53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 8. Jänner 2022

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Daniel Holmes zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 5. Jänner 2022 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Daniel Holmes bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 8. Jänner 2022 von 10:00–11:45 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Kombinatorischer Nullstellensatz

Einleitung

Folgender Satz dürfte weitgehend bakannt sein:

Satz 1 (Identitätssatz für Polynome)**.** Sei $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, das mindestens $n + 1$ verschiedene Nullstellen hat. Dann ist $P(X)$ das Nullpolynom, also $a_0 = \cdots = a_n = 0$.

Dieser Satz ist äquivalent zu:

Satz 2. Sei $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X^1 + a_0$ ein reelles Polynom, und sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge mit $|S| \geq n + 1$. Wenn $a_n \neq 0$, dann gibt es ein $s \in S$, sodass $P(s) \neq 0$.

Anmerkung zu den Koeffizienten. Die Koeffizienten des Polynoms $P(X)$ müssen dabei nicht unbedingt reell sein. Der Satz gilt unverändert, solange das Polynom Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K}$ hat. Ein *Körper* ist eine Menge, in der man wie in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ addieren, multiplizieren, subtrahieren, und dividieren kann (außer durch null).
Ein weiteres wichtiges Beispiel für einen Körper sind die Restklassen modulo p, genannt $\mathbb{Z}_p$. Addition, Subtraktion und Multiplikation funtionieren modulo p auch dann, wenn p keine Primzahl ist. Damit jedoch jedes Element in $\mathbb{Z}_p$ (außer die Restklasse von 0) ein multiplikatives Inverses hat, muss p prim sein.[1]

Mehr Variablen. Der kombinatorische Nullstellensatz verallgemeinert Satz 2 zu mehreren Variablen und bringt in damit in eine Form, die für kombinatorische Aufgaben nutzbar ist.

Satz 3 (Alons Kombinatorischer Nullstellensatz)**.** Sei $P(X_1, \ldots, X_n)$ ein Polynom in n Variablen mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$. Der Grad von P sei $d = t_1 + \cdots + t_n$ mit $t_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Weiters seien $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{K}$ Mengen mit $|S_i| \geq t_i + 1$.
Dann gilt: Wenn der Koeffizient von $X_1^{t_1}X_2^{t_2}\cdots X_n^{t^n}$ ungleich null ist, dann existieren $s_1, \ldots, s_n$ mit $s_i \in S_i$, sodass $P(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$.

Den Beweis und einige schöne Anwendungen werden wir in der Einheit am Samstag besprechen.

[1]Es gibt noch viele weitere Körper. Die endlichen davon lassen sich durch ihre Größe klassifizieren: Sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper. Dann ist $|\mathbb{K}|$ eine Primzahlpotenz. Umgekehrt gilt: Zwei endliche Körper mit gleich vielen Elementen haben die gleiche Struktur.

Aufgaben

Aufgabe 1. In jeder Ecke eines konvexen 100-Ecks stehen zwei verschiedene (reelle) Zahlen. Emmy entfernt in jeder Ecke eine Zahl ihrer Wahl. Sie gewinnt, wenn die verbleibenden Zahlen in benachbarten Ecken stets unterschiedlich sind.
Zeige, dass Emmy immer gewinnen kann.

Aufgabe 2. Es sei n eine positive ganze Zahl. Gegeben sei

$$M = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\},$$

eine Menge von $(n + 1)^3 - 1$ Punkten des drei-dimensionalen Raumes.
Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Ebenen, deren Vereinigung die Menge M umfasst, aber nicht den Punkt $(0, 0, 0)$.

Aufgabe 3 (Satz von Cauchy-Davenport)**.** Sei p eine Primzahl, $\mathbb{Z}_p$ die Menge der Restklassen modulo p und $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$. Weiters sei $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Dann gilt

$$|A + B| \geq \min(p, |A| + |B| - 1).$$

Aufgabe 4 (N. Alon)**.** Sei p eine Primzahl und $G = (V, E)$ ein einfacher Graph ohne Schleifen[2], in dem die Knoten durchschnittlich mehr als $2p - 2$ Nachbarn haben, und jeder Knoten höchstens $2p - 1$ Nachbarn hat.
Dann hat G einen p-regulären Teilgraphen[3].

Aufgabe 5. Sei n eine positive ganze Zahl. Gegeben seien $2^n + 1$ verschiedene endliche Mengen. Die Mengen sind in zwei Kategorien unterteilt: Die blauen Mengen und die roten Mengen, wobei jede Kategorie mindestens eine Menge enthält.
Wir definieren die *symmetrische Differenz* zweier Mengen als die Menge jener Elemente, die zu genau einer der beiden Mengen gehören[4].
Zeige, dass es mindestens 2^n verschiedene Mengen gibt, die die symmetrische Differenz einer roten und einer blauen Menge sind.

---

[2] Das heißt: Die Kanten von G sind ungerichtet, jede Kante verbindet zwei verschiedene Knoten miteinander, und zwei Knoten sind durch höchstens eine Kante verbunden. Formal ist V die Menge der Knoten und E die Menge der Kanten, wobei jede Kante $e \in E$ als Teilmenge von V mit zwei Elementen betrachtet wird. In dieser Schreibweise bedeutet $e = \{v_1, v_2\} \in E$, dass die Knoten v_1 und v_2 im Graph G durch die Kante e miteinander verbunden sind.

[3] Ein Graph heißt *p-regulär*, wenn jeder Knoten genau p Nachbarn hat.

[4] Zum Beispiel ist die symmetrische Differenz von $\{1, 2, 3\}$ und $\{2, 3, 4\}$ gleich $\{1, 4\}$.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Für $i \in \{1, \ldots, 100\}$ sei S_i die Menge der beiden Zahlen in der i-ten Ecke des 100-Ecks. Verwende ein Polynom in 100 Variablen (eine Variable für die Zahl in jeder Ecke) und den kombinatorischen Nullstellensatz.

Aufgabe 2. *[Anmerkung: Eine Ebene im dreidimensionalen Raum ist gegeben durch eine Gleichung der Form $ax + by + cz + d = 0$, wobei a, b, c, d reelle Konstanten sind.]*

Die kleinstmögliche Anzahl von Ebenen ist $3n$.
Angenommen es ginge mit $k < 3n$ Ebenen. Betrachte ein Polynom $A(X, Y, Z)$, das aus k Faktoren besteht und auf jedem Punkt von M verschwindet. Dieses Polynom verschwindet jedoch nicht auf $(0, 0, 0)$. Um also den kombinatorischen Nullstellensatz mit $S_X = S_Y = S_Z = \{0, 1, \ldots, n\}$ anwenden zu können, müssen wir das Polynom $A(X, Y, Z)$ geschickt modifizieren.
Ziehe dazu von $A(X, Y, Z)$ ein geeignetes Vielfaches von $B(X, Y, Z)$ ab, wobei B ein möglichst einfach gewähltes Polynom vom Grad $3n$ ist, das ebenso auf M verschwindet, aber nicht am Punkt $(0, 0, 0)$.

Aufgabe 3. Für $|A| + |B| > p$ kann die Aussage ohne besondere Hilfsmittel gezeigt werden.
Für $|A| + |B| \leq p$, zeige mithilfe des kombinatorischen Nullstellensatzes, dass für jede Menge C mit $|C| = |A| + |B| - 2$ ein Element von $A + B$ existiert, das nicht in C ist. Arbeite dabei mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_p$.

Aufgabe 4. Definiere den Teilgraphen durch die enthaltenen Kanten, und verwende für jede Kante $e \in E$ eine Variable X_e, die 0 oder 1 ist, jenachdem ob e im Teilgraph enthalten ist oder nicht. Arbeite mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_p$ und verwende den kleinen Satz von Fermat, um Ausdrücke zu 0 oder 1 zu machen.

Aufgabe 5. Verwende einen Körper $\mathbb{K}$ mit 2^l Elementen, wobei l die Anzahl der Elemente in allen $2^n + 1$ Mengen zusammen ist. In diesem Körper gibt es l Elemente $b_1, \ldots, b_l$, sodass jedes Element von $\mathbb{K}$ als $\varepsilon_1 b_1 + \cdots + \varepsilon_l b_l$ geschrieben werden kann, wobei $l_i \in \{0, 1\}$ für alle i. Damit sind die Elemente von $\mathbb{K}$ in Bijektion mit den möglichen Mengen, die aus den l Elementen gebildet werden können.
Außerdem gilt $x + x = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$, weshalb wir Addition in $\mathbb{K}$ als symmetrische Differenz von Mengen interpretieren können.
Zeige nun, ähnlich wie im Beweis des Satzes von Cauchy-Davenport (Aufgabe 3), dass keine Sammlung von $2^n - 1$ Mengen alle symmetrischen Differenzen enthalten kann.
[Es könnte hilfreich sein, dass $\binom{2^n - 1}{x}$ ungerade ist für $x \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$. Das folgt zum Beispiel aus dem Satz von Lucas.]