalten der Matrix auf der rechten Seite linear unabhängig sind und W invertierbar ist, folgt mit Aufgabe 7 von Serie 6 für die Matrix W^{-1}, dass die Vektoren v_1, v_3, v_4 linear unabhängig sind und eine Basis von $\langle v_1, \ldots, v_4 \rangle$ bilden. Alternativ bilden auch die Vektoren v_1, v_2, v_4 eine Basis.

Durch Anwenden des Gaussverfahrens auf die Matrix $A = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ erhält man $W \cdot A = B$ mit der invertierbaren Matrix

$$W := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -10 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -8 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & -11 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & -11 & 5 & 1 \\ 10 & 1 & -18 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

und der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Spalten von B linear unabhängig sind und die Matrix W invertierbar ist, sind mit Aufgabe 7 von Serie 6 für die Matrix W^{-1} auch die Vektoren $w_1, \ldots, w_4$ linear unabhängig und bilden folglich eine Basis von $\langle w_1, \ldots, w_4 \rangle$.

3. Gegeben seien die Unterräume

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Durchschnitts $V \cap U$.

Lösung: Sei A die aus den Erzeugenden von V gebildete 3×2-Matrix. Dann lösen wir zuerst das homogene lineare Gleichungssystem $A^T y = 0$ und finden als einzige Fundamentallösung den Vektor $(0\ 2\ 1)^T$. Also gilt $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (0\ 2\ 1) \cdot x = 0\}$. Dasselbe Verfahren für U anstatt V liefert die Fundamentallösung $(1\ 1\ 1)^T$ und folglich die Beschreibung $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (1\ 1\ 1) \cdot x = 0\}$. Aus beidem zusammen folgt nun $V \cap U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x = 0\}$. Das Gauss-Verfahren für dieses lineare Gleichungssystem liefert als einzige Fundamentallösung den Vektor $(1, 1, -2)^T$. Also ist $\{(1, 1, -2)^T\}$ eine Basis von $V \cap U$.

Aliter: Wir suchen ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungen alle Vektoren des Durchschnitts $V \cap U$ beschreiben. Ein Element des Durchschnitts $w \in V \cap U$ ist sowohl in V als auch in U enthalten und kann deshalb auf zwei Arten als Linearkombination geschrieben werden, also in der Form

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Der Vektor $(a, b, c, d)^T$ ist deshalb eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ für $x \in \mathbb{R}^4$ mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden das Gaussverfahren auf die Matrix A an und erhalten die Zeilenstufenform

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Durch Rückwärtseinsetzen sehen wir, dass der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ durch $\langle (1,1,3,-2)^T \rangle$ gegeben ist. Wir übersetzen zurück auf unser ursprüngliches Problem und erhalten mit $a = 1$ und $b = 1$ die Gleichung $V \cap U = \langle (1,1,-2)^T \rangle$. Weil $(1,1,-2)^T$ nicht null ist und den Durchschnitt erzeugt, ist $\{(1,1,-2)^T\}$ eine Basis.

4. Zeige, dass die Funktionen

$$\varphi_n : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n+x}$$

für $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Verwende, dass ein von Null verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat.

Lösung: Betrachte endlich viele $a_i \in \mathbb{R}$ sowie paarweise verschiedene $n_i \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ mit $\sum_{i=1}^m a_i \varphi_{n_i} = 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}^{>0}$ gilt dann

$$\sum_{i=1}^m a_i \cdot \frac{1}{n_i + x} \;=\; 0.$$

Durch Multiplikation mit $\prod_{i=1}^m (n_i + x)$ ergibt sich daraus

$$\sum_{i=1}^m a_i \prod_{j \neq i} (n_j + x) = 0.$$

Hier ist die linke Seite ein Polynom in x, also folgt aus dem Hinweis, dass dieselbe Gleichung schon für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere gilt die Gleichung auch für $x = -n_k$ für jedes $1 \leqslant k \leqslant m$. Für alle $i \neq k$ ist aber $\prod_{j \neq i}(n_j - n_k) = 0$; somit reduziert sich die Gleichung dann zu

$$a_k \cdot \prod_{j \neq k} (n_j - n_k) = 0.$$

Da die n_i paarweise verschieden sind, ist $\prod_{j \neq k}(n_j - n_k) \neq 0$ und deshalb $a_k = 0$. Da k beliebig war, schliessen wir $a_1 = \ldots = a_m = 0$. Also sind $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ linear unabhängig.

5. Zeige: Für jedes Erzeugendensystem E eines Vektorraums V und jede linear unabhängige Teilmenge L von V gilt

$$|L| \;\leqslant\; |E|.$$

Lösung: Nach §4.6 existieren Basen B, B' von V mit $L \subset B$ und $B' \subset E$. Nach §4.7 gilt zudem $|B| = |B'|$. Zusammen folgt daraus $|L| \leqslant |B| = |B'| \leqslant |E|$.

6. Sind + und $\cap$ von Unterräumen zueinander distributiv, das heisst, gelten für alle Unterräume eines beliebigen Vektorraums die folgenden Gleichungen?

$$\begin{aligned} U \cap (V_1 + V_2) &= (U \cap V_1) + (U \cap V_2) \\ U + (V_1 \cap V_2) &= (U + V_1) \cap (U + V_2) \end{aligned}$$

Wenn nicht, gilt zumindest eine Inklusion?

Lösung: Für jedes $i = 1, 2$ gilt $V_i \subset V_1 + V_2$ und somit $U \cap V_i \subset U \cap (V_1 + V_2)$. Da $U \cap (V_1 + V_2)$ ein Untervektorraum ist, folgt

$$(U \cap V_1) + (U \cap V_2) \ \subset \ U \cap (V_1 + V_2)\,. \tag{1}$$

Weiter gilt $V_1 \cap V_2 \subset V_i$ und somit $U + (V_1 \cap V_2) \subset U + V_i$, und daher

$$U + (V_1 \cap V_2) \ \subset \ (U + V_1) \cap (U + V_2)\,. \tag{2}$$

Dagegen ist die umgekehrte Inklusion im Allgemeinen in beiden Fällen falsch: Für die Unterräume $U := \langle(1,1)\rangle$ und $V_1 := \langle(1,0)\rangle$ und $V_2 := \langle(0,1)\rangle$ von K^2 gilt nämlich $U \cap V_1 = U \cap V_2 = V_1 \cap V_2 = 0$ und $U + V_1 = U + V_2 = V_1 + V_2 = K^2$ und somit

$$(U \cap V_1) + (U \cap V_2) \ = \ 0 + 0 \ = \ 0 \ \neq \ U \ = \ U \cap K^2 \ = \ U \cap (V_1 + V_2)$$

sowie

$$U + (V_1 \cap V_2) \ = \ U + 0 \ = \ U \ \neq \ K^2 \ = \ K^2 \cap K^2 \ = \ (U + V_1) \cap (U + V_2).$$

7. Betrachte die folgenden Unterräume von K^n:

$$\begin{aligned} U &:= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}, \\ D &:= \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in K^n \mid \alpha \in K\}. \end{aligned}$$

Bestimme eine Basis und die Dimension der Unterräume U, D, $U \cap D$ und $U + D$.

Lösung: Für $n = 0$ ist $U = D = U \cap D = U + D = 0$. Jeder dieser Unterräume hat also die Basis $\varnothing$ und folglich die Dimension 0.

Sei nun $n \geqslant 1$. Jedes Element $(\alpha, \ldots, \alpha) \in D$ ist ein Vielfaches des Vektors $v := (1, \ldots, 1)$. Wegen $v \neq 0$ ist $\{v\}$ ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis von D. Insbesondere ist $\dim(D) = 1$.

Sodann liegen die $n - 1$ Vektoren

$$v_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0), \quad v_2 = (0, 1, -1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots \quad v_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, -1)$$

in U und sind linear unabhängig. Insbesondere ist also $\dim(U) \geqslant n - 1$. Wegen $(1, 0, \ldots, 0) \notin U$ ist aber $\dim(U) < \dim(K^n) = n$ und wir schliessen $\dim(U) =$

$n-1$. Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind und ihre Anzahl gleich der Dimension von U ist, bilden sie eine Basis von U.

Wenn $n \cdot 1 \neq 0$ ist in K, gilt $v = (1, \ldots, 1) \notin U$. In diesem Fall gilt $U \cap D = 0$, also ist $\varnothing$ eine Basis von $U \cap D$ und $\dim(U \cap D) = 0$. Wegen $U = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ folgt dann ausserdem, dass die Vektoren $v, v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind. Das zeigt $\dim(U + D) \geqslant n$. Da aber $\dim(U + V) \leqslant \dim(K^n) = n$ ist, schliessen wir, dass $U + D$ Dimension n hat und die Vektoren $\{v, v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $U + D$ bilden. Natürlich ist dann auch die Standardbasis von K^n eine Basis von $U + D$.

Wenn $n \cdot 1 = 0$ ist in K, gilt $v = (1, \ldots, 1) \in U$, also auch $D \subset U$. In diesem Fall ist also $U \cap D = D$ und $U + D = U$. Für beide Unterräume wurde oben eine Basis und die Dimension bestimmt.