4.6 Basis

Erinnerung:

Definition: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heisst eine *Basis von V*.

Satz: Für jede Teilmenge $S \subset V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) S ist eine Basis von V.

(b) S ist ein minimales Erzeugendensystem von V.

(c) S ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.

Satz: Für jedes Erzeugendensystem E von V und jede linear unabhängige Teilmenge $L \subset E$ existiert eine Basis B von V mit $L \subset B \subset E$.

Folge: (a) Jedes Erzeugendensystem von V enthält eine Basis von V.

(b) Jede linear unabhängige Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis von V erweitern.

(c) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

(d) Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine endliche Basis.

Vorsicht: Ein Vektorraum besitzt im allgemeinen viele verschiedene Basen. Bevor man eine spezielle Basis gewählt hat, darf man daher nur mit dem unbestimmten Artikel von „einer Basis“ sprechen.

Beweis des Satzes: Für jedes Erzeugendensystem E von V und jede linear unabhängige Teilmenge $L \subset E$ existiert eine Basis B von V mit $L \subset B \subset E$.

Beweis wenn E endlich.

Dann existiert eine maximale Teilmenge B mit $L \subset B \subset E$ und B lin. unabh.

Beh.: B ist eine Basis.

Sei $v \in V$ beliebig. Schreibe $v = \sum_{e \in E} x_e \cdot e$ mit $x_e \in K$.

Sei $e \in E \setminus B$: Dann ist $B \cup \{e\}$ lin. abhängig. Also $e = \sum_{b \in B} y_{eb} \cdot b$ mit $y_{eb} \in K$.

$$\Rightarrow v = \sum_{b \in B} x_b \cdot b + \sum_{e \in E \setminus B} x_e \cdot \left(\sum_{b \in B} y_{eb}\, b \right) = \sum_{b \in B} \underbrace{\left(x_b + \sum_{e \in E \setminus B} x_e y_{eb} \right)}_{\in K} \cdot b$$

Also ist B ein Erzeugendensystem von V.

qed.

4.7 Dimension

paarweise verschieden.

Steinitzscher Austauschsatz: Für jede Basis B von V und beliebige linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ existieren paarweise verschiedene $b_1, \dots, b_n \in B$, so dass $(B \setminus \{b_1, \dots, b_n\}) \cup \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Bew.: $\boxed{n=0:}$ ✓.

$\boxed{n-1 \rightsquigarrow n:}$ Induktion $\Rightarrow$ $\exists$ paarweise verschiedene $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ so dass $\boxed{B' := (B \setminus \{b_1, \dots, b_{n-1}\}) \cup \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \text{ eine Basis von } V \text{ ist,}}$

Schreibe $v_n = \sum_{b' \in B'} x_{b'} \cdot b'$, mit $x_{b'} \in K$, fast alle $=0$.

Dann existiert $b_n \in B \setminus \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ mit $x_{b_n} \neq 0$. Denn sonst wäre $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_{v_i} \cdot v_i$, im Widerspruch zur lin. Unabh. von $v_1, \dots, v_n$.

Beh.: $\boxed{B'' := (B \setminus \{b_1, \dots, b_n\}) \cup \{v_1, \dots, v_n\} \text{ ist eine Basis von } V.}$

Sei $v \in V$ beliebig, schreibe $v = \sum_{b' \in B'} y_{b'} \cdot b' = \sum_{b' \in B' \setminus \{b_n\}} y_{b'} b' + y_{b_n} \cdot b_n$

$\boxed{v_n = x_{b_n} b_n + \sum'_{b' \in B' \setminus \{b_n\}} x_{b'} b'}$ $\Rightarrow$ $\boxed{b_n = +\frac{1}{x_{b_n}} \cdot v_n + \sum'_{b' \in B' \setminus \{b_n\}} \frac{-x_{b'}}{x_{b_n}} \cdot b'}$

$$\Rightarrow \quad v = \sum_{b' \in B' \setminus \{b_n\}}' y_{b'} b' + y_{b_n} \cdot \left(\frac{1}{x_{b_n}} v_n + \sum_{b' \in B' \setminus \{b_n\}}' \frac{-x_{b'}}{x_{b_n}} \cdot b' \right)$$

$$= \frac{y_{b_n}}{x_{b_n}} \cdot \underline{v_n} + \sum_{\underline{b' \in B' \setminus \{b_n\}}}' \left(y_{b'} - y_{b_n} \cdot \frac{x_{b'}}{x_{b_n}} \right) \cdot b'.$$

Folglich ist B'' ein Erz. Syst.

Sei B'' <u>lin. abh.</u>, d.h. $0 = \sum_{b'' \in B''}' z_{b''} b''$ mit $z_{b''} \in K$, fast alle 0, nicht alle 0.

Wäre $\underline{z_{v_n} = 0}$, wäre $0 = \sum_{b'' \in B'' \setminus \{v_n\}} z_{b''} b''$ im Widerspruch zur <u>lin. Unabh. von B'.</u>

Also ist $z_{v_n} \neq 0$

$$B'' \setminus \{v_n\} = B' \setminus \{b_n\}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{b'' \in B'' \setminus \{v_n\}} z_{b''} b'' + z_{v_n} \cdot \left(x_{b_n} \cdot b_n + \sum_{b' \in B' \setminus \{b_n\}}' x_{b'} b' \right)$$

$$= z_{v_n} x_{b_n} \cdot b_n + \sum_{b' \in B' \setminus \{b_n\}} \left(z_{b''} + z_{v_n} \cdot x_{b'} \right) b'$$

B' lin. unabh. $\Rightarrow z_{v_n} x_{b_n} = \ldots = 0$. im Widerspruch zu $x_{b_n}, z_{v_n} \neq 0$.

Also ist B'' lin. unabh.

$\Rightarrow$ Basis.

qed

$\{v_1, \dots, v_n\}$ mit paarweise verschiedenen $v_1, \dots, v_n$

Satz: Je zwei Basen von V haben dieselbe Kardinalität.

Bew.: Wenn V ein endl. Erz.-Sys. E hat. Wähle eine Basis $B' \subset E$. Sei B eine bel. Basis. Austauschsatz $\Rightarrow \exists\, b_1, \dots, b_n \in B$ paarweise verschieden, so dass $\underbrace{(B \setminus \{b_1, \dots, b_n\}) \cup \{v_1, \dots, v_n\}}_{B''}$ eine Basis ist. Dann ist $B'' = B'$ also $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Also ist $|B| = |B'|$

Definition: Diese Kardinalität heisst die *Dimension von* V, geschrieben $\dim_K(V)$ oder $\dim(V)$.

qed

Beispiel: Der Nullraum hat die Basis $\varnothing$ und folglich die Dimension 0.

Satz:

(a) Es gilt $n := \dim(V) < \infty$ genau dann, wenn V endlich erzeugt ist.

In diesem Fall gilt weiter:

(b) Jedes Erzeugendensystem E von V mit $|E| = n$ ist eine Basis von V.

(c) Jede linear unabhängige Teilmenge L von V mit $|L| = n$ ist eine Basis von V.

Bew.: (a) "$\Leftarrow$" siehe oben.

"$\Rightarrow$" Wähle Basis B, die ist endliches Erz.-Sys.

(b) E Erz.-Sys $\Rightarrow \exists\, B \subset E$ s.d. B eine Basis ist. Dann ist $|B| = n = |E| < \infty$

$\Rightarrow B = E$.

(c) L lin. unabh. $\Rightarrow \exists\, L \subset B =$ Basis, also $|B| = n = |L| < \infty \Rightarrow B = L$.

qed

Beispiel: Für jede natürliche Zahl n bilden die Vektoren $e_i := \left(\delta_{i,j}\right)_{j=1,\dots,n}$ für alle $i = 1, \dots, n$ eine Basis von K^n, genannt die *Standardbasis von* K^n. Insbesondere ist also $\dim_K(K^n) = n$.

$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \leftarrow i = \sum x_i e_i$

$\boxed{\dim_K(K^n) = n.}$

Beispiel: Für jede Menge I gilt $\dim(K^{(I)}) = |I|$. Dagegen ist $\dim(K^I) > |I|$ im Sinne unendlicher Kardinalzahlen, wenn I unendlich ist.

Definiere e_i genauso $\Rightarrow x = (x_i)_i = \sum_i' x_i \cdot e_i$; $\{e_i \mid i \in I\}$ ist Basis von $K^{(I)}$.

Satz: Gegebene Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_n \in K^n$ bilden eine Basis von K^n genau dann, wenn die $n \times n$-Matrix $(v_1, \dots, v_n)$ invertierbar ist.

Bew.: $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis $\Rightarrow \forall i : e_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} v_j$, d.h.: $\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix}x_{i1}\\\vdots\\x_{in}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underbrace{I_n} = (e_1, \dots, e_n) = \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}x_{11} & \cdots & x_{i1} & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \\ x_{1n} & \cdots & x_{in} & \cdots\end{pmatrix}}_{A'}$ $\Rightarrow A$ invertierbar

Umgekehrt: A invertierbar $\Rightarrow$ wähle A' so.
$\Rightarrow$ jedes e_i lin. kombinierbar aus $v_1, \dots, v_n$
$\Rightarrow$ jedes $v \in K^n$ ebenso. qed.

Beispiel: Für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ sei $v_i = (a_{ij})_j$ mit $a_{ii} \neq 0$ und $a_{ij} = 0$ für alle $j > i$. Dann ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine obere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen ungleich Null und folglich invertierbar; also ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von K^n.

$\begin{pmatrix}x_{11} & & * \\ & x_{22} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & x_{nn}\end{pmatrix}$ alle $x_{ii} \neq 0$

Beispiel: Die Addition und Multiplikation von reellen und komplexen Zahlen macht $\mathbb{C}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$. Dieser hat die Basis $\{1, i\}$ und folglich die Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

Beispiel: Die Addition und Multiplikation von reellen und rationalen Zahlen macht $\mathbb{R}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{Q}$. Dieser ist unendlich-dimensional; genauer gilt

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = |\mathbb{R}|.$$