

# Ramificación

Luis G. Gorostiza

Departamento de Matemáticas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

del Instituto Politécnico Nacional

lgorosti@math.cinvestav.mx

## Resumen

En este artículo se presenta un panorama introductorio de los procesos de ramificación y una aplicación a gráficas aleatorias.

## 1. Introducción

La relevancia de la teoría matemática de ramificación se debe a que trata uno de los procesos primordiales de la naturaleza: la reproducción. El tema es extenso porque tiene muchos aspectos y una gran variedad de aplicaciones. La teoría tiene problemas matemáticos interesantes y las aplicaciones tienen sus propias problemáticas. La ramificación se toca sólo de manera marginal en los cursos de probabilidad. Mi propósito con este artículo es interesar a los estudiantes en este tema. Este artículo está basado en parte en pláticas para estudiantes que he dado en diversas ocasiones, entre otras, un cursillo en la Universidad Nacional de Colombia, recientemente pláticas en el XL Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana en Monterrey (octubre 2007) y en el Congreso Regional de Probabilidad y Estadística en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (febrero 2008).

Veremos los procesos de ramificación más sencillos y algunos resultados sin entrar en cuestiones técnicas ni en demostraciones (las cuales en general no son sencillas). Ya que el objetivo es solamente exponer un panorama introductorio, algunos resultados están en forma simplificada.

Para leer este artículo es útil tener conocimientos básicos de teoría de probabilidad y procesos estocásticos (por ejemplo, al nivel de los libros de Hoel, Port y Stone, *Introduction to Probability Theory, Introduction to Stochastic Processes*), pero si no se tienen, basta con algo

de cultura matemática e imaginación para percibir las ideas. La sección 4 requiere un poco más de conocimientos. La bibliografía contiene algunos textos que ayudarían al lector interesado a entrar en materia, libros sobre aplicaciones en biología, y artículos sobre algunos resultados específicos que no se encuentran en libros.

Una versión más extensa de este artículo con temas más avanzados está en [16]. En la sección 2 del presente artículo hay una descripción general de los sistemas ramificados de partículas en el espacio, pero luego nos restringimos a sistemas que no tienen distribución espacial. En [16] se abordan sistemas con distribución espacial y superprocesos, que son cierto tipo de límites de tales sistemas.

## 2. Sistemas ramificados de partículas

### 2.1. Ideas generales

Consideremos una colección de partículas o individuos en un espacio que evolucionan a lo largo del tiempo de la manera siguiente. Al tiempo inicial,  $t = 0$ , hay un número aleatorio de partículas distribuidas aleatoriamente en el espacio. Cada una de estas partículas tiene una duración de vida aleatoria, al término de la cual muere o produce un número aleatorio de partículas hijas. Durante su vida, cada partícula se mueve de manera aleatoria en el espacio. Las partículas hijas actúan de la misma forma. Las leyes probabilísticas de vida, reproducción y movimiento de cada partícula son las mismas, y las evoluciones de todas ellas son independientes unas de otras. De esta forma, cada partícula inicial genera un árbol aleatorio, como se muestra en la Figura 1. La *ramificación* se refiere a la estructura de árbol. Las ramas representan las líneas de descendencia y su evolución temporal y espacial. En general, el movimiento de las partículas es un proceso de Markov y puede tener saltos. Si cada partícula hace un salto al nacer a partir del lugar de su nacimiento y permanece donde cae, entonces la trayectoria de cada línea de descendencia es una caminata aleatoria en el espacio, y el sistema se llama *caminata aleatoria ramificada*. Si el movimiento de las partículas es el movimiento browniano, el sistema se llama *movimiento browniano ramificado*. Etc.

Un problema importante consiste en demostrar la existencia de un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  en el que está definido un sistema de partículas como el descrito, lo cual es necesario para desarrollar la teoría matemática. Esto ha sido resuelto y podemos dar por hecho que

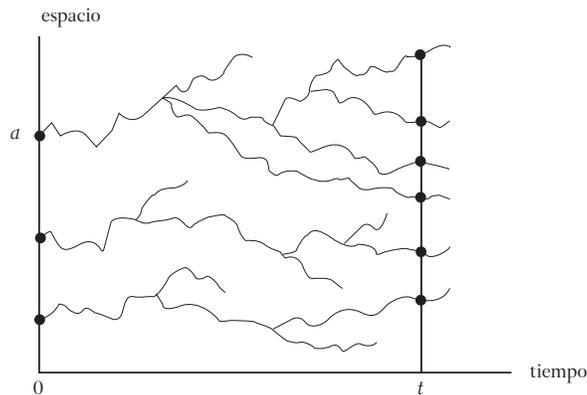


Figura 1

tal espacio de probabilidad existe.

Si las partículas tienen probabilidad positiva de morir sin dejar descendientes, el sistema se puede extinguir en tiempo finito, es decir, a partir de algún instante aleatorio finito ya no queda ninguna partícula. Por ello, uno de los problemas principales de la teoría es calcular la probabilidad de extinción del sistema.

Se pueden hacer muchas preguntas sobre este tipo de modelo estocástico. Por ejemplo: ¿el sistema se extingue o siempre hay alguna partícula viva?, ¿cuántas partículas hay al tiempo  $t$ ?, ¿cuál es la distribución espacial de las partículas al tiempo  $t$  y cómo cambia esta distribución en función de  $t$ ?, ¿qué tanto se aleja de la posición de una partícula inicial la partícula descendiente que más se aleja de ella hasta el tiempo  $t$ ?, ¿cuál es la distribución de las edades de las partículas presentes al tiempo  $t$ ?, ¿cuál es la distribución de las generaciones de las partículas presentes al tiempo  $t$ ?, ¿qué comportamientos asintóticos tiene el sistema al tiempo  $t$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , por ejemplo, leyes fuertes (convergencia con probabilidad 1) y límites de fluctuaciones (convergencia en distribución)?, ¿cómo es el tiempo de ocupación de una región dada del espacio por partículas en un intervalo de tiempo, y cómo se comporta el tiempo de ocupación asintóticamente cuando el intervalo crece indefinidamente? Y muchas preguntas más. Los métodos que se han desarrollado para responder estas y otras preguntas son interesantes, y aún quedan problemas sin resolver.

En muchos casos interesa solamente la estructura genealógica de un sistema ramificado de partículas, es decir, las partículas no tienen movimiento en un espacio; sólo se consideran sus vidas, sus reproducciones y las relaciones genealógicas entre partículas. La Figura 2 muestra la progenie de la partícula  $a$  de la Figura 1. Las primeras preguntas

que se hacen se refieren al número total de partículas presentes al tiempo  $t$  generadas por una sola partícula inicial (como en la Figura 2).

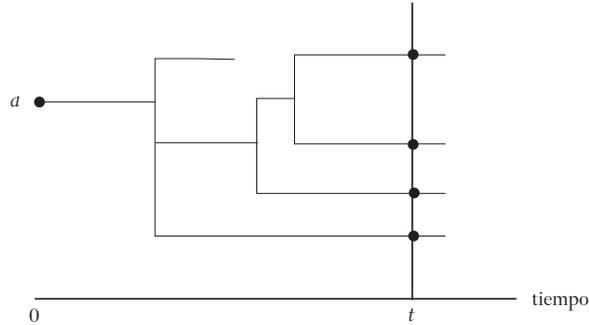


Figura 2

Un sistema ramificado de partículas en el espacio como el descrito es relativamente sencillo en el sentido de que todas las partículas evolucionan de acuerdo con las mismas leyes probabilísticas, e independientemente unas de otras. Aun en este caso los modelos presentan algunos problemas matemáticos difíciles. Hay sistemas ramificados más generales, cuyo análisis es más complicado.

La mayoría de los comportamientos que veremos son de tipo asintótico, lo cual es usual en sistemas complejos porque su análisis detallado puede ser sumamente complicado y los límites dan información útil. Un ejemplo clásico de ello es el famoso teorema central de límite.

Los individuos de un sistema ramificado pueden ser vistos como entes abstractos, y así se les trata en la teoría matemática. En las aplicaciones, los individuos pueden representar objetos muy diversos, como veremos a continuación.

## 2.2. Los orígenes y algunos campos de aplicación

Los libros [3] y [8] y el artículo [10] contienen esbozos de la historia de los procesos de ramificación. Menciono solamente algunos precursores y pioneros. Un antecedente es la teoría de T. Malthus (1766-1834) sobre el crecimiento geométrico (o exponencial) de la población humana. F. Galton (1822-1911) y H.W. Watson (1827-1903) propusieron un modelo matemático para estudiar la probabilidad de extinción de los apellidos de alcurnia en la Gran Bretaña, tema que preocupaba a la aristocracia Victoriana. Antes de ellos, I.J. Bienaymé (1796-1878), cuyo trabajo estuvo casi olvidado por más de cien años, ya había estudiado ese tipo de problema en Francia. A.N. Kolmogorov (1903-1987), el padre de la teoría moderna de la probabilidad, fue de los primeros

en investigar las matemáticas de los procesos de ramificación en Rusia. S. Ulam (1909-1984) investigó procesos de ramificación en relación con reacciones nucleares en cadena que ocurren en reactores nucleares y bombas atómicas, en el Laboratorio de Los Alamos, E.U.A.

Las partículas o individuos de un sistema ramificado pueden ser de tipos muy diversos, ya que hay muchas “poblaciones” cuyos elementos pueden reproducirse, fragmentarse o desaparecer. Por ejemplo: moléculas, genes, virus, células, células cancerosas, bacterias, animales, especies de animales, personas, apellidos, grupos étnicos, plantas, enfermedades, neutrones, rayos cósmicos, galaxias, piedras, partículas contaminantes, archivos electrónicos, mensajes en redes de información, citas bibliográficas, valores financieros, partidos políticos, grupos terroristas, lenguajes, religiones, etc. Por ello, las aplicaciones de la teoría de ramificación se encuentran en muchos campos: genética, biología molecular, biología celular, evolución, inmunología, epidemiología, ecología, silvicultura, percolación, demografía, medicina, salud pública, astrofísica, telecomunicaciones, internet, industria minera, lingüística, economía y finanzas, sociología, etc. Los temas de investigación científica o matemática son un ejemplo de sistema ramificado: algunos generan nuevos temas y otros se extinguen. El siguiente ejemplo es muy ilustrativo. Los individuos son árboles, sus semillas son transportadas por el viento de manera aleatoria a otros sitios, en los cuales nacen nuevos árboles. Es una caminata aleatoria ramificada. ¿Cómo evoluciona el bosque de árboles en número y en extensión geográfica?

### 3. Modelos básicos

Consideremos el sistema generado por un solo individuo inicial y sin movimiento en un espacio. Algunos de los resultados que veremos se encuentran en el libro [2]. Los artículos [5] y [6] contienen los resultados principales conocidos hasta sus fechas de publicación.

#### 3.1. El proceso de Galton-Watson

El modelo de ramificación más simple es el de Galton-Watson, que está dado por una cadena de Markov  $(N_n)_{n=0,1,2,\dots}$ , llamada *proceso de Galton-Watson*, donde  $N_n$  es el número de individuos presentes en la  $n$ -ésima generación, con  $N_0 = 1$  (un individuo inicial), como se muestra en la Figura 3. En este modelo la escala del tiempo está dada por las generaciones; no se consideran las duraciones de las vidas de los indi-

viduos. Visto de otra forma, cada individuo vive una unidad de tiempo. La pregunta que Bienaymé, Galton y Watson querían resolver era cal-

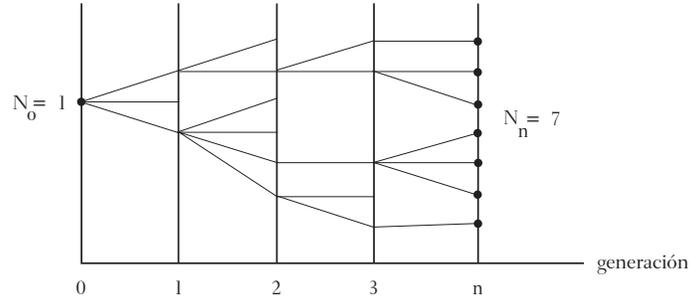


Figura 3

cular la probabilidad de extinción, es decir, la probabilidad  $P[N_n = 0]$  para algún  $n$ ] (es claro que  $N_n = 0$  implica  $N_m = 0$  para todo  $m > n$ ).

La *ley de ramificación* (o *ley de reproducción*) del sistema es la distribución de probabilidad

$p_k =$  probabilidad de producir  $k$  individuos  $= P[N_1 = k], k = 0, 1, 2, \dots$

El caso  $k = 0$  significa que el individuo o partícula muere sin dejar descendientes. La función generadora de esta ley es

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (3.1)$$

El valor medio de la ley de ramificación es

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = f'(1-), \quad (3.2)$$

que representa el número promedio de individuos generados en una reproducción. Supondremos que  $m < \infty$ . Se consideran tres casos:

- $m < 1$  : ramificación subcrítica,
- $m = 1$  : ramificación crítica,
- $m > 1$  : ramificación supercrítica.

La función  $f(s)$  definida por (3.1) es estrictamente convexa y tiene la forma que muestra la Figura 4.

El valor  $q$  es la raíz más pequeña de la ecuación  $f(s) = s$ . Se observa que si  $m \leq 1$  (en este caso, necesariamente  $p_0 > 0$ ), entonces  $q = 1$ , y si  $m > 1$ , entonces  $q < 1$ . Resulta que  $q$  es la *probabilidad de extinción* del

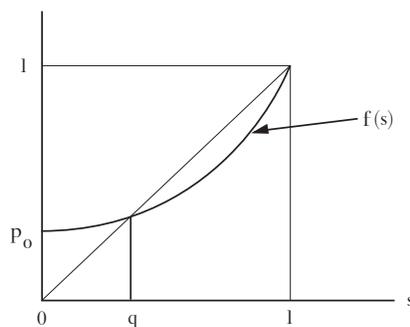


Figura 4

proceso de Galton-Watson. En los casos crítico y subcrítico el proceso se extingue con probabilidad 1, dicho también *casi seguramente* (c.s.), es decir,  $P[N_n = 0 \text{ para algún } n] = 1$ , y en el caso supercrítico,  $P[N_n = 0 \text{ para algún } n] = q$ . Así pues, el proceso se extingue con probabilidad  $q$  y sobrevive para siempre con probabilidad  $1 - q$  (nótese que  $q > 0$  si y sólo si  $p_0 > 0$ ).

Supondremos además que la ley de ramificación tiene segundo momento finito, es decir,  $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k < \infty$ . Esto es una simplificación, pero se cumple en muchos casos. Denotamos la varianza de la ley de ramificación por

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - m^2. \quad (3.3)$$

Muchos resultados valen con la hipótesis menos restrictiva  $\sum_{k=1}^{\infty} (k \log k) p_k < \infty$ , pero eso es más complicado.

Para estudiar el comportamiento asintótico de  $N_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , definimos el proceso  $W_n = N_n/m^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Es fácil ver que la esperanza condicional de  $W_{n+1}$  dado el pasado (el cual es  $W_1, \dots, W_n$ ) cumple la condición

$$E[W_{n+1} | W_1, \dots, W_n] = W_n. \quad (3.4)$$

Esto se sigue de la relación  $N_{n+1} = \sum_{j=1}^{N_n} X_j$ , donde  $X_j$  es el número de individuos generados por el  $j$ -ésimo individuo de la generación  $n$ , usando el hecho que las variables aleatorias  $X_j$  son independientes, todas tienen distribución  $(p_k)_k$ , y son independientes del pasado. La expresión (3.4) significa que el proceso  $(W_n)_{n \geq 0}$  es una martingala, y, siendo no negativa, por un teorema clásico de convergencia de martingalas existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = W \quad \text{c.s.}, \quad (3.5)$$

donde  $W$  es una variable aleatoria no negativa ([2], p. 9). En los casos crítico y subcrítico se tiene  $W = 0$ . En el caso supercrítico  $W$  tiene una distribución absolutamente continua en  $(0, \infty)$ , tiene valor medio  $E(W) = 1$  y varianza  $\text{Var}(W) = \sigma^2/(m^2 - m)$ , y  $P[W = 0] = q$  (probabilidad de extinción).

En conclusión, sólo existen las posibilidades siguientes: en los casos crítico y subcrítico el proceso se extingue, y en el caso supercrítico se extingue con probabilidad  $q$  y crece geoméricamente como  $m^n W$ , asintóticamente cuando  $n \rightarrow \infty$ , con probabilidad  $1 - q$ . Esto último es el análogo estocástico de la ley de Malthus sobre el crecimiento geométrico de la población.

En el caso crítico ( $m = 1$ ), un resultado interesante es el siguiente límite de la distribución de la variable aleatoria  $N_n/n$  condicionada a que el proceso no se haya extinguido:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[ \frac{N_n}{n} \leq x \mid N_n > 0 \right] = 1 - \exp \left\{ -\frac{2x}{\sigma^2} \right\}, \quad x \geq 0; \quad (3.6)$$

es decir, condicionado a no extinción,  $N_n/n$  converge a una distribución exponencial cuando  $n \rightarrow \infty$  ([2], p. 20). También hay límites condicionales para el caso subcrítico.

En el caso supercrítico ( $m > 1$ ), el resultado (3.5) es del tipo de una ley fuerte para  $N_n$ , análoga a la ley fuerte de los grandes números, pero en este caso el límite es una variable aleatoria (no una constante). En el caso supercrítico también se tiene un límite de fluctuaciones de  $N_n$ . Si  $p_0 = 0$  (para simplificar), entonces

$$\frac{N_n - m^n W}{N_n^{1/2}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \text{Var}(W)) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

donde  $\Rightarrow$  significa convergencia en distribución y  $\mathcal{N}(0, a)$  es la distribución gaussiana de valor medio 0 y varianza  $a$ ; es decir, para cada  $x \in (-\infty, \infty)$ , recordando que  $\text{Var}(W) = \sigma^2/(m^2 - m)$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[ \frac{N_n - m^n W}{N_n^{1/2}} \leq x \right] \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2/(m^2 - m))^{1/2}} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma^2/(m^2 - m)} \right\} dy. \end{aligned} \quad (3.8)$$

([2], p. 55). Este resultado se parece al teorema central de límite, pero en este caso la fluctuación es con respecto a la variable aleatoria  $m^n W$  (no al valor medio de  $N_n$ ).

### 3.2. El proceso de Bellman-Harris

En el modelo de Galton-Watson cada individuo vive una unidad de tiempo, y por lo tanto todos los individuos que coexisten pertenecen a la misma generación. En el modelo de Bellman-Harris los individuos se reproducen de la misma forma que en el de Galton-Watson, pero cada uno tiene su propia vida de duración aleatoria (independiente) con función de distribución  $G$  (no degenerada), como se ve en la Figura 5. Sea  $Z_t$  el número de individuos presentes al tiempo  $t$ . El proceso

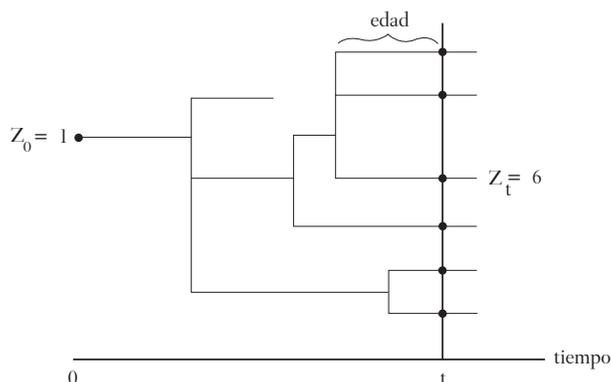


Figura 5

estocástico  $(Z_t)_{t \geq 0}$  es el *proceso de Bellman-Harris* (también llamado *proceso de ramificación con dependencia de la edad*). Si  $G$  es la función de distribución exponencial de parámetro  $V$ ,

$$G(t) = 1 - e^{-Vt}, \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

entonces  $(Z_t)_{t \geq 0}$  tiene la propiedad de Markov. Esto es consecuencia de la falta de memoria de la distribución exponencial (si  $X$  es una variable aleatoria exponencial, entonces  $P[X > s + t | X > s] = P[X > t]$ ). Para otras distribuciones  $G$  (no triviales) el proceso  $(Z_t)_{t \geq 0}$  no tiene la propiedad de Markov, por lo que el análisis es más difícil.

Algunos de los resultados del proceso de Bellman-Harris son análogos a los del proceso de Galton-Watson, pero hay otros nuevos. (Seguimos con la suposición de segundo momento finito de la ley de ramificación).

En los casos crítico y subcrítico el sistema se extingue c.s., es decir,  $P[Z_t = 0 \text{ para algún } t] = 1$ , (es claro que  $Z_t = 0$  implica  $Z_{t+s} = 0$  para todo  $s > 0$ ).

Se define la constante  $\alpha$ , llamada *parámetro de Malthus*, como la raíz (única si existe) de la ecuación

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dG(t) = \frac{1}{m}. \quad (3.10)$$

Es claro que  $\alpha$  existe en el caso supercrítico. Si  $G$  es exponencial de parámetro  $V$ , entonces  $\alpha = V(m - 1)$ . En el caso supercrítico se define la constante

$$c = \frac{m - 1}{\alpha m^2 \int_0^\infty t e^{-\alpha t} dG(t)}. \quad (3.11)$$

En lo que sigue hacemos las siguientes simplificaciones para el caso supercrítico:  $p_0 = 0$ ,  $G$  no tiene átomo en 0 (los individuos tienen edad 0 al nacer), y  $G$  no es de tipo latiz ( $G$  no está soportada en un conjunto de la forma  $\{kd + t, k = 0, 1, 2, \dots\}$  para algún  $d > 0, t$  fijo). Consideremos el proceso  $(W_t)_{t \geq 0}$  definido por  $W_t = (e^{-\alpha t}/c)Z_t$ . Resulta que existe una variable aleatoria no negativa  $W$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_t = W \quad \text{c.s.} \quad (3.12)$$

([2], p. 146, 152, [11]). Si  $G$  es exponencial, de manera análoga al modelo de Galton-Watson, la existencia del límite se sigue del hecho que en este caso  $(W_t)_{t \geq 0}$  es una martingala. En los casos crítico y subcrítico,  $W = 0$ , y en el caso supercrítico la variable aleatoria  $W$  es absolutamente continua en  $(0, \infty)$ , tiene valor medio  $E(W) = 1$  y varianza

$$\text{Var}(W) = \frac{(m + m_2) \int_0^\infty e^{-2\alpha u} dG(u) - 1}{1 - m \int_0^\infty e^{-2\alpha u} dG(u)}, \quad (3.13)$$

y  $P[W = 0] = q$  (probabilidad de extinción) ([2], p. 111, 172, [3], p. 146).

Así, de manera semejante al modelo de Galton-Watson, la población se extingue o crece exponencialmente como  $c e^{\alpha t} W$  asintóticamente cuando  $t \rightarrow \infty$ ; de ahí que se haya llamado a  $\alpha$  parámetro de Malthus, pues determina la forma del crecimiento exponencial de la población.

En el caso crítico, un resultado análogo a (3.6) es el siguiente: Si  $\int_0^\infty t dG(t) = \mu < \infty$  y  $t^2[1 - G(t)] \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left[ \frac{Z_t}{t} \leq x \mid Z_t > 0 \right] = 1 - \exp \left\{ -\frac{2\mu x}{\sigma^2} \right\}, \quad x \geq 0. \quad (3.14)$$

([2], p. 169).

Un resultado de fluctuación análogo a (3.7) en el caso supercrítico con  $G$  exponencial (en este caso,  $c = 1$ ) es el siguiente:

$$\frac{Z_t - e^{V(m-1)t} W}{Z_t^{1/2}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \text{Var}(W)) \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

donde  $W$  es el límite de  $e^{-V(m-1)t}Z_t$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , dado por (3.12) ([2], p. 124). Creo que un resultado del tipo (3.15) debe cumplirse en el caso no markoviano ( $G$  no exponencial, con alguna condición), pero no lo he encontrado.

¿Cómo es la distribución de las edades de los individuos al tiempo  $t$ ? La edad de un individuo presente al tiempo  $t$  es el tiempo que ha vivido desde que nació hasta  $t$  (Figura 5). Sea  $Z(x, t)$  el número de individuos cuyas edades al tiempo  $t$  no exceden  $x > 0$ . La proporción de tales individuos es la variable aleatoria  $A(x, t) = Z(x, t)/Z_t$ . En el caso supercrítico se tiene, para cada  $x > 0$ ,

$$A(x, t) \rightarrow A(x) \quad \text{c.s. cuando } t \rightarrow \infty, \quad (3.16)$$

donde

$$A(x) = \frac{\int_0^x e^{-\alpha u} [1 - G(u)] du}{\int_0^\infty e^{-\alpha u} [1 - G(u)] du}, \quad x > 0, \quad (3.17)$$

y  $A(x)$  se llama *distribución de edad estacionaria*. ([2], p. 179, [11]).

En el proceso de Bellman-Harris los individuos presentes al tiempo  $t$  pueden pertenecer a generaciones distintas. ¿Cómo se distribuyen las generaciones al tiempo  $t$ ? Sea  $Y(y, t)$  el número de individuos pertenecientes a generaciones que no exceden  $y$  al tiempo  $t$ , es decir, que tienen no más de  $\lfloor y \rfloor$  antepasados ( $\lfloor \cdot \rfloor$  denota parte entera). La proporción de tales individuos es la variable aleatoria  $B(y, t) = Y(y, t)/Z_t$ . En el caso supercrítico se tiene

$$B(y_t(s), t) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^s e^{-y^2/2} dy \quad \text{c.s. cuando } t \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

si

$$y_t(s) = st^{1/2}\tilde{\gamma}^2\tilde{\mu}^{-3/2} + t\tilde{\mu}^{-1}, \quad -\infty < s < \infty, \quad (3.19)$$

(es claro que  $y_t(s) > 0$  para  $t$  suficientemente grande), donde  $\tilde{\mu}$  y  $\tilde{\gamma}^2$  son el valor medio y la varianza de la función de distribución de probabilidad

$$\tilde{G}(t) = \int_0^t me^{-\alpha s} dG(s), \quad t \geq 0, \quad (3.20)$$

(véase (3.10)). Es claro que a medida que  $t$  aumenta, aparecen más y más generaciones. El resultado (3.18)-(3.19) significa que hay que observarlas de acuerdo con  $y_t(s)$  para detectar la distribución a largo plazo. ([2], p. 233, 242, la convergencia c.s. es consecuencia de resultados de [13]).

### 3.3. Relaciones entre los límites de Galton-Watson y de Bellman-Harris supercríticos

En el proceso de Bellman-Harris está inmerso un proceso de Galton-Watson, ya que se puede considerar el número de individuos pertenecientes a una misma generación, independientemente de las épocas en que viven. Existen las variables aleatorias no triviales  $W$  que hemos visto para dichos procesos en el caso supercrítico, dadas por (3.5) para Galton-Watson y por (3.12) para Bellman-Harris, pero son distintas, y ahora las denotamos por  $W_1$  y  $W_2$ , respectivamente. En general se sabe poco acerca de las distribuciones de esas variables aleatorias. Sin embargo, es natural preguntarse qué relaciones hay entre ellas ([2], p. 178, problema 13). Se tienen los siguientes resultados sobre las esperanzas condicionales de cada una dada la otra [12]:

$$E[W_2|W_1] = W_1, \quad (3.21)$$

de donde se sigue que

$$\text{Cov}(W_1, W_2) = \text{Var}(W_1) = \frac{\sigma^2}{m^2 - m}, \quad (3.22)$$

y si  $G$  es exponencial,

$$E[W_1|W_2] = \frac{1}{f_{W_2}(W_2)} \mathcal{L}^{-1}\{(-\Psi'_{W_2})^{1/m}\}(W_2), \quad (3.23)$$

donde  $f_{W_2}$  es la función de densidad de  $W_2$ ,  $\Psi_{W_2}(u) = Ee^{-uW_2}$ ,  $u \geq 0$ , es la transformada de Laplace de (la distribución de)  $W_2$ , y  $\mathcal{L}^{-1}\{ \cdot \}(x)$  denota transformada de Laplace inversa evaluada en  $x$ . Estos resultados se deducen de una ecuación funcional para la transformada de Laplace conjunta de  $W_1$  y  $W_2$ , definida por

$$\Psi_{W_1, W_2}(u_1, u_2) = E(\exp\{-(u_1W_1 + u_2W_2)\}), \quad u_1, u_2 \geq 0. \quad (3.24)$$

Dicha ecuación funcional es

$$\Psi_{W_1, W_2}(u_1, u_2) = \int_0^\infty f(\Psi_{W_1, W_2}(u_1 m^{-1}, u_2 e^{-\alpha x})) dG(x), \quad (3.25)$$

donde  $f$  es la función generadora de la ley de ramificación dada por (3.1). (Esta ecuación es válida bajo la condición  $\sum_k (k \log k) p_k < \infty$ ). Haciendo  $u_1 = 0$  ó  $u_2 = 0$  se obtienen las ecuaciones funcionales conocidas para  $W_1$  y para  $W_2$  ([2], p. 10, 172). En general no hay forma de resolver estas ecuaciones.

## 4. Procesos de ramificación con estado continuo

Los procesos de Galton-Watson y de Bellman-Harris solamente toman valores enteros no negativos. Ahora veremos unos procesos de ramificación con espacio de estados continuo:  $[0, \infty)$ . Cuando el número de partículas de un sistema es muy grande, en lugar de considerar las partículas individuales conviene estudiar la densidad de partículas. Este enfoque, que se usa en física estadística, se emplea para obtener los procesos con estado continuo.

Consideremos el proceso de Galton-Watson, pero en lugar de una sola partícula inicial, como antes ( $N_0 = 1$ ), ahora habrá muchas partículas iniciales. Antes supusimos implícitamente que cada partícula tiene una masa unitaria, y ahora las partículas tendrán masas muy pequeñas. Además, aceleraremos el tiempo de modo que en una unidad de tiempo ocurrirán muchas ramificaciones, y haremos que la ley de ramificación sea asintóticamente crítica. Todo esto se tiene de la manera siguiente: Sea  $(N_n^{(r)})_{n=0,1,2,\dots}$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , una sucesión de procesos de Galton-Watson. Para cada  $r$  definimos el proceso estocástico en tiempo continuo  $(X_t^{(r)})_{t \geq 0}$  en la forma  $X_t^{(r)} = N_{\lfloor rt \rfloor}^{(r)} / r$ . Así, las ramificaciones ocurren en los instantes  $i/r$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , y cada partícula tiene masa  $1/r$ . Hacemos que las leyes de ramificación dependan de  $r$  de modo que el valor medio sea asintóticamente de la forma  $m(r) \sim 1 + b/r$ ,  $-\infty < b < \infty$  constante, cuando  $r \rightarrow \infty$  ( $m(r)$  es positivo para  $r$  suficientemente grande). Si existe el límite  $X_0^{(r)} \rightarrow a$ , constante positiva, cuando  $r \rightarrow \infty$  (por lo tanto el número de partículas iniciales tiende a infinito), se obtienen como límites en distribución de  $(X_t^{(r)})_{t \geq 0}$ , cuando  $r \rightarrow \infty$ , procesos  $(X_t)_{t \geq 0}$  que son difusiones en  $[0, \infty)$  con ecuación de Kolmogorov (hacia atrás) de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = bx \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) + \frac{1}{2} cx \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x), \quad (4.1)$$

con  $X_0 = a$  y constante  $c > 0$  que depende de los segundos momentos de las leyes de ramificación. Esto significa que  $(X_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de Markov con trayectorias continuas, tal que

$$E[X_t - a | X_0 = a] \sim bat \quad (4.2)$$

y

$$E[(X_t - a)^2 | X_0 = a] \sim cat \quad (4.3)$$

cuando  $t \rightarrow 0$  ([2], p. 260, 262, [14]). Omito el sentido preciso de la convergencia en distribución del proceso  $(X_t^{(r)})_{t \geq 0}$  al proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$

cuando  $r \rightarrow \infty$ , pero se puede pensar como algo análogo a la convergencia en distribución de variables aleatorias.

La probabilidad de extinción del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  (con  $X_0 = a$ ) es

$$q = \begin{cases} 1, & \text{si } b \leq 0 \text{ (casos críticos y subcrítico),} \\ \exp\{-2ba/c\}, & \text{si } b > 0 \text{ (caso supercrítico).} \end{cases}$$

La difusión  $(X_t)_{t \geq 0}$  con ecuación de Kolmogorov (4.1) es solución no negativa de la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dX_t &= bX_t dt + (cX_t)^{1/2} dB_t, \quad t > 0, \\ X_0 &= a, \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde  $(B_t)_{t \geq 0}$  es el movimiento browniano estándar (cuyas trayectorias no son diferenciables). Cabe recordar que una ecuación diferencial estocástica de la forma (4.5) es simbólica y hay que entenderla en su forma integral. Una peculiaridad de la ecuación (4.4) es que no cae dentro de la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô porque la función  $x \mapsto x^{1/2}$  no es de Lipschitz. (Sobre esta ecuación, véase [15]. La teoría clásica de ecuaciones diferenciales estocásticas en el sentido de Itô puede verse en C. Tudor, Procesos Estocásticos, Tercera Edición, y a nivel más avanzado en T. Bojdecki, Teoría General de Procesos e Integración Estocástica, ambos libros publicados en Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana.)

El tipo de procesos estocásticos vistos aquí se llaman *difusiones de Feller* debido a que fueron obtenidas por W. Feller (en modelos de genética).

## 5. Una aplicación a gráficas aleatorias

Muchas de las aplicaciones de la teoría de ramificación se encuentran en biología [7], [8], [9], [10] y otras ciencias. Aquí veremos una aplicación en un campo de las matemáticas que no tiene relación aparente con la ramificación.

La teoría clásica de gráficas aleatorias se inició con los trabajos de Erdős y Rényi alrededor de 1950. Una clase de esas gráficas es  $G(n, p)$ , con  $0 < p < 1$ , definida como sigue: hay  $n$  vértices, y cada par de ellos se conecta con probabilidad  $p$ , o no se conecta con probabilidad  $1 - p$ , independientemente para cada par de vértices. Se buscan propiedades de la gráfica  $G(n, p)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , para lo cual la probabilidad de conexión  $p$  debe depender de  $n$  de la forma  $p = c/n$ , donde  $c$  es una constante positiva ( $c < n$ ). Existen resultados referentes a los tamaños

de las *componentes* de la gráfica, que son conjuntos de vértices que están todos conectados. Uno de los resultados principales es el siguiente. Si  $c < 1$ , la componente más grande de  $G(n, p)$  tiene orden  $O(\log n)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Si  $c > 1$ , hay una única componente, llamada “gigante”, que contiene asintóticamente  $rn$  vértices cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $r \in (0, 1)$  es solución de la ecuación

$$e^{-rc} = 1 - r, \quad (5.1)$$

y todas las demás componentes tienen a lo más orden  $O(\log n)$ . Así, la probabilidad de que un vértice dado pertenezca a la componente gigante es  $r$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Al pasar  $c$  de la izquierda a la derecha de 1, ocurre un doble salto en el tamaño de la componente más grande (el orden cambia primero de  $\log n$  a  $n^{2/3}$  y luego de  $n^{2/3}$  a  $n$ ). Estos resultados se han obtenido de varias maneras, principalmente con métodos combinatorios.

¿Qué tienen que ver los procesos de ramificación con las gráficas aleatorias  $G(n, p)$ ? Empezando con un vértice dado, la probabilidad de que esté conectado a  $k$  vértices está dada por la distribución binomial

$$p_k = \binom{n-1}{k} \left(\frac{c}{n}\right)^k \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{n-1-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

( $c < n$ ). Esta distribución converge a la distribución de Poisson de parámetro  $c$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , dada por

$$p_k = \frac{e^{-c} c^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

La función generadora de esta distribución de Poisson es

$$f(s) = e^{-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k s^k}{k!} = e^{-c(1-s)}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

De lo visto en la sección 3.1, sabemos que la probabilidad de extinción del proceso de Galton-Watson con ley de ramificación Poisson de parámetro  $c$  es la raíz más pequeña de la ecuación  $f(s) = s$ , que en este caso es  $e^{-c(1-s)} = s$ . Haciendo  $r = 1 - s$  se tiene  $e^{-rc} = 1 - r$ , que es la ecuación (5.1), y el proceso de Galton-Watson no se extingue con probabilidad  $r$ . Resulta así que hay una relación entre la no extinción del proceso de Galton-Watson y la existencia de la componente gigante de la gráfica  $G(n, c/n)$ . Aunque esto parece ser sólo una analogía rudimentaria, esta idea ha sido empleada para demostrar rigurosamente el resultado de Erdős-Rényi sobre la existencia de la componente gigante.

A pesar de que los procesos de ramificación y las gráficas aleatorias son modelos distintos, se pueden relacionar debido a que hay una ecuación que les es común. Este tipo de analogías suelen ocurrir en las matemáticas y vale mucho la pena aprovecharlas.

## Agradecimiento

Agradezco al Dr. José Alfredo López-Mimbela sus comentarios, que me ayudaron a mejorar este trabajo. Este artículo se hizo con apoyo del proyecto CONACyT 45684-F.

## Bibliografía

### *Procesos de ramificación*

- [1] S. Asmussen, H. Hering, Branching Processes, Birkhäuser, 1983.
- [2] K.B. Athreya, P. Ney, Branching Processes, Springer-Verlag, 1972.
- [3] T.E. Harris, The Theory of Branching Processes, Springer-Verlag, 1963.
- [4] B.A. Sevastianov, Procesos de Ramificación (en ruso), Nauka, 1971.
- [5] V.A. Vatutin, A.M. Zubkov, Branching Processes I, J. Soviet Math. 39 (1987), 2431-2475.
- [6] V.A. Vatutin, A.M. Zubkov, Branching Processes II, J. Soviet Math. 67 (1993), 3407-3485.

### *Aplicaciones de procesos de ramificación en biología*

- [7] P. Haccou, P. Jagers, V.A. Vatutin, Branching Processes: Variation, Growth and Extinction of Populations, Cambridge University Press, 2005.
- [8] P. Jagers, Branching Processes with Biological Applications, Wiley, 1975.
- [9] M. Kimmel, D.E. Axelrod, Branching Processes in Biology, Springer, 2002.

- [10] A.G. Pakes, Biological Applications of Branching Processes, en Handbook of Statistics, Vol. 21 “Stochastic Processes: Modelling and Simulation”, D.N. Shanbhag, C.R. Rao (editors). North-Holland, 2003, 693-773.

*Artículos especializados sobre algunos resultados*

- [11] K.B. Athreya, N. Kaplan, Convergence of the age distribution in the one-dimensional age-dependent branching process, Ann. Probab. 4 (1976), 38-56.
- [12] L.G. Gorostiza, A note on the limits of branching processes, Bol. Soc. Mat. Mexicana 21 (1976), 62-64.
- [13] L.G. Gorostiza, N. Kaplan, Invariance principle for branching random motions, Bol. Soc. Mat. Mexicana 25 (1980), 63-86.
- [14] J. Lamperti, The limit of a sequence of branching processes, Zeit. für Wahrschein. Geb. 7 (1967), 271-288.
- [15] S. Méléard, S. Roelly, A generalized equation for a continuous measure branching process, Stochastic Partial Differential Equations and Applications II, Lect. Notes Math. 1390. Proceedings Trento (Springer, Berlin, 1988), 171-186.

*El artículo en versión completa*

- [16] L.G. Gorostiza, Ramificación y Superprocesos, Memorias del Congreso Regional de Probabilidad y Estadística, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, febrero 2008, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 39 (2008), 79-105.