

VYBRANÉ KAPITOLY Z OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Petra Kozielová

Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TUO

Bohumil Krajc

Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TUO

ABSTRAKT. Předkládaný text obsahuje zejména ty partie, které se nevešly do textu věnovanému základnímu kurzu z obyčejných diferenciálních rovnic a přitom se (alespoň částečně) v tomto kurzu vyučují. První část je věnována podrobnému, ale přitom elementárnímu úvodu do Ljapunovské stability. Vznikla především zásluhou P. Kozielové. Druhý spoluautor se soustředil zejména na vypracování druhé části, která představuje vstup do problematiky okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice. V příloze je obsažena řada zdrojových kódů, které snad přispějí k lepšímu pochopení látky.

OBSAH

Část 1. Ljapunovská stabilita	2
1. Úvod	2
2. O dvou slavných matematicích Henri Poincaré	2
Alexandr Ljapunov	3
3. Skalární obyčejné diferenciální rovnice	4
4. Typy Ljapunovské stability pro skalární obyčejné diferenciální rovnice	5
4.1. Ljapunovská stabilita	5
4.2. Stejněměrná stabilita	11
4.3. Asymptotická stabilita	12
4.4. Transformace na triviální řešení	15
5. Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic	16
6. Typy stability pro řešení soustav odr	19
7. Kritéria stability pro lineární soustavy	24
8. Metoda linearizace	29
9. Ljapunovovy věty	30
Část 2. Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice	37
10. Úvod	37
11. Vlastní čísla rovnice $y'' + \lambda y = 0$	37
12. Obecnější dvoubodové okrajové problémy	41
Literatura	46
Příloha	47

Část 1. Ljapunovská stabilita

1. ÚVOD

Důležitou částí teorie obyčejných diferenciálních rovnic je studium spojitě závislosti řešení na počátečních podmínkách a parametrech. Ukazuje se, že při splnění určitých předpokladů je možné použít danou obyčejnou diferenciální rovnici jako vhodný model k popisu fyzikální reality, i přes neznalost přesných hodnot všech parametrů. Teorie Ljapunovské stability představuje rozšíření studia spojitě závislosti řešení na neomezené intervaly.

Na našich technických školách je často teorie stability zařazována pouze do speciálních kurzů určených studentům vybraných oborů. Tato práce má skromný cíl pokusit se podat výklad úvodních pojmů a poznatků z této oblasti v co nejjednodušší formě.

Abychom se vyhnuli technickým obtížím při práci se soustavami obyčejných diferenciálních rovnic, budeme zde nejdříve studovat příslušné pojmy pro skalární obyčejné diferenciální rovnice. Pro čtenáře obeznámené se základními poznatky o soustavách obyčejných diferenciálních rovnic jsou určeny zbývající kapitoly. Po zavedení příslušných pojmů je studována stabilita řešení lineárních soustav. Poté je pro ilustraci uvedeno tvrzení o zachování stability v případě porušení linearity malou nelineární poruchou. Výklad končí popisem Ljapunovovy funkce a postupem, jak ji nalézt.

Po obeznámení se s citovanou literaturou, byla jako hlavní zdroj inspirace zvolena brožura [1], odkud byly čerpány teoretické poznatky a důkazy (s výjimkou drobného tvrzení 20). Řešení všech příkladů v tomto textu společně s obrázky jsou původními výsledky. K řešení každého příkladu byla vytvořena malá aplikace, vytvořena v softwaru Maple™ 2015.

2. O DVOU SLAVNÝCH MATEMATICÍCH

Tato práce je věnována problematice Ljapunovské stability. Stručně řečeno, bude studována „blízkost řešení v závislosti na blízkosti počátečních podmínek“. O položení základů se v této oblasti zasloužili zejména dva významní matematikové, Henri Poincaré a Alexandr Ljapunov.



OBRÁZEK 2.1. Henri Poincaré

Henri Poincaré. Jules Henri Poincaré byl významný matematik, teoretický fyzik a filozof. Narodil se 29. dubna 1854 do vlivné rodiny v Nancy, ve Francii. Jeho otec León Poincaré byl profesorem na univerzitě v Nancy. Dalším významným členem jeho rodiny byl Henriho bratranec Raymond Poincaré, který byl v letech 1913–1920 francouzským prezidentem.

Roku 1862 začal Poincaré navštěvovat Lyceum v Nancy, kde strávil 11 let. Byl jedním z nejlepších studentů, nejen na své škole, ale v celé Francii. Ve věku třinácti let o něm dokonce jeden

z učitelů lycea prohlásil, že se stane významným matematikem. Poincaré vstoupil v roce 1873 na technickou univerzitu École Polytechnique, kde studoval matematiku. Po jejím absolvování nastoupil na školu École des Mines, kde pokračoval ve studiu matematiky společně s důlním inženýrstvím. Mezitím napsal disertační práci v oblasti diferenciálních rovnic. Byl prvním, kdo studoval jejich obecné geometrické vlastnosti. Všiml si, že by mohly být užitečné k modelování chování stability sluneční soustavy.

Po absolvování univerzity v Paříži v roce 1879 začal Poincaré učit jako odborný asistent matematiky na univerzitě v Caen v Normandii. Zde se setkal se svou budoucí manželkou Louise Poulin d'Andesi. V roce 1886 se stal profesorem matematické fyziky a teorie pravděpodobnosti na Sorbonně, kde působil až do roku 1912. Poincaré zemřel na ucpání cév dne 17. července 1912 v Paříži, ve věku 58 let.

Poincarého výzkumy zahrnovaly mnoho oborů matematiky, fyziky a filozofie vědy. Henri Poincaré byl jeden z posledních univerzálních matematiků. Zabýval se teorií čísel, diferenciální geometrií a mnoha odvětvími aplikované matematiky. Přispěl také k celé řadě objevů v oblasti fyziky, a to v oblasti optiky, elektřiny, termodynamiky, teorie potenciálu a kvantové teorie. V roce 1905 přišel současně s Albertem Einsteinem na myšlenku, která vedla k teorii relativity. Během svého života vydal tři knihy o filozofii vědy a matematiky.



OBRÁZEK 2.2. Alexandr Ljapunov

Alexandr Ljapunov. Alexandr Michajlovič Ljapunov se narodil v roce 1857 v Jaroslavl, v Rusku. Jeho otec Michail Vasiljevič Ljapunov byl astronom a ředitel lycea v Jaroslavl. Alexandr měl dva bratry - Borise a Sergeje, který byl skladatel a pianista. Po smrti otce byl vychováván svým strýcem, v jehož rodině studoval společně se svou vzdálenou sestřenicí Natalií Rafailovnou, se kterou se později oženil.

Ljapunov úspěšně absolvoval gymnázium v Nižním Novgorodě v roce 1876 a poté nastoupil na Matematicko-fyzikální fakultu na Petrohradské univerzitě, kde byl ovlivněn významným ruským matematikem P. L. Čebyševem. V roce 1880 dokončil studium na univerzitě a byl oceněn za svou práci v oboru hydrostatiky. Ljapunov se zabýval stabilitou rotující kapaliny s možností astronomické aplikace. V roce 1884 publikoval na toto téma svou diplomovou práci s názvem *On the stability of ellipsoidal forms of rotating fluids*.

Během svého působení na Charkovské univerzitě jako učitel mechaniky vydal roku 1892 svou nejvýznamnější práci s názvem *The general problem of the stability of motion*, ve které čerpal z poznatků jednoho z nejvýznamnějších matematiků Henriho Poincarého. Ljapunov transformoval některé jeho poznámky provedené pro speciální případy do obecnějších metod. Ačkoliv jsou si

práce obou matematiků podobné, liší se v přístupu. Zatímco Poincarého pohled je spíše geometrický, Ljapunov přistupoval k řešení analyticky. Na rozdíl od Poincarého práce zůstala Ljapunovova práce nepovšimnuta až do roku 1904, kdy byla přeložena do francouzštiny. Anglického překladu se dočkala až roku 1992.

Poté co byl zvolen členem Petrohradské akademie věd a profesorem na Fakultě aplikované matematiky, se Ljapunov vrátil zpět do Petrohradu, kde se plně věnoval své vědecké práci. S nadějí na zlepšení zdravotního stavu své ženy trpící tuberkulózou se Ljapunov přestěhoval se svou ženou do Oděsy. Natálie ale brzy zemřela. V den její smrti se Ljapunov střelil do hlavy a na následky zranění po třech dnech zemřel.

Ljapunov je společně s Poincarém považován za zakladatele teorie stability. Jeho práce se staly zdrojem inspirace pro mnoho matematiků zabývajících se diferenciálními rovnicemi a jejich aplikacemi.

3. SKALÁRNÍ OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

V následujícím textu budeme předpokládat, že je čtenář obeznámen s problematikou obyčejných diferenciálních rovnic, viz např. [1]. Zde jen pro stručnost dále uvedeme používaná značení a učiníme jeden důležitý předpoklad.

Budeme zkoumat obyčejné diferenciální rovnice ve tvaru

$$(3.1) \quad y' = f(t, y),$$

kde funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je definována na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. K rovnici (3.1) připojíme počáteční podmínku

$$(3.2) \quad y(\tau) = \xi,$$

kde $(\tau, \xi) \in \Omega$.

Často budeme vyšetřovat speciální případ rovnice (3.1) - autonomní ODR

$$(3.3) \quad y' = f(y).$$

Předpoklad: *Nebude-li řečeno jinak, dále budeme vždy předpokládat, že je f spojitá na Ω a má zde spojitou parciální derivaci podle druhé proměnné. Poznamenejme, že tato podmínka zajišťuje jednoznačnost a existenci maximálního řešení Cauchyovy úlohy (3.1), (3.2), viz [1]. Kromě několika málo výjimek budeme v dalším textu pod pojmem řešení obyčejné diferenciální rovnice rozumět maximální řešení této rovnice, tj. řešení, které dále nelze prodloužit.*

Pro maximální řešení u Cauchyovy úlohy (3.1), (3.2) použijeme značení $u(t, \tau, \xi)$, to znamená, že $u(\tau, \tau, \xi) = \xi$.

Na různých místech v textu se objevuje zápis $\delta = \delta(\tau, \varepsilon)$. Tím chceme zdůraznit, že hodnota δ závisí na tom, jak jsou zvolena čísla τ a ε . Zapišeme-li pouze $\delta = \delta(\varepsilon)$, rozumíme tím, že číslo δ závisí pouze na volbě ε .

Připomeňme ještě, že v jedné dimenzi bude roli normy hrát absolutní hodnota $|\cdot|$.

4. TYPY LJAPUNOVSKÉ STABILITY PRO SKALÁRNÍ OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

4.1. Ljapunovská stabilita.

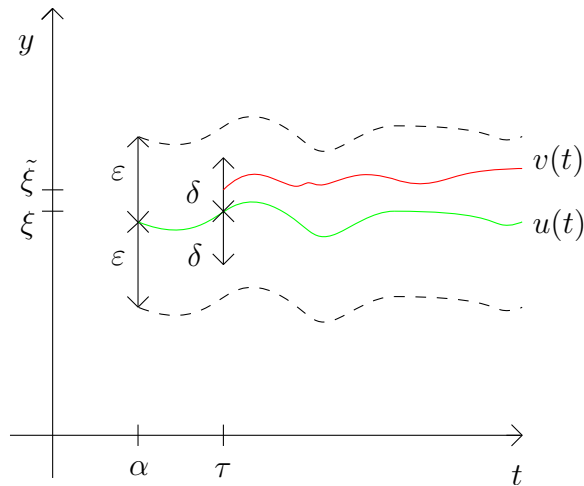
Definice 1. Necht' je dáno řešení u diferenciální rovnice (3.1) na intervalu $(\alpha, +\infty)$. Řešení u se nazývá (ljapunovsky) stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $\tau > \alpha$ existuje $\delta > 0$, $\delta = \delta(\tau, \varepsilon)$ takové, že pokud pro řešení v diferenciální rovnice (3.1) platí $|v(\tau) - u(\tau)| < \delta$, pak platí také $|v(t) - u(t)| < \varepsilon$, pro každé $t \geq \tau$.

Poznámka 2. Podmínku z předchozí definice lze přepsat například takto

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \tau > \alpha \exists \delta > 0 :$$

$$(4.1) \quad (|\tilde{\xi} - \xi| < \delta) \Rightarrow (\forall t \geq \tau : |v(t, \tau, \tilde{\xi}) - u(t, \tau, \xi)| < \varepsilon).$$

Na obrázku je naznačen případ, ve kterém je řešení u stabilní. Námí vyšetřované řešení u je vyznačeno zeleně, řešení v různé od u červeně a epsilonový pás černou přerušovanou čarou. Rozdíl počátečních hodnot ξ , $\tilde{\xi}$ patří do intervalu $(-\delta, \delta)$.



OBRÁZEK 4.1. Ilustrace ljapunovsky stabilního řešení

Poznámka 3. Animace k příkladům z této kapitoly lze nalézt v příloze. V případě stability vyšetřovaného řešení u (znázorněno zeleně) je vykreslen epsilonový pás (znázorněn černou přerušovanou čarou), jehož velikost lze regulovat posuvníkem. Dále lze navolit počáteční hodnoty τ a $\tilde{\xi}$, pomocí kterých se spočítá a vykreslí řešení v (znázorněno červeně).

V případě nestabilního řešení u je vykreslen epsilonový pás (znázorněn černou přerušovanou čarou), jehož velikost je předem dána. Pomocí posuvníku lze navolit parametr δ , ke kterému se následně nalezne řešení v (znázorněno červeně), které „vyběhne“ z epsilonového pásu.

Příklad 4. Dokažme, že řešení $u(t) = \arctg(t)$ diferenciální rovnice

$$(4.2) \quad y' = \frac{1}{1+t^2}$$

je stabilní.

Zřejmě $\alpha = -\infty$. Všechna (maximální) řešení rovnice (4.2) jsou zřejmě tvořena funkcemi ve tvaru $v(t) = \operatorname{arctg}(t) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Podle definice musíme tedy dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $\tau \in \mathbb{R}$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé řešení $v(t) = \operatorname{arctg}(t) + C$ platí:

$$(4.3) \quad |\operatorname{arctg}(\tau) + C - \operatorname{arctg}(t)| < \delta \implies |\operatorname{arctg}(t) + C - \operatorname{arctg}(t)| < \varepsilon,$$

pro každé $t \geq \tau$. Všimněme si, že předchozí podmínka vlastně znamená:

$$(4.4) \quad |C| < \delta \implies |C| < \varepsilon.$$

Zvolme tedy pevně $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ a položme například $\delta = \varepsilon$. Pak jsou postupně splněny implikace (4.4), (4.3) a s důkazem jsme hotovi.

Poznámka 5. Pokusme se ještě uvést alternativní postup důkazu, ve kterém se vyhneme „integrační konstantě“ C .

Z počáteční podmínky $\tilde{\xi} = C + \operatorname{arctg}(\tau)$ vyjádříme konstantu $C = \tilde{\xi} - \operatorname{arctg}(\tau)$, kde $C \in \mathbb{R}$. Dosazením C a počáteční podmínky $\xi = \operatorname{arctg}(\tau)$ dostáváme následující přepis podmínky (4.1):

$$|\tilde{\xi} - \xi| < \delta \implies |(\operatorname{arctg}(t) + \tilde{\xi} - \operatorname{arctg}(\tau)) - (\operatorname{arctg}(t))| < \varepsilon.$$

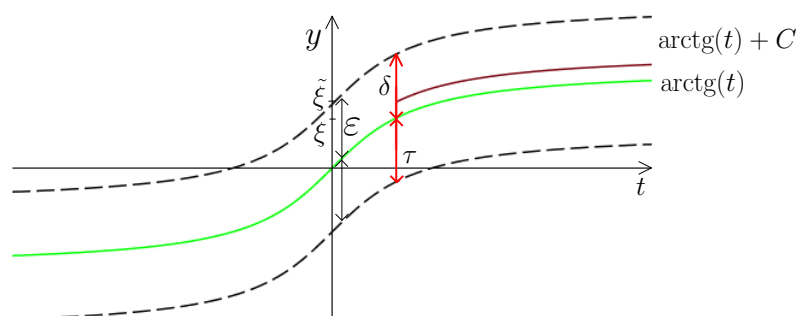
Pro dané $\varepsilon > 0$ a $\tau \in \mathbb{R}$ položme $\delta = \varepsilon$. Potom pro dvojici $(\tilde{\xi}, \xi) \in \mathbb{R}^2$ takovou, že $|\tilde{\xi} - \xi| < \delta$, platí $|\tilde{\xi} - \xi| < \varepsilon$, takže $|(\operatorname{arctg}(t) + \tilde{\xi} - \operatorname{arctg}(\tau)) - (\operatorname{arctg}(t))| < \varepsilon$ a podmínka (4.1) platí.

Situace je znázorněna na obrázku (4.2). Animace k tomuto příkladu se nachází v příloze v souboru animace_stabilni_reseni.mw pod označením Příklad1.

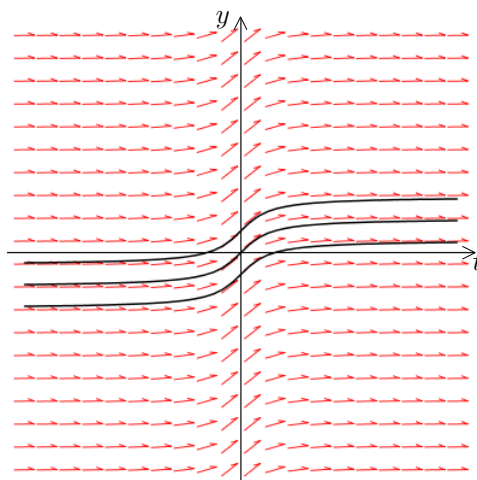
Poznámka 6. Požadovaným vstupním parametrem příkazu `DEplot[interactive]()` je soustava diferenciálních rovnic, nikoliv skalární rovnice. Proto je nutné skalární rovnici přiřadit vhodný systém, což lze provést například takto:

$$\begin{aligned} y_1' &= 1 \\ y_2' &= \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Obecné řešení této soustavy lze zapsat takto: $y(t) = (t + C_1, \operatorname{arctg}(t) + C_2)$, kde $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Zvolíme-li počáteční podmínky $\tau = 0$, $\xi_1 = 0$, pak platí $C_1 = 0$, a proto $y_2(t) = \operatorname{arctg}(t) + C_2$. Grafy řešení druhých složek této soustavy odpovídají řešením z příkladu 4. Díky tomu můžeme ilustrovat stabilitu řešení příkladu 4 pomocí příkazu `DEplot[interactive]()`, který je popsán v příloze. Zadání pro tuto soustavu se nachází v textovém souboru `Skalarni_ODR_1.txt`.


 OBRÁZEK 4.2. Ilustrace stability řešení $\arctg(t)$ diferenciální rovnice (4.2)

Z obrázku (4.3) je patrné, že řešení $\arctg(t)$ je stabilní. Primitivní funkce k funkci $y = \frac{1}{1+t^2}$ se totiž od sebe liší nejvýše o konstantu C . K důkazu stability stačí tedy zvolit $C : |C| < \delta$.



OBRÁZEK 4.3. Směrové pole řešení rovnice (4.2)

Poznámka 7. Volba δ v právě uvedeném příkladu byla závislá pouze na ε , nikoliv na τ . Jak se čtenář dozví dále, jedná se vlastně o stejnoměrnou stabilitu vyšetřovaného řešení.

Příklad 8. Dokažme, že $u(t) = \ln(t)$ je stabilním řešením diferenciální rovnice $y' = e^{-y}$.

Nejprve si všimneme, že Cauchyova úloha

$$(4.5) \quad y' = e^{-y},$$

$$(4.6) \quad y(\tau) = \xi,$$

má právě jedno maximální řešení, přičemž je-li v maximálním řešením (4.5), (4.6), pak platí $v(t, \tau, \xi) = \ln(t - \tau + e^\xi)$.

Každé maximální řešení (4.5) lze zapsat ve tvaru $v(t) = \ln(t + C)$, kde $C \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta a naopak, pro libovolné $C \in \mathbb{R}$ funkce $v(t) = \ln(t + C)$ představuje maximální řešení (4.5).

Dříve, než začneme s důkazem stability, si všimneme, že pro $C > 0$ je funkce daná předpisem $\ln\left(1 + \frac{C}{t}\right)$ na intervalu $(0, \infty)$ klesající a kladnou funkcí. Podobně platí, že je-li $C < 0$, pak funkce $\ln\left(1 + \frac{C}{t}\right)$ je na $(-C, \infty)$ záporná a rostoucí funkce. Tedy pro každé $C \in \mathbb{R}$ platí:

$$t \geq \tau > \max\{0, -C\} \Rightarrow \left| \ln\left(1 + \frac{C}{\tau}\right) \right| \geq \left| \ln\left(1 + \frac{C}{t}\right) \right|.$$

Nyní můžeme přistoupit k vlastnímu důkazu stability. Nechť je dáno $\epsilon > 0$, $\tau > 0$. Položme $\delta = \epsilon$. Nechť pro řešení $v(t) = \ln(t + C)$ platí: $|v(\tau) - u(\tau)| < \delta$, což znamená $|\ln(\tau + C) - \ln(\tau)| < \delta$, tedy $\tau > \max\{0, -C\}$. Odtud plyne pro každé $t \geq \tau$:

$$|\ln(t + C) - \ln(t)| = \left| \ln\left(1 + \frac{C}{\tau}\right) \right| \leq \left| \ln\left(1 + \frac{C}{t}\right) \right| < \delta = \epsilon,$$

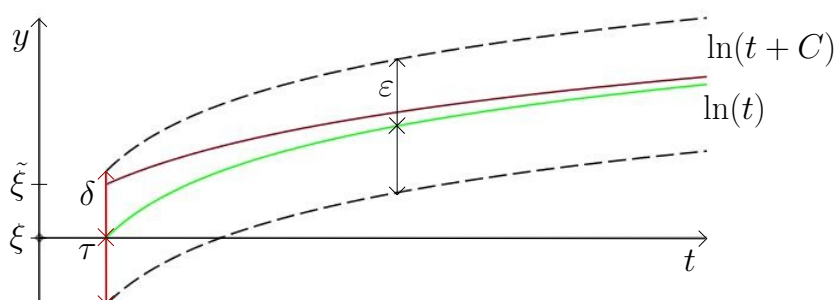
čímž důkaz končí.

Pro $C > 0$ je situace ilustrována na obrázku (4.4). Pro $C < 0$ na obrázku (4.5). Animace k tomuto příkladu se nachází v příloze v souboru animace_stabilni_reseni.mw pod označením Příklad2.

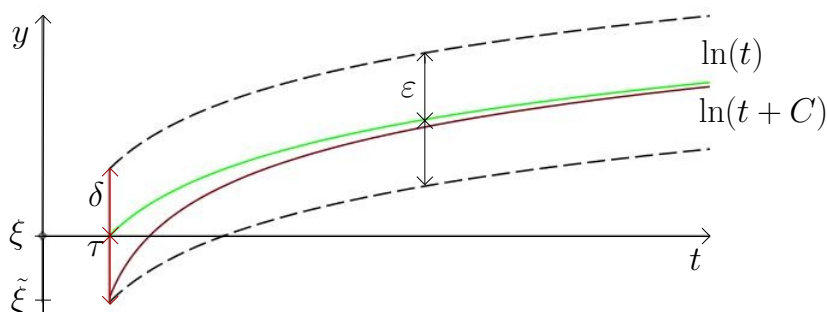
Poznámka 9. Transformujme diferenciální rovnici (8) na soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= 1 \\ y_2' &= e^{-y_2} \end{aligned}$$

Každé maximální řešení této soustavy můžeme zapsat ve tvaru $y(t) = (t + C_1, \ln(t + C_2))$, kde $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$ jsou vhodné konstanty. Zvolíme-li počáteční podmínky $\tau = 1$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, platí $C_2 = 0$, takže $y_2(t) = \ln(t)$. Podobně odpovídají grafy řešení druhých složek této soustavy řešením z příkladu 8. Stabilitu řešení příkladu 8 můžeme tedy ilustrovat pomocí příkazu `DEplot[interactive]()`. Zadání nalezneme v textovém souboru `Skalarni_ODR_2.txt`.



OBRÁZEK 4.4. Ilustrace stability řešení $\ln(t)$ diferenciální rovnice (4.5) pro případ $C > 0$

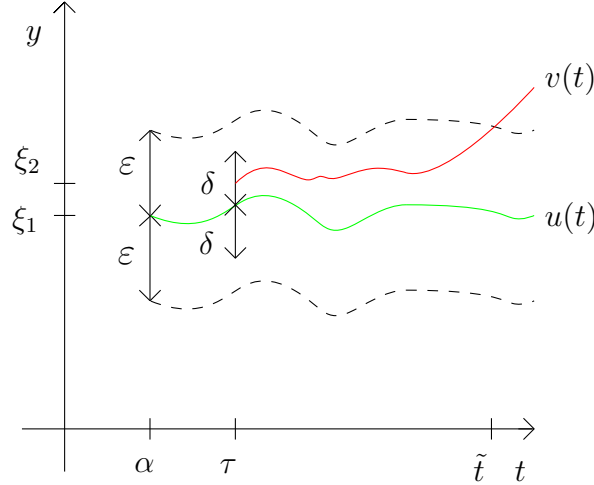


OBRÁZEK 4.5. Ilustrace stability řešení $\ln(t)$ diferenciální rovnice (4.5) pro případ $C < 0$

Definice 10. Není-li řešení stabilní, pak jej nazýváme nestabilním.

Poznámka 11. Z definice 10 vyplývá, že řešení u diferenciální rovnice (3.1) je nestabilní, pokud existují $\varepsilon > 0$ a $\tau > \alpha$ taková, že pro každé $\delta > 0$ existuje řešení v a číslo $\tilde{t} \geq \tau$ takové, že platí $|v(\tau) - u(\tau)| < \delta$ a zároveň $|v(\tilde{t}) - u(\tilde{t})| \geq \varepsilon$, nebo číslo $v(\tilde{t}) - u(\tilde{t})$ není definováno. Nestabilní

řešení u je znázorněno na obrázku (4.6), kde se hodnoty řešení u a v od sebe nedovoleně „vzdálí“ v kritickém bodě \tilde{t} .



OBRÁZEK 4.6. Ilustrace nestabilního řešení

Příklad 12. Dokažme, že řešení $u(t) = e^{t^2+t}$ diferenciální rovnice

$$(4.7) \quad y'(t) = (1 + 2t)y$$

je nestabilní. Každé další řešení v této diferenciální rovnice lze zapsat ve tvaru $v(t) = Ce^{t^2+t}$, $C \in \mathbb{R}$. Pro nestabilní řešení podle poznámky 11 mají existovat čísla $\varepsilon > 0$ a $\tau > -\infty$ taková, že pro každé $\delta > 0$ existuje řešení v a existuje $\tilde{t} \geq \tau$ takové, že platí:

$$(4.8) \quad |v(\tau) - u(\tau)| < \delta \wedge |v(\tilde{t}) - u(\tilde{t})| \geq \varepsilon.$$

Vyjádřením konstanty C z počáteční podmínky $\tilde{\xi} = Ce^{\tau^2+\tau}$ získáváme $v(t, \tau, \tilde{\xi}) = \tilde{\xi}e^{t^2+t-\tau^2-\tau}$. Tedy (4.8) lze zapsat ve tvaru:

$$\left| \tilde{\xi} - e^{\tau^2+\tau} \right| < \delta \wedge \left| \tilde{\xi}e^{\tilde{t}^2+\tilde{t}-\tau^2-\tau} - e^{\tilde{t}^2+\tilde{t}} \right| \geq \varepsilon.$$

Zvolme $\varepsilon = 1$, $\tau = 0$. Pak pro libovolné $\delta > 0$ můžeme zvolit čísla $\tilde{\xi} = \frac{\delta}{2} + 1$ a $\tilde{t} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \ln(\frac{2}{\delta})}}{2}$, takže¹:

$$\left| \tilde{\xi} - e^{\tau^2+\tau} \right| = \left| \tilde{\xi} - e^0 \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

a zároveň

$$\left| \tilde{\xi}e^{\tilde{t}^2+\tilde{t}-\tau^2-\tau} - e^{\tilde{t}^2+\tilde{t}} \right| = \left| \tilde{\xi}e^{\tilde{t}^2+\tilde{t}} - e^{\tilde{t}^2+\tilde{t}} \right| = \frac{\delta}{2}e^{\tilde{t}^2+\tilde{t}} = \frac{\delta}{2}e^{\ln(\frac{2}{\delta})} = 1 \geq \varepsilon.$$

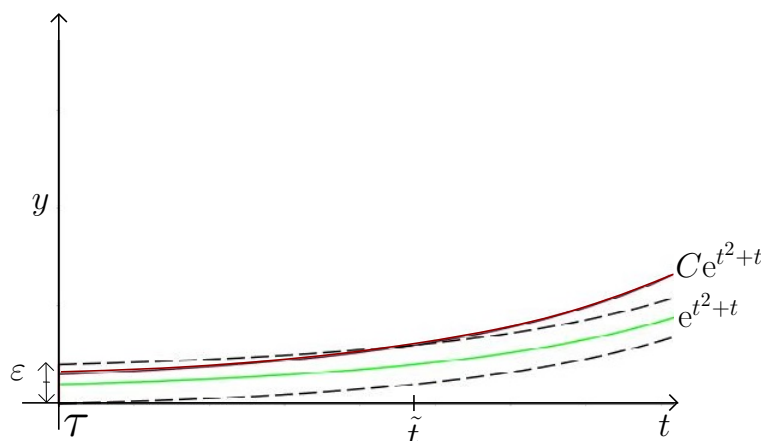
Dokázali jsme tak, že řešení $u(t) = e^{t^2+t}$ je nestabilní. Situace je demonstrována na obrázku (4.7). Animace k tomuto příkladu lze najít v příloze v souboru animace_nestabilni_reсени.mw.

¹ \tilde{t} jsme dostali jako kořen kvadratické rovnice $\tilde{t}^2 + \tilde{t} - \ln(\frac{2}{\delta})$, takže $\tilde{t}^2 + \tilde{t} = \ln(\frac{2}{\delta})$.

Poznámka 13. Diferenciální rovnici (12) transformujeme na soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= 1 \\ y_2' &= (1 + 2t)y_2 \end{aligned}$$

Zvolíme-li počáteční podmínky $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = \xi$, pak řešení této soustavy můžeme zapsat ve tvaru $y(t) = (t, \xi e^{t^2+t})$ a grafy řešení druhé složky této soustavy jsou stejné jako v příkladu (12). To znamená, že animaci nestabilního řešení příkladu (12) můžeme ilustrovat pomocí příkazu `DEplot[interactive]()`. Zadání nalezneme v textovém souboru `Skalarni_ODR_3.txt`.



OBRÁZEK 4.7. Ilustrace nestabilního řešení e^{t^2+t} diferenciální rovnice (4.7)

4.2. Stejněměrná stabilita. Nyní se budeme zabývat stejnoměrnou (ljapunovskou) stabilitou, která je obecně silnější vlastností než ljapunovská stabilita.

Definice 14. Nechť je dáno řešení u diferenciální rovnice (3.1) na intervalu $(\alpha, +\infty)$. Řešení u se nazývá stejnoměrně (ljapunovsky) stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a $\tau \in (\alpha, \infty)$ existuje $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ takové, že pokud pro řešení v diferenciální rovnice (3.1) platí $|v(\tau) - u(\tau)| < \delta$, pak platí také $|v(t) - u(t)| < \varepsilon$ pro každé $t \geq \tau$.

Poznámka 15. Jinak zapsáno

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau > \alpha :$$

$$(4.9) \quad \left(|\tilde{\xi} - \xi| < \delta \right) \Rightarrow \left(\forall t \geq \tau : |v(t, \tau, \tilde{\xi}) - u(t, \tau, \xi)| < \varepsilon \right).$$

Poznámka 16. Jestliže je diferenciální rovnice (3.1) autonomní, a je dáno její řešení u , pak není příliš těžké dokázat, že u je stejnoměrně stabilní právě tehdy, když je stabilní (viz např. [4], odst. 1.11).

Z poznámky 16 plyne stejnoměrná stabilita řešení $\ln(t)$ z příkladu 8, protože diferenciální rovnice $y' = e^{-y}$ je autonomní.

Poznámka 17. Řešení $u(t) = \arctg(t)$ diferenciální rovnice $y'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ bude také stejnoměrně stabilní. Pro důkaz stability řešení u v příkladu 4 stačí zvolit $\delta = \varepsilon$. Tedy δ nezávisí na τ a proto je řešení stejnoměrně stabilní.

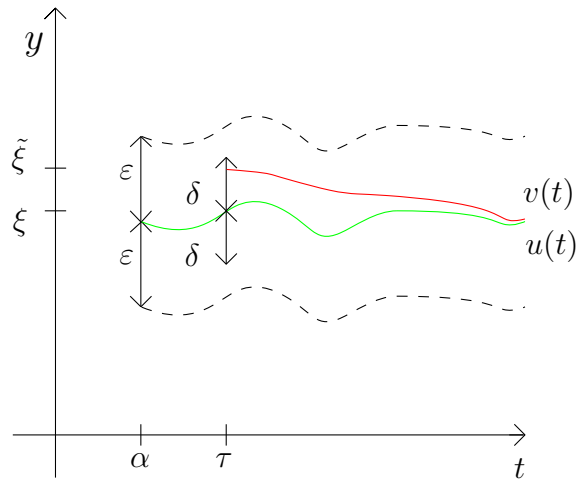
4.3. Asymptotická stabilita.

Dále se budeme zabývat asymptotickou stabilitou, kdy mimo to, že je řešení stabilní, se k němu ostatní „přibližují“.

Definice 18. Nechť je dáno řešení u diferenciální rovnice (3.1) na intervalu $(\alpha, +\infty)$. Řešení u se nazývá asymptoticky (ljapunovsky) stabilní, je-li stabilní a zároveň když ke každému $\tau > \alpha$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé řešení v rovnice (3.1) platí:

$$(4.10) \quad |v(\tau) - u(\tau)| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |v(t) - u(t)| = 0.$$

Z obrázku 4.8 můžeme vidět, jak se řešení v „limitně“ blíží k řešení u , tedy rozdíl těchto řešení se „limitně“ přibližuje 0.



OBRÁZEK 4.8. Ilustrace asymptoticky stabilního řešení

Příklad 19. Dokažme, že řešení $u(t) = \operatorname{arctg}(t)$ diferenciální rovnice

$$(4.11) \quad y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(y)}, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

je asymptoticky stabilní.

Nejprve dokažme, že řešení u je stabilní. Tedy, že pro každé $\varepsilon > 0$ a $\tau > \alpha$ existuje $\delta > 0$ takové, že pokud pro řešení v platí $|v(\tau) - u(\tau)| < \delta$, pak platí také $|v(t) - u(t)| < \varepsilon$, pro každé $t \geq \tau$.

Nejdříve si všimněme, že každé maximální řešení v rovnice (4.11) splňující počáteční podmínku $v(\tau) = \tilde{\xi}$, kde $\tilde{\xi} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, můžeme zapsat ve tvaru $\operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau)$. Při označení $\xi = u(\tau) = \operatorname{arctg}(\tau)$, tzn. $\tau = \operatorname{tg}(\xi)$, pak vlastně máme dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ a $\tau \in \mathbb{R}$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí:

$$|\tilde{\xi} - \xi| < \delta \Rightarrow \left| \operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau) - \operatorname{arctg}(t) \right| < \varepsilon.$$

Zvolme libovolně, ale pevně čísla $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ a položme $\xi = u(\tau)$. Funkce tg je spojitá na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a tedy z „Cauchyovy“ definice spojitosti plyne, že můžeme korektně zvolit

$\delta > 0$ tak, aby platilo:

$$(4.12) \quad \left| \tilde{\xi} - \xi \right| < \delta \Rightarrow \left| \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \operatorname{tg}(\xi) \right| < \varepsilon.$$

Funkce arctg je diferencovatelná na \mathbb{R} a proto, podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje pro každé $t \in \mathbb{R}$ a každé $(t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau) \in \mathbb{R}$ bod θ ležící mezi těmito čísly a takový, že platí:

$$(\operatorname{arctg}(\theta))' (t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau - t) = \operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau) - \operatorname{arctg}(t).$$

Tedy

$$\frac{1}{1 + \theta^2} \left| \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau \right| = \left| \operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau) - \operatorname{arctg}(t) \right|.$$

Připomeňme, že $\tau = \operatorname{tg}(\xi)$. Pro výraz $\frac{1}{1 + \theta^2} \left| \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau \right|$ tak s využitím vztahu $\frac{1}{1 + \theta^2} < 1$ a nerovnosti (4.12) dostáváme odhad:

$$\frac{1}{1 + \theta^2} \left| \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau \right| \leq \left| \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \operatorname{tg}(\xi) \right| < \varepsilon,$$

tedy

$$\left| \operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau) - \operatorname{arctg}(t) \right| < \varepsilon.$$

Nyní dokažme, že řešení $u(t) = \operatorname{arctg}(t)$ splňuje druhou podmínku z Definice 18. Tedy, že ke každému $\tau > \alpha$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé řešení v rovnice (4.11), pro které platí $|v(\tau) - u(\tau)| < \delta$, platí také $\lim_{t \rightarrow \infty} |v(t) - u(t)| = 0$.

Připomeňme, že značíme $\xi = u(\tau) = \operatorname{arctg}(\tau)$. Každé další maximální řešení v rovnice (4.11) splňující počáteční podmínku $v(\tau) = \tilde{\xi}$, kde $\tilde{\xi} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, opět zapíšeme ve tvaru $\operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau)$. Pro každé $\tau \in \mathbb{R}$ tedy musíme ukázat, že existuje $\delta > 0$ pro které platí:

$$\left| \tilde{\xi} - \xi \right| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau) - \operatorname{arctg}(t) \right| = 0.$$

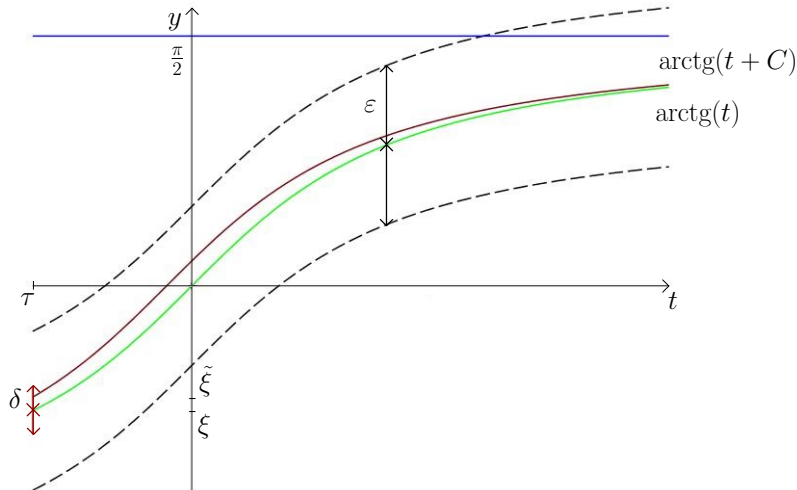
Pro pevně dané $\tau \in \mathbb{R}$ zvolme $\delta = \min \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\tau), \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(\tau) \right\} = \min \left\{ \frac{\pi}{2} - \xi, \frac{\pi}{2} + \xi \right\}$. Pak platí:

$$\left| \tilde{\xi} - \xi \right| < \delta \Rightarrow \left[\tilde{\xi} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2} \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau) = \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

tedy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg}(\tilde{\xi}) - \tau) - \operatorname{arctg}(t) \right| = \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right| = 0.$$

Řešení u je tedy asymptoticky stabilní. Situace je znázorněna na obrázku (4.9). Tento příklad je animován v příloze v souboru animace_stabilni_reseni.mw. Je označen jako Příklad3.

OBRÁZEK 4.9. Ilustrace stability řešení $\arctg(t)$ diferenciální rovnice (4.11)

Z předchozího příkladu je patrné, jak můžeme zformulovat jednoduché obecné tvrzení o stabilitě řešení autonomních obyčejných diferenciálních rovnic.

Věta 20. *Nechť funkce u je na intervalu $(\alpha, +\infty)$ řešením Cauchyovy úlohy (3.3), (3.2). Nechť f má spojitou derivaci na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}$ a nechť $K > 0$, $L \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že*

$$(4.13) \quad \forall t \in (\alpha, \infty) : K < u'(t) < L.$$

Pak u je stabilním řešením rovnice (3.3).

Důkaz. Protože u je rostoucí a spojitá funkce, obor hodnot této funkce je otevřený interval:

$$H_u = \{u(t) : t \in (\alpha, \infty)\} = (\beta, \gamma).$$

Zvolme libovolně, ale pevně $\varepsilon > 0$ a $\tau \in (\alpha, \infty)$. Označme $\xi = u(\tau)$.

Položme

$$(4.14) \quad \delta = \min \left\{ \frac{K}{L} \varepsilon, |\xi - \beta|, |\xi - \gamma| \right\}.$$

Nyní nechť $\tilde{\xi}$ je libovolné číslo takové, že

$$(4.15) \quad |\tilde{\xi} - \xi| < \delta.$$

Prozkoumejme nejprve maximální řešení $v(t)$ Cauchyovy úlohy

$$(4.16) \quad y' = f(y), \quad y(\tau) = \tilde{\xi}.$$

Protože funkce f je diferencovatelná, řešení $v(t)$ úlohy (4.16) je dáno jednoznačně. Díky volbě (4.14) vidíme, že $\tilde{\xi} \in (\beta, \gamma) = H_u$, takže existuje $\tilde{\tau} \in (\alpha, \infty)$ tak, že $\tilde{\xi} = u(\tilde{\tau})$, tzn. $\tilde{\tau} = u^{-1}(\tilde{\xi})$. Odtud plyne, že funkce $v(t) = u(t + u^{-1}(\tilde{\xi}) - \tau)$ je jediným maximálním řešením (4.16).

Zvolme nyní libovolně $t \geq \tau$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pak existuje θ_1 ležící mezi τ a t takové, že

$$|v(t) - u(t)| = \left| u \left(t + u^{-1}(\tilde{\xi}) - \tau \right) - u(t) \right| = |u'(\theta_1)| \left| u^{-1}(\tilde{\xi}) - \tau \right| = |u'(\theta_1)| \left| u^{-1}(\tilde{\xi}) - u^{-1}(\xi) \right|.$$

Odtud a z předpokladu (4.13) plyne, že

$$(4.17) \quad |v(t) - u(t)| < L \left| u^{-1}(\tilde{\xi}) - u^{-1}(\xi) \right|.$$

Nyní aplikujeme ještě jednou Lagrangeovu větu o střední hodnotě, tentokrát na funkci u^{-1} .

K číslům $\tilde{\xi}$ a ξ existuje θ_2 ležící mezi těmito dvěma čísly a takové, že

$$\left| u^{-1}(\tilde{\xi}) - u^{-1}(\xi) \right| = |(u^{-1})'(\theta_2)| \left| \tilde{\xi} - \xi \right|.$$

Protože $(u^{-1})'(\theta_2) = \frac{1}{u'(u^{-1}(\theta_2))}$, z nerovností (4.13),(4.17) dostáváme vzhledem k volbě δ z (4.14):

$$|v(t) - u(t)| < L \left| u^{-1}(\tilde{\xi}) - u^{-1}(\xi) \right| < \frac{L}{K} \left| \tilde{\xi} - \xi \right| < \frac{L}{K} \delta \leq \frac{L}{K} \frac{K}{L} \varepsilon = \varepsilon$$

a tím jsme s důkazem hotovi. \square

Poznámka 21. K zajištění podmínky (4.13) stačí předpokládat, že $\forall y \in \Omega$ platí $K < f(y) < L$.

Nejsilnější typ l'apunovské stability, o kterém se v této práci zmíníme, je stejnoměrná asymptotická stabilita.

Definice 22. Řešení u diferenciální rovnice (3.1) se nazývá stejnoměrně asymptoticky stabilní, je-li stejnoměrně stabilní a zároveň je asymptoticky stabilní.

4.4. Transformace na triviální řešení. Nyní ukážeme, že vyšetřování stability řešení diferenciální rovnice lze převést na vyšetřování stability triviálního řešení modifikované rovnice.

Budeme zkoumat stabilitu řešení $u(t)$ diferenciální rovnice

$$(4.18) \quad v' = g(t, v).$$

Jelikož je funkce $u(t)$ řešením (4.18), platí:

$$(4.19) \quad u'(t) = g(t, u(t)).$$

Pro každé další řešení $v(t)$ rovnice (4.18), platí:

$$(4.20) \quad v'(t) = g(t, v(t)).$$

Budeme zkoumat rozdíl těchto řešení:

$$(4.21) \quad y(t) = v(t) - u(t).$$

Derivací dostaneme

$$y'(t) = v'(t) - u'(t) = g(t, v(t)) - g(t, u(t)) = g(t, y(t) + u(t)) - g(t, u(t)).$$

Pro uvažovaná řešení $u(t)$, $v(t)$ definujeme funkci

$$f(t, y) = g(t, y + u(t)) - g(t, u(t)).$$

Funkce $y(t) = v(t) - u(t)$ je tudíž řešením diferenciální rovnice ve tvaru

$$(4.22) \quad y' = f(t, y).$$

Diferenciální rovnice (4.22) má vždy triviální řešení, na které se transformovalo řešení $u(t)$ diferenciální rovnice (4.18). Stabilitu řešení diferenciální rovnice (4.18) lze tedy vyšetřovat pomocí zkoumání stability řešení triviálního.

Poznámka 23. Ukažme si, jak lze předchozí techniky využít při zkoumání stability konkrétního řešení $u(t)$ nehomogenní lineární diferenciální rovnice

$$(4.23) \quad v'(t) = a(t)v(t) + b(t).$$

Po substituci (4.21)

$$y(t) = v(t) - u(t),$$

kde funkce $v(t)$ představuje další, „proměnné“, řešení rovnice (4.23), získáváme

$$y'(t) = v'(t) - u'(t) = [a(t)v(t) + b(t)] - [a(t)u(t) + b(t)] = [a(t)(y(t) + u(t)) + b(t)] - [a(t)u(t) + b(t)].$$

Jednoduchou úpravou posledního vztahu získáváme

$$y'(t) = a(t)y(t).$$

Funkce $y(t)$ je tedy řešením přidružené homogenní lineární diferenciální rovnice k rovnici (4.23) a zkoumání výrazu $|v(t) - u(t)|$ v definici stability přechází v analýzu vztahu $|y(t)| = |y(t) - 0|$, tedy ve studium stability triviálního řešení homogenní rovnice.

Poznámka 24. Z definice 1 vyplývá, že triviální řešení $y = 0$ diferenciální rovnice (4.18) je stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $\tau > \alpha$ existuje $\delta > 0$, $\delta = \delta(\tau, \varepsilon)$ takové, že pokud pro každé řešení v diferenciální rovnice (4.22) platí $|v(\tau)| < \delta$, pak platí $|v(t)| < \varepsilon$, pro každé $t \geq \tau$.

Poznámka 25. Z definice 10 vyplývá, že triviální řešení $y = 0$ diferenciální rovnice (4.18) je nestabilní, pokud existují $\varepsilon > 0$ a $\tau > \alpha$ taková, že pro každé $\delta > 0$ existuje řešení v a číslo $\tilde{t} \geq \tau$ takové, že platí $|v(\tau)| < \delta$ a zároveň $|v(\tilde{t})| \geq \varepsilon$ nebo $v(\tilde{t})$ není definováno.

Poznámka 26. Z definice 14 vyplývá, že triviální řešení $y = 0$ diferenciální rovnice (4.18) je stejnoměrně stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $\tau > \alpha$ existuje $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ takové, že pokud pro každé řešení v diferenciální rovnice (4.22) platí $|v(\tau)| < \delta$, pak platí $|v(t)| < \varepsilon$, pro každé $t \geq \tau$.

Poznámka 27. Z definice 18 vyplývá, že triviální řešení $y = 0$ diferenciální rovnice (4.18) je asymptoticky stabilní, je-li stabilní a pro každé $\tau > \alpha$ existuje $\delta > 0$, takové že pokud pro každé řešení v diferenciální rovnice (4.22) platí že $|v(\tau)| < \delta$, pak platí $\lim_{t \rightarrow \infty} |v(t)| = 0$, tedy $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$.

5. SOUSTAVY OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Nechť Ω je otevřenou podmnožinou \mathbb{R}^{1+n} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zadaná vektorová funkce. Budeme se zabývat soustavami obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$(5.1) \quad y' = f(t, y), \quad D_f = \Omega$$

a Cauchyovou úlohou

$$(5.2) \quad y' = f(t, y), \quad y(\tau) = \xi, \quad (\tau, \xi) \in \Omega.$$

Uvedeným stručným zápisem rozumíme přesněji soustavu

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix},$$

respektive Cauchyovu úlohu

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}(\tau) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Předpoklad: *Nebude-li řečeno jinak, dále budeme vždy předpokládat, že je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ spojitá na Ω a má zde spojitě parciální derivace podle druhé až n -té proměnné. Poznamenejme, že tato podmínka zajišťuje jednoznačnost a existenci maximálního řešení Cauchyovy úlohy (5.2), viz [1]. Podobně jako u skalární rovnice, obvykle budeme v dalším textu pod pojmem řešení obyčejné diferenciální rovnice rozumět maximální řešení této rovnice, tj. řešení, které dále nelze prodloužit.*

Pro maximální řešení u Cauchyovy úlohy (5.2) použijeme v souladu s předešlým textem značení $u(t, \tau, \xi)$, to znamená, že $u(\tau, \tau, \xi) = \xi$.

Dále se budeme zabývat zejména lineárními soustavami ve tvaru

$$(5.3) \quad y' = A(t)y + b(t),$$

ke kterým připojujeme počáteční podmínku

$$(5.4) \quad y(\tau) = \xi.$$

Zde $A = a_{ij}$, ($i, j = 1 \dots n$) je spojitá reálná maticová funkce typu (n, n) definovaná na (α, ∞) a $b = b_j$, ($j = 1 \dots n$) je spojitá vektorová funkce definovaná na stejném otevřeném intervalu. Vždy budeme předpokládat, že $\tau \in (\alpha, \infty)$. Připomeňme, že uvedené předpoklady zajišťují, že Cauchyova úloha (5.3),(5.4) má vždy právě jedno řešení definované na (α, ∞) . Spolu se soustavou (5.3) budeme uvažovat přidruženou homogenní soustavu

$$(5.5) \quad y' = A(t)y.$$

Pro pevné $\tau \in (\alpha, \infty)$ budeme symbolem $V(t, \tau)$ rozumět fundamentální matici soustavy (5.5). Jedná se o maticovou funkci, jejíž sloupce jsou tvořeny vhodným fundamentálním systémem řešení soustavy (5.5):

$$V(t, \tau) = \begin{pmatrix} v_1(t, \tau, e_1) & v_1(t, \tau, e_2) & \dots & v_1(t, \tau, e_n) \\ v_2(t, \tau, e_1) & v_2(t, \tau, e_2) & \dots & v_2(t, \tau, e_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_n(t, \tau, e_1) & v_n(t, \tau, e_2) & \dots & v_n(t, \tau, e_n) \end{pmatrix},$$

kde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě $V(\tau, \tau)$ je jednotkovou maticí. Připomeňme, že pro každé $j \in (1, \dots, n)$ symbolem $v(t, \tau, e_j)$ rozumíme takové řešení (5.5), (5.4) na (α, ∞) , pro které $v(\tau, \tau, e_j) = e_j$. Z tohoto způsobu zápisu vyplývá, že řešení Cauchyovy úlohy (5.5), (5.4) lze zapsat ve tvaru

$$v(t, \tau, \xi) = V(t, \tau)\xi.$$

V tomto textu budeme pracovat s několika normami.

Nejčastěji budeme pracovat s normou součtovou:

$$\|y\|_1 = |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|,$$

někdy s normou euklidovskou:

$$\|y\|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

a použijeme také normu maximovou:

$$\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|\}.$$

Tyto normy jsou v \mathbb{R}^n navzájem ekvivalentní, takže si ve většině případů vystačíme s obecným značením $\|\cdot\|$. To, že jsou normy $\|y\|_a$ a $\|y\|_b$ ekvivalentní znamená, že existují čísla $k, l \in \mathbb{R}^+$ taková, že platí²

$$k\|y\|_a \leq \|y\|_b \leq l\|y\|_a.$$

Například pro normu součtovou a normu maximovou v \mathbb{R}^n platí:

$$1\|y\|_1 \leq \|y\|_\infty \leq n\|y\|_1.$$

V řadě situací je vhodné spolu s vektorovou normou uvažovat příslušnou souhlasnou maticovou normu. Připomeňme, že maticovou normu $\|A\|_M$ nazveme souhlasnou s vektorovou normou $\|\cdot\|$, jestliže pro každou matici A a vektor y platí

$$\|Ay\| \leq \|A\|_M \|y\|,$$

jakmile je součin Ay definován. Dále bereme do úvahy následující maticové normy: normu sloupcovou

$$\|A\|_1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, j = 1, \dots, n \right\},$$

souhlasnou se součtovou vektorovou normou, euklidovskou maticovou normou

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2},$$

²Lze dokázat, že v \mathbb{R}^n jsou všechny normy ekvivalentní.

kteřá je souhlasná s euklidovskou vektorovou normou
a normu řádkovou

$$\|A\|_{\infty} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, i = 1, \dots, n \right\},$$

souhlasnou s maximovou vektorovou normou.

6. TYPY STABILITY PRO ŘEŠENÍ SOUSTAV ODR

Nyní se budeme zabývat stabilitou řešení soustav diferenciálních rovnic (5.1). Podmínky stability pro řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic jsou podobné jako v případě řešení skalárních obyčejných diferenciálních rovnic.

Definice 28. Nechť je dáno řešení u soustavy (5.1) na intervalu $(\alpha, +\infty)$. Řešení u se nazývá (ljapunovsky) stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $\tau > \alpha$ existuje $\delta = \delta(\tau, \varepsilon)$ takové, že pokud pro řešení v soustavy (5.1) platí $\|v(\tau) - u(\tau)\| < \delta$, pak platí také $\|v(t) - u(t)\| < \varepsilon$, pro každé $t \geq \tau$.

Příklad 29. Dokažme, že řešení $u(t) = (e^{-3t}, e^{-3t} + e^{-4t})$ soustavy

$$(6.1) \quad \begin{aligned} y_1' &= -3y_1 \\ y_2' &= y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

je ljapunovsky stabilní.

Za normu budeme volit v tomto příkladu normu maximovou. Řešení splňující počáteční podmínku $y(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{bmatrix}$ je funkce $v(t, \tau, \tilde{\xi}) = \left(\tilde{\xi}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t+3\tau} + (\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t+4\tau} \right)$. Označíme-li $u(t, \tau, \xi) = (e^{-3t}, e^{-3t} + e^{-4t})$, pak máme dle definice 28 dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ a $\tau \in \mathbb{R}$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí:

$$|\tilde{\xi}_1 - \xi_1| < \delta \wedge |\tilde{\xi}_2 - \xi_2| < \delta \Rightarrow \|v(t, \tau, \tilde{\xi}) - u(t, \tau, \xi)\|_{\infty} < \varepsilon,$$

takže

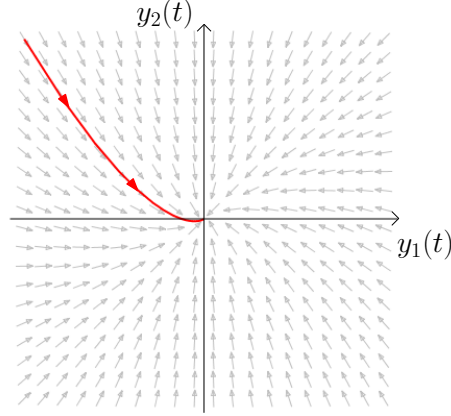
$$|\tilde{\xi}_1 - e^{-3\tau}| < \delta \wedge |\tilde{\xi}_2 - e^{-3\tau} - e^{-4\tau}| < \delta \Rightarrow \|v(t, \tau, \tilde{\xi}) - u(t, \tau, \xi)\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Pro požadovaný odhad $\|v(t, \tau, \tilde{\xi}) - u(t, \tau, \xi)\|_{\infty} < \varepsilon$ tak dostáváme:

$$\begin{aligned} & \|v(t, \tau, \tilde{\xi}) - u(t, \tau, \xi)\|_{\infty} = \\ & = \left\| \left((\tilde{\xi}_1 - e^{-3\tau}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t+3\tau} + (\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1 + e^{-3\tau} - e^{-3\tau} - e^{-4\tau}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t+4\tau} \right) \right\|_{\infty} \leq \\ & \leq |\tilde{\xi}_1 - e^{-3\tau}| \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} |e^{-3t+3\tau}| + \left(|\tilde{\xi}_2 - e^{-3\tau} - e^{-4\tau}| + |e^{-3\tau} - \tilde{\xi}_1| \right) \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} |e^{-4t+4\tau}| < \\ & < |\tilde{\xi}_1 - e^{-3\tau}| + |\tilde{\xi}_2 - e^{-3\tau} - e^{-4\tau}| + |\tilde{\xi}_1 - e^{-3\tau}| < \\ & < 3\delta \end{aligned}$$

Pro důkaz, že je řešení stabilní tedy pro dané $\varepsilon > 0$ stačí zvolit $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Čtenář si možná všimne, že každé další řešení uvažované soustavy je stabilní. Směrové pole a trajektorie řešení jsou

znázorněny na obrázku 6.1. Animace se nachází v příloze v souboru soustavy_trajektorie.mw pod označením Soustava1, případně lze použít soubor interaktivni_soustavy_trajektorie.mw. Zadání této soustavy je v textovém souboru Soustava1.txt.



OBRÁZEK 6.1. Trajektorie řešení soustavy (6.1)

Definice 30. Není-li řešení soustavy (5.1) stabilní, pak budeme hovořit o nestabilním řešení.

Poznámka 31. Řešení u soustavy (5.1) je tedy nestabilní, pokud existují $\varepsilon > 0$ a $\tau > \alpha$ taková, že pro každé δ existuje řešení v a číslo $\tilde{t} \geq \tau$ takové, že platí $\|v(\tau) - u(\tau)\| < \delta$ a zároveň platí $\|v(\tilde{t}) - u(\tilde{t})\| \geq \varepsilon$ nebo hodnota $v(\tilde{t}) - u(\tilde{t})$ není definována.

Příklad 32. Dokažme, že řešení $u(t) = (e^t + e^{2t}, e^t)$ soustavy

$$(6.2) \quad \begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned}$$

je nestabilní. Každé další řešení splňující počáteční podmínku $y(\tau) = \tilde{\xi}$ je funkce ve tvaru $v(t, \tau, \tilde{\xi}) = \left(\tilde{\xi}_2 e^{t-\tau} + (\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2) e^{2t-2\tau}, \tilde{\xi}_2 e^{t-\tau} \right)$. Označíme-li $\xi = u(\tau) = (e^\tau + e^{2\tau}, e^\tau)$, pak máme podle poznámky za definicí 30 dokázat, existují čísla $\varepsilon > 0$ a $\tau \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $\delta > 0$ existuje řešení $v(t, \tau, \xi)$ a číslo $\tilde{t} \geq \tau$ takové, že platí:

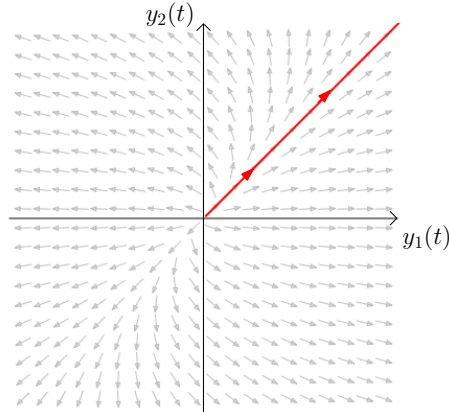
$$\left(\|\tilde{\xi} - \xi\|_\infty < \delta \right) \wedge \left(\left\| \left(\tilde{\xi}_2 e^{\tilde{t}-\tau} + (\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2) e^{2\tilde{t}-2\tau}, \tilde{\xi}_2 e^{\tilde{t}-\tau} \right) - (e^\tau + e^{2\tau}, e^\tau) \right\|_\infty \geq \varepsilon \right).$$

Zvolme např. $\varepsilon = 1$, $\tau = 0$. Pak pro každé $\xi_2 \neq 1$, bude rozdíl $\left| \tilde{\xi}_2 e^{t-0} - e^0 \right| = \left| \tilde{\xi}_2 e^t - 1 \right|$ jistě funkce neohraničená. Položme $\tilde{t} = -\ln \left| \tilde{\xi}_2 - 1 \right|$. Potom bude platit pro každé $t > \tilde{t}$ nerovnost $e^t \left| \tilde{\xi}_2 - 1 \right| \geq 1$ a tudíž

$$1 \leq e^{\tilde{t}} \left| \tilde{\xi}_2 - 1 \right| \leq \left\| \left(\tilde{\xi}_2 e^{\tilde{t}-\tau} + (\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2) e^{2\tilde{t}-2\tau}, \tilde{\xi}_2 e^{\tilde{t}-\tau} \right) - (e^\tau + e^{2\tau}, e^\tau) \right\|_\infty.$$

Tím jsme ovšem s důkazem nestability řešení $u(t)$ hotovi.

Směrové pole a trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 6.2. Animace se nachází v příloze v souboru soustavy_trajektorie.mw označen jako Soustava2, případně lze použít soubor interaktivni_soustavy_trajektorie.mw. Zadání této soustavy je v textovém souboru Soustava2.txt.



OBRÁZEK 6.2. Trajektorie řešení soustavy (6.2)

Definice 33. Nechť je dáno řešení u soustavy (5.1) na intervalu $(\alpha, +\infty)$. Řešení u se nazývá stejnoměrně (ljapunovsky) stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon)$ takové, že pokud pro libovolné $\tau > \alpha$ a každé řešení v platí implikace: $\|v(\tau) - u(\tau)\| < \delta \Rightarrow \|v(t) - u(t)\| < \varepsilon$, pro každé $t \geq \tau$.

Definice 34. Nechť je dáno řešení u soustavy (5.1) na intervalu $(\alpha, +\infty)$. Řešení u se nazývá asymptoticky (ljapunovsky) stabilní, je-li stabilní a zároveň když ke každému $\tau > \alpha$ existuje δ takové, že pro každé řešení v rovnice (5.1) platí:

$$(6.3) \quad \|v(\tau) - u(\tau)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t) - u(t)\| = 0.$$

Poznámka 35. Stejně jako v případě vyšetřování stability řešení obyčejných diferenciálních rovnic můžeme převést vyšetřování stability řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic na vyšetřování stability triviálního řešení. Definice 28, 30, 33, 34 se pak zjednoduší, podobně jako u skalárních rovnic.

Příklad 36. Dokažme, že triviální řešení soustavy

$$(6.4) \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{aligned}$$

je stejnoměrně stabilní, ale není asymptoticky stabilní. Snadno lze ověřit, že dvojice

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

tvoří fundamentální systém řešení zadané soustavy. Odtud lze odvodit, že řešení, které splňuje počáteční podmínku $y(\tau) = \tilde{\xi}$, lze zapsat ve tvaru

$$v(t, \tau, \tilde{\xi}) = \left(\tilde{\xi}_1(\cos(t) \cos(\tau) + \sin(t) \sin(\tau)) + \tilde{\xi}_2(\cos(t) \sin(\tau) - \sin(t) \cos(\tau)), \right. \\ \left. \tilde{\xi}_1(\sin(t) \cos(\tau) - \cos(t) \sin(\tau)) + \tilde{\xi}_2(\cos(t) \cos(\tau) + \sin(t) \sin(\tau)) \right).$$

Nejprve dokážeme, že triviální řešení je stejnoměrně stabilní. Tedy máme dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ a $\tau \in \mathbb{R}$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že platí:

$$\|\tilde{\xi}\| < \delta \Rightarrow$$

$$\left\| \tilde{\xi}_1(\cos(t)\cos(\tau) + \sin(t)\sin(\tau)) + \tilde{\xi}_2(\cos(t)\sin(\tau) - \sin(t)\cos(\tau)), \right.$$

$$\left. \tilde{\xi}_1(\sin(t)\cos(\tau) - \cos(t)\sin(\tau)) + \tilde{\xi}_2(\cos(t)\cos(\tau) + \sin(t)\sin(\tau)) \right\| < \varepsilon, \text{ pro každé } t \geq \tau.$$

Zvolíme-li za normu $\|\cdot\|$ normu součtovou, pak pro horní odhad $\|v(t, \tau, \tilde{\xi})\|_1$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \|v(t, \tau, \tilde{\xi})\|_1 &= \left| \tilde{\xi}_1(\cos(t)\cos(\tau) + \sin(t)\sin(\tau)) + \tilde{\xi}_2(\cos(t)\sin(\tau) - \sin(t)\cos(\tau)) \right| + \\ &+ \left| \tilde{\xi}_1(\sin(t)\cos(\tau) - \cos(t)\sin(\tau)) + \tilde{\xi}_2(\cos(t)\cos(\tau) + \sin(t)\sin(\tau)) \right| \leq \\ &\leq 2|\tilde{\xi}_1| + 2|\tilde{\xi}_2| + 2|\tilde{\xi}_1| + 2|\tilde{\xi}_2| = 4\|\tilde{\xi}\|_1, \text{ pro každé } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Přiřadíme-li tedy ke zvolenému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, dostáváme $\|v(t, \tau, \tilde{\xi})\|_1 \leq 4\|\tilde{\xi}\|_1 < 4\delta = \varepsilon$, čímž jsme dokázali, že triviální řešení je stejnoměrně stabilní.

Nyní dokážeme, že triviální řešení soustavy (6.4) není asymptoticky stabilní. Tedy, že pro každé $\delta > 0$ a libovolné $\tau \in \mathbb{R}$ existuje $\tilde{\xi}$ takové, že neplatí: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, \tau, \tilde{\xi})\| = 0$.

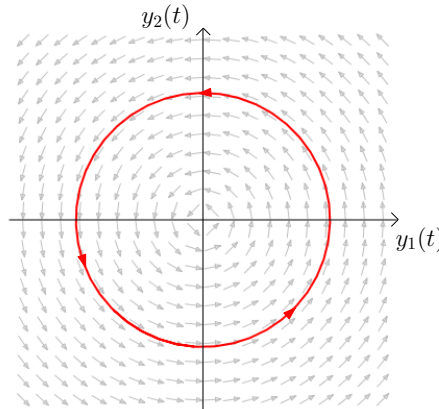
Zvolme libovolně $\delta > 0$, $\tau > 0$ a položme například $\tilde{\xi} = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$. Abychom ukázali, že neplatí $\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, \tau, \tilde{\xi})\| = 0$, najdeme vhodné vybrané posloupnosti takové, aby jejich limity byly různé. Zřejmě platí:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v(2k\pi, \tau, \tilde{\xi})| = \tilde{\xi}_1 \cos(\tau) + \tilde{\xi}_2 \sin(\tau) = \frac{\delta}{2} (\cos(\tau) + \sin(\tau)),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v((2k+1)\pi, \tau, \tilde{\xi})| = -\tilde{\xi}_1 \cos(\tau) - \tilde{\xi}_2 \sin(\tau) = -\frac{\delta}{2} (\cos(\tau) + \sin(\tau)).$$

Zjistili jsme, že neexistuje $\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, \tau, \tilde{\xi})\|$, takže triviální řešení není asymptoticky stabilní.

Směrové pole a trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 6.3. Animace se nachází v příloze v souboru soustavy_trajektorie.mw označen jako Soustava3, případně lze použít soubor interaktivni_soustavy_trajektorie.mw. Zadání této soustavy je v textovém souboru Soustava3.txt.



OBRÁZEK 6.3. Trajektorie řešení soustavy (6.4)

Příklad 37. Dokažme, že triviální řešení soustavy

$$(6.5) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 2y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

je stejnoměrně asymptoticky stabilní. Každé řešení splňující počáteční podmínku $y(\tau) = \tilde{\xi}$, můžeme zapsat ve tvaru

$$v(t, \tau, \tilde{\xi}) = \left(- \left(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right) e^{-2t+2\tau} + \left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right) e^{-t+\tau}, 2 \left(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right) e^{-2t+2\tau} - \left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right) e^{-t+\tau} \right).$$

Dokažme, že triviální řešení je stejnoměrně stabilní. Tedy, že pro každé $\varepsilon > 0$ a $\tau \in \mathbb{R}$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že platí

$$\|\tilde{\xi}\| < \delta \Rightarrow \left\| - \left(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right) e^{-2t+2\tau} + \left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right) e^{-t+\tau}, 2 \left(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right) e^{-2t+2\tau} - \left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right) e^{-t+\tau} \right\| < \varepsilon.$$

Za normu zvolíme normu součtovou a tím dostáváme pro $\|v(t, \tau, \tilde{\xi})\|_1$ následující odhady:

$$\begin{aligned} \|v(t, \tau, \tilde{\xi})\|_1 &= \left| - \left(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right) e^{-2t+2\tau} + \left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right) e^{-t+\tau} \right| + \left| 2 \left(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right) e^{-2t+2\tau} - \left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right) e^{-t+\tau} \right| \leq \\ &\leq \left| -\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right| + \left| \tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right| + \left| 2\tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2 \right| + \left| -\tilde{\xi}_2 - 2\tilde{\xi}_1 \right| \leq \\ &\leq 7 \left(\left| \tilde{\xi}_1 \right| + \left| \tilde{\xi}_2 \right| \right) = 7\|\tilde{\xi}\|_1, \text{ pro každé } t \geq \tau. \end{aligned}$$

K dokončení důkazu stejnoměrné stability triviálního řešení stačí ke zvolenému $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ položit $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$.

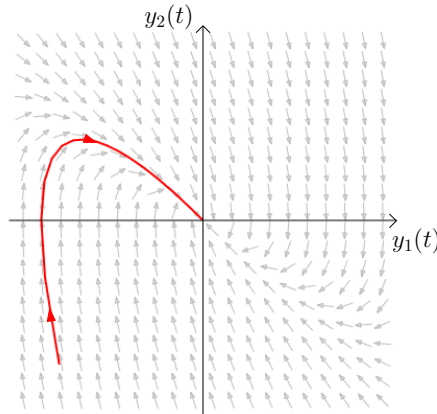
K důkazu asymptotické stability musíme ukázat, že ke každému $\tau \in \mathbb{R}$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí:

$$\|\tilde{\xi}\|_1 < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, \tau, \tilde{\xi})\|_1 = 0.$$

Použijeme-li opět normu součtovou, pak zřejmě platí

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left| - \left(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right) e^{-2t+2\tau} + \left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right) e^{-t+\tau} \right| + \left| 2 \left(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right) e^{-2t+2\tau} - \left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right) e^{-t+\tau} \right| \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{- \left(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right) e^{2\tau}}{e^{2t}} + \frac{\left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right) e^{\tau}}{e^t} \right| + \left| \frac{2 \left(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \right) e^{2\tau}}{e^{2t}} - \frac{\left(\tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_1 \right) e^{\tau}}{e^t} \right| \right) = 0. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že triviální řešení soustavy (6.5) je stejnoměrně asymptoticky stabilní. Směrové pole a trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 6.4. Animace se nachází v příloze v souboru soustavy_trajektorie.mw označen jako Soustava4, případně lze použít soubor interaktivni_soustavy_trajektorie.mw. Zadání této soustavy je v textovém souboru Soustava4.txt.



OBRÁZEK 6.4. Trajektorie řešení soustavy (6.5)

7. KRITÉRIA STABILITY PRO LINEÁRNÍ SOUSTAVY

Uvažujme lineární systém

$$(7.1) \quad y' = A(t)y,$$

kde A je reálná spojitá matice typu (n, n) definovaná na \mathbb{R} .

Věta 38. Triviální řešení soustavy (7.1) je stabilní právě tehdy, když existuje číslo $M > 0$ takové, že pro fundamentální matici $V(t, \tau)$, která je maticovým řešením (7.1) platí $\|V(t, \tau)\| \leq M$ pro každé $t \geq \tau$, což znamená, že každé řešení soustavy (7.1) je ohraničené.

Důkaz. Necht' pro každý bod $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ jsou všechna řešení $v(t, \tau, \xi)$ Cauchyovy úlohy (5.4) omezená pro $t < \tau, \infty$. Pak také standardní fundamentální matice $V(t, \tau)$ Cauchyovy úlohy (5.4) je omezená pro každé $t \geq \tau$, tedy existuje číslo M takové, že $\|V(t, \tau)\| \leq M$, pro každé $t \geq \tau$. Protože $v(t, \tau, \xi) = V(t, \tau)\xi$, pro pevně zvolené číslo $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ takové, že jakmile $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| < \delta$, potom:

$$\|v(t, \tau, \xi)\| = \|V(t, \tau)\|\|\xi\| < M\delta = \varepsilon,$$

pro každé $t \geq \tau$. A tedy triviální řešení Cauchyovy úlohy (5.4) je stabilní.

Obráceně, necht' je triviální řešení (7.1) stabilní. Pak $\|v(t, \tau, \xi)\| < \varepsilon$ pro každé $t > \tau$, jestliže $\|\xi\| < \delta$. Jelikož $\|v(t, \tau, \xi)\| = \|V(t, \tau)\|\|\xi\| < \varepsilon$ je funkce $V(t, \tau)$ ohraničená na $< \tau, \infty$. \square

Věta 39. Triviální řešení soustavy (7.1) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když pro fundamentální matici $V(t, \tau)$, která je maticovým řešením (7.1) platí $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t, \tau)\| = 0$.

Důkaz. Necht' $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t, \tau)\| = 0$. Pak zřejmě existuje M takové, že

$$\forall t \geq \tau : \|V(t, \tau)\| \leq M.$$

Odtud plyne ohraničenost všech řešení na $(-\infty, \tau)$ a následně stabilita triviálního řešení. Navíc platí

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, \tau)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t, \tau)\| \|\xi\| = 0,$$

takže triviální řešení je asymptoticky stabilní.

Obráceně předpokládejme asymptotickou stabilitu triviálního řešení soustavy (7.1). Pak existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| < \delta$ platí:

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, \tau, \xi)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t, \tau)\| \|\xi\|.$$

Postupnými volbami

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\delta}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \xi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\delta}{2} \end{pmatrix}.$$

Z výše uvedeného vztahu tak snadno zajistíme, že jednotlivé sloupce matice $V(t, \tau)$ konvergují k nulovým vektorům pro $t \rightarrow \infty$. Odtud ihned plyne, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t, \tau)\| = 0$$

a s důkazem jsme hotovi. □

Uvažujme nyní autonomní homogenní soustavu

$$(7.2) \quad y' = Ay,$$

tedy předpokládejme, že A je konstantní reálná matice typu (n, n) . Pak lze vyslovit následující tvrzení.

Věta 40. *Nechť všechna vlastní čísla matice A mají záporné reálné části. Pak každé řešení soustavy (7.1) je asymptoticky stabilní.*

Důkaz. Díky poznámce 16 víme, že řešení autonomní soustavy je stejnoměrně stabilní právě, tehdy, když je stabilní. Z poznámky 35 dále plyne, že vyšetřování stability řešení soustavy (7.2) lze převést na vyšetřování stability triviálního řešení této soustavy.

Řešení fundamentálního systému (7.1) můžeme zapsat ve tvaru

$$v(t) = \sum_{j=1}^r e^{\alpha_j t} (P_j(t) \cos \beta_j t + Q_j(t) \sin \beta_j t),$$

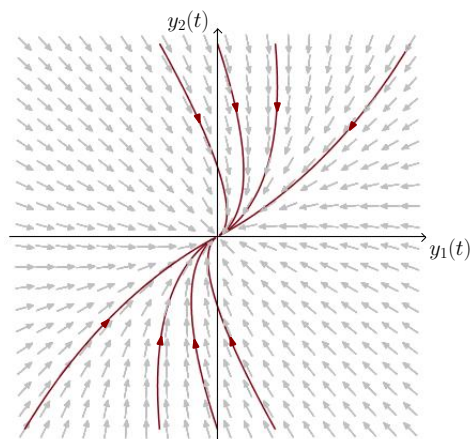
kde P_j, Q_j jsou polynomy a $\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_r + i\beta_r$ jsou vlastní čísla matice A .

Nejdříve budeme vyšetřovat případ, kdy $\alpha_j < 0$, $\forall j \in \{1, \dots, r\}$. Pak je funkce $v(t)$ jistě ohraničená a proto je podle věty 38 triviální řešení stabilní. Aby bylo řešení $v(t)$ také asymptoticky stabilní musí podle věty 39 platit $\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t)\| = 0$. Pro každý sčítanec řešení $v(t)$ ve tvaru $e^{\alpha_j t} (P(t) \cos \beta_j t + Q(t) \sin \beta_j t)$ bude platit $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{\alpha_j t} (P(t) \cos \beta_j t + Q(t) \sin \beta_j t)\| = 0$ a proto bude platit $\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t)\| = 0$.

Nechť $\alpha > 0$. Platí $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{\alpha_j t} (P(t) \cos \beta_j t + Q(t) \sin \beta_j t)\| = \infty$, proto podle věty 39 není triviální řešení asymptoticky stabilní. Funkce $v(t)$ není ani ohraničená a tedy je nestabilní. □

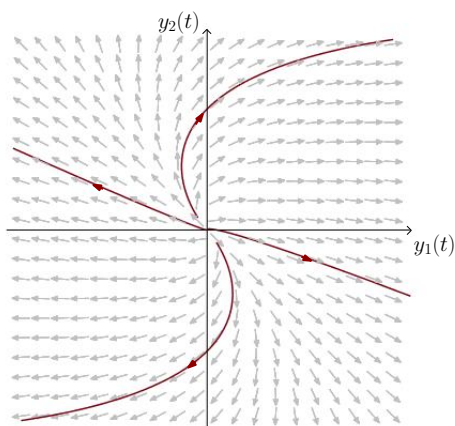
Nyní budeme uvažovat speciální případ pro $n = 2$. Jestliže pro reálná vlastní čísla λ_1, λ_2 matice A platí:

- (1) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, pak je triviální řešení asymptoticky stabilní a tvoří přitahující uzel (viz obrázek 7.1),



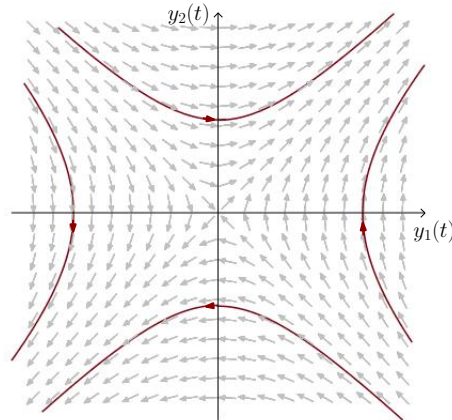
OBRÁZEK 7.1. Přitahující uzel

- (2) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, pak je triviální řešení nestabilní a tvoří odpuzující uzel (viz obrázek 7.2),



OBRÁZEK 7.2. Odpuzující uzel

- (3) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ nebo $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, pak je triviální řešení nestabilní a tvoří sedlo (viz obrázek 7.3),

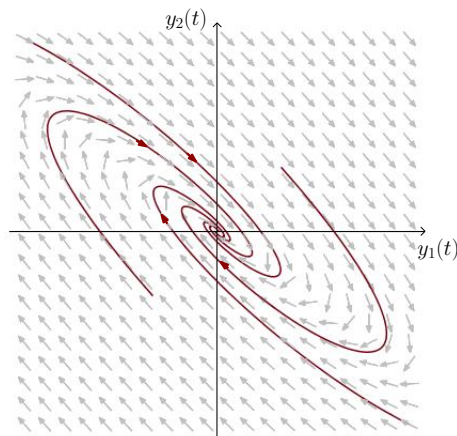


OBRÁZEK 7.3. Sedlo

- (4) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ nebo $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$, pak je triviální řešení stabilní,
- (5) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ nebo $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$, pak je triviální řešení nestabilní.

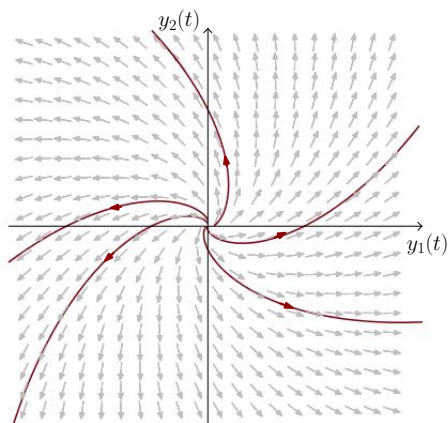
Jestliže $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ jsou komplexně sdružená vlastní čísla A , pak pro

- (1) $\alpha < 0$ je triviální řešení asymptoticky stabilní a tvoří přitahující ohnisko (viz obrázek 7.4),



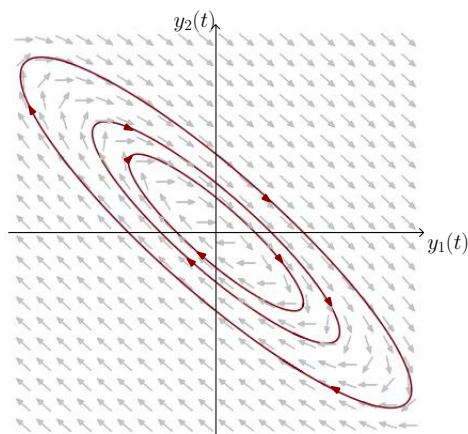
OBRÁZEK 7.4. Přitahující ohnisko

- (2) $\alpha > 0$ je triviální řešení nestabilní a tvoří odpuzující ohnisko (viz obrázek 7.5),



OBRÁZEK 7.5. Odpuzující ohnisko

(3) $\alpha > 0$ je triviální řešení stabilní a tvoří střed (viz obrázek 7.6).



OBRÁZEK 7.6. Střed

Animace trajektorií všech typů singulárních bodů se nacházejí v příloze soustavy_trajektorie.mw. Společně s trajektoriemi řešení jsou znázorněna také směrová pole.

Další možností je použití příkazu `DEplot[interactive]()`, díky kterému můžeme měnit počáteční hodnoty a další parametry.

Pro ilustraci ještě uvedeme následující tvrzení.

Věta 41. *Nechť A je konstantní čtvercová matice typu (n, n) , jejíž triviální řešení je stabilní. Nechť $B(t)$ je spojitá maticová funkce na intervalu $\langle \alpha, \infty \rangle$, stejného typu, pro kterou platí*

$$\int_{\alpha}^{\infty} \|B(t)\| < \infty.$$

Pak každé řešení

$$(7.3) \quad y' = (A + B(t)) y$$

je stabilní.

8. METODA LINEARIZACE

Věta 42. *Uvažujme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic*

$$(8.1) \quad y' = Ay + g(t, y),$$

kde A je konstantní čtvercová matice A typu (n, n) a $g : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá vektorová funkce. Nechť pro každé $t \in \mathbb{R}$ je $g(t, o) = o$. Nechť existuje funkce $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, že pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\|g(t, y)\| \leq \|h(t, y)\|,$$

přičemž

$$(8.2) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\|h(y)\|}{\|y\|} = 0,$$

Pak platí:

Má-li A všechny reálné části vlastních čísel záporné, pak triviální řešení soustavy (7.1) je asymptoticky stabilní.

Poznámka 43. Podmínka vlastně vyjadřuje, že jsme soustavu (7.1) „porušili“ nelinearitou g , která je na okolí bodů (t, o) „dostatečně malá“.

Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá na oblasti $H \subset \mathbb{R}^n$ a bod $o \in H$, v němž je funkce f diferencovatelná.

Dále uvažujme nelineární soustavu

$$(8.3) \quad y' = f(y).$$

Vzhledem k diferencovatelnosti funkce f v bodě o dostáváme pomocí Taylorovy věty:

$$f(y) = f(o) + f'(o)y + h(y),$$

kde pro funkci g platí:

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{\|h(y)\|}{\|y\|} = 0$$

přičemž $f'(o)$ je Jacobiho matice v bodě o

$$(8.4) \quad f'(o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(o) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(o) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(o) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(o) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(o) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(o) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(o) & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(o) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(o) \end{pmatrix}.$$

Má-li soustava (8.3) triviální řešení v bodě o , pak platí $f(o) = o$, takže soustavu (8.3) lze zapsat ve tvaru

$$y' = Ay + h(y),$$

kde $A = f'(o)$.

Věta 44. Pro nelineární soustavu diferenciálních rovnic (8.3) platí:

Jestliže mají všechny kořeny charakteristické rovnice matice (8.4) záporné reálné části, je triviální řešení $y(t) = o$ soustavy (8.3) asymptoticky stabilní.

Pokud má alespoň jeden z kořenů charakteristické rovnice matice (8.4) kladnou část, je triviální řešení $y(t) = o$ soustavy (8.3) nestabilní.

9. LJAPUNOVY VĚTY

Nechť je dána soustava obyčejných diferenciálních rovnic

$$(9.1) \quad y' = f(t, y)$$

kde $f : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je funkce spojitá na oblasti $G = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \in (\alpha, \infty) : \|y\| < B\}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $B > 0$ jsou zadaná čísla. Nechť dále pro f platí spojitost parciálních derivací podle druhé až n -té proměnné. Nechť dále platí $f(t, o) = o$, pro každé $t \in (\alpha, \infty)$, takže soustava (9.1) má triviální řešení.

Uvažujme funkci $V : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}$, takovou, že $V(t, o) = o$, pro každé $t > \alpha$. A spojitou na oblasti G . Dále nechť V má na G spojitě parciální derivace $\frac{\partial V(t, y)}{\partial t}, \frac{\partial V(t, y)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial V(t, y)}{\partial y_n}$. K funkci V pak na G existuje funkce \dot{V} definovaná předpisem:

$$\dot{V}(t, y) = \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, y)}{\partial y_1} f_1(t, y) + \dots + \frac{\partial V(t, y)}{\partial y_n} f_n(t, y).$$

Poznamenejme, že funkci \dot{V} budeme nazývat derivací V podél směrového pole f . Pokud v je řešením Cauchyovy úlohy (9.1), $y(\tau) = \xi$, pak dosazením do výše uvedeného vztahu dostaneme funkci

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, v(t, \tau, \xi)) &= \frac{\partial V(t, v(t, \tau, \xi))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, v(t, \tau, \xi))}{\partial y_1} f_1(t, v(t, \tau, \xi)) + \dots + \\ &+ \frac{\partial V(t, v(t, \tau, \xi))}{\partial y_n} f_n(t, v(t, \tau, \xi)) = \frac{dV(t, v(t, \tau, \xi))}{dt} \end{aligned}$$

závislou pouze na t . Tedy funkce V je nerostoucí podél grafu řešení v , pokud $\dot{V} \leq 0$ a klesající pro $\dot{V} < 0$.

Poznámka 45. Funkci V si můžeme v některých případech představit jako potenciální energii, která je na grafu triviálního řešení nulová. Je-li triviální řešení stabilní, pak V s rostoucím časem na grafech řešení blízkých triviálnímu klesá. A obráceně, klesá-li energie V na grafech řešení blízkých triviálnímu, pak zřejmě půjde o stabilní řešení.

Definice 46. O funkci V říkáme, že je pozitivně semidefinitní na G právě tehdy když $V \geq 0$.

Definice 47. O funkci V říkáme, že je negativně semidefinitní na G právě tehdy když $V \leq 0$.

Definice 48. Nechť existuje funkce W , která je definována a spojitá na množině $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < B\}$ a pro kterou platí $W(o) = o$. Funkce $V(t, y)$ je pozitivně definitní na G právě tehdy, když $V(t, y) \geq W(y) > 0$, pro všechna $(t, y) \in G$, kde $y \neq o$. Funkci $V(t, y)$ nazveme negativně definitní na G právě tehdy když $V(t, y) \leq W(y) < 0$, pro všechna $(t, y) \in G$, kde $y \neq o$.

Věta 49. *Triviální řešení soustavy (9.1) je Ljapunovsky stabilní, jestliže v oblasti G je definována pozitivně definitní funkce V , která má negativně semidefinitní derivaci \dot{V} .*

Důkaz. Protože je funkce V pozitivně definitní na oblasti G , existuje spojitá funkce W , taková, že $W(o) = 0$ a pro každé $(t, y) \in G$, kde $y \neq o$ platí:

$$V(t, y) \geq W(y) > 0.$$

Nechť je libovolně dáno $\tau \in (\alpha, \infty)$ a $\varepsilon \in (0, B)$. Označíme

$$(9.2) \quad a = \min\{W(y), \|y\| = \varepsilon\}.$$

Protože je funkce V spojitá a platí $V(\tau, o) = 0$, existuje $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, a)$ takové, že pokud platí $\|y\| < \delta$, pak

$$(9.3) \quad V(\tau, y) < a.$$

Nyní dokážeme že zvolíme-li ξ takové, že $\|\xi\| < \delta$, pak pro řešení $v(t, \tau, \xi)$ soustavy (9.1) bude platit

$$\|v(t, \tau, \xi)\| < \varepsilon$$

pro každé $t \geq \tau$. Budeme předpokládat, že existuje $\tilde{t} \geq \tau$ takové, že $\|v(t, \tau, \xi)\| < \varepsilon$ pro každé $t \in (\tau, \tilde{t})$ a že $\|v(\tilde{t}, \tau, \xi)\| = \varepsilon$. Postupným použitím (9.3), negativní semidefinitnosti a (9.2) tím dostáváme

$$a > V(\tau, \xi) \geq V(\tilde{t}, v(\tau, \tau, \xi)) \geq W(v(\tilde{t}, \tau, \xi)) \geq a,$$

takže $a > a$, což je spor. Triviální řešení je tedy stabilní. □

Definice 50. Funkce V definovaná na $G = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \in (\alpha, \infty) : \|y\| < B\}$ je stejnoměrně omezená pro $y \rightarrow o$, jestliže existuje $\beta > \alpha$ takové, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $t > \beta$ a každé $y \in \mathbb{R}^n$, kde $\|y\| < \delta$ je $|V(t, y)| < \varepsilon$.

Podobně jako v případě vyšetřování stability s využitím Ljapunovovy funkce lze dokázat tvrzení o asymptotické stabilitě, či nestabilitě. Pro ilustraci si uveďme třeba formulaci dvou následujících tvrzení.

Věta 51. *Nechť je v oblasti G definována pozitivně definitní funkce V , která je stejnoměrně omezená pro $y \rightarrow o$. Nechť V má dále negativně semidefinitní derivaci \dot{V} . Pak triviální řešení soustavy (9.1) je Ljapunovsky asymptoticky stabilní.*

Věta 52. *Nechť je v oblasti G definována funkce V stejnoměrně omezená pro $y \rightarrow o$, která má definitní derivaci \dot{V} . Jestliže existuje $\tau > \alpha$ takové, že ke každému $\beta \in (0, B)$ existuje ξ , kde $\|\xi\| < \beta$ takové, že platí*

$$V(\tau, \xi)\dot{V}(\tau, \xi) > 0,$$

pak triviální řešení soustavy (9.1) je Ljapunovsky nestabilní.

Poznámka 53. Důkaz vět 49 a 52 lze nalézt např. v [9], str. 61 a 63.

Nyní se budeme zabývat stabilitou autonomních soustav

$$(9.4) \quad y' = f(y)$$

Nechť má soustava triviální řešení, takže platí $f(o) = o$ a nechť existuje číslo $B > 0$ takové, že Cauchyova úloha

$$y' = f(y), \quad y(o) = \xi$$

je jednoznačně řešitelná pro každé $\xi \in H = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < B\}$. Na funkci f klademe tedy předpoklady stejného typu, jako v úvodu této kapitoly, což je spojitost parciálních derivací podle první až n -té proměnné. Poznamenejme, že v autonomním případě lze stejnoměrnou omezenost Ljapunovovy funkce $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zajistit spojitostí V v bodě o a vztahem $V(o) = 0$.

Věty 49 až 52 lze přeformulovat do následujících tvrzení:

Věta 54. *Jestliže existuje funkce V diferencovatelná na H taková, že $V(o) = 0$, $V(y) > 0$ a $\dot{V} \leq 0$, pak triviální řešení (9.4) je Ljapunovsky stabilní.*

Věta 55. *Jestliže existuje funkce V diferencovatelná na H taková, že $V(o) = 0$, $V(y) > 0$ a $\dot{V} < 0$, pak triviální řešení (9.4) je asymptoticky Ljapunovsky stabilní.*

Věta 56. *Jestliže existuje funkce V diferencovatelná na H taková, že $V(o) = 0$, $\dot{V} < 0$ nebo $\dot{V} > 0$ a ke každému $\beta \in (0, B)$ existuje $\xi \in H$, kde $\|\xi\| < \beta$ tak, že $V(\xi)V'(\xi) > 0$, pak triviální řešení (9.4) je Ljapunovsky nestabilní.*

Animace k příkladům z této kapitoly lze opět najít v příloze. Pomocí příkazu `animate` jsou zde vykresleny trajektorie zadaných diferenciálních rovnic společně se směrovým polem pro pevně zadané počáteční podmínky. Alternativní možností je použití příkazu `DEplot[interactive]()`, který umožňuje změnu počátečních podmínek apod.

Dále jsou v přílohách pro konkrétní příklady znázorněny zadané Ljapunovovy funkce na intervalu $< 0, 5 >$.

Dokažme, že triviální řešení diferenciální rovnice

$$(9.5) \quad y' = -y^3$$

je Ljapunovsky stabilní. Funkce $f(y) = -y^3$ je diferencovatelná na \mathbb{R} a proto má každá Cauchyova úloha této diferenciální rovnice jednoznačné řešení. Dokažme, že Ljapunovova funkce zadaná předpisem

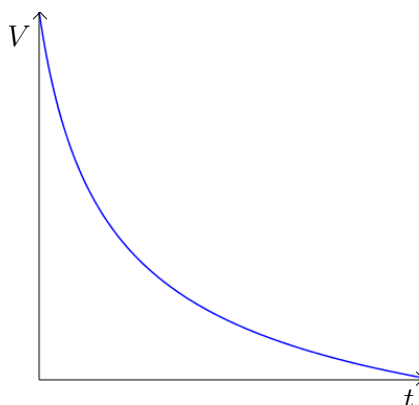
$$V(y) = \frac{1}{2}y^2$$

splňuje podmínky věty 54. Funkce \dot{V} je zadaná předpisem

$$\dot{V} = y(-y^3) = -y^4.$$

Protože je funkce V pozitivně definitní a zároveň je \dot{V} negativně definitní je triviální řešení diferenciální rovnice (9.5) stabilní. Ljapunovova funkce pro tento příklad je znázorněna na obrázku 9.1. Animace této funkce se nachází v příloze v souboru `ljapunovova_funkce_skalarni_ODR.mw`. Animace trajektorií řešení lze ilustrovat pomocí příkazu v souboru nazvaném

interaktivni_soustavy_trajektorie.mw. Zadání pro tuto diferenciální rovnici se nachází v textovém souboru s názvem Skalarni_ODR_4.txt.



OBRÁZEK 9.1. Ljapunovova funkce pro diferenciální rovnici (9.5)

Příklad 57. Dokažme, že triviální řešení soustavy

$$(9.6) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 - y_1 - y_1^3 - y_1^5 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

je Ljapunovsky stabilní. Protože vektorová funkce $f(y_1, y_2) = (y_2 - y_1 - y_1^3 - y_1^5, -y_1)$ je na celé rovině spojitě diferencovatelná, má každá Cauchyova úloha pro soustavu (9.6) jednoznačné řešení. Ljapunovovu funkci V budeme hledat ve tvaru kvadratické formy

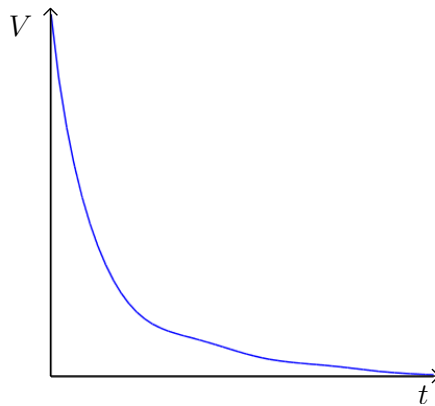
$$V(y_1, y_2) = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2.$$

Pro funkci \dot{V} má platit

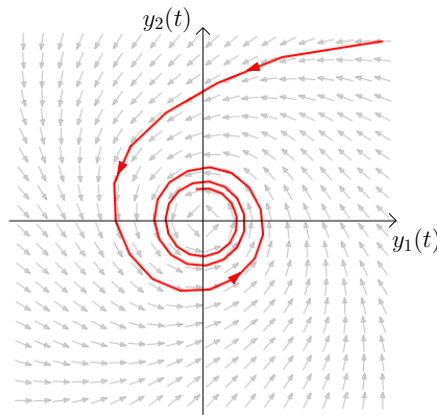
$$\begin{aligned} \dot{V}(y_1, y_2) &= 2a_1 y_1 (y_2 - y_1 - y_1^3 - y_1^5) + 2a_2 y_2 (-y_1) = \\ &= 2a_1 y_1 y_2 - 2a_1 y_1^2 - 2a_1 y_1^4 - 2a_1 y_1^6 - 2a_2 y_1 y_2 = \\ &= 2y_1 y_2 (a_1 - a_2) - 2a_1 (y_1^2 + y_1^4 + y_1^6). \end{aligned}$$

Jestliže zvolíme například $a_1 = a_2 = 1$, pak funkce V je pozitivně definitní a zároveň \dot{V} je negativně semidefinitní. Triviální řešení soustavy (9.6) je tedy podle věty 54 stabilní.

Ljapunovova funkce pro tento příklad je znázorněna na obrázku 9.2. Animace příslušné Ljapunovovy funkce se nachází v příloze v souboru ljapunovova_funkce.mw, označena jako Ljapunovova funkce1. Trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 9.3. Animace trajektorií je buďto v příloze v souboru ljapunovova_funkce.mw, označena jako Trajektorie soustavy1 nebo ji lze ilustrovat pomocí příkazu v souboru interaktivni_soustavy_trajektorie.mw. Zadání pro tuto diferenciální rovnici se nachází v textovém souboru Trajektorie_soustavy_1.txt.



OBRÁZEK 9.2. Ljapunovova funkce pro soustavu (9.6)



OBRÁZEK 9.3. Trajektorie řešení soustavy (9.6)

Příklad 58. Dokažme, že triviální řešení soustavy

$$(9.7) \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_1^3 - y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_2^3 \end{aligned}$$

je asymptoticky Ljapunovsky stabilní. Vektorová funkce $f(y_1, y_2) = (-y_1^3 - y_2, y_1 - y_2^3)$ je spojitě diferencovatelná na celé rovině a proto je zadaná úloha jednoznačně řešitelná. Dokažme, že kvadratická forma

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$$

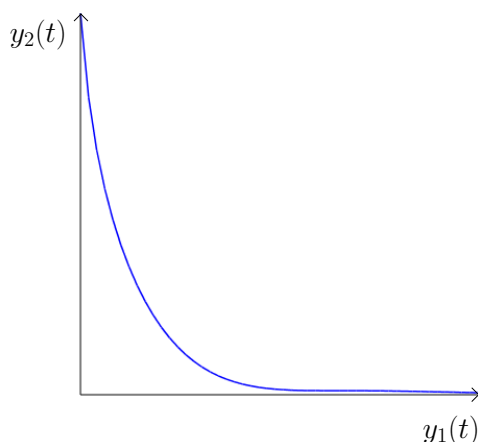
splňuje podmínku z věty 55. Funkce V je pozitivně definitní a navíc platí

$$\dot{V}(y_1, y_2) = 2y_1(-y_1^3 - y_2) + 2y_2(y_1 - y_2^3) = -2y_1y_2 - 2y_1^4 + 2y_1y_2 - 2y_2^4 = -2(y_1^4 + y_2^4),$$

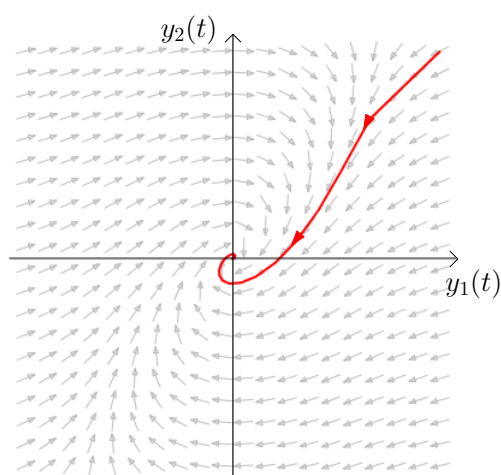
takže funkce \dot{V} je negativně definitní, tedy i negativně semidefinitní. Podmínky věty 55 jsou splněny a proto je řešení asymptoticky Ljapunovsky stabilní.

Ljapunovova funkce pro tento příklad je znázorněna na obrázku 9.4. Animace Ljapunovovy funkce se nachází v příloze v souboru `ljapunovova_funkce.mw`, označena jako Ljapunovova funkce2. Trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 9.5. Animace trajektorií je buďto v příloze v souboru `ljapunovova_funkce.mw`, označena jako Trajektorie soustavy2 nebo ji lze ilustrovat

pomocí příkazu v souboru interaktivni_soustavy_trajektorie.mw. Zadání pro tuto diferenciální rovnici se nachází v textovém souboru Trajektorie_soustavy_2.txt.



OBRÁZEK 9.4. Ljapunovova funkce pro soustavu (9.7)



OBRÁZEK 9.5. Trajektorie řešení soustavy (9.7)

Příklad 59. Dokažme, že triviální řešení soustavy

$$(9.8) \quad \begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + y_1 e^{y_2} \\ y_2' &= -y_1 + 4y_2 + y_2 \cosh y_1 \end{aligned}$$

je Ljapunovsky nestabilní. Abychom dokázali nestabilitu triviálního řešení soustavy (9.8), musíme najít funkci V splňující podmínky z věty 56. Definujme funkci V předpisem

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2.$$

Pro funkci \dot{V} platí

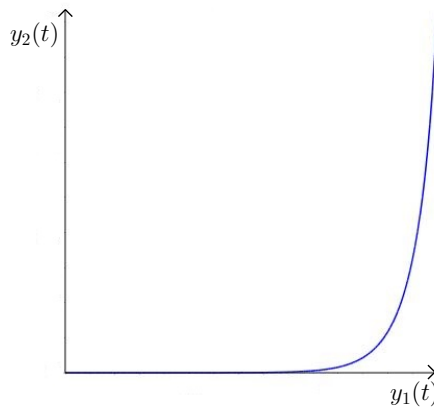
$$\begin{aligned} \dot{V}(y_1, y_2) &= 2y_1(2y_1 + y_2 + y_1 e^{y_2}) + 2y_2(-y_1 + 4y_2 + y_2 \cosh y_1) = \\ &= 4y_1^2 + 2y_1 y_2 + 2y_1^2 e^{y_2} - 2y_1 y_2 + 8y_2^2 + 2y_2^2 \cosh y_1 = \\ &= 4y_1^2 + 2y_1^2 e^{y_2} + 8y_2^2 + 2y_2^2 \cosh y_1. \end{aligned}$$

Funkce \dot{V} je tedy pozitivně definitní. Pro každé $y = (y_1, 0)$, kde $y_1 \neq 0$ navíc platí

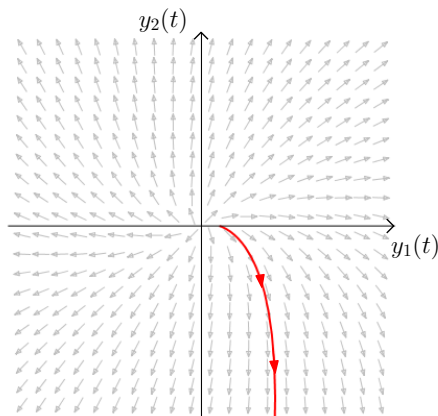
$$V(y_1, 0)\dot{V}(y_1, 0) = y_1^2(4y_1^2 + 2y_1^2) > 0.$$

Předpoklady z věty 56 jsou tedy splněny a proto je triviální řešení soustavy (9.8) nestabilní.

Ljapunovova funkce pro tento příklad je znázorněna na obrázku 9.6. Animace Ljapunovovy funkce se nachází v příloze v souboru `ljapunovova_funkce.mw`, označena jako `Ljapunovova funkce3`. Trajektorie řešení jsou znázorněny na obrázku 9.7. Animace trajektorií se nachází v příloze v souboru `ljapunovova_funkce.mw`, označena jako `Trajektorie soustavy3` nebo ji lze ilustrovat pomocí příkazu v souboru `interaktivni_soustavy_trajektorie.mw`. Zadání pro tuto diferenciální rovnici se nachází v textovém souboru `Trajektorie_soustavy_3.txt`.



OBRÁZEK 9.6. Ljapunovova funkce pro soustavu (9.8)



OBRÁZEK 9.7. Trajektorie řešení soustavy (9.8)

Část 2. Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice

10. ÚVOD

Základní součástí teorie obyčejných diferenciálních rovnic je studium řešitelnosti Cauchyových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice, tedy například takových úloh, kde je k ODR 2. řádu připojen požadavek na hodnotu řešení a hodnotu derivace tohoto řešení *ve stejném bodě*. Na uvedenou problematiku lze pak navázat studiem daleko obtížnější třídy problémů - připojíme-li třeba k ODR místo počátečních podmínek požadavek na hodnoty řešení ve dvou *různých bodech*, nemusí být zajištěna ani existence ani jednoznačnost řešení takovéto úlohy.

Zkoumáme-li například pohyb linearizovaného matematického kyvadla, obdržíme lineární ODR 2. řádu ve tvaru

$$y'' + \lambda y = 0,$$

kde $\lambda = \frac{g}{l} > 0$ závisí na hodnotě gravitačního zrychlení g a délce závěsu kyvadla l . Jednotlivá řešení y naší rovnice pak popisují průběh úhlové výchylky $y(t)$ v závislosti na čase t . Není příliš obtížné ukázat, že po připojení počátečních podmínek ve tvaru $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$ je maximální řešení uvedené Cauchyovy úlohy jediné a je dáno předpisem

$$\varphi(t) = y_0 \cos(\sqrt{\lambda}t) + y_1 \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Zvolíme-li však místo počátečních podmínek třeba podmínky ve tvaru

$$y(0) = y_0, \quad y(\pi) = y_1,$$

získaná úloha má právě jedno maximální řešení, pokud $\sqrt{\lambda} \notin \mathbb{N}$. Pokud $\lambda = n^2$ pro nějaké přirozené n , potom uvedená úloha může mít nekonečně mnoho řešení nebo také řešení uvedené úlohy nemusí existovat.

Podstatná část dalšího textu vychází z pěkné práce [9], k dalšímu studiu v českém jazyce je možné použít například sešit [10].

11. VLASTNÍ ČÍSLA ROVNICE $y'' + \lambda y = 0$

V této sekci se budeme zabývat pěti základními okrajovými úlohami, které představují jednoduché, ale důležité případy, ke kterým dochází při řešení parciálních diferenciálních rovnic. Zavedeme si pojem vlastního čísla a vlastní funkce příslušné úlohy. Ukážeme, že vlastní funkce jsou ortogonální vzhledem k vhodně zvolenému skalárnímu součinu.

Nechť je dáno kladné reálné číslo L . Dále budeme uvažovat následující úlohy:

Problém 1: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$

Problém 2: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$

Problém 3: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$

Problém 4: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$

Problém 5: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L)$

V každém z výše uvedených problémů představují podmínky uvedené za obyčejnou diferenciální rovnicí speciální případ okrajových podmínek. Poznamenejme, že poslední typ okrajové podmínky se poněkud liší od předchozích - jde o tzv. periodickou okrajovou podmínku. Snadno si všimneme, že všechny výše uvedené úlohy mají nulové řešení. Položme si následující otázku:

Pro které hodnoty λ má problém také nenulová řešení? Co můžeme o těchto řešeních říci? Hodnotě λ , která připouští nenulové řešení daného problému budeme říkat vlastní číslo dané úlohy, příslušná nenulová řešení nazýváme vlastními funkcemi příslušnými danému vlastnímu číslu. Problémům 1-5 se říká problémy vlastních čísel, naším cílem je stanovit všechna vlastní čísla a popsat množinu všech vlastních funkcí.

Věta 60. *Úlohy 1-5 mají nezáporná vlastní čísla. Navíc, 0 je vlastním číslem problémů 2, 5, přičemž příslušnou vlastní funkcí je kterákoliv nenulová konstantní funkce. Číslo 0 není vlastním číslem problémů 1, 3, 4.*

Důkaz. Uvažujme problémy 1-4. Jestliže $y'' + \lambda y = 0$, pak $y(y'' + \lambda y) = 0$, takže

$$\int_0^L y(x)(y''(x) + \lambda y(x)) dx = 0.$$

Proto

$$(11.1) \quad \lambda \int_0^L y^2(x) dx = - \int_0^L y(x)y''(x) dx.$$

Integrací per partes odtud získáváme

$$(11.2) \quad \begin{aligned} \int_0^L y(x)y''(x) dx &= y(x)y'(x)|_0^L - \int_0^L (y'(x))^2 dx \\ &= y(L)y'(L) - y(0)y'(0) - \int_0^L (y'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Protože y splňuje okrajové podmínky problémů 1-4, musí platit

$$y(L)y'(L) - y(0)y'(0) = 0,$$

takže ze vztahů (11.1), (11.2) plyne

$$\lambda \int_0^L y^2(x) dx = \int_0^L (y'(x))^2 dx.$$

Pokud $y \neq 0$, pak $\int_0^L y^2(x) dx > 0$. Odtud $\lambda \geq 0$ a pokud $\lambda = 0$, $y'(x) = 0$ na $(0, L)$, takže y je konstantní funkcí na $(0, L)$. Každá konstantní funkce splňuje podmínky Problému 2, takže $\lambda = 0$ představuje vlastní číslo uvedeného problému a každá nenulová konstantní funkce reprezentuje přidruženou vlastní funkci. Nyní si všimněme, že okrajové podmínky problémů 1, 3, 4 splňuje z konstantních funkcí pouze funkce nulová. Proto tyto problémy nemají nulové vlastní číslo. Důkaz pro případ problému 5 se provede podobně, a proto jej přenecháme čtenáři. \square

Příklad 61. Řešme okrajový problém

$$(11.3) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Z věty 60 ihned plyne, že všechna vlastní čísla rovnice (11.3) musí být kladná. Pro $\lambda > 0$ má obecné řešení naší rovnice tvar

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x, \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Z podmínky $y(0) = 0$ plyne $c_1 = 0$. Proto $y(x) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$. Ze vztahu $y(L) = 0$ plyne $c_2 \sin \sqrt{\lambda} L = 0$. K zajištění splnění poslední podmínky s předpokladem $c_2 \neq 0$ je nutné zvolit $\sqrt{\lambda} = n\pi/L$, kde n je přirozené číslo. Proto jsou čísla tvaru $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ vlastními čísly a funkce tvaru $y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$ přidruženými vlastními funkcemi.

Získaný výsledek je dosti důležitý, proto jej zformulujeme ještě jednou jako následující tvrzení:

Věta 62. Problém 1

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

má nekonečně mnoho vlastních čísel. Tato čísla lze zapsat ve tvaru $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \mathbb{N}$, přídružené vlastní funkce pak lze psát ve tvaru

$$y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uvedený problém nemá jiná vlastní čísla.

Pro případ zbývajících problémů můžeme provedením analogických jednoduchých výpočtů získat následující tvrzení:

Věta 63. Problém 2

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

má nekonečně mnoho vlastních čísel. Tato čísla lze zapsat ve tvaru $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, přídružené vlastní funkce pak lze psát ve tvaru

$$y_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Uvedený problém nemá jiná vlastní čísla.

Věta 64. Problém 3

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

má nekonečně mnoho vlastních čísel. Tato čísla jsou tvaru $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2/4L^2$, $n \in \mathbb{N}$, přídružené vlastní funkce pak lze psát ve tvaru

$$y_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uvedený problém nemá jiná vlastní čísla.

Věta 65. Problém 4

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

má nekonečně mnoho vlastních čísel. Tato čísla jsou tvaru $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2/4L^2$, $n \in \mathbb{N}$, přídružené vlastní funkce pak lze psát ve tvaru

$$y_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uvedený problém nemá jiná vlastní čísla.

Věta 66. Problém 5

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L)$$

má nekonečně mnoho vlastních čísel. Tato čísla jsou tvaru $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, přídružené vlastní funkce pak lze psát ve tvaru

$$y_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad y_{2n}(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uvedený problém nemá jiná vlastní čísla.

Poznámka. Důrazně doporučujeme čtenáři, aby si prošel odvození výsledků uvedených v předchozích tvrzeních.

Ukazuje se, že pro řešení parciálních diferenciálních rovnic je důležité, že vlastní funkce zjištěné v předchozích úlohách jsou ortogonální (vzhledem ke správnému skalárnímu součinu). Konkrétně, v této části textu řekneme, že dvě integrovatelné funkce f, g jsou ortogonální na intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

Obecněji, řekneme, že nejvýše spočetný systém funkcí ϕ_1, ϕ_2, \dots , je ortogonální na $\langle a, b \rangle$, pokud $\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x) dx = 0$,jakmile $i \neq j$.

Příklad 67. Ukažme, že vlastní funkce

$$(11.4) \quad 1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L}, \dots$$

z Problému 5 tvoří ortogonální systém funkcí na $\langle -L, L \rangle$. Musíme vlastně ukázat, že

$$(11.5) \quad \int_{-L}^L f(x)g(x) dx = 0$$

pro každé dvě různé funkce systému (11.4). Pro libovolné nenulové celé číslo r platí:

$$(11.6) \quad \int_{-L}^L \cos \frac{r\pi x}{L} dx = \frac{L}{r\pi} \sin \frac{r\pi x}{L} \Big|_{-L}^L = 0$$

a

$$\int_{-L}^L \sin \frac{r\pi x}{L} dx = -\frac{L}{r\pi} \cos \frac{r\pi x}{L} \Big|_{-L}^L = 0.$$

Proto vztah (11.5) platí jestliže $f \equiv 1$ a g je libovolná jiná funkce z (11.4). Pokud $f(x) = \cos m\pi x/L$ a $g(x) = \cos n\pi x/L$, kde m, n jsou rozdílná přirozená čísla, pak

$$(11.7) \quad \int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Pro výpočet uvedeného integrálu lze použít identitu

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)],$$

kde $A = m\pi x/L$, $B = n\pi x/L$. Vztah (11.7) pak přechází na tvar

$$\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} dx \right].$$

Protože obě čísla $m - n$, $m + n$ jsou nenulová rovnosti (11.6) ukazují, že oba integrály na pravé straně jsou nulové a v tomto případě vztah (11.5) platí. Pokud $f(x) = \sin m\pi x/L$ a $g(x) = \sin n\pi x/L$, kde $m \neq n$ jsou přirozená čísla, pak

$$(11.8) \quad \int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

a můžeme použít identitu

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

s volbami $A = m\pi x/L$, $B = n\pi x/L$. Potom vztah (11.8) přechází do tvaru

$$\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} dx - \int_{-L}^L \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} dx \right] = 0.$$

Konečně, volba $f(x) = \sin m\pi x/L$, $g(x) = \cos n\pi x/L$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ vede ke vztahu

$$\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0,$$

protože integrujeme lichou funkci přes symetrický interval.

Cvičení 68. Dokažte, že vlastní funkce z problémů 1-4 rovněž tvoří ortogonální systémy.

Cvičení 69. Řešte následující konkrétní úlohy na vlastní čísla:

- $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y(-2) = y(2)$, $y'(-2) = y'(2)$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(3) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(3) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1/2) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(5) = 0$

12. OBECNĚJŠÍ DVOUBODOVÉ OKRAJOVÉ PROBLÉMY

V úvodních kurzech z obyčejných diferenciálních rovnic bývá mimo jiné podrobně studována Cauchyova úloha pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu ve tvaru

$$(12.1) \quad y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x).$$

Zde budeme studovat vlastnosti obecné dvoubodové úlohy pro tuto rovnici. Budeme předpokládat, že funkce P_1, P_2, F jsou spojité funkce definované na nějakém uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Necht' α, β, ρ , a δ jsou taková reálná čísla, že

$$(12.2) \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \quad \text{a} \quad \rho^2 + \delta^2 \neq 0.$$

Pro zvolená reálná čísla k_1, k_2 budeme hledat taková řešení ODR

$$(12.3) \quad y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x)$$

na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, která splňují podmínky ve tvaru

$$(12.4) \quad \alpha y(a) + \beta y'(a) = k_1,$$

$$(12.5) \quad \rho y(b) + \delta y'(b) = k_2.$$

Číslům a, b budeme říkat krajní body, podmínkám (12.4), (12.5) okrajové podmínky a celé úloze okrajový problém. Pro stručnost budeme dále používat následující značení:

$$Ly = y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y, \\ B_1(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) \quad \text{a} \quad B_2(y) = \rho y(b) + \delta y'(b).$$

Studovanou úlohu tak můžeme zapsat ve tvaru

$$(12.6) \quad Ly = F, \quad B_1(y) = k_1, \quad B_2(y) = k_2.$$

Problém nazveme homogenním, pokud $F = 0$ a $k_1 = k_2 = 0$, v opačném případě hovoříme o nehomogenní úloze. Není obtížné se přesvědčit, že operátory L, B_1, B_2 jsou na vhodných prostorech lineární. Následující příklady ukazují, že problematika existence a jednoznačnosti řešení okrajových úloh je mnohem komplikovanější než v případě Cauchyovy úlohy.

Příklad 70. Uvažujme problém

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0.$$

Obecným řešením rovnice $y'' + y = 1$ je

$$y(x) = 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$

takže $y(0) = 0$, právě tehdy, když $c_2 = -1$ a pak $y(\pi/2) = 0$ jedině v případě $c_1 = -1$. Proto existuje právě jedno řešení zadané okrajové úlohy a tímto řešením je funkce $y(x) = 1 - \sin x - \cos x$.

Příklad 71. Nyní uvažujme problém

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Obecným řešením rovnice $y'' + y = 1$ je opět

$$y(x) = 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$

takže $y(0) = 0$, právě tehdy, když $c_2 = -1$. Zároveň však $y(\pi) = 0$ jedině v případě $c_2 = 1$. Proto zadaná okrajová úloha nemá řešení.

Příklad 72. Uvažujme úlohu

$$y'' + y = \sin(2x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Metodou speciální pravé strany, popřípadě metodou variace konstant není obtížné zjistit, že obecným řešením rovnice zadané ODR je

$$y(x) = -\frac{\sin 2x}{3} + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Odtud plyne, že $y(0) = 0, y(\pi) = 0$, právě tehdy, když $c_2 = 0$. Zároveň však uvažované okrajové podmínky nekladou žádné požadavky na c_1 . Zadaná okrajová úloha má proto nekonečně mnoho řešení. Tato řešení lze popsat vzorcem

$$y(x) = -\frac{\sin 2x}{3} + c_1 \sin x, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Věta 73. *Nechť z_1 a z_2 jsou taková řešení ODR $Ly = 0$, že buď $B_1(z_1) = B_1(z_2) = 0$, nebo $B_2(z_1) = B_2(z_2) = 0$. Pak systém $\{z_1, z_2\}$ těchto řešení je lineárně závislý. Jestliže systém řešení*

$\{z_1, z_2\}$ uvažované ODR je lineárně nezávislý, potom

$$B_1^2(z_1) + B_1^2(z_2) \neq 0 \text{ a } B_2^2(z_1) + B_2^2(z_2) \neq 0.$$

Důkaz. Připomeňme, že $B_1(z) = \alpha z(a) + \beta z'(a)$ a $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Proto platí, že ze vztahu $B_1(z_1) = B_1(z_2) = 0$ plyne, že vektor (α, β) je netriviálním řešením soustavy

$$\begin{aligned} \alpha z_1(a) + \beta z_1'(a) &= 0 \\ \alpha z_2(a) + \beta z_2'(a) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud ihned plyne, že determinat matice této soustavy (jde vlastně o příslušný Wronskián) je nulový:

$$z_1(a)z_2'(a) - z_1'(a)z_2(a) = 0.$$

Odtud pak již ihned plyne lineární závislost dvojice $\{z_1, z_2\}$. Podobnou úvahu lze provést pro případ $B_2(z_1) = B_2(z_2) = 0$. K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že druhá část tvrzení je vlastně ekvivalentní s právě dokázanou první částí. \square

Věta 74. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(a) Existuje fundamentální systém řešení $\{z_1, z_2\}$ rovnice $Ly = 0$ takový, že

$$(12.7) \quad B_1(z_1)B_2(z_2) - B_1(z_2)B_2(z_1) \neq 0.$$

(b) Jestliže $\{y_1, y_2\}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $Ly = 0$, potom

$$(12.8) \quad B_1(y_1)B_2(y_2) - B_1(y_2)B_2(y_1) \neq 0.$$

(c) Pro každou spojitou funkci F a číselnou dvojici (k_1, k_2) má okrajová úloha

$$Ly = F, \quad B_1(y) = k_1, \quad B_2(y) = k_2$$

právě jedno řešení.

(d) Homogenní okrajová úloha

$$(12.9) \quad Ly = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0$$

má pouze nulové řešení.

(e) Homogenní rovnice $Ly = 0$ má taková lineárně nezávislá řešení z_1, z_2 , že platí $B_1(z_1) = 0, \quad B_2(z_2) = 0$.

Důkaz. Ukážeme, že platí následující řetězec implikací:

$$(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d) \implies (e) \implies (a).$$

\square

(a) \implies (b) : Protože $\{z_1, z_2\}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $Ly = 0$, existují čísla a_1, a_2, b_1, b_2 taková, že

$$(12.10) \quad \begin{aligned} y_1 &= a_1 z_1 + a_2 z_2 \\ y_2 &= b_1 z_1 + b_2 z_2. \end{aligned}$$

Protože y_1, y_2 jsou podle předpokladu lineárně nezávislá řešení, musí navíc platit:

$$(12.11) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Z linearity operátorů B_1, B_2 dostáváme jejich aplikací na (12.10) :

$$\begin{bmatrix} B_1(y_1) & B_2(y_1) \\ B_1(y_2) & B_2(y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1(z_1) & B_2(z_1) \\ B_1(z_2) & B_2(z_2) \end{bmatrix}.$$

K dokončení implikace si stačí jen uvědomit, že determinant součinu dvou matic je roven součinu determinantů.

(b) \implies (c) : Protože $\{y_1, y_2\}$ je fundamentálním systémem řešení rovnice $Ly = 0$, obecné řešení této rovnice má tvar

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$ a y_p je partikulárním řešením nehomogenní rovnice $Ly = F$. Pro splnění okrajových podmínek musíme určit hodnoty c_1, c_2 tak, aby platilo

$$\begin{aligned} k_1 &= B_1(y_p) + c_1 B_1(y_1) + c_2 B_1(y_2) \\ k_2 &= B_2(y_p) + c_1 B_2(y_1) + c_2 B_2(y_2), \end{aligned}$$

což je ekvivalentní s

$$\begin{aligned} c_1 B_1(y_1) + c_2 B_1(y_2) &= k_1 - B_1(y_p) \\ c_1 B_2(y_1) + c_2 B_2(y_2) &= k_2 - B_2(y_p). \end{aligned}$$

poslední soustava má však podle (12.8) právě jedno řešení (c_1, c_2) .

(c) \implies (d) : Řešením úlohy (12.9) je zřejmě funkce $y = 0$. Zvolme v části (c) speciálně $F = 0, k_1 = k_2 = 0$. Podle předpokladu je toto řešení jediné.

(d) \implies (e) : Nechť $\{y_1, y_2\}$ představuje fundamentální systém řešení rovnice $Ly = 0$. Položme

$$z_1 = B_1(y_2)y_1 - B_1(y_1)y_2 \quad \text{a} \quad z_2 = B_2(y_2)y_1 - B_2(y_1)y_2.$$

Zřejmě platí $B_1(z_1) = 0, B_2(z_2) = 0$. Nyní si všimněme, že pro libovolnou volbu (a_1, a_2) platí:

$$\begin{aligned} a_1 z_1 + a_2 z_2 &= a_1 [B_1(y_2)y_1 - B_1(y_1)y_2] + a_2 [B_2(y_2)y_1 - B_2(y_1)y_2] \\ &= [B_1(y_2)a_1 + B_2(y_2)a_2]y_1 - [B_1(y_1)a_1 + B_2(y_1)a_2]y_2. \end{aligned}$$

Z posledního výrazu a lineární nezávislosti funkcí y_1, y_2 nyní plyne, že $a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$ právě tehdy, když

$$\begin{bmatrix} B_1(y_1) & B_2(y_1) \\ B_1(y_2) & B_2(y_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Má-li tento systém netriviální řešení, pak jej musí mít rovněž systém s transponovanou maticí:

$$\begin{bmatrix} B_1(y_1) & B_1(y_2) \\ B_2(y_1) & B_2(y_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

To ovšem znamená, že pokud by byly funkce z_1, z_2 lineárně závislé, pak by funkce $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ představovala netriviální řešení (12.9), což je spor s (d).

(e) \implies (a) : Z věty 73 plyne, že z rovností $B_1(z_1) = 0, B_2(z_2) = 0$ plyne $B_1(z_2) \neq 0, B_2(z_1) \neq 0$. Odtud ovšem vyplývá vztah (12.7), čímž je důkaz u konce

Příklad 75. Homogenní lineární ODR $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ má na $\langle 1, 2 \rangle$ fundamentální systém řešení $\{z_1(x) = x, z_2(x) = x^2\}$. Zkoumejme následující okrajovou úlohu:

$$(12.12) \quad y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 2x, \quad y(1) = 4, \quad y'(2) = 3.$$

Protože platí

$$z_1(1) \cdot z_2'(2) - z_2(1) \cdot z_1'(2) = 4 - 1 \neq 0,$$

podle právě dokázané věty (viz bod (a)) má zadaná úloha právě jedno řešení. Není těžké ukázat (proved'te), že tímto řešením je funkce

$$y(x) = x^3 + 7x - 4x^2.$$

Příklad 76. Řešme problém

$$y'' - 7y' + 12y = 4e^{2x}, \quad y(0) = 3, \quad y(1) = 5e^2.$$

Není těžké zjistit, že dvojice $\{e^{3x}, e^{4x}\}$ představuje fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice a že funkce $y_p(x) = 2e^{2x}$ reprezentuje partikulární řešení dané rovnice. Při hledání řešení naší okrajové úlohy bychom tedy mohli vycházet ze vztahu

$$y(x) = 2e^{2x} + c_1e^{3x} + c_2e^{4x}.$$

Tento způsob by ovšem vedl k pracným výpočtům. Zkusme postupovat podle části (e) naší věty. Lze snadno nahlédnout, že funkce

$$z_1(x) = e^{3x} - e^{4x} \quad \text{a} \quad z_2(x) = e^{3(x-1)} - e^{4(x-1)}$$

splňují $B_1(z_1) = z_1(0) = 0$ a $B_2(z_2) = z_2(1) = 0$ a rovněž představují fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice. Řešení naší okrajové úlohy je tedy jediné a lze jej hledat ve tvaru:

$$y(x) = 2e^{2x} + c_1(e^{3x} - e^{4x}) + c_2(e^{3(x-1)} - e^{4(x-1)}).$$

okrajové podmínky vedou k soustavě

$$3 = 2 + c_2e^{-4}(e - 1), \quad 5e^2 = 2e^2 + c_1e^3(1 - e),$$

takže

$$c_1 = \frac{3}{e(1 - e)}, \quad c_2 = \frac{e^4}{e - 1}$$

a můžeme psát vzorec pro řešení:

$$y(x) = 2e^{2x} + \frac{3}{e(1 - e)}(e^{3x} - e^{4x}) + \frac{e^4}{e - 1}(e^{3(x-1)} - e^{4(x-1)}).$$

Cvičení 77. Prozkoumejte následující okrajové úlohy a hledejte jejich řešení:

- $y'' - y = x, \quad y(0) = -2, \quad y(1) = 1$
- $y'' = 2 - 3x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0$
- $y'' - y = x, \quad y(0) + y'(0) = 3, \quad y(1) - y'(1) = 2$
- $y'' + 4y = 1, \quad y(0) = 3, \quad y(\pi/2) + y'(\pi/2) = -7$
- $y'' - 2y' + y = 2e^x, \quad y(0) - 2y'(0) = 3, \quad y(1) + y'(1) = 6e$

- $y'' - 7y' + 12y = 4e^{2x}$, $y(0) + y'(0) = 8$, $y(1) = -7e^2$.

LITERATURA

- [1] Nagy, J., Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, SNTL, Praha, 1983
- [2] Kalas, J., Ráb, M., Obyčejné diferenciální rovnice, Masarykova Univerzita, Brno 1995
- [3] Nagy, J., Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic, SNTL, Praha, 1983
- [4] Cesari, L., Asymptotic Behavior and Stability Problem in Ordinary Differential Equations. Berlin, Springer 1959
- [5] Jules Henri Poincaré, Wikipedia, the free encyclopedia [online]. Poslední změna 14.4.2016.[cit. 26.4.2016]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincaré
- [6] Aleksandr Ljapunov, Wikipedia, the free encyclopedia [online].[cit. 28.2.2015]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Aleksandr_Lyapunov
- [7] Mawhin, J. Alexandr Mikhailovich Liapunov, The general problem of the stability of motion (1892).[online]. ResearchGate.[cit. 28.2.2015]. Dostupné z: <http://www.researchgate.net/>
- [8] Parks, A. M. Lyapunov's stability theory—100 years on*[online]. CiteSeerX.[cit. 28.2.2015]. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/> (citováno 28. února 2015)
- [9] Trench, W. F., Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems (2014). [online]. Dostupné z: <https://digitalcommons.trinity.edu/mono/9/> , Licence: http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.en_G.
- [10] Míka S., Kufner A., Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice, MVŠT sešit XIX, SNTL Praha, 1983

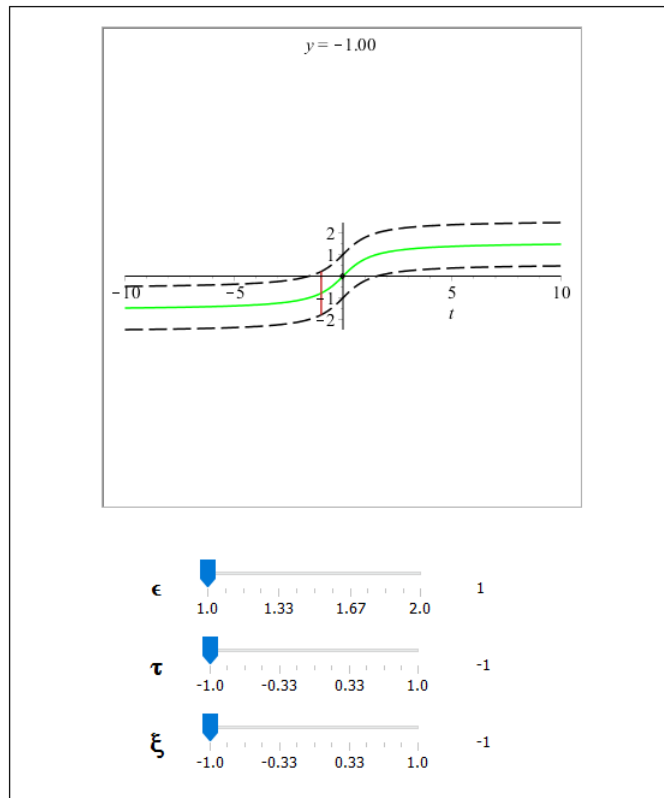
PŘÍLOHA

Procedura animace_stabilni_reсени má za úkol ilustrovat stabilitu řešení. Vstupními parametry je vyšetřované řešení u , dále řešení v stejné diferenciální rovnice. Parametry $\tau_$ a $\xi_$, kde $\tau_ = \tau$ a $\xi_ = \tilde{\xi}$, jsou počátečními hodnotami a lze je měnit pomocí posuvníku. Parametr interval udává interval na kterém je znázorňováno řešení v . Řešení u je znázorněno na intervalu $\langle \text{dolni_mez}, \text{horni_mez} \rangle$. Parametr $\text{epsilon} = \varepsilon$ lze také navolit na posuvníku. Číslo $\text{delta} = \delta$ je dopočítáno na základě výsledků z jednotlivých příkladů.

Nejdříve se spočítá počáteční hodnota $\xi_1 = \xi = u(\tau)$. Dále jsou dosazena čísla $\tau, \tilde{\xi}$ do řešení v , které je následně vykresleno (znázorněno červeně). Pak procedura zobrazí řešení u (znázorněno zeleně) a příslušný epsilonový pás (znázorněn černou přerušovanou čarou). Pokud je splněna podmínka $|\tilde{\xi} - \xi| < \delta$, pak řešení v vychází z intervalu δ (znázorněn oranžově) a zůstává uvnitř epsilonového pásu. Výstup procedury je zobrazen na obrázku 12.1.

Algoritmus 1 Procedura pro animování stabilního řešení

```
animace_stabilni_reсени := proc (u, v, tau_, interval, dolni_mez, horni_mez, delta,
epsilon_, xi_)
local reseni_v, k, plot_v, plot_u, dolni_pas, horni_pas, xi_1;
xi_1 := u(tau_);
reseni_v := v(t, tau_, xi_);
plot_v := plot(reseni_v, t = tau_ .. interval, scaling = constrained);
plot_u := plot(u(t), t = dolni_mez .. horni_mez, color = green);
dolni_pas := plot(u(t)-epsilon_, t = dolni_mez .. horni_mez, color = black, linestyle = dash);
horni_pas := plot(u(t)+epsilon_, t = dolni_mez .. horni_mez, color = black, linestyle =
dash);
display(plot_u, plot_v, dolni_pas, horni_pas, line([tau_, xi_1+delta], [tau_, xi_1-delta],
color = orange), point([0, 0], color = black, size = 0));
end;
```



OBRÁZEK 12.1. Animace s posuvníky

Procedura `animace_nestabilni_reseni` znázorňuje nestabilitu řešení. Vstupními parametry je opět vyšetřované řešení u , dále řešení v stejné diferenciální rovnice. Parametr $\tau = \tau$ a $\epsilon = \epsilon$ jsou pevně zvoleny. Parametr interval udává interval na kterém je znázorňováno řešení v . Řešení u je znázorněno na intervalu $\langle \text{dolni_mez}, \text{horni_mez} \rangle$. Číslo $\delta = \delta$ lze nastavit na posuvníku. Parametr $\xi_2 - \xi_1$ představuje rozdíl počátečních hodnot $\tilde{\xi}, \xi$, kde platí $|\tilde{\xi} - \xi| < \delta$.

Nejdříve se spočítá počáteční hodnota $\xi_1 = \xi = u(\tau)$. Následně je vypočteno číslo $\xi_2 = \tilde{\xi}$, které je dosazeno do řešení v . To je pak vykresleno. Znázorněny jsou opět také řešení u , epsilonový pás a interval δ .

Algoritmus 2 Animace nestabilního řešení

```

animace_nestabilni_reseni := proc (u, v, tau, interval, dolni_mez, horni_mez, delta_,
epsilon, xi_2_xi_1)
local reseni_v, k, plot_v, plot_u, dolni_pas, horni_pas, xi_1, xi_2, xi_2_;
xi_1 := u(tau);
xi_2_ := solve(xi_2 - xi_1 = xi_2_xi_1, xi_2);
reseni_v := v(t, tau, xi_2_);
plot_v := plot(reseni_v, t = interval);
plot_u := plot(u(t), t = dolni_mez .. horni_mez, color = green);
dolni_pas := plot(u(t) - epsilon, t = dolni_mez .. horni_mez, color = black, linestyle = dash);
horni_pas := plot(u(t) + epsilon, t = dolni_mez .. horni_mez, color = black, linestyle = dash);
display(plot_u, plot_v, dolni_pas, horni_pas, line([tau, xi_1 + delta_], [tau, xi_1 - delta_]),
color = orange);
end;

```

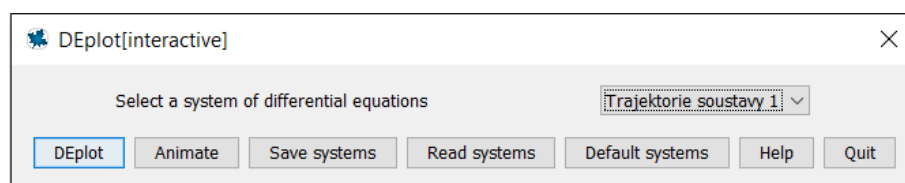
Procedura trajektorie_soustavy_odr znázorňuje trajektorie zadaných soustav společně s jejich směrovým polem. Do procedury vstupují parametry d_1, d_2 , kde $d_1=y_1'$ a $d_2=y_2'$. Pevně zvolená čísla $\tau=\tau$, ξ_1 a ξ_2 představují počáteční hodnoty.

Příkaz DEplot numericky vyřeší zadanou soustavu a vykreslí příslušnou trajektorii (znázorněna červeně) společně se směrovým polem.

Algoritmus 3 Trajektorie

```
trajektorie_soustavy_odr := proc (d_y1, d_y2, tau, xi_1, xi_2, n)
DEplot([d_y1, d_y2], [y1(t), y2(t)], t = tau .. n, [[y1(tau) = xi_1, y2(tau) = xi_2]], y1 = -10
.. 10, y2 = -10 .. 10, linecolor = red, thickness = 2, scaling = constrained, arrows = medium,
color = gray);
end;
```

Soubor interaktivni_soustavy_trajektorie.mw obsahuje jednoduchý kód, pomocí kterého načteme soustavu diferenciálních rovnic z textového souboru. Načtení je provedeno stisknutím tlačítka „Read systems“, viz 12.2, a vybráním příslušného souboru. Kliknutím na „Animate“ se zobrazí tabulka 12.3, kde lze navolit rozsah pro proměnné t , y_1 a y_2 . Dále můžeme navolit počáteční podmínky, ty jsou zadány ve tvaru $[[\tau_1, \xi_{1_1} \xi_{2_1}], [\tau_2, \xi_{1_2} \xi_{2_2}], \dots, [\tau_n, \xi_{1_n} \xi_{2_n}]]$, kde n je počet trajektorií řešení zadané soustavy. Do jednoho grafu lze znázornit tedy více trajektorií. Dále můžeme měnit počet snímků „Number of frames“, čímž ovlivníme rychlost průběhu animace. Stisknutím „Play“ animaci spustíme.



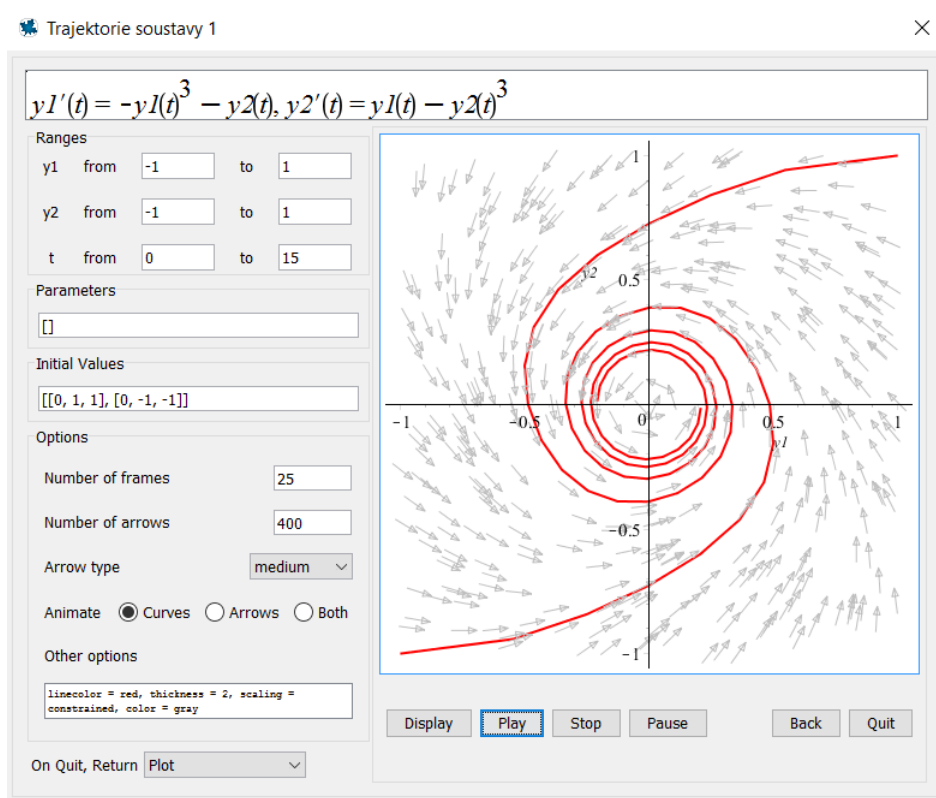
OBRÁZEK 12.2. Tabulka 1

Algoritmus 4 Ljapunovova funkce pro skalární diferenciální rovnice

```

animace_ljapunovovy_funkce_skalarni_ODR:=proc(d_y,V,tau,xi,interval) local
  pocatecni_podminka,plot_l_funkce,l_funkce,seseni;
  pocatecni_podminka := y(tau) = xi;
  seseni := dsolve([d_y, pocatecni_podminka]);
  l_funkce := solve(V(seseni), y(t));
  plot_l_funkce := plot(l_funkce[1], t = tau .. interval, color = blue);
  display(plot_l_funkce);

```



OBRÁZEK 12.3. Tabulka 2

Procedura `animace_ljapunovovy_funkce_skalarni_ODR` vyřeší zadanou diferenciální rovnici a posléze vykreslí Ljapunovovu funkci. Vstupními parametry jsou $d_y=y_1'$, pak pevně zvolené počáteční hodnoty $\tau=\tau$, $\xi=\xi$. Jako V označujeme předpis Ljapunovovy funkce. Parametr `interval` představuje interval, na kterém se Ljapunovova funkce zobrazuje.

Procedura nejprve vyřeší pro zvolené počáteční podmínky zadanou diferenciální rovnici. Ta je následně dosazena do předpisu Ljapunovovy funkce, která je vykreslena na intervalu $t \in \langle 0, 5 \rangle$.

Procedura `animace_ljapunovovy_funkce` numericky řeší zadanou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic a následně vykreslí příslušnou Ljapunovovu funkci. Do procedury vstupují parametry d_1, d_2 , kde $d_1=y_1'$ a $d_2=y_2'$. V je předpis Ljapunovovy funkce. Pevně zvolená čísla $\tau=\tau$, $\xi_1=\xi_1$ a $\xi_2=\xi_2$ představují počáteční hodnoty. Nakonec n představuje interval, na kterém se bude Ljapunovova funkce vykreslovat.

Nejdříve je numericky vypočteno řešení dané soustavy. Do proměnné t_2 je přiřazena počáteční hodnota $\tau=\tau$. Řešení soustavy je následně dosazeno do předpisu Ljapunovovy funkce V ,

která je posléze znázorněna na intervalu $t \in \langle 0, 5 \rangle$. U příkladu 9.8 je Ljapunovova funkce znázorněna na intervalu $t \in \langle 0, 1.5 \rangle$.

Algoritmus 5 Ljapunovova funkce

```
animace_ljapunovovy_funkce:=proc(d_y1,d_y2,V,tau,xi_1,xi_2,n)
local soustava,plot_1_funkce,reseni,i,t_,y1_,y2_,V_,t2;
soustava := {d_y1, d_y2, y1(tau) = xi_1, y2(tau) = xi_2};
reseni := dsolve(soustava, numeric);
t2 := tau;
for i from 1 to n do
t_[i] := rhs(reseni(t2)[1]);
y1_[i] := rhs(reseni(t2)[2]);
y2_[i] := rhs(reseni(t2)[3]);
V_[i] := V(y1_[i], y2_[i]);
t2 := t2+.01;
end do;
if n=1 then
plot_1_funkce:=display(pointplot([t_[1],V_[1]]),color=blue,symbol=solidcircle);
else
plot_1_funkce :=display({seq(line([t_[k],V_[k]],[t_[k+1],V_[k+1]]),k=1..n-1)},color=blue);
fi;
end;
```
