Teoretická fyzika ï Základy teoretické mechaniky

Michal Lenc ï podzim 2012

Obsah

1. Funkcionály

Při odvození Lagrangeových budeme vycházet z principu nejmenšího účinku. Základním pojmem je účinek (akce), což je integrál na určitém časovém intervalu z tzv. Lagrangeovy funkce, která je opět funkcí popisujících časovou závislost trajektorií a rychlostí (skutečných nebo virtuálních). Pro účely mechaniky budeme nazývat funkcionálem zobrazení jisté množiny funkcí (v mechanice funkcí jedné proměnné) do množiny reálných čísel. Triviálním příkladem je délka křivky, charakterizované v rovině $x - y$ funkcí $y = y(x)$ mezi body $A = (a, y(a))$ a $B = (b, y(b))$

$$\ell = \int_A^B \mathrm{d}\ell = \int_A^B \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x \quad , \quad y' = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \quad .$$

Pokud je funkce $y = y(x)$ dána, jde pak už jen o výpočet určitého integrálu. Zajímavější je úloha, jak najít křivku spojující zmíněné body, která má nejkratší vzdálenost. Fyzikálně velmi zajímavý je Fermatův princip. Předpokládejme, že světelný paprsek vychází z bodu A a směřuje do bodu B. Fermatův princip říká, že výsledná trajektorie je taková, aby potřebná doba šíření byla minimální. Prostředí, ve kterém se paprsek šíří, je charakterizováno indexem lomu, který udává poměr rychlosti světla ve vakuu k rychlosti v daném prostředí $n = c/v$. Podle Fermatova principu hledáme tedy minimum funkcionálu

$$\Delta t = \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t = \int_A^B \frac{\mathrm{d}\ell}{v} = \frac{1}{c}\int_a^b n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x \quad .$$

Základem Newtonovy mechaniky je Hamiltonův princip, který vychází z účinku

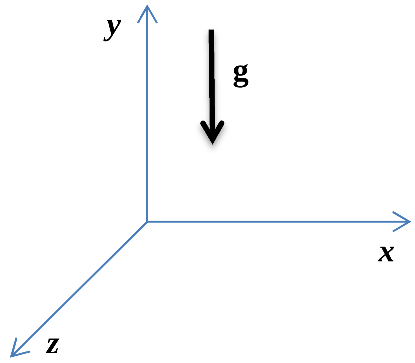
$$S = \int_a^b (K - U)\,\mathrm{d}t \quad , \tag{1.1}$$

kde pro jednu částici hmotnosti m závisí kinetická energie K a potenciální energie U na zobecněných souřadnicích $q^\mu(t)$ a jejich derivacích $\dot{q}^\mu = \mathrm{d}q^\mu / \mathrm{d}t$ vztahy

$$K = K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m\, g_{\mu\nu}(q)\, \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \quad , \quad U = U(q, t) \quad . \tag{1.2}$$

Užíváme Einsteinova sumačního pravidla, kdy se sčítá přes daný interval indexů, pokud se ve výrazu vyskytne stejné označení v dolním i horním indexu. Zjednodušeně také píšeme $f = f(q)$ nebo $f = f(q^\mu)$ místo $f = f(\{q^\mu\})$. Řecké indexy budou označovat prostorové souřadnice, je tedy v trojrozměrném případě $\mu = 1, 2, 3$. Latinské indexy budou označovat časoprostorové souřadnice, ve čtyřrozměrném případě ($x^0 = ct$) tedy $i = 0, 1, 2, 3$.

Jednoduchým příkladem pro (1.1) je částice v homogenním gravitačním poli (volba kartézských souřadnic na obrázku):



$$S=\int_a^b\left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-m\,g\,y\right]\mathrm{d}t \quad . \tag{1.3}$$

V obecné teorii relativity je základním funkcionálem pro popis pohybu částice hmotnosti m v gravitačním poli

$$S=-m\,c\int_a^b\left(g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k\right)^{1/2} \quad , \tag{1.4}$$

kde g_{ik} jsou složky metrického tensoru.

Pro jednorozměrný případ (zobecnění na vícerozměrný případ je zřejmé) je matematicky přesná definice funkcionálu následující:

Nechť D_S je množina všech funkcí $y=y(x)$ definovaných na intervalu $[a,b]$, jejichž grafem je po částech hladký rektifikovatelný oblouk. Funkcionálem rozumíme zobrazení

$$S:\quad D_S\ni y(x)\quad\to\quad S[y]\in\mathbb{R} \quad . \tag{1.5}$$

Nechť dále $L=L(x,y,y')$ je funkce na otevřené podmnožině prostoru $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ obsahující množinu $[a,b]\times\mathbb{R}^2$, se spojitými parciálními derivacemi do řádu 2 včetně. Pak funkcionál

$$S:\quad D_S\ni y(x)\quad\to\quad S[y]=\int_a^b L\big(x,y(x),y'(x)\big)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R} \tag{1.6}$$

se nazývá variační integrál.

2. Eulerovy – Lagrangeovy rovnice

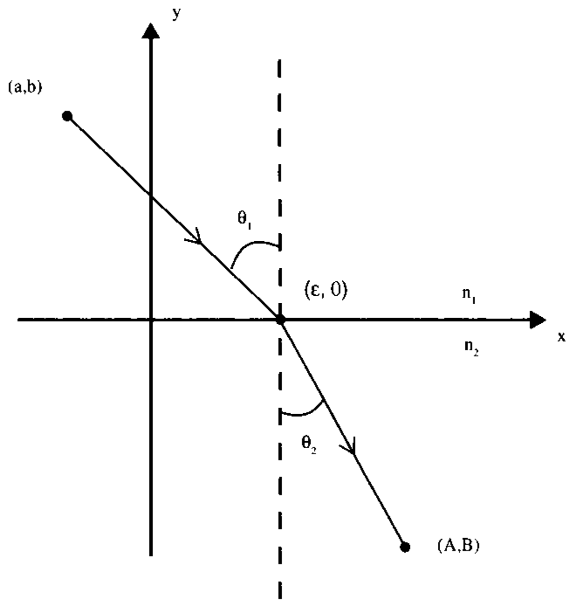
2.1 Snellův zákon z Fermatova principu

Značení zvolíme podle obrázku. Předpokládejme, že už víme, že v homogenním prostředí nejkratší vzdáleností mezi dvěma body je přímka. Při cestě z bodu (a,b) v prvním prostŚedí do bodu (A,B) v druhém prostŚedí prochází paprsek bodem $(\varepsilon,0)$ na rozhraní ï souŚadnice Ůtohoto bodu je jediným volným parametrem úlohy. Máme tedy

$$\Delta t(\varepsilon)=\frac{1}{c}(n_1 s_1+n_2 s_2)=\frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{(\varepsilon-a)^2+b^2}+n_2\sqrt{(A-\varepsilon)^2+B^2}\right) \quad . \tag{2.1}$$

Dále

$$\frac{\mathrm{d}\Delta t(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1(\varepsilon-a)}{s_1}-\frac{n_2(A-\varepsilon)}{s_2}=0 \quad ,$$



odkud uģ plyne SnellŢv zákon

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2 \quad . \tag{2.2}$$

Jde opravdu o minimum, neboŠ

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta t(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon^2}=\frac{1}{c}\left(\frac{n_1\cos^2\theta_1}{s_1}+\frac{n_2\cos^2\theta_2}{s_2}\right)>0 \quad .$$

2.2 Eulerovy ï Lagrangeovy rovnice

Nejprve dŢleģité Lemma: Jestliģe

$$\int_a^b F(t)\eta(t)\mathrm{d}t=0 \quad , \quad \eta(a)=\eta(b)=0$$

a jestliģe jsou na intervalu $[a,b]$ obĎ funkce $F(t)$ i $\eta(t)$ dvakrát diferencovatelné, potom $F(t)\equiv 0$ na $[a,b]$. DŢkaz vedeme sporem. PŚedpokládejme, ģe $F(c)\neq 0$ (pro urļitost $F(c)>0$) pro nĎjaké $a<c<b$. Za daných pŚedpokladŢ pak existuje interval $(t_1,t_2)\in[a,b]$ obsahující bod c, kde $F(t)>0$. Zkonstruujeme funkci (pokud splŔuje poģadavky, je jinak libovolná)

$$\eta(t)=\begin{cases}(t-t_1)^3(t_2-t)^3 & t\in(t_1,t_2)\\ 0 & t\notin(t_1,t_2)\end{cases}\quad .$$

Pak ovġem integrál z lemmatu není nulový, coġ je spor. Nyní mŢġeme pŚistoupit k dŢkazu následující vŊty:

Uvaġujme funkcionál *S*, jehoġ Lagrangeova funkce *L* závisí na *n* funkcích x^α jedné promŊnné *t*, na prvních derivacích tŊchto funkcí a na samotné promŊnné *t*

$$S=\int_a^b L\left(t,x^\alpha,\dot{x}^\alpha\right)\mathrm{d}t\quad . \tag{2.3}$$

Soubor *n* funkcí $\left\{x^\alpha(t)\right\}$, pro které nabývá funkcionál *S* extrému je Śeġením *n* Eulerových ï Lagrangeových rovnic

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}}\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^\alpha}-\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha}=\mathbf{0}} \tag{2.4}$$

DŢkaz: AŠ $x^\alpha(t)$ oznaļuje právŊ tu (skuteļnou) trajektorii, pro kterou nastane extrém funkcionálu *S*. Kolem této trajektorie vytvoŚíme mnoġinu (virtuálních) trajektorií

$$x^\alpha_{[\varepsilon]}=x^\alpha(t,\varepsilon)=x^\alpha(t)+\varepsilon\eta^\alpha(t)\quad ,\quad \eta^\alpha(a)=\eta^\alpha(b)=0\quad . \tag{2.5}$$

Definujme funkcionál

$$S(\varepsilon)=\int_a^b L(\varepsilon)\mathrm{d}t\quad ,\quad L(\varepsilon)=L\left(t,x^\alpha_{[\varepsilon]},\dot{x}^\alpha_{[\varepsilon]}\right)\quad . \tag{2.6}$$

Má-li funkcionál (2.6) dosáhnout extrému (2.3), musí být

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S(\varepsilon)-S}{\varepsilon}=\left.\frac{\mathrm{d}S(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0\quad . \tag{2.7}$$

PotŚebná derivace je

$$\frac{\mathrm{d}S(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=\int_a^b\left[\frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial x^\alpha_{[\varepsilon]}}\frac{\partial x^\alpha_{[\varepsilon]}}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \dot{x}^\alpha_{[\varepsilon]}}\frac{\partial \dot{x}^\alpha_{[\varepsilon]}}{\partial\varepsilon}\right]\mathrm{d}t\quad . \tag{2.8}$$

Máme

$$\frac{\partial x^\alpha_{[\varepsilon]}}{\partial\varepsilon}=\eta^\alpha(t)\quad ,\quad \frac{\partial \dot{x}^\alpha_{[\varepsilon]}}{\partial\varepsilon}=\dot{\eta}^\alpha(t)\quad ,\quad \left.\frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial x^\alpha_{[\varepsilon]}}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\quad ,\quad \left.\frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \dot{x}^\alpha_{[\varepsilon]}}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\quad , \tag{2.9}$$

takġe

$$\left.\frac{\mathrm{d}S(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\eta^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\dot{\eta}^\alpha\right]\mathrm{d}t = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\eta^\alpha\right|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right]\eta^\alpha\,\mathrm{d}t \quad . \tag{2.10}$$

Podmínky $\eta^\alpha(a)=\eta^\alpha(b)=0$ a pouģití Lemmatu uzavírají dŢkaz.

Poznámka. Ve vztahu (2.8) je dobŚe ilustrováno sumaļní pravidlo. Ļlen $\partial L \big/ \partial x^\alpha_{[\varepsilon]}$ má index Ů Ădoleñ, ļlen $\partial x^\alpha_{[\varepsilon]} \big/ \partial \varepsilon$ ānahoŚeñ ï index je sļítací. Aby nedoģlo k zámĎnĎ je skuteļnost, ģe Ů je promĎnná a nikoliv index, zvýraznĎna uzavŚením [Ů] do závorky.

2.3 Poznámky k Lagrangeovým rovnicím

1. Provedeme explicitnĎ totální derivaci podle promĎnné *t*. Dostáváme tak

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\beta\,\partial \dot{x}^\alpha}\ddot{x}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial x^\beta\,\partial \dot{x}^\alpha}\dot{x}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial t\,\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad . \tag{2.11}$$

   Lagrangeovy rovnice tvoŚí soustavu n obyļejných diferenciálních rovnic druhého Śádu.

2. Definujeme zobecnĎnou hybnost kanonicky sdruģenou se zobecnĎnou souŚadnicí x^α jako

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \quad . \tag{2.12}$$

   Potom mají Lagrangeovy rovnice tvar

$$\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \quad . \tag{2.13}$$

   Z rovnice (2.13) vidíme okamģitĎ zákon zachování: ZobecnĎná hybnost se zachovává, jestliģe Lagrangeova funkce nezávisí na kanonicky sdruģené souŚadnici.

3. Definujeme Hamiltonovu funkci jako

$$H = H(t,x,p) = p_\alpha\,\dot{x}^\alpha(t,x,p) - L\big(t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha(t,x,p)\big) \quad . \tag{2.14}$$

   Tímto zápisem je zdŢraznĎna skuteļnost, ģe na pravé stranĎ vystupující rychlosti $\dot{x}^\alpha$ jsou vyjádŚeny pomocí souŚadnic a hybností pomocí vztahu (2.12). Není vģak jisté, ģe je vģdy moģné vyŚeģit soustavu tuto rovnic vzhledem k rychlostem. Podmínkou je, aby

$$\det\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\alpha\,\partial \dot{x}^\beta} \neq 0 \quad . \tag{2.15}$$

   Této podmínky si vģimneme blíģe v souvislosti s Legendrovou transformací.

4. ProveŅme totální derivaci Lagrangeovy funkce podle ļasu a dosaŅme ze vztahŢ (2.13) a (2.12)

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\ddot{x}^\alpha=\frac{\partial L}{\partial t}+\dot{p}_\alpha\dot{x}^\alpha+p_\alpha\ddot{x}^\alpha \quad .$$

Po malé úpravě pak

$$-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_\alpha\dot{x}^\alpha-L\right)=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{2.16}$$

Opět je okamžitě vidět zákon zachování: jestliže Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, je Hamiltonova funkce konstantní – energie se zachovává.

2.4 Legendrova transformace

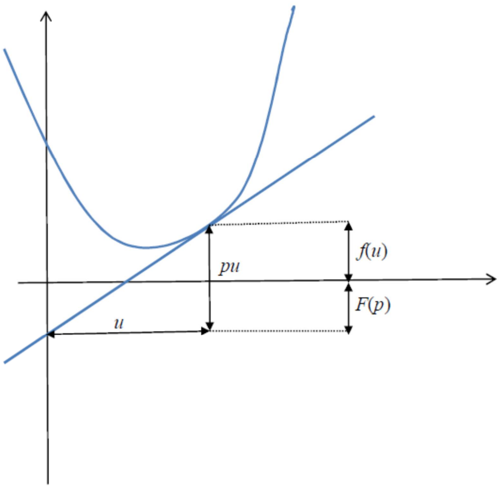
Uvažujme hladkou reálnou funkci $f(u)$ jedné proměnné $u\in\mathbb{R}$, která je konvexní (tj. $f''(u)>0$. Legendrovou transformací dvojice $(u,f(u))$ je zobrazení na dvojici $(p,F(p))$, kde

$$F(p)=\max_u\left[pu-f(u)\right] \quad . \tag{2.17}$$

Nutnou podmínkou maxima je $p=f'(u)$ (maxima – předpokládáme konvexní průběh funkce *f*), takže můžeme také definovat funkci *F* pomocí dvou vztahů

$$F(p)=pu-f(u) \quad , \quad p=f'(u) \quad . \tag{2.18}$$

Přitom do prvního vztahu dosazujeme $u=u(p)$, hodnotu, kterou získáme z druhého vztahu. Ten chápeme jako rovnici s hledanou neznámou *u*.



Existence inverzní funkce k $f'(u)$ a tedy k nalezení jednoznačné hodnoty *u* k dané hodnotě *p* je zaručeno monotónním chováním funkce, vyplývajícím z podmínky $f''(u)>0$. Ve vícerozměrném případě je tato podmínka nahrazena požadavkem na kladnou hodnotu determinantu hessiánu.

V mechanice hraje úlohu proměnné u rychlost, proměnná p je hybnost. Funkce mohou ovšem záviset i na dalších parametrech (konkrétně v mechanice na souřadnicích), ty ale v Legendrově transformaci vystupují právě jen jako parametry. Podívejme se opět, jak to v takovém případě vypadá v jednom rozměru, kdy parametr označíme jako x: Legendrova transformace je

$$F(p,x) = pu - f(u,x) \quad , \quad p = \left.\frac{\partial f(u,x)}{\partial u}\right|_x \quad . \tag{2.19}$$

Diferenciál funkce F můžeme zapsat dvojím způsobem – buď obecně, nebo konkrétně z (2.19)

$$\mathrm{d}F = \left.\frac{\partial F}{\partial p}\right|_x \mathrm{d}p + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_p \mathrm{d}x \quad ,$$

$$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}p - \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_x \mathrm{d}u - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_u \mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}p - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_u \mathrm{d}x \quad .$$

Porovnáním obou výrazů dostáváme

$$\left.\frac{\partial F}{\partial p}\right|_x = u \quad , \quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_p = -\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_u \quad . \tag{2.20}$$

Legendrova transformace je involucí. Zapíšeme-li totiž (2.18) s pomocí (2.20), máme

$$f(u) = u\,p - F(p) = F'(p)\,p - F(p) \quad ,$$

máme analogicky k (2.17)

$$f(u) = \max_p \left[u\,p - F(p)\right] \quad . \tag{2.21}$$

Máme tedy zobrazení $f(u) \to F(p) \to f(u)$.

Tři krátké příklady:

Youngova nerovnost: Pro libovolné hodnoty u a p bude z definice Legendrovy transformace funkce $F(u,p) = u\,p - f(u)$ menší než $F(p)$. Jsou-li tedy $f(u)$ a $F(p)$ spojeny Legendrovou transformací, platí pro libovolná čísla u a p

$$p\,u \le f(u) + F(p) \quad . \tag{2.22}$$

Například pro $\alpha > 1$

$$f(u) = \frac{u^\alpha}{\alpha} \Rightarrow p = u^{\alpha-1} \Rightarrow u = p^{1/(\alpha-1)} \Rightarrow F(p) = \frac{\alpha-1}{\alpha} p^{\alpha/(\alpha-1)} \quad ,$$

takže

$$pu \le \frac{u^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta} \quad , \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \tag{2.23}$$

pro $x, p > 0$ a $\alpha, \beta > 1$.

Přechod od entropie k teplotě. Základní termodynamická rovnice (U je vnitřní energie, S entropie, T teplota, P tlak, V objem μ chemický potenciál a N počet částic) je

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N \quad .$$

Přechod k záporně vzaté volné energii $-F = TS - U(S, V, N)$ je příkladem Legendrovy transformace ($u = S$, $p = T$, $x_1 = V$, $x_2 = N$). Podmínkou řešitelnosti je $\partial^2 U / \partial S^2 > 0$, musí být tedy

$$T = \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_{V,N} \quad , \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right|_{V,N} = \left.\frac{\partial T}{\partial S}\right|_{V,N} = \left(\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{V,N} \right)^{-1} > 0 \quad .$$

Růst entropie s teplotou, pokud se nemění nic jiného než vnitřní energie, je fyzikálně přijatelný předpoklad. Pak je tedy možné spočítat $S = S(T)$ a zapsat vztah po transformaci jako

$$\mathrm{d}(-F) = S\,\mathrm{d}T + P\,\mathrm{d}V - \mu\,\mathrm{d}N \quad . \tag{2.24}$$

Hamiltonova formulace nerelativistické mechaniky jedné částice. Zvolíme tvar Lagrangeovy funkce v obecných souřadnicích

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) - U(\vec{q}) \quad , \quad T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{m}{2} \dot{q}^\alpha A_{\alpha\beta}(\vec{q}) \dot{q}^\beta \quad , \tag{2.25}$$

kde $A(\vec{q})$ je positivně definitní symetrická regulární matice, což plyne z její konstrukce

$$A_{\alpha\beta}(\vec{q}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\beta} \quad . \tag{2.26}$$

Pro Legendrovu transformaci spočteme rychlosti z definice hybnosti

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = m A_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta \quad \Rightarrow \quad \dot{q}^\alpha = \frac{1}{m} \left(A^{-1}\right)^{\alpha\beta} p_\beta \quad . \tag{2.27}$$

Hamiltonova funkce (již s $\dot{q}^\alpha$ z předchozího vztahu) je

$$H = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L = \frac{1}{2m} p_\alpha \left(A^{-1}\right)^{\alpha\beta} p_\beta + U(\vec{q}) \quad . \tag{2.28}$$

Hamiltonovy rovnice. Porovnáme diferenciál Hamiltonovy funkce vyjádřené Legendrovou transformací

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= \mathrm{d}\left[p_\alpha \dot{q}^\alpha - L\left(t, q^\alpha, \dot{q}^\alpha\right)\right] = \\
&p_\alpha \,\mathrm{d}\dot{q}^\alpha + \dot{q}^\alpha \,\mathrm{d}p_\alpha - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}}_{\dot{p}_\alpha} \mathrm{d}q^\alpha - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}}_{p_\alpha} \mathrm{d}\dot{q}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} = \dot{q}^\alpha \,\mathrm{d}p_\alpha - \dot{p}_\alpha \,\mathrm{d}q^\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

s diferenciálem Hamiltonovy funkce vyjádřené již pomocí souřadnic a hybností

$$
\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \mathrm{d}q^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \mathrm{d}p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{2.30}
$$

Dostáváme tak vztah pro parciální derivace vzhledem k času

$$
\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{2.31}
$$

a především Hamiltonovy rovnice

$$
\boxed{\dot{\boldsymbol{q}}^\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{p}_\alpha} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{p}}_\alpha = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{q}^\alpha}} \tag{2.32}
$$

2.5 Tvar Lagrangeovy funkce

Samozřejmým požadavkem je, aby Lagrangeova funkce dvou soustav A a B dostatečně od sebe vzdálených tak, aby bylo možné zanedbat interakci, byla součtem Lagrangeových funkcí obou soustav. Také je potřeba si uvědomit, že ke stejným pohybovým rovnicím povede celá třída Lagrangeových funkcí, kde se jednotlivé lagrangiány liší o tzv. triviální lagrangián. Máme-li totiž

$$
L'\left(q, \dot{q}, t\right) = L\left(q, \dot{q}, t\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(q, t\right) \quad , \tag{2.33}
$$

liší se účinky

$$
\begin{aligned}
S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'\left(q, \dot{q}, t\right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d} f\left(q, t\right)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \\
&S + f\left(q(t_2), t_2\right) - f\left(q(t_1), t_1\right)
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

jen o členy, jejichž variace je vzhledem k podmínce $\delta q\left(t_2\right) = \delta q\left(t_1\right) = 0$ nulová.

Pro popis jevů musíme zvolit nějakou určitou souřadnou soustavu. Nevhodná volba souřadné soustavy může vést k tomu, že popis jednoduchého děje je velmi komplikovaný. Ukazuje se, že pro volný hmotný bod je vždy možno najít takovou souřadnou soustavu, v níž se jeví prostor jako homogenní a izotropní a čas je homogenní. V takovém případě musí Lagrangeova funkce záviset pouze na $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

$$
L = L\left(v^2\right) \quad . \tag{2.35}
$$

Lagrangeovy rovnice jsou pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{konst.} \tag{2.36}$$

Budeme ļasto pouģívat znaļení vektoru

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f}{\partial v_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial v_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial v_3}\vec{e}_3 \quad ,$$

naopak nad Ăkonst.ñ ģipku vynecháme, pokud nemŢģe dojít k nejasnosti.

Z (2.36) vidíme, ģe v inerciální soustavŊ se volný pohyb dŊje s rychlostí konstantní co do velikosti i smŊru. Tomuto závŊru Śíkáme **zákon setrvaļnosti**.

Jestliģe pŚejdeme k jiné inerciální soustavŊ, která se vŢļi pŢvodní pohybuje konstantní rychlostí, bude situace stejná. Ekvivalence vġech inerciální soustav pŚi popisu mechanických dŊjŢ se nazývá **GalileŢv princip relativity**. Transformace mezi souŚadnými soustavami K a K', kde druhá se vŢļi první pohybuje rychlostí $\vec{V}$ je zapsána jako **Galileova transformace**

$$\vec{r} = \vec{r}^{\,\prime} + \vec{V}\,t \quad , \quad t = t^{\prime} \quad . \tag{2.37}$$

Pro volnou ļástici budeme mít pro Lagrangeovu funkci v inerciální soustavŊ, která se vŢļi pŢvodní pohybuje s infinitesimálnŊ malou rychlostí

$$L^{\prime} = L\left(v^{\prime 2}\right) = L\left(v^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} + \varepsilon^2\right) = L\left(v^2\right) + 2\frac{\partial L}{\partial v^2}\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} + \dots \quad .$$

Má-li být druhý ļlen derivací podle ļasu, musí být

$$L = a\,v^2 \quad , \quad a = \text{konst.}$$

Abychom dostali levou stranu Newtonových rovnic ve standardním tvaru, je tŚeba zvolit konstantu jako $a = m/2$.

Porovnání s druhým Newtonovým zákonem je jedním z vodítek k tomu, proļ obvykle platí ĂLagrangián rovná se kinetická mínus potenciální energieñ. Pro soustavu ļástic (index a oznaļuje urļitou ļástici), jejichģ interakci popisujeme pomocí potenciální energie, je Lagrangeova funkce

$$L = T - U = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots\right) \quad . \tag{2.38}$$

Z Lagrangeových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \tag{2.39}$$

dostáváme

$$m_a \frac{\mathrm{d}\vec{v}_a}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} = \vec{F}_a \quad . \tag{2.40}$$

Další potvrzení tvaru Lagrangeovy funkce pochází z obecné teorie relativity. Tam nacházíme trajektorii částice z variačního principu

$$S = -mc\int_a^b \mathrm{d}s \quad , \quad \mathrm{d}s^2 = g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k \quad , \tag{2.41}$$

kde g_{ik} jsou složky metrického tensoru. Ve slabém gravitačním poli popsaném Newtonovým potenciálem Φ je přibližně

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)c^2\,\mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right) = \\ &\qquad c^2\,\mathrm{d}t^2\left[1+\frac{2\Phi}{c^2} - \left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\frac{v^2}{c^2}\right] \quad , \end{aligned} \tag{2.42}$$

takže máme pro $\Phi/c^2 \ll 1$ a $v^2/c^2 \ll 1$

$$S \doteq -mc^2\int_{t_a}^{t_b}\left[1+\frac{\Phi}{c^2}+\frac{v^2}{2c^2}\right]\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{mv^2}{2} - m\Phi\right)\mathrm{d}t - mc^2\left(t_b - t_a\right) \quad . \tag{2.43}$$

2.6 Zobecněné souřadnice

Při vhodné volbě zobecněných souřadnic můžeme dosáhnout toho, že Lagrangeova funkce obsahuje jen tolik souřadnic, kolik je stupňů volnosti. Uvažujme soustavu N částic, která má s stupňů volnosti. Pak volíme ($a = 1, 2, \ldots, N$)

$$\begin{aligned} x_a &= f_a\left(q^1, q^2, \ldots, q^s\right) \quad , \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q^k}\dot{q}^k \quad , \\ y_a &= g_a\left(q^1, q^2, \ldots, q^s\right) \quad , \quad \dot{y}_a = \sum_k \frac{\partial g_a}{\partial q^k}\dot{q}^k \quad , \\ z_a &= h_a\left(q^1, q^2, \ldots, q^s\right) \quad , \quad \dot{z}_a = \sum_k \frac{\partial h_a}{\partial q^k}\dot{q}^k \quad . \end{aligned} \tag{2.44}$$

Lagrangeova funkce

$$L = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a\left(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2\right) - U\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N\right) \tag{2.45}$$

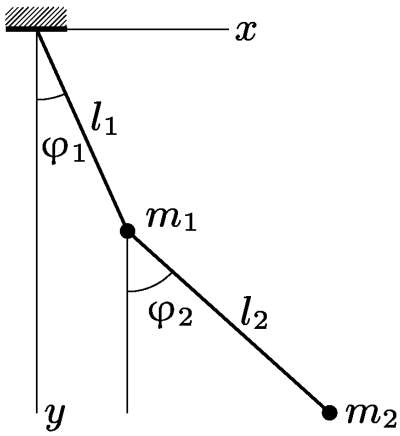
přejde na

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{s} a_{ik}\left(q\right)\dot{q}^i\,\dot{q}^k - U\left(q\right) \quad , \tag{2.46}$$

kde

$$a_{ik}\left(q\right)=\sum_{a=1}^{N} m_a \left(\frac{\partial f_a}{\partial q^i}\frac{\partial f_a}{\partial q^k}+\frac{\partial g_a}{\partial q^i}\frac{\partial g_a}{\partial q^k}+\frac{\partial h_a}{\partial q^i}\frac{\partial h_a}{\partial q^k} \right) \quad . \tag{2.47}$$

Jednoduchým pŚkladem je dvojité rovinné kyvadlo v homogenním gravitaĻním poli (znaĻení je patrné z obrázku). Uvaģovaná soustava má jen dva stupnŊ volnosti. Transformace od souŚadnic $\left\{x_1 , y_1 , x_2 , y_2\right\}$ k zobecnŊným souŚadnicím $\left\{\varphi_1 , \varphi_2\right\}$ je



$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \,,\; y_1 = l_1 \cos\varphi_1 \quad , \quad x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \,,\; y_1 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \quad .$$

Dosazením do obecného vztahu dostáváme

$$\begin{aligned} L = \frac{m_1+m_2}{2} l_1^2 \,\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \,\dot{\varphi}_2^2 + m_2 \, l_1 \, l_2 \, \dot{\varphi}_1 \, \dot{\varphi}_2 \cos\!\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \\ \left(m_1+m_2\right) g \, l_1 \cos\varphi_1 + m_2 \, g \, l_2 \cos\varphi_2 \quad . \end{aligned} \tag{2.48}$$

2.7 Ļasová závislost potenciální energie

Budeme popisovat chování soustavy *A*, která není isolovaná, ale interaguje se soustavou *B*, jejíģ pohyb je dán. Do Lagrangeovy funkce

$$L = T_A\left(q_A , \dot{q}_A\right) + T_B\left(q_B , \dot{q}_B\right) - U_{AB}\left(q_A , q_B\right) \tag{2.49}$$

dosadíme zadaný pohyb soustavy *B*, tj. $q_B = f\left(t\right), \dot{q}_B = \dot{f}\left(t\right)$. Dostáváme tak Lagrangeovu funkci soustavy *A*

$$L = T_A\left(q_A , \dot{q}_A\right) - U_A\left(q_A , t\right) + \frac{\mathrm{d}F\left(t\right)}{\mathrm{d}t} \quad , \tag{2.50}$$

kde jsme oznaĻili

$$U_A\left(q_A , t\right) = U_{AB}\left(q_A , f\left(t\right)\right) \quad , \quad F\left(t\right) = \int T_B\left(f\left(t\right), \dot{f}\left(t\right)\right)\mathrm{d}t \quad . \tag{2.51}$$

Víme jiģ, ģe totální derivaci podle Ļasu v LagrangeovŊ funkci nemusíme uvaģovat. Je tedy vidŊt, ģe pohyb soustavy ve vnŊjģím poli je v tomto pŚpadŊ dán standardním tvarem Lagrangeovy funkce, pouze v potenciální energii se objevila explicitní závislost na Ļase.

2.8 Stručně o teorii pole

Budeme uvažovat o polích $\varphi^{(A)}\left(t,\vec{x}\right)\equiv\varphi^{(A)}\left(x^0=ct,x^1,x^2,x^3\right)$, horní index A čísluje pole, kterých může být např. N. Toto číslování někdy bude odpovídat polím jakožto složkám vektoru nebo spinoru, ale není to obecně nutné. Lagrangeova funkce bude obsahovat jednotlivá pole, jejich derivace (my budeme uvažovat jen první) podle prostoročasových souřadnic, případně i explicitně tyto souřadnice. Pro stručnost zápisu je vhodné psát

$$\frac{\partial\varphi^{(A)}\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)}{\partial x^i}\equiv\partial_i\varphi^{(A)} \quad . \tag{2.52}$$

Variační princip bude vycházet z účinku

$$S\left(\varepsilon\right)=\int_\Omega L\left(x^i,\varphi^{(A)}+\varepsilon\eta^{(A)},\partial_i\varphi^{(A)}+\varepsilon\partial_i\eta^{(A)}\right)\mathrm{d}\Omega \quad . \tag{2.53}$$

V integrálu (2.53) integrujeme přes čtyřrozměrnou oblast prostoročasu. Podle variačního principu hledáme extrém účinku

$$\left.\frac{\mathrm{d}S\left(\varepsilon\right)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0 \quad . \tag{2.54}$$

Rozepsání dává

$$\begin{gathered}\left.\frac{\mathrm{d}S\left(\varepsilon\right)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_\Omega\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi^{(A)}}\eta^{(A)}+\frac{\partial L}{\partial\partial_i\varphi^{(A)}}\partial_i\eta^{(A)}\right\}\mathrm{d}\Omega=\\ \int_{S\equiv\partial\Omega}\frac{\partial L}{\partial\partial_i\varphi^{(A)}}\eta^{(A)}\,\mathrm{d}S+\int_\Omega\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi^{(A)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial\partial_i\varphi^{(A)}}\right)\right\}\eta^{(A)}\,\mathrm{d}\Omega=0 \quad .\end{gathered} \tag{2.55}$$

Stejnými úvahami jako v případě jedné proměnné docházíme k Lagrangeovým rovnicím

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi^{(A)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial\partial_i\varphi^{(A)}}\right)=0 \tag{2.56}$$

a výrazu pro složky hybnosti

$$\pi^{(A)i}=\frac{\partial L}{\partial\partial_i\varphi^{(A)}} \quad . \tag{2.57}$$

Derivace podle souřadnice x^i v Lagrangeově rovnici, která vznikla integrací per partes vzhledem k této souřadnici, bývá někdy zapisována jako $\partial/\partial x^i$. V každém případě musíme tuto derivaci funkce $f\left(x,\varphi,\partial_i\varphi\right)$ chápat jako

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x^i}=\frac{\partial f}{\partial x^i}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}+\frac{\partial f}{\partial\partial_j\varphi}\frac{\partial\partial_j\varphi}{\partial x^i}\equiv\frac{\partial f}{\partial x^i}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\partial_i\varphi+\frac{\partial f}{\partial\partial_j\varphi}\partial_i\partial_j\varphi \quad . \tag{2.58}$$

Uvedeme dva příklady, pro jednoduchost pro funkce jedné prostorové proměnné x a času t. Lagrangeova funkce pro vlnovou rovnici má tvar

$$L = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] \quad . \tag{2.59}$$

Lagrangeova funkce neobsahuje explicitně prostoročasové proměnné ani samotnou vlnovou funkci. Máme tak

$$\pi^t = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad , \quad \pi^x = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{2.60}$$

a má tedy Lagrangeova rovnice tvar

$$-\frac{\partial \pi^t}{\partial t} - \frac{\partial \pi^x}{\partial x} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad . \tag{2.61}$$

Nepatrně složitější je odvození Schrödingerovy rovnice. V Lagrangeově funkci budou vystupovat dvě pole $\varphi^{(1)} = \psi$ a $\varphi^{(2)} = \bar{\psi}$ (pruhem značíme komplexní sdružení). Pro nerelativistickou částici hmotnosti m v potenciálovém poli $U = U(t, x)$ máme

$$L = \frac{i\hbar}{2}\left(\bar{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} - U\psi\bar{\psi} \quad . \tag{2.62}$$

Pro hybnosti dostáváme

$$\bar{\pi}^t = -\frac{i\hbar}{2}\psi \quad , \quad \bar{\pi}^x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \quad \pi^t = \frac{i\hbar}{2}\bar{\psi} \quad , \quad \pi^x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \quad . \tag{2.63}$$

Lagrangeovy rovnice jsou

$$\frac{\partial \bar{\pi}^t}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\pi}^x}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial \psi}{\partial t} + U\psi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi} \tag{2.64}$$

a rovnice komplexně sdružená

$$-i\hbar\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + U\bar{\psi} \quad . \tag{2.65}$$

Hamiltonova funkce bude

$$H = \bar{\pi}^t\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \pi^t\frac{\partial \psi}{\partial t} + \bar{\pi}^x\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \pi^x\frac{\partial \psi}{\partial x} - L = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + U\psi\bar{\psi} \quad . \tag{2.66}$$

3. Zákony zachování

3.1 Základní zákony zachování

Stav uzavřené soustavy, která má *s* stupňů volnosti, je popsán 2*s* veličinami $q^i, \dot{q}^i$, kde $i=1,2,\dots,s$. Existuje $2s-1$ veličin – integrálů pohybu – jejichž hodnota se s časem nemění a je dána počátečními podmínkami. Počátečních podmínek je sice 2*s*, ale protože pohybové rovnice uzavřené soustavy neobsahují čas explicitně, je jedna z konstant – volba počátku odečítání času – již dána. Vyloučíme-li tedy $t+t_0$ z 2*s* funkcí

$$\begin{aligned} q^i &= q^i\left(t+t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}\right) \quad , \\ \dot{q}^i &= \dot{q}^i\left(t+t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}\right) \quad , \end{aligned}$$

dostaneme vyjádření konstant $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$ jako funkcí q^i a $\dot{q}^i$. Mezi integrály pohybu se vyskytují některé, které mají hluboký fyzikální význam. Většinou jsou spojeny s existencí nějaké symetrie prostoru a času. Takové integrály pohybu mají jednu důležitou vlastnost: pokud lze interakci podsoustav celé soustavy zanedbat, je integrál soustavy roven součtu integrálů podsoustav. Obecný pohled na spojení symetrie se zákony zachování uvidíme v části o teorému Noetherové. Teď zatím probereme některé důležité integrály jednotlivě.

Homogenita času – zachování energie. Vezměme malé posunutí v čase $t \to t+\varepsilon$. Požadujeme

$$\delta L = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad .$$

Vzhledem k libovolnosti ε musí být

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad ,$$

takže (připomínáme sumační pravidlo)

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\mathrm{d}\dot{q}^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right) \quad .$$

Máme tak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L\right) = 0 \tag{3.1}$$

a dostáváme zachovávající se veličinu – energii

$$E = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \quad . \tag{3.2}$$

Pokud je Lagrangeova funkce dána jako

$$L = T\left(q, \dot{q}\right) - U\left(q\right) \quad ,$$

dostáváme z

$$\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = 2T$$

(Eulerova věta o homogenních funkcích[1])

$$E = T\left(q, \dot{q}\right) + U\left(q\right) \quad . \tag{3.3}$$

V kartézských souřadnicích pak

$$E = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2}{2} + U\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N\right) \quad . \tag{3.4}$$

Homogenita prostoru – zachování hybnosti. Vezměme malé posunutí v prostoru $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{\varepsilon}$. Požadujeme

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a = \vec{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0 \quad .$$

Vzhledem k libovolnosti $\vec{\varepsilon}$ musí být

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0 \quad .$$

Sečtením Lagrangeových rovnic pro jednotlivé částice dostáváme pak

$$\sum_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0 \quad .$$

Máme tak zachovávající se veličinu – hybnost

$$\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a \quad , \quad \vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \quad . \tag{3.5}$$

Podmínku zachování hybnosti můžeme také zapsat jako podmínku, aby součet sil působících na jednotlivé částice byl roven nule

$$0 = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \sum_a -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} = \sum_a \vec{F}_a \quad .$$

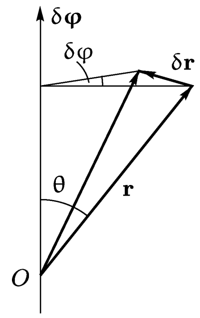
Derivaci Lagrangeovy funkce podle zobecněné rychlosti nazveme zobecněnou hybností, derivaci podle zobecněné souřadnice zobecněnou silou. Můžeme proto Lagrangeovy rovnice interpretovat takto: časová změna složky zobecněné hybnosti je rovna odpovídající složce zobecněné síly

---

[1] $f\left(t x^1, t x^2, \ldots\right) = t^m f\left(x^1, x^2, \ldots\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_i x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = m f$. Důkaz: parciálně derivovat obě strany rovnice podle t a pak položit t=1.

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{p}^i}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{F}^i \quad . \tag{3.6}$$

Izotropie prostoru – zachování momentu hybnosti. Vezměme malé pootočení v prostoru $\vec{r} \to \vec{r} + \overrightarrow{\delta\varphi} \times \vec{r}$ (význam symbolů je vidět z obrázku), s tímto pootočením je spojena i změna rychlosti $\vec{v} \to \vec{v} + \overrightarrow{\delta\varphi} \times \vec{v}$. Požadujeme tedy (při přepisu využíváme možnosti cyklické záměny



vektorů ve smíšeném součinu)

$$\delta L = \sum_a \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \cdot \left(\overrightarrow{\delta\varphi} \times \vec{r}_a \right) + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \cdot \left(\overrightarrow{\delta\varphi} \times \vec{v}_a \right) \right] = \overrightarrow{\delta\varphi} \cdot \sum_a \left[\vec{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} + \vec{v}_a \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \right] = 0 \quad .$$

Vzhledem k libovolnosti $\overrightarrow{\delta\varphi}$ musí být

$$\sum_a \left[\vec{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} + \vec{v}_a \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \right] = \sum_a \left[\vec{r}_a \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_a}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_a}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}_a \right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = 0 \quad .$$

Máme tak další zachovávající se veličinu – moment hybnosti

$$\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a \quad , \quad \vec{L}_a = \vec{r}_a \times \vec{p}_a \quad . \tag{3.7}$$

3.2 Popis soustavy částic ve dvou různých inerciálních soustavách

Inerciální soustava K' se pohybuje vůči soustavě K rychlostí $\vec{V}$. Souřadnice a rychlosti jednotlivých částic jsou tedy

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a^{\,\prime} + \vec{V}\, t \quad , \quad \vec{v}_a = \vec{v}_a^{\,\prime} + \vec{V} \quad .$$

Pro celkovou hybnost platí

$$\vec{P} = \sum_m m_a \vec{v}_a = \sum_m m_a \vec{v}_a^{\,\prime} + \vec{V} \sum_a m_a \quad ,$$

tedy (s označením celkové hmotnosti $M = \sum_a m_a$)

$$\vec{P} = \vec{P}^{\prime} + M \vec{V} \quad . \tag{3.8}$$

Vždy tedy najdeme klidovou („čárkovanou“) soustavu, ve které je celková hybnost nulová. Rychlost takové soustavy vůči laboratorní („nečárkované“) soustavě spočteme z předchozího vztahu dosazením $\vec{P}' = 0$. Vidíme, že tuto rychlost můžeme chápat jako časovou změnu polohového vektoru jistého bodu – středu hmotnosti

$$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a} \quad .$$

Energii soustavy částic v laboratorní soustavě pak můžeme rozdělit na součet kinetické energie soustavy, pohybující se jako celek rychlostí $\vec{V}$ a vnitřní energie U. Máme

$$E = \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2}\sum_a m_a \left(\vec{v}_a' + \vec{V}\right)^2 + U = \frac{1}{2} M V^2 + \vec{V}\cdot\sum_a m_a \vec{v}_a' + \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a'^2 \quad ,$$

tedy

$$E = \frac{M V^2}{2} + \vec{V}\cdot\vec{P}' + E' \quad . \tag{3.9}$$

V klidové soustavě je $\vec{P}' = 0$ a $E' = U$. Pro moment hybnosti nejprve spočteme jeho chování v samotné soustavě K, pokud změníme polohu počátku souřadné soustavy, tj. při záměně $\vec{r}_a = \vec{r}_a^{\,*} + \vec{d}$

$$\vec{L} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = \sum_a \vec{r}_a^{\,*} \times \vec{p}_a + \vec{d}\times\sum_a \vec{p}_a = \vec{L}^* + \vec{d}\times\vec{P} \quad .$$

Při přechodu od soustavy K k soustavě K' máme

$$\vec{L} = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a = \sum_a m_a \vec{r}_a' \times \vec{v}_a' + \vec{V} t \times \sum_a m_a \vec{v}_a' - \vec{V}\times\sum_a m_a \vec{r}_a' = \vec{L}' + t\vec{V}\times\vec{P}' + M\,\vec{R}'\times\vec{V} \quad .$$

Pokud je soustava K' klidová a její počátek je volen ve hmotném středu, bude platit $\vec{L} = \vec{L}'$.

3.3 Mechanická podobnost

Předpokládejme, že potenciální energie je homogenní funkcí souřadnic stupně k, tj. že platí

$$U\left(\alpha\vec{r}_1, \alpha\vec{r}_2, \ldots, \alpha\vec{r}_N\right) = \alpha^k U\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N\right) \quad . \tag{3.10}$$

Proveďme v Lagrangeově funkci transformaci proměnných

$$\vec{r}_a \to \alpha\,\vec{r}_a \quad , \quad t \to \beta t \quad .$$

Kinetická a potenciální energie se změní v poměru

$$T \to \frac{\alpha^2}{\beta^2} T \quad , \quad U \to \alpha^k U \quad .$$

Pokud jsou oba násobící faktory stejné, tj. pokud platí

$$\beta = \alpha^{1-k/2} \quad , \tag{3.11}$$

Účinek se pouze vynásobí faktorem $\alpha^{k/2+1}$, ale rovnice trajektorie se nezmění. Změníme-li rozměry trajektorie k – krát, bude doba strávená mezi odpovídajícími si body $\left(1-k/2\right)$ násobkem původní doby a podobně u dalších veličin (P je hybnost, E celková energie, M moment hybnosti)

$$\frac{T^*}{T}=\left(\frac{L^*}{L}\right)^{1-\frac{k}{2}} \quad , \quad \frac{P^*}{P}=\left(\frac{L^*}{L}\right)^{\frac{k}{2}} \quad , \quad \frac{E^*}{E}=\left(\frac{L^*}{L}\right)^{k} \quad , \quad \frac{M^*}{M}=\left(\frac{L^*}{L}\right)^{1+\frac{k}{2}} \quad . \tag{3.12}$$

Nejznámějšími příklady jsou malé kmity ($k=2$), kdy perioda nezávisí na amplitudě, podíl kvadrátů doby pádu v homogenním poli je dán poměrem počátečních výšek ($k=1$) a třetí Keplerův zákon ($k=-1$).

3.4 Viriálový teorém

Střední hodnotu funkce času $f\left(t\right)$ definujeme jako

$$\left\langle f\right\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\left(t\right)\mathrm{d}t \quad . \tag{3.13}$$

Pokud je funkce f derivací nějaké ohraničené funkce F, je její střední hodnota rovna nule

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\mathrm{d}F\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{F\left(T\right)-F\left(0\right)}{T}=0 \quad . \tag{3.14}$$

Počítejme teď (kinetická energie je homogenní funkcí rychlostí stupně 2, potenciální energie homogenní funkcí souřadnic stupně k)

$$\begin{aligned}2T&=\sum_a\frac{\partial T}{\partial\vec{v}_a}\vec{v}_a=\sum_a\vec{p}_a\vec{v}_a=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a\vec{p}_a\vec{r}_a\right)-\sum_a\dot{\vec{p}}_a\vec{r}_a=\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a\vec{p}_a\vec{r}_a\right)+\sum_a\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_a}\vec{r}_a=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a\vec{p}_a\vec{r}_a\right)+kU \quad ,\end{aligned}$$

tedy

$$2T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a\vec{p}_a\vec{r}_a\right)+kU \quad . \tag{3.15}$$

S využitím (3.14) dostáváme pro střední hodnoty vztah

$$2\left\langle T\right\rangle=k\left\langle U\right\rangle \quad , \quad \left\langle E\right\rangle=\frac{k+2}{k}\left\langle T\right\rangle \quad . \tag{3.16}$$

Ze vztahu (3.16) vidíme například stejný příspěvek kinetické i potenciální energie u harmonického oscilátoru nebo to, že pro Newtonův potenciál musí být celková energie záporná, má-li se pohyb odehrávat v uzavřené oblasti prostoru.

4. Invariance

4.1 Úvodní poznámky

Všimněme si nejprve triviálního příkladu. Uvažujme nějakou rovinu, na ní zvolme kartézskou soustavu souřadnic. Čtverec vzdálenosti dvou bodů o souřadnicích $\left(x_1 , y_1\right)$ a $\left(x_2 , y_2\right)$ je dán vztahem $d^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$. Jestliže soustavu souřadnic otočíme (se středem otáčení v počátku) o nějaký úhel ε změní se souřadnice bodů na

$$
\begin{aligned}
x_1^/ &= x_1 \cos\varepsilon + y_1 \sin\varepsilon \quad , \quad y_1^/ = -x_1 \sin\varepsilon + y_1 \cos\varepsilon \quad , \\
x_2^/ &= x_2 \cos\varepsilon + y_2 \sin\varepsilon \quad , \quad y_2^/ = -x_2 \sin\varepsilon + y_2 \cos\varepsilon \quad .
\end{aligned}
$$

Co se však nezmění, je vzdálenost (resp. čtverec vzdálenosti) těchto dvou bodů, protože

$$
d^{/2} = \left(x_2^/ - x_1^/\right)^2 + \left(y_2^/ - y_1^/\right)^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 = d^2 \quad .
$$

Říkáme, že vzdálenost bodů je invariantní vůči rotaci souřadné soustavy. Podobně definujeme-li ve speciální teorii relativity (uvažujeme jen jeden prostorový rozměr) interval mezi dvěma událostmi $\left(c t_1 , x_1\right)$ a $\left(c t_2 , x_2\right)$ jako $s^2 = c^2 \left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2$, je tento interval invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci (přechodu od jedné inerciální soustavy K k soustavě $K^/$, která se vůči K pohybuje rychlostí V)

$$
\begin{aligned}
c t_1^/ &= \frac{c t_1 - V x_1/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad , \quad x_1^/ = \frac{x_1 - V t_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad , \\
c t_2^/ &= \frac{c t_2 - V x_2/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad , \quad x_2^/ = \frac{x_2 - V t_2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad .
\end{aligned}
$$

Předchozí transformace je lépe zapsat zavedením „úhlu rotace θ" jako

$$
\tanh\theta = \frac{V}{c} \quad , \tag{4.1}
$$

takže transformační vztahy mají tvar

$$
\begin{aligned}
c t_1^/ &= c t_1 \cosh\theta - x_1 \sinh\theta \quad , \quad x_1^/ = x_1 \cosh\theta - c t_1 \sinh\theta \quad , \\
c t_2^/ &= c t_2 \cosh\theta - x_2 \sinh\theta \quad , \quad x_2^/ = x_2 \cosh\theta - c t_2 \sinh\theta \quad .
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Není obtížné přesvědčit se, že platí

$$
s^{/2} = c^2 \left(t_2^/ - t_1^/\right)^2 - \left(x_2^/ - x_1^/\right)^2 = c^2 \left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 = s^2 \quad . \tag{4.3}
$$

Velmi často zjišťujeme invarianci vůči infinitesimálně malým změnám. V případě Lorentzovy transformace by to bylo

$$
\begin{aligned}
c t' &= c t \cosh\theta - x \sinh\theta \quad \to \quad c t' \doteq c t'\Big|_{\theta=0} + \left.\frac{\mathrm{d}\left(c t'\right)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} \theta = c t - x\theta \quad , \\
x' &= x \cosh\theta - c t \sinh\theta \quad \to \quad x' \doteq x'\Big|_{\theta=0} + \left.\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} \theta = x - c t\theta \quad .
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

4.2 Rundova – Trautmanova identita

K Lorentzově transformaci se ještě vrátíme v části o speciální teorii relativity. Teď uvažujme obecné transformace v klasické mechanice, kdy

$$
\begin{aligned}
t \quad &\to \quad t' = t'\left(t, q^{\nu}, \varepsilon\right) \quad , \quad t' = t + \varepsilon \left.\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + O\left(\varepsilon^2\right) \quad , \\
q^{\mu} \quad &\to \quad q'^{\mu} = q'^{\mu}\left(t, q^{\nu}, \varepsilon\right) \quad , \quad q'^{\mu} = q^{\mu} + \varepsilon \left.\frac{\mathrm{d}q'^{\mu}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + O\left(\varepsilon^2\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Koeficienty u první mocniny parametru transformace v Taylorově rozvoji se nazývají generátory transformace, budeme je značit

$$
T \equiv \left.\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = T\left(t, q^{\nu}\right) \quad , \quad Q^{\mu} \equiv \left.\frac{\mathrm{d}q'^{\mu}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = Q^{\mu}\left(t, q^{\nu}\right) \quad , \tag{4.6}
$$

takže

$$
t' = t + \varepsilon T + O\left(\varepsilon^2\right) \quad , \quad q'^{\mu} = q^{\mu} + \varepsilon Q^{\mu} + O\left(\varepsilon^2\right) \quad . \tag{4.7}
$$

Budeme studovat invarianci funkcionálu akce vzhledem k transformacím času a souřadnic typu (4.7) a její důsledky. Je-li původní funkcionál

$$
S = \int_{t_a}^{t_b} L\left(t, q^{\mu}, \frac{\mathrm{d}q^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t \quad , \tag{4.8}
$$

bude funkcionál po transformaci

$$
S' = \int_{t'_a}^{t'_b} L\left(t', q'^{\mu}, \frac{\mathrm{d}q'^{\mu}}{\mathrm{d}t'}\right) \mathrm{d}t' = \int_{t_a}^{t_b} L\left(t', q'^{\mu}, \frac{\mathrm{d}q'^{\mu}}{\mathrm{d}t'}\right) \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \quad . \tag{4.9}
$$

Řekneme, že funkcionál je invariantní vůči dané transformaci, pokud

$$
S' - S = O\left(\varepsilon^{s}\right) \quad , \quad s > 1 \tag{4.10}
$$

nebo vhodněji vyjádřeno

$$
\left.\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad . \tag{4.11}
$$

S ohledem na (4.9) máme

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[L\left(t',q'^{\mu},\frac{\mathrm{d}q'^{\mu}}{\mathrm{d}t'}\right)\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}=L\left(t,q^{\mu},\dot{q}^{\mu}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\varepsilon=0}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}L\left(t',q'^{\mu},\frac{\mathrm{d}q'^{\mu}}{\mathrm{d}t'}\right)\bigg|_{\varepsilon=0}=
$$
$$
L\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial L}{\partial t}T+\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}Q^{\mu}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}q'^{\mu}}{\mathrm{d}t'}\right)\bigg|_{\varepsilon=0}=0 \quad . \tag{4.12}
$$

Zatímco výpočet prvních dvou členů u totální derivace Lagrangeovy funkce podle parametru ε byl triviální, u posledního člene je potřeba počítat pečlivě

$$
\frac{\mathrm{d}q'^{\mu}}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}q^{\mu}+\varepsilon\,\mathrm{d}Q^{\mu}}{\mathrm{d}t+\varepsilon\,\mathrm{d}T}=\frac{\dot{q}^{\mu}+\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}Q^{\mu}}{\mathrm{d}t}}{1+\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}q'^{\mu}}{\mathrm{d}t'}\right)\bigg|_{\varepsilon=0}=\frac{\mathrm{d}Q^{\mu}}{\mathrm{d}t}-\dot{q}^{\mu}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \quad .
$$

Můžeme tedy (4.12) zapsat jako (Rundova – Trautmanova identita)

$$
\frac{\partial L}{\partial t}T+\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}Q^{\mu}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}}\frac{\mathrm{d}Q^{\mu}}{\mathrm{d}t}-\left(\dot{q}^{\mu}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}}-L\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=0 \quad . \tag{4.13}
$$

Viděli jsme, že pokud se Lagrangeovy funkce liší o časovou totální derivaci libovolné funkce souřadnic a času, dostáváme stejné Lagrangeovy rovnice. Můžeme proto připustit, že se po transformaci invariance budou Lagrangiány lišit o tuto derivaci, tj.

$$
L\left(t',q'^{\mu},\frac{\mathrm{d}q'^{\mu}}{\mathrm{d}t'}\right)\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}-L\left(t,q^{\mu},\frac{\mathrm{d}q^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\left(t,q^{\mu},\varepsilon\right) \quad .
$$

Zapíšeme-li

$$
f\left(t,q^{\mu},\varepsilon\right)=\frac{\mathrm{d}f\left(t,q^{\mu},\varepsilon\right)}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\varepsilon+O\left(\varepsilon^{2}\right) \quad , \quad F\left(t,q^{\mu}\right)\equiv\frac{\mathrm{d}f\left(t,q^{\mu},\varepsilon\right)}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \quad , \tag{4.14}
$$

dostaneme zobecněnou Rundovu – Trautmanovu identitu

$$
\frac{\partial L}{\partial t}T+\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}Q^{\mu}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}}\frac{\mathrm{d}Q^{\mu}}{\mathrm{d}t}-\left(\dot{q}^{\mu}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}}-L\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{4.15}
$$

4.3 Teorém Emmy Noetherové

S označením

$$
p_{\mu}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}} \quad , \quad H=\dot{q}^{\mu}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}}-L \tag{4.16}
$$

můžeme malou úpravou přepsat identitu (4.15) na

$$
\left(Q^{\mu}-\dot{q}^{\mu}T\right)\left(\dot{p}_{\mu}-\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_{\mu}Q^{\mu}-HT-F\right) \quad . \tag{4.17}
$$

Dostáváme se tak k teorému Noetherové. Jsou-li kromě předpokládané symetrie funkcionálu účinku při transformaci s parametrem ε charakterizované generátory transformace času, souřadnic a lagrangiánu T, Q^{μ}, F splněny také pohybové rovnice

$$\dot{p}_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial q^{\mu}} \quad , \tag{4.18}$$

potom platí zákon zachování veličiny

$$p_{\mu} Q^{\mu} - H\,T - F = \text{konst.} \tag{4.19}$$

Noetherová formulovala teorém matematicky precizně a poněkud obecněji. Na příkladech uvidíme, že pro klasickou mechaniku je naše znění postačující.

Zákon zachování energie. Pokud Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, je účinek invariantní k transformaci $t' = t + \varepsilon$, takže máme

$$T = 1 \quad , \quad Q^{\mu} = 0 \quad , \quad F = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \text{konst.} \tag{4.20}$$

Zákon zachování složky zobecněné hybnosti. Pokud Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na některé zobecněné souřadnici q^{α}, je účinek invariantní k transformaci $q^{\alpha\prime} = q^{\alpha} + \varepsilon$, takže máme

$$T = 0 \quad , \quad Q^{\mu} = \delta^{\mu\alpha} \quad , \quad F = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{\alpha} = \text{konst.} \tag{4.21}$$

Zákon zachování momentu hybnosti. Pro částici ve sféricky symetrickém poli je Lagrangeova funkce invariantní vůči rotaci $\vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} + \overrightarrow{\delta\varphi} \times \vec{r}$. Místo jednoho parametru ε tady máme tři parametry udávající směr osy a velikost úhlu rotace $\overrightarrow{\delta\varphi}$. Můžeme v jednom zápisu psát

$$T = 0 \quad , \quad Q^{\mu\alpha} = \varepsilon^{\mu\alpha}{}_{\beta}\, q^{\beta} \quad , \quad F = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{\mu\alpha}{}_{\beta}\, p_{\mu}\, q^{\beta} = (\text{konst.})^{\alpha} \tag{4.22}$$

Tlumený harmonický oscilátor. Lagrangeova funkce

$$L = \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\,\omega^2}{2} x^2 \right) \exp\left(\frac{2\lambda}{m} t \right) \tag{4.23}$$

vede k rovnici

$$\ddot{x} + 2\frac{\lambda}{m} \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad .$$

Transformace

$$t' = t + \varepsilon \quad , \quad x' = x \exp\left(-\frac{\lambda\,\varepsilon}{m} \right) \quad \Rightarrow \quad T = 1 \quad , \quad Q = -\frac{\lambda}{m} x$$

nemění Lagrangeovu funkci $L\left(t', x', \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'\right) = L\left(t, x, \mathrm{d}x/\mathrm{d}t\right)$, je tedy $F = 0$ a zachovává se

$$H-pQ=\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{m\omega^2}{2}x^2+\lambda x\dot{x}\right)\exp\left(\frac{2\lambda}{m}t\right)=\text{konst.} \qquad (4.24)$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit dosazením řešení $x=a\exp(-\lambda t/m)\cos\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2/m^2}\,t+\alpha\right)$ do (4.24) – konstanta vyjde rovna $(m/2)\left(\omega^2-\lambda^2/m^2\right)a^2$.

Dvourozměrný harmonický oscilátor. Začněme nejprve se standardní Lagrangeovou funkcí

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right) \quad . \qquad (4.25)$$

Lagrangeovy rovnice jsou

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad &\Rightarrow \quad \ddot{x}+\omega^2x=0 \quad ,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \quad &\Rightarrow \quad \ddot{y}+\omega^2y=0 \quad .\end{aligned} \qquad (4.26)$$

Obecné řešení Lagrangeových rovnic (4.26) můžeme zapsat jako

$$x=a\cos(\omega t+\alpha) \quad , \quad y=b\cos(\omega t+\beta) \quad , \qquad (4.27)$$

kde a,α,b,β jsou konstanty určené počátečními podmínkami. Pro hybnosti a hamiltonián máme

$$\begin{aligned}&p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x} \quad , \quad p_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\dot{y} \quad ,\\ &H=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-L=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right) \quad .\end{aligned} \qquad (4.28)$$

Lagrangeova funkce (4.25) je invariantní vzhledem k transformaci (homogenita času), kdy $t'=t+\varepsilon$, $x'=x$ a $y'=y$, takže $T=1$, $Q^x=Q^y=F=0$ a podle (4.19) se zachovává energie, tj. platí

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)=\text{konst.} \qquad (4.29)$$

Lagrangeova funkce je také invariantní vzhledem k transformaci (isotropie v rovině)

$$\begin{aligned}t'=t \quad , \quad x'=x\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon \quad , \quad y'=-x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon \quad \Rightarrow\\ T=0 \quad , \quad Q^x=y \quad , \quad Q^y=-x \quad , \quad F=0\end{aligned} \qquad (4.30)$$

a podle (4.19) se zachovává veličina (složka momentu hybnosti kolmá k rovině oscilátoru)

$$p_xQ^x+p_yQ^y=y\,p_x-x\,p_y=m\left(y\dot{x}-x\dot{y}\right)=\text{konst.} \qquad (4.31)$$

Dvourozměrný harmonický oscilátor však můžeme také popsat Lagrangeovou funkcí

$$L = m\,\dot{x}\,\dot{y} - m\,\omega^2\,x\,y \quad . \tag{4.32}$$

Lagrangeovy rovnice budou přirozeně stejné, pouze vzniknou variací jiné proměnné

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + \omega^2\,y = 0 \quad , \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2\,x = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pro hybnosti a hamiltonián máme

$$\begin{aligned} &p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{y} \quad , \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\,\dot{x} \quad , \\ &H = p_x\,\dot{x} + p_y\,\dot{y} - L = \frac{1}{m}\,p_x\,p_y + m\,\omega^2\,x\,y \quad . \end{aligned} \tag{4.34}$$

Lagrangeova funkce (4.25) je invariantní vzhledem k transformaci (homogenita času), kdy $t' = t + \varepsilon$, $x' = x$ a $y' = y$, takže $T = 1$, $Q^x = Q^y = F = 0$ a podle (4.19) se zachovává energie, tj. platí

$$H = \frac{1}{m}\,p_x\,p_y + m\,\omega^2\,x\,y = m\,\dot{x}\,\dot{y} + m\,\omega^2\,x\,y = \text{konst.} \tag{4.35}$$

Lagrangeova funkce je také invariantní vzhledem k transformaci (eliptická deformace)

$$\begin{aligned} &t' = t \quad , \quad x' = x\exp(-\kappa) \quad , \quad y' = y\exp(\kappa) \quad \Rightarrow \\ &T = 0 \quad , \quad Q^x = -x \quad , \quad Q^y = y \quad , \quad F = 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

a podle (4.19) se zachovává veličina

$$p_x\,Q^x + p_y\,Q^y = -x\,p_x + y\,p_y = m\left(y\,\dot{x} - x\,\dot{y}\right) = \text{konst.} \tag{4.37}$$

Elektron v homogenním magnetickém poli. Předpokládejme, že osa z je orientována podle siločar pole a elektron se bude pohybovat v rovině x – y. Vektorový potenciál v Lagrangeově funkci zvolíme tak, aby souřadnice x byla cyklická, tj.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - e\,B\,y\,\dot{x} \quad . \tag{4.38}$$

Lagrangeovy rovnice jsou

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{x} - e\,B\,\dot{y} = 0 \quad , \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{y} + e\,B\,\dot{x} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.39}$$

Už v této chvíli vidíme dvě zachovávající se veličiny, ale budeme postupovat standardním způsobem. Pro hybnost a Hamiltonovu funkci máme

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\,\dot x - e\,B\,y \quad , \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot y} = m\,\dot y \quad ,$$
$$H = p_x\,\dot x + p_y\,\dot y - L = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x + e\,B\,y\right)^2 + p_y^2\right] p = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) \quad . \tag{4.40}$$

Invariance vůči translaci času nebo souřadnice x vede podle (4.19) k zákonu zachování energie H (pouze $T=1$ je různé od nuly) a složky zobecněné hybnosti p_x

$$p_x = m\,\dot x - e\,B\,y = \mathrm{konst.} \tag{4.41}$$

(pouze $Q^x = 1$ bylo různé od nuly). Při translaci souřadnice y ($y' = y + \varepsilon$) máme

$$L' = \frac{m}{2}\left(\dot x'^2 + \dot y'^2\right) - e\,B\,y'\,\dot x' = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) - e\,B\,y\,\dot x - \varepsilon\,e\,B\,\dot x = L - \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e\,B\,x\right) \quad . \tag{4.42}$$

Jsou tedy od nuly různé generátory $Q^y = 1$ a $F = -e\,B\,x$. Podle (4.19) se zachovává

$$p_y + e\,B\,x = m\,\dot y + e\,B\,x = k\mathrm{onst.} \tag{4.43}$$

Jak jsme již uvedli, zachovávající se veličiny (4.41) a (4.43) bychom v tomto případě získali snadněji, když v Lagrangeových rovnicích (4.39) napíšeme derivaci podle času před celý výraz.

Částice v homogenním gravitačním poli. Při translaci $x' = x + \varepsilon$ máme

$$L' = \frac{m}{2}\dot x'^2 + m\,g\,x' = \frac{m}{2}\dot x^2 + m\,g\,x + m\,g\,\varepsilon = L + \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,g\,t\right) \quad . \tag{4.44}$$

Máme tak $Q^x = 1$, $F = m\,g\,t$, takže podle (4.19) je

$$p_x - m\,g\,t = m\left(\dot x - g\,t\right) = \mathrm{konst.} \tag{4.45}$$

5. Pohyb v centrálním poli – Keplerova úloha

Tuto neobyčejně významnou úlohu probereme poměrně podrobně a na elementární úrovni.

5.1 Newtonovy rovnice

Ve zvolené inerciální soustavě uvažujeme dvě tělesa (jako hmotné body), které na sebe působí gravitační silou. Průvodič prvního bodu hmotnosti m_1 označme $\vec r_1$, obdobně průvodič druhého bodu hmotnosti m_2 označíme $\vec r_2$. Vektor spojnice od prvního ke druhému bodu bude $\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$. Podle Newtonova gravitačního zákona působí na první bod druhý bod silou $G\,m_1\,m_2\,\vec r / r^3$ a na druhý bod první bod silou $-G\,m_1\,m_2\,\vec r / r^3$. (Velikost síly je úměrná součinu hmotností a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti, síla je přitažlivá. Také je přirozeně splněn třetí Newtonův zákon.) Druhý Newtonův zákon tak dává pohybové rovnice

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \tag{5.1}$$

a

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad . \tag{5.2}$$

Odečtením rovnice (5.1) vydělené m_1 od rovnice (5.2) vydělené m_2 dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -G\left(m_1 + m_2\right) \frac{\vec{r}}{r^3} \quad , \tag{5.3}$$

sečtením obou rovnic máme pak

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} + m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad . \tag{5.4}$$

Označíme celkovou hmotnost M, redukovanou hmotnost μ a průvodič hmotného středu $\vec{R}$

$$M = m_1 + m_2 \quad , \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad . \tag{5.5}$$

Potom můžeme (5.3) a (5.4) psát jako

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -G\, m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{5.6}$$

a

$$M \frac{\mathrm{d}^2 \vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad . \tag{5.7}$$

Rovnice pro pohyb hmotného středu je jednoduše integrovatelná na

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \vec{V}_0 \quad , \quad \vec{R} = \vec{V}_0\, t + \vec{R}_0 \quad , \tag{5.8}$$

kde počáteční hodnoty souřadnic $\vec{R}_0$ a rychlosti $\vec{V}_0$ hmotného středu představují celkem šest integrálů pohybu. Vynásobením rovnice (5.6) vektorově vektorem $\vec{r}$ dostáváme

$$\vec{r} \times \mu \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times \mu \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{dt} \right) = 0 \quad , \tag{5.9}$$

odkud integrací

$$\vec{r} \times \mu \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{L} \quad , \tag{5.10}$$

kde $\vec{L}$ je konstantní vektor. Složky tohoto vektoru tvoří další tři integrály pohybu. Vektor $\vec{L}$ má charakter momentu hybnosti, ukážeme tedy, jak souvisí s celkovým momentem hybnosti soustavy

$$\vec{L}_{\mathrm{tot}} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 \quad . \tag{5.11}$$

Budeme v dalším užívat obvyklého značení rychlostí, takže

$$\vec{v}_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \vec{v}_2 = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \vec{V} = \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Vektory $\vec{r}_1, \vec{v}_1$ a $\vec{r}_2, \vec{v}_2$ ve výrazu (5.11) nahradíme vektory $\vec{r}, \vec{v}$ a $\vec{R}, \vec{V}$, tj.

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M}\vec{r} \quad , \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

a dostáváme

$$\vec{L}_{\mathrm{tot}} = \vec{L}_{\mathrm{cm}} + \vec{L} \quad , \quad \vec{L}_{\mathrm{cm}} = \vec{R} \times M\vec{V} \quad , \quad \vec{L} = \vec{r} \times \mu\vec{v} \quad . \tag{5.12}$$

Je tedy celkový moment hybnosti roven součtu momentu hybnosti hmotného středu $\vec{L}_{\mathrm{cm}}$ a momentu hybnosti $\vec{L}$ relativního pohybu. Dosazením z (5.8) do výrazu pro $\vec{L}_{\mathrm{cm}}$ vidíme, že se tento moment také zachovává, zachovává se tedy i celkový moment hybnosti soustavy $\vec{L}_{\mathrm{tot}}$. To bychom zjistili i přímo, sečtením rovnice (5.1) vektorově vynásobené $\vec{r}_1$ s rovnicí (5.2) vektorově vynásobenou $\vec{r}_2$.

Před odvozením zákona zachování energie z Newtonových rovnic si připomeneme, že platí

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\vec{\nabla} r = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}$$

a

$$\frac{\mathrm{d} f(\vec{r})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{r}) \quad .$$

Gravitační sílu v Newtonových rovnicích můžeme proto psát jako záporně vzatý gradient gravitační potenciální energie, takže máme

$$m_1 \frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = G m_1 m_2 \vec{\nabla}_{\vec{r}_1} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \tag{5.13}$$

a

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2\vec{v}_2}{\mathrm{d}t^2} = G m_1 m_2 \vec{\nabla}_{\vec{r}_2} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad . \tag{5.14}$$

Sečtením rovnice (5.13) skalárně vynásobené $\vec{v}_1$ s rovnicí (5.14) skalárně vynásobenou $\vec{v}_2$ dostáváme zákon zachování celkové energie

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad , \quad E_{\mathrm{tot}} = \frac{m_1}{2}\vec{v}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2^{\,2} - \frac{G\, m_1\, m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} \quad . \tag{5.15}$$

Podobně jako u momentu hybnosti nahradíme vektory $\vec{r}_1, \vec{v}_1$ a $\vec{r}_2, \vec{v}_2$ ve výrazu (5.15) vektory $\vec{r}, \vec{v}$ a $\vec{R}, \vec{V}$, takže dostáváme

$$E_{\mathrm{tot}} = E_{\mathrm{cm}} + E \quad , \quad E_{\mathrm{cm}} = \frac{M}{2}V^2 \quad , \quad E = \frac{\mu}{2}v^2 - \frac{G\, m_1\, m_2}{r} \quad . \tag{5.16}$$

Protože se E_{tot} a E_{cm} zachovávají, zachovává se i energie relativního pohybu E, což bychom přímo zjistili skalárním vynásobením rovnice (5.6) vektorem $\vec{v}$.

5.2 Relativní pohyb (pohyb v těžišťové soustavě)

V dalším se soustředíme pouze na popis relativního pohybu. Z pohybové rovnice

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -G\, m_1\, m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{5.17}$$

jsme odvodili, že se zachovává energie

$$E = \frac{\mu}{2}v^2 - \frac{G\, m_1\, m_2}{r} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5.18}$$

a vektor momentu hybnosti

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \vec{v} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad . \tag{5.19}$$

Uvidíme v dalším, že se tyto veličiny zachovávají při pohybu popsaném libovolným sféricky symetrickým potenciálem. Zákon zachování vektoru momentu hybnosti říká, že pohyb se děje v rovině. Pro Keplerovu úlohu je typická existence dalšího zachovávajícího se vektoru, definovaného obvykle vztahem

$$\vec{A} = \mu\left(\vec{v} \times \vec{L} - G\, m_1\, m_2 \frac{\vec{r}}{r}\right) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad . \tag{5.20}$$

Vektoru $\vec{A}$ se obvykle říká LRL (Laplaceův – Rungeho – Lenzův) vektor. Zachování LRL vektoru ověříme přímo derivováním, přitom kromě dosazení z pohybové rovnice (5.17) a užití zákona zachování (5.19) použijeme při úpravách rovnost

$$\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \vec{r}\left(\vec{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \cdot \vec{r}\right) = \vec{r}\, r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} r^2 \quad .$$

Jiné normování má tzv. vektor excentricity $\vec{e}$

$$\vec{e} = \frac{1}{G\,\mu\, m_1\, m_2}\vec{A} = \frac{1}{G\, m_1\, m_2}\vec{v}\times\vec{L} - \frac{\vec{r}}{r} \quad , \tag{5.21}$$

pomocí jehož projekce dostaneme rovnici trajektorie. Máme

$$\vec{e}\cdot\vec{r} = \frac{1}{G\, m_1\, m_2}\vec{r}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{L}\right) - \vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{G\, m_1\, m_2}\vec{L}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{v}\right) - r = \frac{L^2}{G\,\mu\, m_1\, m_2} - r \quad ,$$

takže s označením $\vec{e}\cdot\vec{r} = e\, r\cos\varphi$ je rovnicí trajektorie rovnice kuželosečky

$$\frac{1}{r} = \frac{G\,\mu\, m_1\, m_2}{L^2}\left(1 + e\cos\varphi\right) \quad . \tag{5.22}$$

Čtverec velikosti $\vec{e}$ spočteme úpravou (5.21)

$$\vec{e}\cdot\vec{e} = \frac{\left(\vec{v}\times\vec{L}\right)^2}{\left(G\, m_1\, m_2\right)^2} - \frac{2\left(\vec{v}\times\vec{L}\right)\cdot\vec{r}}{G\, m_1\, m_2\, r} + 1 = \frac{v^2\, L^2}{\left(G\, m_1\, m_2\right)^2} - \frac{2\, L^2}{G\,\mu\, m_1\, m_2\, r} + 1 \quad ,$$

takže s dosazením za energii z (5.18) můžeme psát

$$e^2 - 1 = \frac{2\, L^2\, E}{\left(G\, m_1\, m_2\right)^2\,\mu} \quad . \tag{5.23}$$

Ze vztahu (5.23) vidíme, že pro záporné hodnoty energie je trajektorií elipsa. Všimněme si také invariance vůči škálování – levá strana je čistě geometrický výraz. Při transformaci $t \to \lambda^{\alpha}\, t$, $\vec{r} \to \lambda^{\beta}\,\vec{r}$ se transformuje kinetická energie jako $T \to \lambda^{2(\beta-\alpha)}\, T$, potenciální energie jako $U \to \lambda^{-\beta}$ a velikost momentu hybnosti jako $L \to \lambda^{2\beta-\alpha}$. Musí být tedy $E \to \lambda^{\gamma}\, E$ a $L^2\, E \to L^2\, E$, což vede na vztah (například projevený ve třetím Keplerově zákonu) $3\beta = 2\alpha$.

5.3 Keplerovy zákony

Dnešní formulace Keplerových zákonů se v nepodstatných detailech mírně odlišují. Můžeme zvolit například tu z českého překladu Feynmanových přednášek:

(1) Každá planeta se pohybuje kolem Slunce po elipse, přičemž Slunce je v jednom z ohnisek.

(2) Průvodič spojující Slunce s planetou opisuje stejné plochy za stejné časové intervaly.

(3) Druhé mocniny period libovolných dvou planet jsou úměrné třetím mocninám velkých poloos jejich drah: $T \sim a^{3/2}$.

Jak uvidíme v historické poznámce, Kepler nikdy žádné „zákony" neformuloval a v jeho rozsáhlém díle lze obsah „Keplerových zákonů" jen obtížně nalézat. Také v námi přejaté formulaci je několik míst, zasluhujících si další komentáře. V dalším výkladu bude postup stručnou kopií výkladu v Sommerfeldově Mechanice. Některé postupy budou jen opakováním již uvedených. Na Sommerfeldově výkladu je použné, že se Keplerovy zákony objevují v tom pořadí, jak jejich obsah Kepler postupně nalézal.

Považujeme Slunce za nehybné (i hmotnost Jupitera je přibližně tisícinou hmotnosti Slunce), počátek souřadné soustavy položíme do jeho středu. Podle Newtonova gravitačního zákona působí na planetu síla (G je Newtonova gravitační konstanta, M je hmotnost Slunce, m hmotnost planety a $\vec{r}$ průvodič, tj. polohový vektor planety)

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad . \tag{5.24}$$

Platí tedy $\vec{r}\times\vec{F}=0$. Z druhého Newtonova zákona pak $\vec{r}\times\dot{\vec{p}}=0$ a druhý Keplerův zákon máme zatím vyjádřen jako zákon zachování momentu hybnosti

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad , \quad \vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} \quad . \tag{5.25}$$

Ve válcových souřadnicích (ρ,φ,z) máme $\vec{r}=\rho\vec{e}_\rho$ a $\vec{v}=\dot{\rho}\vec{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ a $\vec{L}=m\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$. Můžeme tedy (5.25) zapsat jako ($\mathrm{d}A$ je element plochy)

$$m\rho^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2m\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \text{konst.} \quad , \quad \mathrm{d}A = \frac{1}{2}\rho^2\,\mathrm{d}\varphi \quad . \tag{5.26}$$

Volíme $\text{konst.}=2mC$, C je pak konstantní plošná rychlost, obvykle je volena orientace os v rovině x – y tak, že $\varphi=0$ je v apheliu, tj. φ je pravá anomálie. Pro časovou změnu anomálie máme

$$\dot{\varphi} = \frac{2C}{\rho^2} \quad . \tag{5.27}$$

Zavedeme teď plochu opsanou průvodičem za časový interval Δt jako

$$A(t) = \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{5.28}$$

a konečně dostáváme matematický zápis standardního tvaru druhého Keplerova zákona

$$\frac{A(t)}{\Delta t} = C \quad . \tag{5.29}$$

Pro odvození prvního Keplerova zákona zapíšeme pohybovou rovnici ve složkách

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = -\frac{GM}{\rho^2}\cos\varphi \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} = -\frac{GM}{\rho^2}\sin\varphi \quad . \tag{5.30}$$

Přejdeme k nové parametrizaci pomocí anomálie a s využitím (5.27) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{GM}{2C}\cos\varphi \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{GM}{2C}\sin\varphi \quad . \tag{5.31}$$

Integrace je snadná

$$\dot{x} = -\frac{GM}{2C}\sin\varphi + A \quad , \quad \dot{y} = \frac{GM}{2C}\cos\varphi + B \quad . \tag{5.32}$$

Všimněme si, že hodografem planetárního pohybu je kružnice

$$\left(\dot{x} - A\right)^2 + \left(\dot{y} - B\right)^2 = \left(\frac{GM}{2C}\right)^2 \quad . \tag{5.33}$$

Rovnice (5.32) přepíšeme zcela v polárních souřadnicích

$$\begin{aligned} \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi &= -\frac{GM}{2C}\sin\varphi + A \quad , \\ \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi &= \frac{GM}{2C}\cos\varphi + B \quad . \end{aligned} \tag{5.34}$$

Vynásobíme druhou rovnici v (5.34) $\cos\varphi$ a odečteme od ní první rovnici vynásobenou $\sin\varphi$, dostáváme tak

$$\rho\dot{\varphi} = \frac{GM}{2C} - A\sin\varphi + B\cos\varphi \tag{5.35}$$

a po dosazení z (5.27)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{GM}{\left(2C\right)^2} - \frac{A}{2C}\sin\varphi + \frac{B}{2C}\cos\varphi \quad . \tag{5.36}$$

To je rovnice elipsy s počátkem v jednom z ohnisek. Už z rovnic (5.32) můžeme vidět, že pokud má být φ pravou anomálií, musíme zvolit $A = 0$. Dostáváme tak (*a* je hlavní poloosa a *e* excentricita elipsy) v periheliu ($\varphi = \pi$) a apheliu ($\varphi = 0$)

$$\frac{1}{a\left(1-e\right)} = \frac{GM}{\left(2C\right)^2} - \frac{B}{C} \quad , \quad \frac{1}{a\left(1+e\right)} = \frac{GM}{\left(2C\right)^2} + \frac{B}{C} \quad .$$

Odtud vypočteme

$$\frac{GM}{\left(2C\right)^2} = \frac{1}{a\left(1-e^2\right)} \quad , \quad \frac{B}{2C} = -\frac{e}{a\left(1-e^2\right)} \quad . \tag{5.37}$$

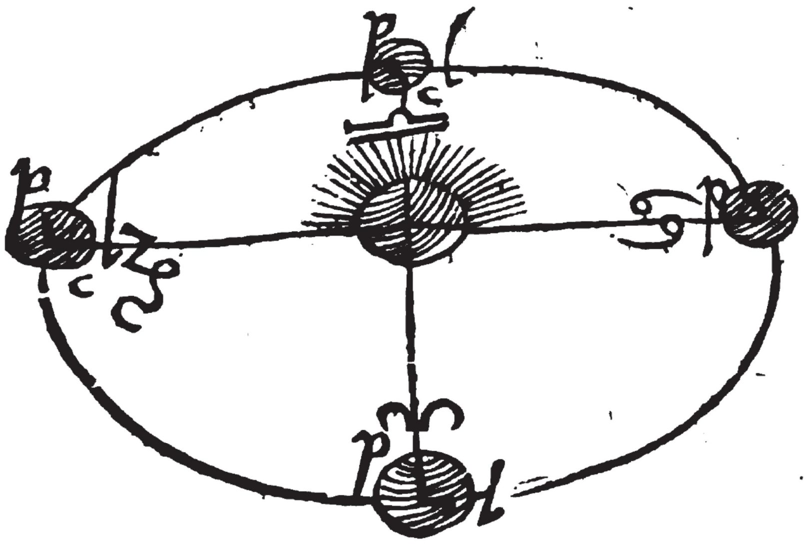
Připomeneme-li ještě výraz pro parametr elipsy

$$p = \frac{b^2}{a} = a\left(1-e^2\right) \quad ,$$

můžeme rovnici planetární trajektorie (5.36) zapsat jako

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi} \quad . \tag{5.38}$$

To je matematický zápis prvního Keplerova zákona.



Odvození třetího zákona je už jednoduché. Z druhého zákona (5.29) vzatého pro $\Delta t = T$ (tj. pro celou periodu) máme

$$C = \frac{S}{T} \quad , \quad S = \pi\, a\, b = \pi\, a^2 \left(1 - e^2\right)^{1/2} \quad . \tag{5.39}$$

Vezmeme čtverec C^2 a dosadíme za něj z prvního vztahu v (5.37). Dostáváme tak

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\left(2\pi\right)^2}{G\,M} \quad , \tag{5.40}$$

matematické vyjádření třetího Keplerova zákona.

5.4 Lagrangeovy rovnice

Lagrangeova funkce je

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} + G\frac{m_1\, m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} \quad . \tag{5.41}$$

Přejdeme k nové soustavě, kdy zavedeme proměnnou $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ a počátek souřadné soustavy umístíme do středu hmotnosti, tj. bude v ní platit $m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 = 0$. Potom

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad , \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{5.42}$$

a Lagrangeova funkce je

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + G\frac{m_1\, m_2}{r} \quad , \quad m = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} \quad . \tag{5.43}$$

V tuto chvíli je dobré si uvědomit, že trajektorie bude rovinná – síla je radiální, zachovává se moment hybnosti, který je kolmý k průvodiči. Budeme proto mít v polárních souřadnicích v rovině trajektorie

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{G\,m_1\,m_2}{\rho} \quad . \tag{5.44}$$

Lagrangeovy rovnice jsou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,\dot{\rho}\right) - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{G\,m_1\,m_2}{\rho^2} = 0 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,\rho^2\,\dot{\varphi}\right) = 0 \quad . \tag{5.45}$$

Souřadnice φ je cyklická, zachovává se proto s ní sdružená zobecněná hybnost $p_\varphi = m\,\rho^2\,\dot{\varphi}$. Tato zobecněná hybnost je z-tovou (a při naší volbě roviny trajektorie $z = 0$ také jedinou) složkou $L_z = L = \text{konst.}$ zachovávajícího se momentu hybnosti, máme tedy

$$m\,\rho^2\,\dot{\varphi} = L = \text{konst.} \tag{5.46}$$

Obecný výraz pro moment hybnosti ve válcových souřadnicích je

$$\vec{L} = -m\,z\,\rho\dot{\varphi}\vec{e}_\rho + m\left(z\,\dot{\rho} - \rho\,\dot{z}\right)\vec{e}_\varphi + m\,\rho^2\,\dot{\varphi}\vec{e}_z \quad .$$

Vhodná volba souřadné soustavy je velice důležitá. Rozepsáním derivace a dosazením z Lagrangeových rovnic (5.45) se přesvědčíme, že se energie zachovává (to samozřejmě plyne z už toho, že Lagrangeova funkce explicitně nezávisí na čase)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \quad , \quad E = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{G\,m_1\,m_2}{\rho} = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,\rho^2} - \frac{G\,m_1\,m_2}{\rho} \quad . \tag{5.47}$$

Z rovnice (5.47) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \left\{\frac{2}{m}\left(E + \frac{G\,m_1\,m_2}{\rho}\right) - \frac{L^2}{m^2\,\rho^2}\right\}^{1/2} \tag{5.48}$$

a po integraci implicitní závislost $\rho = \rho(t)$

$$t = \int \frac{\mathrm{d}\rho}{\left\{\frac{2}{m}\left(E + \frac{G\,m_1\,m_2}{\rho}\right) - \frac{L^2}{m^2\,\rho^2}\right\}^{1/2}} + \text{konst.} \tag{5.49}$$

Změníme-li parametrizaci podle

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{L}{m\,\rho^2}\,\mathrm{d}t \quad ,$$

dostáváme rovnici trajektorie, tj. vztah mezi souřadnicemi ρ a φ

$$\varphi = \int \frac{L}{\rho^2} \frac{\mathrm{d}\rho}{\left\{ 2m\left(E + \dfrac{G m_1 m_2}{\rho} \right) - \dfrac{L^2}{\rho^2} \right\}^{1/2}} + \text{konst.} \tag{5.50}$$

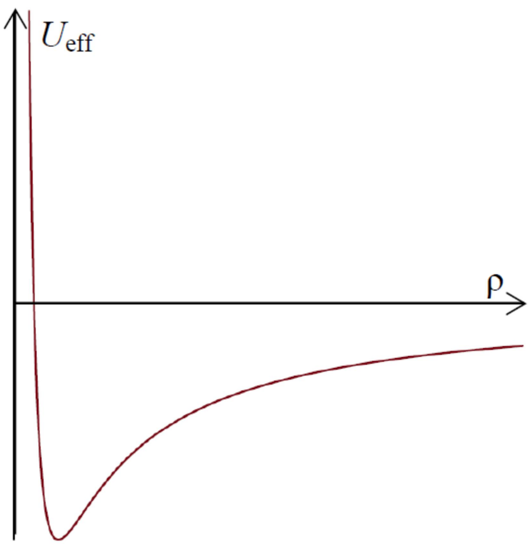
Je vidět, že pro charakter řešení má velký význam tzv. efektivní potenciální energie

$$U_{\text{eff}} = -\frac{G m_1 m_2}{\rho} + \frac{L^2}{2m\rho^2} \quad . \tag{5.51}$$

Její průběh vystihuje následující tabulka:

$$\begin{array}{ll}
\rho \to 0 & U_{\text{eff}} \to \infty \\
\rho = \dfrac{L^2}{G m m_1 m_2} & \left(U_{\text{eff}}\right)_{\min} = \dfrac{m\left(G m_1 m_2\right)^2}{2L^2} \\
\rho \to \infty & U_{\text{eff}} \to -0
\end{array} \quad .$$

Z tabulky i obrázku je jasně vidět zásadní rozdíl pro kladné a záporné hodnoty celkové energie (nulová hladina je dána volbou nulové hodnoty potenciální energie v nekonečnu): pro $E > 0$ je pohyb prostorově nekonečný, pro $E < 0$ se pohyb odehrává v omezené oblasti.



Integrál v (5.50) můžeme analyticky vyjádřit, takže máme

$$\varphi = \arccos \frac{\dfrac{L}{\rho} - \dfrac{G m m_1 m_2}{L}}{\left\{ 2mE + \left(\dfrac{G m m_1 m_2}{L} \right)^2 \right\}^{1/2}} + \text{konst.} \tag{5.52}$$

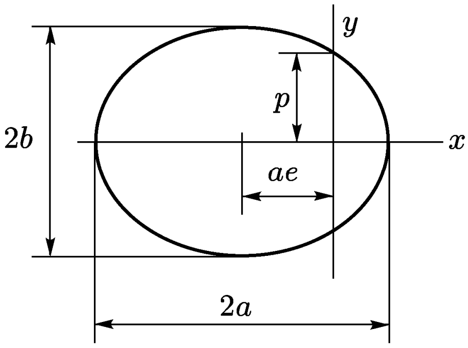
Pokud bychom chtěli zachovat φ jako pravou anomálii, zvolili bychom konstantu rovnu π . Ve většině fyzikálních textu je ale konstanta pokládána rovna nule, čehož se v této chvíli přidržíme i my. Zavedeme-li značení

$$p=\frac{L^2}{G\,m\,m_1\,m_2}\quad,\quad e=\left\{1+\frac{2\,E\,L^2}{m\left(G\,m_1\,m_2\right)^2}\right\}^{1/2}\quad, \tag{5.53}$$

je rovnicí trajektorie rovnice kuželosečky s ohniskem v počátku souřadnic

$$\frac{p}{\rho}=1+e\cos\varphi \tag{5.54}$$

s parametrem p a excentricitou e. Z (5.53) vidíme, že pro $E<0$ je $e<1$, jedná se tedy o elipsu.



Při nejmenší možné energii, která je rovna minimální efektivní potenciální energii je $e=0$ a elipsa přechází na kružnici. Ze známých vztahů pro elipsu máme

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{G\,m_1\,m_2}{2|E|}\quad,\quad b=\frac{p}{\left(1-e^2\right)^{1/2}}=\frac{L}{\left(2\,m|E|\right)^{1/2}}\quad. \tag{5.55}$$

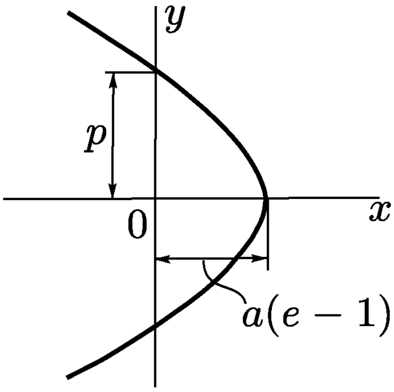
K minimální a maximální hodnotě ρ dospějeme buď uvážením vlastností elipsy, nebo řešením rovnice (body, kde výraz pod odmocninou v integrálu (5.50) nabývá nulových hodnot) $U_{\text{eff}}\left(\rho\right)=E$:

$$\rho_{\min}=\frac{p}{1+e}=a\left(1-e\right)\quad,\quad\rho_{\max}=\frac{p}{1-e}=a\left(1+e\right)\quad. \tag{5.56}$$

Přepíšeme-li si (5.46) na $2\,m\,\mathrm{d}A=L\,\mathrm{d}t$ ($\mathrm{d}A$ je plošný element) a integrujeme přes celou periodu T, dostáváme $2\,m\,A=L\,T$ a protože $A=\pi\,a\,b$, dostáváme třetí Keplerův zákon

$$T^2=4\pi^2\frac{m}{G\,m_1\,m_2}a^3=\frac{4\pi^2}{G\left(m_1+m_2\right)}a^3\quad. \tag{5.57}$$

Při $E>0$ je $e>1$ a trajektorií je větev hyperboly.

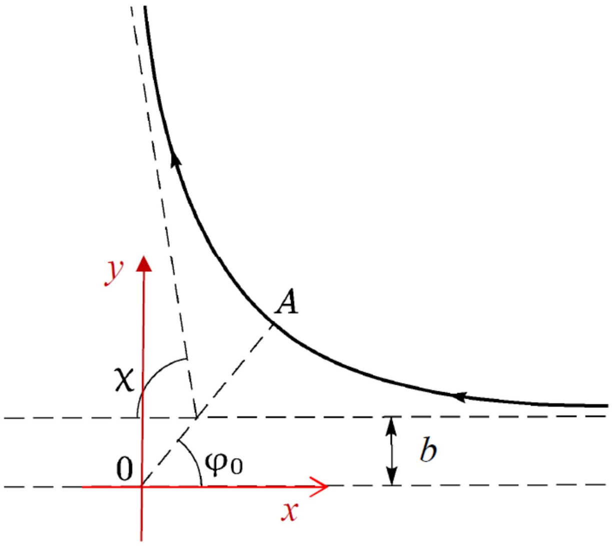


Konečně pro $E=0$ je $e=1$ a trajektorií je parabola. Odpovídá to zvláštnímu případu, kdy v nekonečnu je rychlost nulová (je-li v nekonečnu celková i potenciální energie rovna nule, musí být nulová i kinetická energie).

6. Pohyb v centrálním poli – rozptyl dvou částic

6.1 Rozptyl na sféricky symetrickém potenciálu

Hned od začátku budeme předpokládat, že počítáme v těžišťové soustavě a řešíme tedy ekvivalentní úlohu – odchýlení jedné částice s hmotností $m=m_1 m_2/(m_1+m_2)$ v poli $U(\rho)$ nepohybujícího se středu silového působení (umístěného ve středu hmotnosti). U potenciálu předpokládáme dostatečně rychlý (co je dostatečně ukáže až konkrétní výpočet) pokles k nule v nekonečnu. Také hned od počátku počítáme s pohybem v rovině x – y, osu z válcové soustavy souřadnic volíme tedy ve směru zachovávajícího se momentu hybnosti. Geometrie úlohy je znázorněna na obrázku, b je srážkový parametr, $\chi=|\pi-2\varphi_0|$ je úhel rozptylu. Jak



uvidíme, trajektorie je vždy symetrická kolem přímky spojující počátek O a bod A, kde se částice přestane přibližovat a začne vzdalovat od počátku. Částice se nerozptyluje ($\chi = 0$) při $\varphi_0 = \pi/2$ a obrací směr pohybu ($\chi = \pi$) při čelní srážce pro odpudivou sílu ($\varphi_0 = 0$) nebo při těsném oběhu pro přitažlivou sílu ($\varphi_0 = \pi$).

Lagrangeova funkce ve válcových souřadnicích je

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2\right) - U\left(\rho\right) \quad . \tag{6.1}$$

Zachovává se energie

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2\right) + U\left(\rho\right) \tag{6.2}$$

a moment hybnosti

$$\vec{L} = m\,\rho^2\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \quad . \tag{6.3}$$

Konstanty určíme z počátečních hodnot při $t \to -\infty$, kdy předpokládáme

$$\lim_{t\to-\infty} x = \infty \quad , \quad \lim_{t\to-\infty} y = b \quad , \quad \lim_{t\to-\infty} \dot{x} = -v_\infty \quad , \quad \lim_{t\to-\infty} \dot{y} = 0 \quad .$$

Máme tak

$$E = \frac{m}{2}\lim_{t\to-\infty}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m\,v_\infty^2}{2} \quad , \quad L = m\lim_{t\to-\infty}\left(x\,\dot{y} - \dot{x}\,y\right) = m\,b\,v_\infty \quad . \tag{6.4}$$

Z výrazů pro energii a velikost momentu hybnosti máme

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{m\,\rho^2} \tag{6.5}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \mp\left\{\frac{2}{m}\left(E - U\left(\rho\right)\right) - \frac{L^2}{m^2\rho^2}\right\}^{1/2} \quad , \tag{6.6}$$

horní znaménko platí pro první část trajektorie (přibližování $\infty \to \rho_{\min}$), spodní znaménko pro druhou část trajektorie (vzdalování $\rho_{\min} \to \infty$), kde $\rho_{\min}$ je kořenem rovnice

$$1 - \frac{b^2}{\rho^2} - \frac{2U\left(\rho\right)}{m\,v_\infty^2} = 0 \quad . \tag{6.7}$$

Hodnotu φ_0 získáme ze vztahů (6.5) a (6.6) jako

$$\varphi_0 = b\int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2\left\{1 - \dfrac{b^2}{\rho^2} - \dfrac{2U\left(\rho\right)}{m\,v_\infty^2}\right\}^{1/2}} \quad . \tag{6.8}$$

Základní charakteristiku rozptylu – diferenciální účinný průřez – získáme následující úvahou. V experimentu zjišťujeme závislost počtu rozptýlených částic na úhlu rozptylu. Předpokládáme tedy rozptyl na počátku homogenního svazku částic, n bude počet částic ve svazku procházejících jednotkovou plochou za jednotku času, a zjišťujeme počet částic $\mathrm{d}N$ rozptýlených za jednotku času do úhlového intervalu $(\chi, \chi + \mathrm{d}\chi)$. Diferenciální účinný průřez (má skutečně rozměr plochy) je definován jako podíl

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}N}{n} \quad . \tag{6.9}$$

Rozptýlený úhel závisí (při pevné energii) na hodnotě srážkového parametru. Je tedy počet částic rozptýlených do daného úhlového intervalu dán počtem částic se srážkovým parametrem v intervalu $\left(b(\chi), b(\chi) + \mathrm{d}b(\chi)\right)$, tj. počtem částic, které za jednotku času mezikružím omezeným tímto intervalem

$$\mathrm{d}N = n\, 2\pi b\, \mathrm{d}b \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\sigma = 2\pi b\, \mathrm{d}b \quad .$$

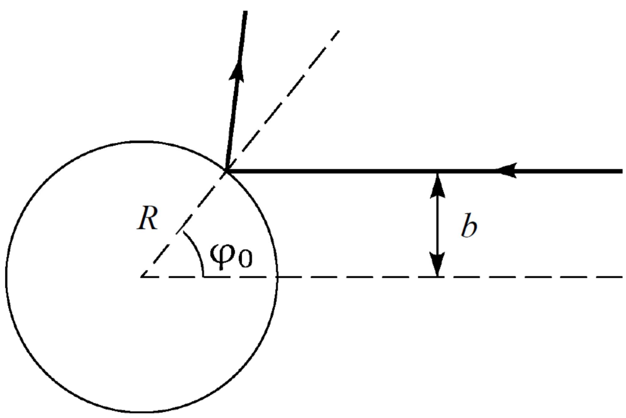
Přejdeme teď k vyjádření $\mathrm{d}\sigma$ pomocí úhlu rozptylu s uvážením výrazu pro element prostorového úhlu. Máme

$$\mathrm{d}b = \left|\frac{\mathrm{d}b(\chi)}{\mathrm{d}\chi}\right| \mathrm{d}\chi \quad , \quad 2\pi \sin\chi \, \mathrm{d}\chi = \mathrm{d}\Omega \quad , \tag{6.10}$$

takže dostáváme výraz pro diferenciální účinný průřez v závislosti na úhlu rozptylu

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{b(\chi)}{\sin\chi} \left|\frac{\mathrm{d}b(\chi)}{\mathrm{d}\chi}\right| \mathrm{d}\Omega \quad . \tag{6.11}$$

Absolutní hodnota je ve vyjádření proto, že (a bývá to obvyklé) funkce $b(\chi)$ je klesající. Také může nastat situace, že do jednoho intervalu úhlů rozptylu přispívá více intervalů srážkového parametru – potom je potřeba sečíst odpovídající výrazy.



Skutečnost, že „účinný průřez“ dobře vystihuje charakter počítané veličiny je ilustrována na jednoduchém příkladu z obrázku. Částice se odráží na absolutně tuhé kouli poloměru R (tj. potenciál má tvar $U(r<R)=\infty$ a $U(r>R)=0$). Z geometrie úlohy máme

$$b = R\sin\varphi_0 = R\sin\frac{\pi-\chi}{2} = R\cos\frac{\chi}{2} \quad .$$

Dosazení do (6.11) dává

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{R\cos\frac{\chi}{2}}{\sin\chi}\left|-\frac{R}{2}\sin\frac{\chi}{2}\right|\mathrm{d}\Omega = \frac{R^2}{4}\mathrm{d}\Omega \quad .$$

Integrací přes celý prostorový úhel ($\int \mathrm{d}\Omega = 4\pi$) dostáváme celkový účinný průřez $\sigma = \int \mathrm{d}\sigma = \pi R^2$ – tedy skutečně průřez neprostupné koule, který „vidí“ dopadající svazek částic.

6.2 Rutherfordův účinný průřez

Popisujeme rozptyl dvou nabitých částic, které na sebe působí silou danou Coulombovým potenciálem

$$U(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad , \tag{6.12}$$

kde Q_1 a Q_2 jsou elektrické náboje částic. Z předchozích částí můžeme využít většinu výsledků, protože pohyb (v rovině $z=0$) je popsán Lagrangeovou funkcí

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right) - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \rho} \quad . \tag{6.13}$$

Pro stručnost budeme značit $\alpha = Q_1 Q_2 / (4\pi\varepsilon_0)$, konstanta α má rozměr energie krát délka. Dosazením Coulombova potenciálu do (6.8) dostáváme

$$\varphi_0 = b\int_{\rho_{\min}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2\left\{1-\frac{b^2}{\rho^2}-\frac{2\alpha}{m v_\infty^2\rho}\right\}^{1/2}} \overset{x=\frac{b}{\rho}+\frac{\alpha}{b m v_\infty^2}}{=} \int_{\left\{1+\left(\frac{\alpha}{b m v_\infty^2}\right)^2\right\}^{1/2}}^{\frac{\alpha}{b m v_\infty^2}}\frac{-\mathrm{d}x}{\left\{1+\left(\frac{\alpha}{b m v_\infty^2}\right)^2 - x^2\right\}^{1/2}} \quad .$$

Integrál je elementární

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\dfrac{\alpha}{b\,m\,v_\infty^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{\alpha}{b\,m\,v_\infty^2}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad .$$

TeŅ uġ snadno vyjádŚíme b^2 jako funkci φ_0

$$b^2 = \left(\frac{\alpha}{m\,v_\infty^2}\right)^2 \mathrm{tg}^2\,\varphi_0$$

a po substituci $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$

$$b^2 = \left(\frac{\alpha}{m\,v_\infty^2}\right)^2 \mathrm{cotg}^2\frac{\chi}{2} \quad . \tag{6.14}$$

Derivujeme (6.14) vzhledem k χ

$$b\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{m\,v_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\dfrac{\chi}{2}}{\sin^3\dfrac{\chi}{2}} = \left(\frac{\alpha}{2\,m\,v_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\chi}{\sin^4\dfrac{\chi}{2}}$$

a po dosazení do (6.11) dostáváme RutherfordŢv vztah pro diferenciální úļinný prŢŚez

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\,m\,v_\infty^2}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\Omega}{\sin^4\dfrac{\chi}{2}} \quad . \tag{6.15}$$

6.3 Popis v laboratorní soustavŊ a soustavŊ stŚedu hmotnosti

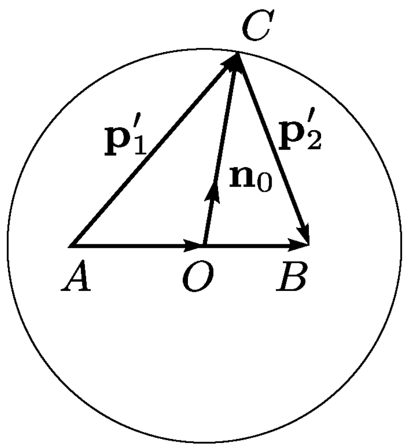
Výpoļty provádŊné v soustavŊ stŚedu hmotnosti (zkrácenŊ cms) jsou vŊtġinou podstatnŊ jednoduġġí. PotŚebujeme-li vġak srovnání s experimentem, je tŚeba pŚevést získané výsledky do soustavy laboratorní. Tento pŚevod není triviální záleġitostí. Máme-li v laboratorní soustavŊ poļáteļní rychlosti (Ăv nekoneļnechñ) ļástic $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$, jsou jejich rychlosti v cms (oznaļme $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$)

$$\vec{v}_{1(0)} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v} \quad , \quad \vec{v}_{2(0)} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v} \quad ,$$

takġe $\vec{p}_{1(0)} + \vec{p}_{2(0)} = m_1\,\vec{v}_{1(0)} + m_2\,\vec{v}_{2(0)} = 0$. Po rozptylu se velikosti výsledných rychlostí (opŊt Ănekoneļně vzdálených ļásticñ) v cms co do velikosti nezmŊní, jenom zamíŚí jinými ï stále vġak opaļnými ï smŊry

$$\vec{v}^{\,/}_{1(0)} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v\,\vec{n}_{(0)} \quad , \quad \vec{v}^{\,/}_{2(0)} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v\,\vec{n}_{(0)} \quad ,$$

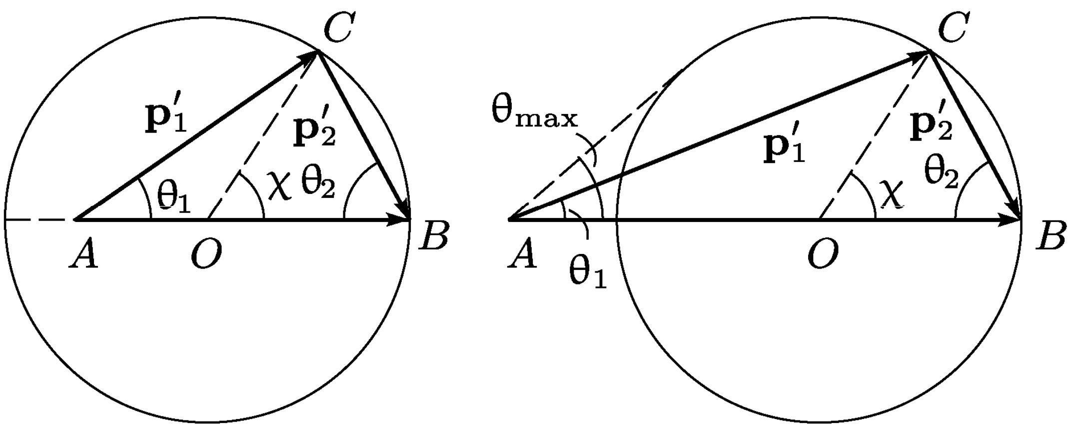
$\vec{n}_{(0)}$ je jednotkový vektor ve směru rychlosti první částice. Rychlosti v laboratorní soustavě získáme přičtením rychlosti středu hmotnosti $\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2\right)/\left(m_1+m_2\right)$. Zobrazení hybností po rozptylu v laboratorní soustavě je na obrázku, kde jednotlivé zadávané vektory jsou



$$\overrightarrow{OC}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{p}_1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{p}_2=m\vec{v} \quad ,$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right) \quad , \quad \overrightarrow{OB}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right) \quad .$$

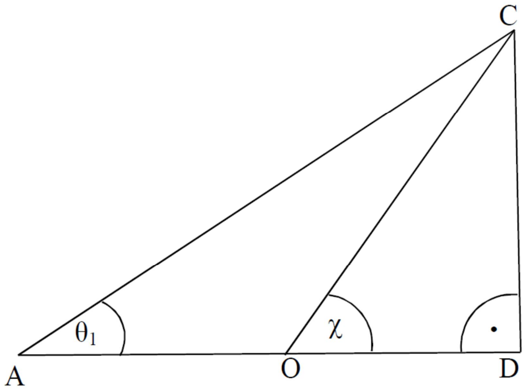
Prakticky důležitý je případ, kdy jedna částice je (například m_2) je v laboratorní soustavě v klidu. Potom úhly rozptylu jednotlivých částic souvisí s úhlem rozptylu v cms poměrně jednoduchým vztahem. Tento vztah dostaneme z překresleného obecného obrázku na případ s jednou částicí v klidu. Levý obrázek odpovídá $m_1<m_2$, pravý obrázek opačnému případu.



Z geometrie trojúhelníků dostaneme

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi} \quad , \quad \theta_2=\frac{\pi-\chi}{2} \quad . \tag{6.16}$$

Druhý vztah plyne okamžitě z $\triangle OBC$, první vztah je dán tangentovou větou (obrázek), když uvážíme $\overline{AO}/\overline{OC} = m_1/m_2$.



Z první rovnice v (6.16) dostaneme

$$\cos\chi = -\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1 \pm \cos\theta_1\left[1-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\sin^2\theta_1\right]^{1/2} ,$$

přitom pro $m_1 < m_2$ je vztah $\chi \leftrightarrow \theta_1$ jednoznačný (odpovídající znaménko je plus) – přímka vedená pod úhlem θ_1 z bodu A protíná kružnici v jediném bodě C, pro $m_1 > m_2$ jsou možné dva průsečíky C a C'. Derivováním získáme

$$\sin\chi\,\mathrm{d}\chi = \left\{2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\cos(2\theta_1)}{\left[1-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\sin^2\theta_1\right]^{1/2}}\right\}\sin\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1 \quad .$$

V případě, že jedné hodnotě θ_1 odpovídají dvě hodnoty úhlu χ, je třeba klesající větev odečítat od rostoucí. Konečně se tedy dostáváme k výsledku

$$\mathrm{d}\Omega_\chi = \begin{cases} \left\{2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1 + \frac{1+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\cos(2\theta_1)}{\left[1-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\sin^2\theta_1\right]^{1/2}}\right\}\mathrm{d}\Omega_{\theta_1} & m_1 < m_2 \quad 0 \le \theta_1 \le \pi \\ 2\frac{1+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\cos(2\theta_1)}{\left[1-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\sin^2\theta_1\right]^{1/2}}\mathrm{d}\Omega_{\theta_1} & m_1 > m_2 \quad 0 \le \theta_1 < \theta_{\max} \end{cases} , \qquad (6.17)$$

kde $\theta_{\max} = \arcsin\left(m_2/m_1\right)$. Jak jsme již uvedli, převod výsledků do laboratorní soustavy je nutný pro případné porovnání s experimenty. Tento jednoduchý příklad ukazuje, jak výhodné je počítání v soustavě středu hmotnosti.

7. Pohyb v centrálním poli – harmonický oscilátor

Potenciál má tvar $U\left(r\right)=\left(k/2\right)r^2$. Jak již víme, je výhodné zvolit osu z kartézských nebo válcových souřadnic ve směru zachovávajícího se vektoru momentu hybnosti. Lagrangeova funkce je pak

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{m\,\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) \tag{7.1}$$

nebo

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{m\,\omega^2}{2}\,\rho^2 \quad . \tag{7.2}$$

Zvolili jsme standardní označení $\omega=\left(k/m\right)^{1/2}$. Lagrangeovy rovnice jsou

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{x} + m\,\omega^2\,x = 0 \quad , \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{y} + m\,\omega^2\,y = 0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

nebo

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{\rho} - m\,\rho\,\dot{\varphi}^2 + m\,\omega^2\,\rho = 0 \quad , \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,\rho^2\,\ddot{\varphi} + 2\,m\,\rho\,\dot{\varphi} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{7.4}$$

Rovnice (7.3) dokážeme snadno integrovat (homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty)

$$x\left(t\right) = A\sin\left(\omega t + \alpha\right) \quad , \quad y\left(t\right) = B\sin\left(\omega t + \beta\right) \quad . \tag{7.5}$$

Trochu překvapivě je integrace rovnic v polárních souřadnicích, které odrážejí symetrii problému obtížnější. Rovnici pro úhel jsme nemuseli rozepisovat, i tak je vidět, že první integrál je $m\,\rho^2\,\dot{\varphi} = L = \text{konst.}$ Dosazení do rovnice pro radiální souřadnici dává

$$\ddot{\rho} + \omega^2\,\rho - \frac{L^2}{m^2\,\rho^3} = 0 \quad . \tag{7.6}$$

Než budeme hledat řešení této rovnice, všimněme si, že velikost momentu hybnosti pro řešení (7.5) je $L = m\,\omega\,A\,B\sin(\alpha-\beta)$. Pro $\alpha=\beta$ se oscilátor pohybuje po přímce, $L=0$ a rovnice pro radiální souřadnici přejde pochopitelně na rovnici lineárního oscilátoru. Energie pro řešení (7.5) je $E=(m/2)\,\omega^2\left(A^2+B^2\right)$. Rozdíl $E^2-\omega^2 L^2$ je pro tato řešení vždy nezáporný

$$E^2-\omega^2 L^2=\frac{m^2\,\omega^4}{4}\left[\left(A^2-B^2\right)^2+4\,A^2\,B^2\cos^2(\alpha-\beta)\right] \quad ,$$

Nulové hodnoty nabývá při pohybu po kružnici ($B=A$, $\beta=\alpha-\pi/2$).

Jednou z možností řešení rovnice (7.6) je vynásobit rovnici $2\dot{\rho}$, výslednou rovnici pak můžeme zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\rho}^2+\omega^2\rho^2+\frac{L^2}{m^2\rho^2}\right)=0 \quad .$$

Je to rovnice zachování energie, kterou jsme již studovali, takže máme

$$t=\int\frac{\mathrm{d}\rho}{\left[\frac{2}{m}E-\omega^2\rho^2-\frac{L^2}{m^2\rho^2}\right]^{1/2}} \quad . \tag{7.7}$$

Integrál spočteme a dostáváme

$$\rho^2=\frac{E}{m\,\omega^2}\left\{1+\left[1-\left(\frac{L\,\omega}{E}\right)^2\right]^{1/2}\cos(2\,\omega\,t)\right\} \quad . \tag{7.8}$$

Pro $L=L_{\max}=E/\omega$ dostáváme pohyb po kružnici poloměru $\rho=\left(E/m\,\omega^2\right)^{1/2}$. Integrál pro úhlovou souřadnici dostaneme dosazením (7.8) do $m\,\rho^2\,\dot{\varphi}=L$, takže

$$\varphi=\frac{L\,\omega^2}{E}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\left[1-\left(\frac{L\,\omega}{E}\right)^2\right]^{1/2}\cos(2\,\omega\,t)} \quad .$$

Integrál spočteme a dostáváme

$$\varphi=\omega\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{E}{L\,\omega}\left[1-\left(\frac{L\,\omega}{E}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{tg}(\omega\,t)\right\} \quad . \tag{7.9}$$

Samozřejmě pro $L=L_{\max}=E/\omega$ dostáváme $\varphi=\omega t$

8. Pohyb v neinerciální souřadné soustavě

8.1 Transformace z inerciální do neinerciální soustavy

Inerciální soustavu označíme K_0. V této soustavě bude Lagrangeova funkce jedné částice ve vnějším poli

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}_0^2 - U \quad . \tag{8.1}$$

Soustava $K^/$ se bude pohybovat vůči K_0 rychlostí $\vec{V}(t)$ a soustava K bude kolem počátku souřadnic soustavy $K^/$ rotovat s úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}(t)$. Označíme-li průvodič společného počátku soustav $K^/$ a K jako $\vec{R}(t)$ a souřadnice bodu v soustavě K jako $x^\alpha(t)$, máme

$$\vec{r}_0(t) = \vec{R}(t) + x^\alpha(t)\vec{e}_\alpha(t) \quad , \tag{8.2}$$

kde $\{\vec{e}_\alpha(t)\}$ je rotující báze soustavy K. Je tedy

$$\vec{v}_0 = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t} + \dot{x}^\alpha\,\vec{e}_\alpha + x^\alpha\,\dot{\vec{e}}_\alpha = \vec{V} + \vec{v} + \Omega\times\vec{r} \quad . \tag{8.3}$$

Značení je zřejmé z definice neinerciální soustavy

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} \quad , \quad \dot{\vec{e}}_\alpha = \vec{\Omega}\times\vec{e}_\alpha \quad , \quad \vec{r} = x^\alpha\,\vec{e}_\alpha \quad , \quad \vec{v} = \dot{x}^\alpha\,\vec{e}_\alpha \quad , \quad x^\alpha\,\dot{\vec{e}}_\alpha = \vec{\Omega}\times\vec{r} \quad .$$

Dosazením z (8.3) do (8.1) dostáváme

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + m\vec{v}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 + m\vec{V}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{m}{2}\vec{V}^2 - U(\vec{r}) \quad . \tag{8.4}$$

Označili jsme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} + \vec{\Omega}\times\vec{r} \quad .$$

Odečtením totální derivace libovolné funkce F souřadnic a času od lagrangiánu dostáváme ekvivalentní lagrangián, který dává stejné Lagrangeovy rovnice. Zvolíme

$$F = \frac{m}{2}\int^t \vec{V}^2(t)\,\mathrm{d}t + m\vec{V}\cdot\vec{r}$$

a výsledná Lagrangeova funkce bude

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + m\vec{v}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 - m\vec{A}\cdot\vec{r} - U(\vec{r}) \quad . \tag{8.5}$$

Označili jsme zrychlení $K^/$ vůči K_0 jako $\vec{A} = \mathrm{d}\vec{V}/\mathrm{d}t$. Parciální derivace potřebné pro Lagrangeovy rovnice získáme nejlépe z diferenciálu Lagrangeovy funkce

$$\mathrm{d}L = m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} + m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{v} + m\vec{v}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\mathrm{d}\vec{r}\right) + m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{\Omega}\times\mathrm{d}\vec{r}\right) - m\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} - \vec{\nabla}U\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

a po úpravách[2] a soustředění výrazů u $\mathrm{d}\vec{v}$ a $\mathrm{d}\vec{r}$ tak máme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} &= m\vec{v} + m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) \quad , \\
\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} &= m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right) + m\left[\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}\right] - m\vec{A} - \vec{\nabla}U \quad .
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

Lagrangeova rovnice je tedy

$$
m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\vec{\nabla}U - m\vec{A} + m\left(\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right) + 2m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right) + m\left[\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}\right] \quad . \tag{8.7}
$$

Předposlední člen na pravé straně je Coriolisova síla, poslední člen síla odstředivá. Odstředivá síla leží v rovině natažené na $\vec{\Omega}$ a $\vec{r}$, přitom je kolmá na $\vec{\Omega}$ a míří směrem od osy rotace.

8.2 Rovnoměrně rotující souřadná soustava

V tomto případě bude Lagrangeova funkce

$$
L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + m\vec{v}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 - U\left(\vec{r}\right) \quad , \tag{8.8}
$$

což povede k Lagrangeově rovnici

$$
m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\vec{\nabla}U + 2m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right) + m\left[\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}\right] \quad . \tag{8.9}
$$

Zobecněná hybnost je

$$
\vec{p} = m\vec{v} + m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) \tag{8.10}
$$

a energie (počítána jako Hamiltonova funkce, ale vyjádřená pomocí souřadnic a rychlostí)

$$
E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 + U \quad . \tag{8.11}
$$

Rychlosti v inerciální soustavě a v rovnoměrně rotující soustavě jsou spojeny vztahem (8.3) s $\vec{V}=0$, je tedy možno psát (8.10) jako $\vec{p}=m\vec{v}_0=\vec{p}_0$. Jsou tedy hybnosti v soustavě K i K_0 stejné. Platí to i pro moment hybnosti

$$
\vec{M} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\left[\vec{v}+\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\right] = m\vec{r}\times\vec{v}_0 = r\times\vec{p}_0 = \vec{M}_0 \quad .
$$

Pro porovnání energií dosadím za $\vec{v}$ do (8.11) a máme

$$
E = \frac{m}{2}\left(\vec{v}_0 - \vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 - \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 + U = \frac{m}{2}\vec{v}_0^2 + U - m\vec{v}_0\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) \quad .
$$

Záměnou pořadí vektorů ve smíšeném součinu dostaneme konečně

---

[2] $\vec{v}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\mathrm{d}\vec{r}\right)=\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ a $\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{\Omega}\times\mathrm{d}\vec{r}\right)=\left[\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}\right]\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$E = E_0 - \vec{M}_0 \cdot \vec{\Omega} \quad . \tag{8.12}$$

Tento nenápadný vztah je základem pro zobrazování pomocí jaderné magnetické resonance.

8.3 Pohyby v gravitačním poli Země ovlivněné její rotací

Odchylka od vertikály při volném pádu. Potenciální energie je $U = -m\,\vec{g}\cdot\vec{r}$. Řešení budeme hledat poruchovou metodou. Abychom vyznačili opravy různého řádu malosti, nahradíme nejprve v Lagrangeově rovnici $\vec{\Omega} \to \lambda \vec{\Omega}$, takže máme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} + 2\lambda\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right) + \lambda^2\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega} \quad . \tag{8.13}$$

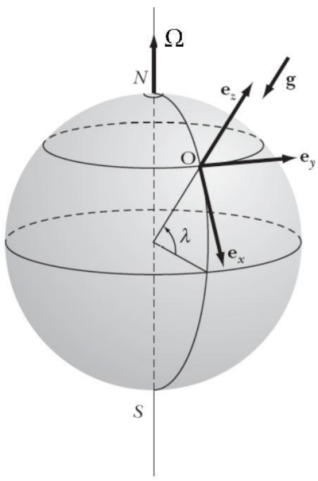
Řešení budeme hledat ve tvaru $\vec{r} = \vec{r}^{(0)} + \lambda\,\vec{r}^{(1)} + \lambda^2\,\vec{r}^{(2)} + \ldots$ a $\vec{v} = \vec{v}^{(0)} + \lambda\,\vec{v}^{(1)} + \lambda^2\,\vec{v}^{(2)} + \ldots$. Po dosazení a porovnání členů u stejných mocnin λ dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\vec{v}^{(0)}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}^{(1)}}{\mathrm{d}t} = 2\,\vec{v}^{(0)}\times\vec{\Omega} \quad , \\ &\frac{\mathrm{d}\vec{v}^{(n)}}{\mathrm{d}t} = 2\,\vec{v}^{(n-1)}\times\vec{\Omega} + \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}^{(n-2)}\right)\times\vec{\Omega} \quad , \quad n = 2,3,\ldots \end{aligned} \tag{8.14}$$

Není obtížné spočítat první členy, takže pro $\vec{r} \doteq \vec{r}^{(0)} + \vec{r}^{(1)}$ dostáváme

$$\vec{r} \doteq \vec{h} + \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \frac{1}{3}\vec{g}\times\vec{\Omega}\,t^3 + \vec{v}_0\times\vec{\Omega}\,t^2 \quad , \tag{8.15}$$

počáteční poloha a rychlost jsou $\vec{h}$ a $\vec{v}_0$. Zvolíme-li směr osy *z* po kolmici k zemskému povrchu vzhůru, směr osy *x* (na severní polokouli) po poledníku k rovníku a směr osy *y* po rovnoběžce na východ, máme $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$, $\vec{\Omega} = -\Omega\cos\lambda\,\vec{e}_x + \Omega\sin\lambda\,\vec{e}_z$ (λ je zeměpisná šířka).



Dostáváme tak v tomto přiblížení pro nulovou počáteční rychlost odchylku od vertikály východním směrem

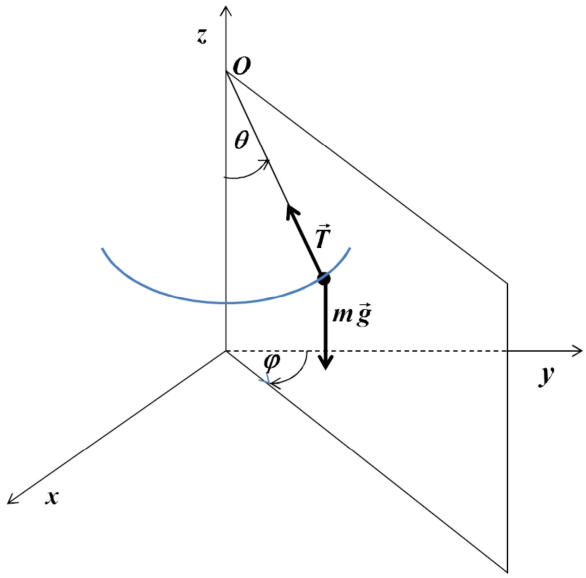
$$x \doteq 0 \quad , \quad y \doteq \frac{t^3}{3} g\,\Omega\cos\lambda \doteq \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\,\Omega\cos\lambda \quad . \tag{8.16}$$

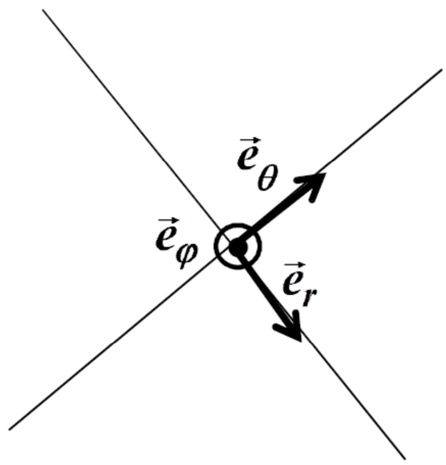
Foucaultovo kyvadlo. Uspořádání je na obrázku. Zvolíme sférickou souřadnou soustavu s počátkem v bodě závěsu *O*. Oproti standardní volbě je azimutální úhel odpočítáván od záporného směru osy *z* a polární úhel od osy *y* k ose *x*. Soustava s jednotkovými vektory $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$ tak zůstává pravotočivá. Podstatné vektory pro popis jsou

$$\vec{r} = l\,\vec{e}_r \quad , \quad \vec{T} = -T\,\vec{e}_r \quad , \quad \vec{g} = -g\,\vec{e}_z = g\cos\theta\,\vec{e}_r - g\sin\theta\,\vec{e}_\theta \tag{8.17}$$

a

$$\begin{aligned} &\vec{\Omega} = \Omega\left[-\cos\lambda\,\vec{e}_x + \sin\lambda\,\vec{e}_z\right] = \\ &-\Omega\left[\left(\cos\lambda\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\sin\lambda\right)\vec{e}_r + \left(\cos\lambda\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\sin\lambda\right)\vec{e}_r - \cos\varphi\cos\lambda\,\vec{e}_\varphi\right] \quad . \end{aligned} \tag{8.18}$$





Pro úplnost uvádíme převodní vztah od standardní kartézské soustavy k naší sférické

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_y - \cos\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_y + \sin\theta\,e_z \\ \vec{e}_\varphi &= \cos\varphi\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\vec{e}_y \end{aligned} \tag{8.19}$$

a výrazy pro časovou derivaci vektorů sférické báze

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \,, \; \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi \,, \; \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta \quad . \tag{8.20}$$

Rychlost a zrychlení jsou pak

$$\begin{aligned} &\dot{\vec{r}} = l\left[\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right] \quad , \\ &\ddot{\vec{r}} = l\left[-\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta + \left(2\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos\theta + \ddot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi\right] \quad . \end{aligned} \tag{8.21}$$

Pohybové rovnice jsou

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 - 2\Omega\,\dot{\varphi}\sin\theta\left(\cos\lambda\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\sin\lambda\right) \quad ,$$
$$\dot{\theta}\cos\theta\left(\dot{\varphi} - \Omega\sin\lambda\right) = \Omega\sin\theta\sin\varphi\cos\lambda\,\dot{\theta} - \frac{1}{2}\sin\theta\,\ddot{\varphi} \quad . \tag{8.22}$$

Předpokládáme, že $\theta \ll 1$ a $\dot{\varphi} \ll \dot{\theta}$ (tedy jedná se o kmity s malou amplitudou a perioda stáčení roviny kmitů je velká ve srovnání s periodou kyvadla). Potom se rovnice (8.22) v prvním přiblížení zjednoduší na

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad , \quad \dot{\varphi} = \Omega\sin\lambda \quad . \tag{8.23}$$

Na rovníku ke stáčení roviny kmitů nedochází, na pólu je periodou jeden den.

9. Hamiltonova formulace mechaniky

9.1 Hamiltonovy rovnice

Úplný diferenciál Lagrangeovy funkce (tedy funkce souřadnic a rychlostí) je

$$\mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\mathrm{d}q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\mathrm{d}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t = \dot{p}_\alpha\,\mathrm{d}q^\alpha + p_\alpha\,\mathrm{d}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \quad , \tag{9.1}$$

kde jsme dosadili p_α z definice zobecněné hybnosti a $\dot{p}_\alpha$ z Lagrangeových rovnic. Dále napíšeme

$$p_\alpha\,\mathrm{d}\dot{q}^\alpha = \mathrm{d}\left(p_\alpha\,\dot{q}^\alpha\right) - \dot{q}^\alpha\,\mathrm{d}p_\alpha$$

a po dosazení do (9.1) a vhodném uspořádání dostáváme

$$\mathrm{d}\left(p_\alpha\,\dot{q}^\alpha - L\right) = -\dot{p}_\alpha\,\mathrm{d}q^\alpha + \dot{q}^\alpha\,\mathrm{d}p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \quad . \tag{9.2}$$

Výraz v závorce na levé straně je Hamiltonova funkce (podle diferenciálů na pravé straně chápána jako funkce souřadnic a hybností)

$$H\left(q, p, t\right) = p_\alpha\,\dot{q}^\alpha - L\left(q, \dot{q}, t\right) \quad . \tag{9.3}$$

Diferenciál této je

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\mathrm{d}q^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\mathrm{d}p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t \quad . \tag{9.4}$$

Porovnáním (9.2) a (9.4) dostáváme jednak

$$\left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_{q,p} = -\left.\frac{\partial L}{\partial t}\right|_{q,\dot{q}} \tag{9.5}$$

a především Hamiltonovy rovnice

$$\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \quad . \tag{9.6}$$

Pokud Lagrangeova funkce závisí na nějakém parametru λ, který například charakterizuje vnější pole, přidáme na pravé straně příslušný diferenciál. Obdobně jako v případě času v (9.5) je potom

$$\left.\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right|_{q,p}=-\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{q,\dot{q}} \quad . \tag{9.7}$$

Lagrangeovy a Hamiltonovy funkce částice v potenciálovém poli mají ve třech nejčastěji užívaných souřadných soustavách tvar

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-U\left(x,y,z\right) \qquad H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+U\left(x,y,z\right)$$

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)-U\left(\rho,\varphi,z\right) \qquad H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}+p_z^2\right)+U\left(\rho,\varphi,z\right)$$

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)-U\left(r,\theta,\varphi\right) \quad H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U\left(r,\theta,\varphi\right)$$

9.2 Poissonovy závorky

Počítejme úplnou časovou derivaci nějaké funkce $f\left(t,q,p\right)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha+\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha \quad . \tag{9.8}$$

Dosadíme-li do (9.8) z Hamiltonových rovnic (9.6), dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \quad . \tag{9.9}$$

Jako Poissonovu závorku dvou funkcí *f* a *g* definujeme výraz

$$\left\{f\ g\right\}=\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q^\alpha}-\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \quad . \tag{9.10}$$

Můžeme tedy (9.9) pomocí Poissonovy závorky zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\left\{H\ f\right\} \quad . \tag{9.11}$$

Snadno ověříme platnost řady vztahů (c je konstanta)

$$\begin{gathered}\left\{f\ g\right\}=-\left\{g\ f\right\} \quad , \quad \left\{f\ c\right\}=0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}\left\{f\ g\right\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\ g\right\}+\left\{f\ \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \quad , \\ \left\{f_1+f_2\ g\right\}=\left\{f_1\ g\right\}+\left\{f_2\ g\right\} \quad , \quad \left\{\left(f_1\ f_2\right)g\right\}=f_1\left\{f_2\ g\right\}+f_2\left\{f_1\ g\right\}\end{gathered} \tag{9.12}$$

a

$$\left\{ f\, q^{\alpha} \right\} = \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \quad , \quad \left\{ f\, p_{\alpha} \right\} = -\frac{\partial f}{\partial q^{\alpha}} \quad , \tag{9.13}$$

zejména

$$\left\{ q^{\alpha}\, q^{\beta} \right\} = 0 \quad , \quad \left\{ p_{\alpha}\, p_{\beta} \right\} = 0 \quad , \quad \left\{ p_{\alpha}\, q^{\beta} \right\} = \delta_{\alpha}^{\beta} \quad . \tag{9.14}$$

Relace (9.14) velmi připomínají kvantově mechanické vztahy pro komutátory operátorů souřadnic a hybností, není to náhodná shoda. Relativně nejpracnější na počítání je ověření Jacobiho identity

$$\left\{ f \left\{ g\, h \right\} \right\} + \left\{ g \left\{ h\, f \right\} \right\} + \left\{ h \left\{ f\, g \right\} \right\} = 0 \quad . \tag{9.15}$$

Této velmi důležité vlastnosti Poissonových závorek využijeme při důkazu následujícího tvrzení: Jsou-li f a g integrály pohybu, je integrálem pohybu i jejich Poissonova závorka $\left\{ f\, g \right\}$. Počítejme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{ f\, g \right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ f\, g \right\} + \left\{ H \left\{ f\, g \right\} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}\, g \right\} + \left\{ f\, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \left\{ f \left\{ g\, H \right\} \right\} - \left\{ g \left\{ H\, f \right\} \right\} =$$
$$\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \left\{ H\, f \right\} \right) g \right\} + \left\{ f \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \left\{ H\, g \right\} \right) \right\} = \left\{ \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}t}\, g \right\} + \left\{ f\, \frac{\mathrm{d} g}{\mathrm{d}t} \right\}$$

a skutečně tedy

$$\left(\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}t} = 0 \right) \wedge \left(\frac{\mathrm{d} g}{\mathrm{d}t} = 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{ f\, g \right\} = 0 \quad . \tag{9.16}$$

9.3 Hamiltonova – Jacobiho rovnice

Lagrangeovy rovnice jsme odvozovali tak, že jsme hledali trajektorii mezi dvěma pevnými body, pro kterou nabývá účinek

$$S = \int_{t_0}^{t} L\, \mathrm{d}t \tag{9.17}$$

minimální hodnoty. Variace účinku je

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \delta q^{\alpha} \Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right) \delta q^{\alpha}\, \mathrm{d}t \quad . \tag{9.18}$$

Podívejme se teď na vztah (9.18) jinak. Předpokládejme, že vycházíme z pevného bodu (tj. $\delta q^{\alpha}\left(t_0\right) = 0$ a že se pohyb děje po skutečné trajektorii (tj. jsou splněny Lagrangeovy rovnice), přitom končí v různých bodech q^{α}. Účinek se pro koncové body lišící se o $\delta q^{\alpha}\left(t\right)$ bude lišit o hodnotu

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \delta q^{\alpha} = p_{\alpha}\, \delta q^{\alpha} \quad . \tag{9.19}$$

Proto tedy, chápeme-li úļinek jako funkci souŚadnic koncového bodu, mŢġeme psát

$$\frac{\partial S}{\partial q^{\alpha}} = p_{\alpha} \quad . \tag{9.20}$$

Z definice úļinku (9.17) máme pŚímo

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = L \quad . \tag{9.21}$$

Úplnou ļasovou derivaci mŢġeme vġak také zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial t} + p_{\alpha}\, \dot{q}^{\alpha} \quad . \tag{9.22}$$

Porovnáním (9.21) a (9.22) dostáváme

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = p_{\alpha}\, \dot{q}^{\alpha} - L \tag{9.23}$$

nebo se zavedením Hamiltonovy funkce

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(t, q^{\alpha}, p_{\alpha}\right) \quad . \tag{9.24}$$

Do tohoto vztahu mŢġeme dosadit za p_{α} ze (9.20) a dostáváme tak nelineární parciální diferenciální rovnici ï (Hamiltonovu ï Jacobiho)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q^{\alpha}, \frac{\partial S}{\partial q^{\alpha}}\right) = 0 \quad . \tag{9.25}$$

Elementárním pŚíkladem je rovnice pro volnou ļástici zapsaná v kartézských souŚadnicích

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{2} + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^{2}\right] = 0 \quad ,$$

jejímġ Śeġením je napŚíklad $S = p_x\, x + p_y\, y + p_z\, z - \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) t \big/ \left(2m\right)$ nebo $S = p\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - p^2\, t \big/ \left(2m\right)$.

9.4 MaupertuisŢv princip

Napíġeme diferenciál funkce $S = S\left(q, t\right)$ a dosadíme z (9.20) a (9.24), takġe

$$\mathrm{d}S = \frac{\partial S}{\partial q^{\alpha}} \mathrm{d}q^{\alpha} + \frac{\partial S}{\partial t} \mathrm{d}t = p_{\alpha}\, \mathrm{d}q^{\alpha} - H\, \mathrm{d}t \tag{9.26}$$

a po integraci

$$S = \int \left(p_\alpha \, \mathrm{d}q^\alpha - H \, \mathrm{d}t \right) \quad . \tag{9.27}$$

V případě, že se energie zachovává ($H = E = \text{konst.}$)

$$S = S_0\left(q\right) - E\,t \quad , \quad S_0\left(q\right) = \int p_\alpha \, \mathrm{d}q^\alpha \quad . \tag{9.28}$$

Uvažujme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\left(q\right) \dot{q}^\alpha \, \dot{q}^\beta - U\left(q\right) \quad , \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \quad ,$$

potom budou hybnosti

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = a_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}$$

a zachovávající se energie

$$E = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\left(q\right) \frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} + U\left(q\right) \quad .$$

Odsud

$$\mathrm{d}t = \left[\frac{a_{\alpha\beta} \, \mathrm{d}q^\alpha \, \mathrm{d}q^\beta}{2\left(E - U\right)} \right]^{1/2} \tag{9.29}$$

Dále

$$p_\alpha \, \mathrm{d}q^\alpha = a_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}q^\alpha = a_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = 2\left(E - U\right) \mathrm{d}t \quad . \tag{9.30}$$

Nakonec tedy dosazením (9.30) a (9.29) do výrazu pro $S_0\left(q\right)$ dostáváme vyjádření „zkráceného“ (myšleno oddělením členu $E\,t$) účinku

$$S_0 = \int \left[2\left(E - U\right) a_{\alpha\beta} \, \mathrm{d}q^\alpha \, \mathrm{d}q^\beta \right]^{1/2} \quad . \tag{9.31}$$

Pro jednu částici je kinetická energie

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \right)^2 \quad ,$$

kde $\mathrm{d}l$ je element délky trajektorie. Obecný výraz (9.31) se zjednoduší na

$$S_0 = \int \left[2\,m\left(E - U\right) \right]^{1/2} \mathrm{d}l \quad . \tag{9.32}$$

Kdybychom chtěli podobnost s Fermatovým principem zesílit, podělíme obě strany konstantním členem $\sqrt{2\,m\,E}$ a můžeme psát

$$\delta \frac{S_0}{\sqrt{2\,m\,E}} = \delta \int n \, \mathrm{d}l = 0 \quad , \tag{9.33}$$

kde Ăindex lomuñ je definován jako

$$n=\left[1-\frac{U}{E}\right]^{1/2} \quad . \tag{9.34}$$

V optice nabitých ļástic má tento výraz (alespoŘ pro elektrostatická pole) pŚesnĐ význam indexu lomu prostŚedí. Z Maupertuisova variaļního principu (9.33) dostaneme rovnici trajektorie. PŚi variaci

$$\delta\int\sqrt{E-U}\,\mathrm{d}l=\int\left\{-\frac{\partial U}{\partial\vec r}\cdot\delta\vec r\,\frac{1}{2\sqrt{E-U}}+\sqrt{E-U}\,\frac{\mathrm{d}\vec r}{\mathrm{d}l}\cdot\mathrm{d}\delta\vec r\right\}=$$

$$\sqrt{E-U}\,\frac{\mathrm{d}\vec r}{\mathrm{d}l}\cdot\delta\vec r\,\Big|-\int\left\{\frac{\partial U}{\partial\vec r}\cdot\delta\vec r\,\frac{1}{2\sqrt{E-U}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\sqrt{E-U}\,\frac{\mathrm{d}\vec r}{\mathrm{d}l}\right)\cdot\delta\vec r\right\}=0$$

jsme pouģili uģiteļného obratu

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}\vec r\cdot\mathrm{d}\vec r \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}l\,\delta\mathrm{d}l=\mathrm{d}\vec r\cdot\delta\mathrm{d}\vec r \quad .$$

Rovnice trajektorie tedy je

$$2\sqrt{E-U}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\sqrt{E-U}\,\frac{\mathrm{d}\vec r}{\mathrm{d}l}\right)=-\frac{\partial U}{\partial\vec r} \quad .$$

Oznaļíme sílu $\vec F=-\partial U/\partial\vec r$ a jednotkový teļný vektor ke trajektorii $\vec\tau=\mathrm{d}\vec r/\mathrm{d}l$. Provedeme naznaļenou derivaci a dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec r}{\mathrm{d}l^2}=\frac{\vec F-\left(\vec F\cdot\vec\tau\right)\vec\tau}{2\left(E-U\right)} \quad . \tag{9.35}$$

Výraz v ļitateli na pravé stranĐ rovnice (9.35) je normálová sloģka síly $\vec F_n=\vec F-\left(\vec F\cdot\vec\tau\right)\vec\tau$. Musí tedy i vektor na levé stranĐ mít tuto orientaci. SkuteļnĐ také

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec r}{\mathrm{d}l^2}=\frac{\mathrm{d}\vec\tau}{\mathrm{d}l}=\frac{\vec n}{R} \quad , \tag{9.36}$$

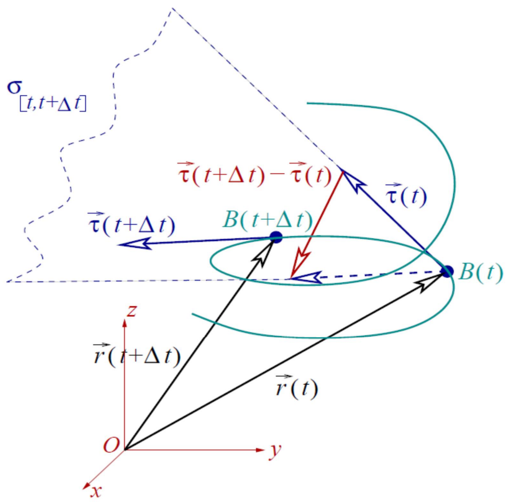
kde R je polomĐr kŚivosti trajektorie a $\vec n$ je jednotkový vektor hlavní normály. Zapíģeme-li jeģtĐ dvojnásobek kinetické energie jako $T=2\left(E-U\right)=mv^2$, dostáváme známy vztah Newtonovy mechaniky

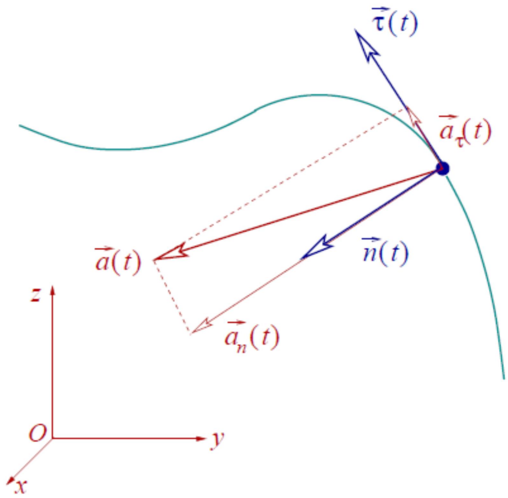
$$\vec n\,\frac{mv^2}{R}=\vec F_n \quad . \tag{9.37}$$

Oznaļme podle obrázku $\sigma_{[t,t+\Delta t]}$ rovinu urļenou koncovým bodem $B\left(t\right)$ polohového vektoru $\vec r\left(t\right)$ a jednotkovými vektory $\vec\tau\left(t\right)$ a $\vec\tau\left(t+\Delta t\right)$. Tato rovina se pŚimyká ke kŚivce C v okolí bodu $B\left(t\right)$ tím lépe, ļím je Δt menģí. Limitním pŚípadem rovin $\sigma_{[t,t+\Delta t]}$ pro $\Delta t\to 0$ je tzv.

oskulaļní rovina $\sigma(t)$. Vzhledem k tomu, ģe pŚi $\Delta t \to 0$ vektory $\vec{\tau}(t)$ a $\vec{\tau}(t+\Delta t)$ splynou, je tŚeba najít jiný vhodný vektor, který spolu s bodem $B(t)$ a vektorem $\vec{\tau}(t)$ urļuje rovinu $\sigma(t)$. Tuto vlastnost má vektor $\dot{\vec{\tau}}(t)$. Jednotkový vektor je pak $\vec{n} = \dot{\vec{\tau}} / |\dot{\vec{\tau}}|$. Zopakujme jeġtĮ vztahy pro jednotkové vektory ï teļný, normály a binormály

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = v\,\vec{\tau} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R}\vec{n} \quad , \quad \vec{\nu} = \vec{\tau} \times \vec{n} \quad . \tag{9.38}$$





10.Pohyb tuhého tĮlesa

10.1 Tuhé tĮleso

Tuhé tĮleso definujeme jako soustavu hmotných ļástic, jejichģ vzdálenosti se nemĮní. Vztahy budeme poļítat pro diskrétní soustavy, ale pŚechod ke spojitému rozloģení je snadný

$$\sum_a m_a \{\ldots\} \quad \to \quad \int \rho \{\ldots\} \mathrm{d}V \quad . \tag{10.1}$$

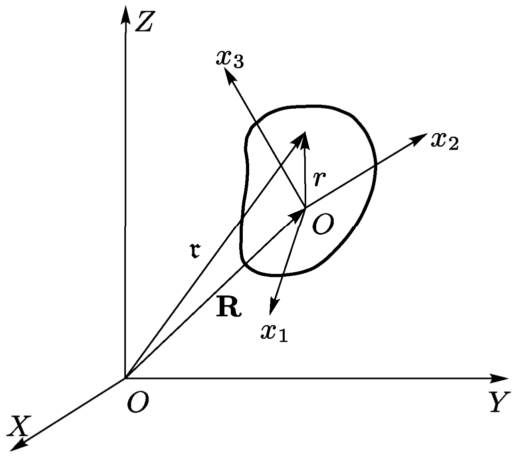
VĮtģinou mŢģeme uvaģovat o soustavĮ sloģené z identických ļástic, potom v sumaci nepíġeme index ļástice. Základní popis se dĮje v kartézské inerciální (laboratorní) souŚadné soustavĮ XYZ pomocí kartézské souŚadné soustavy $x_1\, x_2\, x_3$ pevnĮ spojené s tĮlesem ï její poļátek O umístíme do hmotného stŚedu tĮlesa.[3] SouŚadnice bodu O jsou v inerciální

---

[3] Z praktického hlediska budeme v této kapitole uģívat znaļení $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ a pozmĮníme sļítací pravidlo ï seļítá se vģdy, kdyģ ļlen obsahuje veliļiny se stejnými indexy (nemusí být tedy jeden Ănahoŗeñ a druhý Ădoleñ. Máme tak pro skalární souļin vektorŢ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i\, b_i$ a pro sloģky vektorového souļinu $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ikl}\, a_k\, b_l$. Také se seļítá, je-li veliļina ve druhé mocninĮ, protoģe $x_i^2 = x_i\, x_i$.

soustavě zadány průvodičem $\vec{R}$, orientace soustavy $x_1 x_2 x_3$ vůči inerciální soustavě pomocí tří úhlů. Představuje tedy tuhé těleso mechanickou soustavu se šesti stupni volnosti. Souřadnice obecného bodu tělesa P v inerciální soustavě jsou zadány průvodičem $\vec{\mathfrak{r}}$, v soustavě spojené s tělesem průvodičem $\vec{r}$. Malé posunutí bodu P o $\mathrm{d}\vec{\mathfrak{r}}$ je složeno z posunutí celého tělesa společně s počátkem O, tj. $\mathrm{d}\vec{R}$ a rotace tělesa kolem počátku o malý úhel $\overrightarrow{\delta\varphi}$, tj. $\overrightarrow{\delta\varphi}\times\vec{r}$

$$\mathrm{d}\vec{\mathfrak{r}} = \mathrm{d}\vec{R} + \overrightarrow{\delta\varphi}\times\vec{r} \quad .$$



Zavedením příslušných rychlostí

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathfrak{r}}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \vec{V} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega} \tag{10.2}$$

dostáváme z předchozího vztahu

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{r} \quad . \tag{10.3}$$

Vektor $\vec{V}$ udává rychlost translačního pohybu tělesa jako celku, $\vec{\Omega}$ je úhlová rychlost rotace tuhého tělesa. Pokud umístíme počátek souřadné soustavy spojené s tělesem místo do hmotného středu do jiného bodu O' ($\overrightarrow{OO'} = \vec{a}$), zůstane pochopitelně $\vec{\mathfrak{r}}$ stejné a bude $\vec{R}' = \vec{R} + \vec{a}$ a $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$. Dosazení do (10.3) dává $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{a} + \vec{\Omega}\times\vec{r}'$, což ale máme zapsat v nové soustavě také jako složení translačního a rotačního pohybu, tedy $\vec{v} = \vec{V}' + \vec{\Omega}'\times\vec{r}'$. Porovnáním obou výrazů dostaneme transformační vztah

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a} \quad , \quad \vec{V}' = \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{a} \quad , \quad \vec{\Omega}' = \vec{\Omega} \quad . \tag{10.4}$$

Tento vztah popisuje dvě důležité skutečnosti: Především $\vec{\Omega}$ je stejné pro všechny soustavy s rovnoběžnými souřadnými osami, můžeme proto dobře mluvit o úhlové rychlosti tělesa jako takové. Dále je vidět, že pokud v některém okamžiku $\vec{V}\cdot\vec{\Omega}=0$, platí to i pro libovolně zvolený bod O'.[4]

10.2 Tensor setrvačnosti

Dosadíme-li ve výrazu pro kinetickou energii ($\vec{v}$ je rychlost v inerciální soustavě)

$$T=\sum\frac{m v^2}{2}$$

ze vztahu (10.3), dostáváme

$$T=\sum\frac{m}{2}\left(\vec{V}+\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2=\sum\frac{m}{2}V^2+\sum m\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)+\sum\frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 \quad .$$

V prvním členu je V pro všechny částice stejné, takže s označením celkové hmotnosti pomocí M bude tento člen

$$\sum\frac{m}{2}V^2=\frac{M V^2}{2} \quad .$$

Úpravou druhého členu dostáváme

$$\sum m\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)=\sum m\vec{r}\cdot\left(\vec{V}\times\vec{\Omega}\right)=\left(\vec{V}\times\vec{\Omega}\right)\cdot\vec{R}_{\mathrm{cm}} \quad , \quad \vec{R}_{\mathrm{cm}}=\sum m\vec{r} \quad .$$

Umístíme-li počátek souřadné soustavy do středu hmotnosti, je výše uvedený člen nulový. Ve třetím členu rozepíšeme druhou mocninu

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)=\vec{r}\cdot\left[\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}\right]=\vec{r}\cdot\left[\vec{r}\,\Omega^2-\vec{\Omega}\left(\vec{r}\cdot\vec{\Omega}\right)\right]=\Omega^2 r^2-\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{r}\right)^2 \quad .$$

Kinetická energie tuhého tělesa bude tedy

$$T=\frac{M V^2}{2}+\frac{1}{2}\sum m\left[\Omega^2 r^2-\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{r}\right)^2\right] \quad . \tag{10.5}$$

Při zápisu v kartézských složkách dostaneme pro rotační část energie postupně

$$\frac{1}{2}\sum m\left[\Omega^2 r^2-\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{r}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\sum m\left[\Omega_i\,\Omega_i\,x_l^2-\Omega_i\,x_i\,\Omega_k\,x_k\right]=$$
$$\frac{1}{2}\sum m\left[\Omega_i\,\Omega_k\,\delta_{ik}\,x_l^2-\Omega_i\,\Omega_k\,x_i\,x_k\right]=\frac{1}{2}\Omega_i\,\Omega_k\sum m\left[x_l^2\,\delta_{ik}-x_i\,x_k\right] \quad .$$

Definujeme tensor momentů setrvačnosti (krátce tensor setrvačnosti)

$$I_{ik}=\sum m\left(x_l^2\,\delta_{ik}-x_i\,x_k\right) \quad . \tag{10.6}$$

Tensor setrvačnosti je z definice symetrický tensor druhého řádu

[4] V případě, že $\vec{V}\cdot\vec{\Omega}\neq 0$, můžeme řešením rovnice $\vec{\Omega}\times\left(\vec{V}+\vec{\Omega}\times\vec{a}\right)=0$ (neznámou je vektor $\vec{a}$) najít takové polohy bodu O', že $\vec{V}'\,||\,\vec{\Omega}$, tj. translační pohyb se děje podél osy otáčení.

$$I_{ik} = I_{ki} \tag{10.7}$$

a jako takový může být vhodnou volbou orientace souřadných os převeden k diagonálnímu tvaru

$$I_{ik}\,\Omega_i\,\Omega_k = \begin{pmatrix}\Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3\end{pmatrix} = I_1\,\Omega_1^2 + I_2\,\Omega_2^2 + I_3\,\Omega_3^2 \quad . \tag{10.8}$$

Hlavní momenty setrvačnosti mají tu vlastnost, že součet libovolných dvou z nich je větší nebo nejméně roven zbývajícímu – například

$$I_1 + I_2 = \sum m\left(y^2 + z^2 + z^2 + x^2\right) \geq \sum m\left(x^2 + y^2\right) = I_3 \quad .$$

Pokud počátek souřadné soustavy spojené s tělesem neleží ve hmotném středu, je tensor setrvačnosti po dosazení $\vec{r}^{\,/} = \vec{r} - \vec{a}$

$$I_{ik}^{/} = \sum m\left(x_l^{/2}\,\delta_{ik} - x_i^{/}\,x_k^{/}\right) = \sum m\left(x_l^2\,\delta_{ik} - x_i\,x_k\right) + \sum m\left(a_l^2\,\delta_{ik} - a_i\,a_k\right) - \\ 2\,\delta_{ik}\,a_l \sum m\,x_l + a_i \sum m\,x_k + a_k \sum m\,x_i \quad ,$$

a protože $\sum m\,\vec{r} = 0$, dostáváme

$$I_{ik}^{/} = I_{ik} + \sum m\left(a_l^2\,\delta_{ik} - a_i\,a_k\right) \quad . \tag{10.9}$$

Při $I_1 = I_2 \neq I_3$ mluvíme o symetrickém setrvačníku, jsou-li si všechny hlavní momenty rovny, jde o sférický setrvačník.

Závěrem napíšeme Lagrangeovu funkci tuhého tělesa jako

$$L = \frac{M\,V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\,\Omega_i\,\Omega_k - U \quad . \tag{10.10}$$

Potenciální energie je funkcí tří složek vektoru $\vec{R}$ a tří úhlů, které charakterizují orientaci soustavy $x_1\,x_2\,x_3$ vůči soustavě XYZ.

10.3 Moment hybnosti tuhého tělesa

Moment hybnosti počítáme v soustavě, kde počátek je spojen s hmotným středem tuhého tělesa. Je tedy

$$\vec{M} = \sum m\,\vec{r} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) = \sum m\left[r^2\,\vec{\Omega} - \left(\vec{r}\cdot\vec{\Omega}\right)\vec{r}\right]$$

nebo ve složkách

$$M_i = = \sum m\left[x_l^2\,\Omega_i - x_k\,\Omega_k\,x_i\right] = \sum m\left[x_l^2\,\delta_{ik}\,\Omega_k - x_k\,\Omega_k\,x_i\right] = \Omega_k \sum m\left[x_l^2\,\delta_{ik} - x_i\,x_k\right] \quad .$$

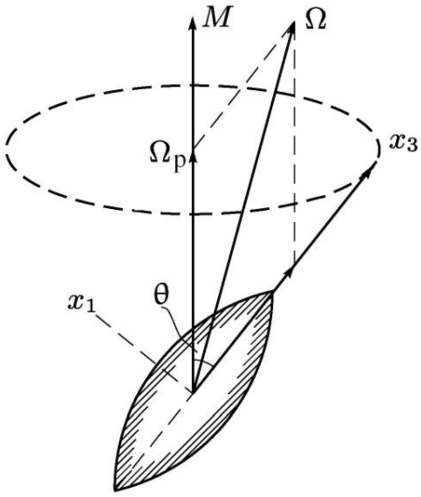
Srovnáním posledního výrazu s definicí tensoru setrvačnosti (10.6) vidíme, že

$$M_i = I_{ik}\,\Omega_k \quad . \tag{10.11}$$

Pokud budou osy $x_1\, x_2\, x_3$ orientovány podél hlavních os setrvačnosti tělesa, je pak

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad . \tag{10.12}$$

Pokud na tuhé těleso nepůsobí vnější síly, moment setrvačnosti se zachovává. Všimněme si případu symetrického setrvačníku z obrázku. Osa x_3 je osou symetrie. Osu x_2 zvolíme tak, že



je kolmá k rovině vytvořené vektorem $\vec{M}$ a okamžitou polohou osy x_1. Potom je $M_2 = 0$ a podle (10.12) musí být $\Omega_2 = 0$. To ovšem znamená, že vektory $\vec{M}$, $\vec{\Omega}$ a $\vec{e}_3$ leží v jedné rovině, takže rychlosti bodů na ose x_3 $\vec{v} \sim \vec{\Omega} \times \vec{e}_3$ jsou kolmé k této rovině. Osa symetrického setrvačníku rotuje kolem směru $\vec{M}$ po plášti kuželu (regulární precese), zároveň setrvačník rotuje kolem osy symetrie. Úhlová rychlost této rotace je jednoduše

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta \quad . \tag{10.13}$$

Úhlovou rychlost precese získáme rozkladem $\vec{\Omega}$ do směrů $\vec{e}_3$ a $\vec{M}$. První projekce nevede k žádnému posunu osy x_3, takže rychlost precese je určena druhou projekcí. Z obrázku

$$\sin\theta = \frac{\Omega_1}{\Omega_p} = \frac{M_1}{I_1 \Omega_p} = \frac{M \sin\theta}{I_1 \Omega_p} \quad ,$$

odkud

$$\Omega_p = \frac{M}{I_1} \quad . \tag{10.14}$$

10.4 Pohybové rovnice tuhého tělesa

Již jsme zmiňovali, že tuhé těleso má šest stupňů volnosti. Obecný popis musí tedy být vyjádřen pomocí šesti nezávislých rovnic. Budou to rovnice určující časovou derivaci dvou vektorů – hybnosti a momentu hybnosti (v české literatuře často nazývané první a druhá impulzová věta). První rovnici dostaneme snadno sečtením pohybových rovnic jednotlivých částic $\dot{\vec{p}}=\vec{f}$, kde $\vec{p}$ je hybnost částice a $\vec{f}$ na ni působící síla. Zavedením celkové hybnosti $\vec{P}=\sum\vec{p}=\sum m\vec{v}=M\vec{V}$ a celkové síly $\vec{F}=\sum\vec{f}$ můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\vec{F} \quad . \tag{10.15}$$

Ve výrazu pro sílu můžeme sečítat pouze vnější síly, vzájemné silové působení částic tělesa se vyruší. Je-li U potenciální energie tělesa ve vnějším poli, můžeme sílu získat derivováním potenciální energie podle souřadnic hmotného středu. Při translačním pohybu se mění průvodiče $\vec{r}$ všech částic o stejnou hodnotu $\delta\vec{R}$, takže

$$\delta U=\sum\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}=\left(\sum\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\right)\cdot\delta\vec{R}=-\left(\sum\vec{f}\right)\cdot\delta\vec{R}=-\vec{F}\cdot\delta\vec{R} \quad .$$

Kinetickou energii translačního pohybu můžeme psát obvyklým způsobem jako $T=MV^2/2$, takže rovnice (10.15) jsou Lagrangeovy rovnice pro Lagrangeovu funkci souřadnic a rychlosti hmotného středu tuhého tělesa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\vec{V}}-\frac{\partial L}{\partial\vec{R}}=0 \quad . \tag{10.16}$$

Při odvození výrazu pro časovou derivaci momentu hybnosti budeme předpokládat, že soustavu XYZ jsme zvolili tak (vzhledem ke Galileiho principu relativity to neomezí obecnou platnost výsledku), aby v ní byl v daném okamžiku hmotný střed tuhého tělesa v klidu, tj. aby $\vec{V}=0$ a tedy $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}$. Máme pak

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\vec{r}\times\vec{p}=\sum\dot{\vec{r}}\times\vec{p}+\sum\vec{r}\times\dot{\vec{p}}=\underbrace{\sum m\vec{v}\times\vec{v}}_{=0}+\sum\vec{r}\times\vec{f} \quad .$$

S označením momentu sil (opět stačí uvažovat vnější síly)

$$\vec{K}=\sum\vec{r}\times\vec{f} \tag{10.17}$$

dostáváme rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}=\vec{K} \quad . \tag{10.18}$$

Oba momenty závisí na volbě počátku souřadnic, vůči kterému jsou počítány. Ve vztazích (10.17) a (10.18) je tímto počátkem hmotný střed tělesa. Také rovnice (10.18) můžeme chápat jako Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\vec\Omega}-\frac{\partial L}{\partial\vec\varphi}=0 \quad . \tag{10.19}$$

Kinetickou energii jsme již pomocí úhlové rychlosti vyjádřili. Pro změnu potenciální energie při otočení tělesa o úhel $\overrightarrow{\delta\varphi}$ máme

$$\delta U=-\sum\vec f\cdot\delta\vec r=-\sum\vec f\cdot\left(\overrightarrow{\delta\varphi}\times\vec r\right)=\overrightarrow{\delta\varphi}\cdot\sum\vec r\times\vec f=-\vec K\cdot\overrightarrow{\delta\varphi} \quad ,$$

takže skutečně

$$\vec K=-\frac{\partial U}{\partial\vec\varphi}=\frac{\partial L}{\partial\vec\varphi} \quad .$$

Při posunutí počátku souřadné soustavy o vektor $\vec a$ budeme mít po dosazení $\vec r=\vec r'+\vec a$ do (10.17)

$$\vec K=\sum\vec r\times\vec f=\sum\vec r'\times\vec f+\sum\vec a\times\vec f \quad ,$$

takže

$$\vec K=\vec K'+\vec a\times\vec F \quad . \tag{10.20}$$

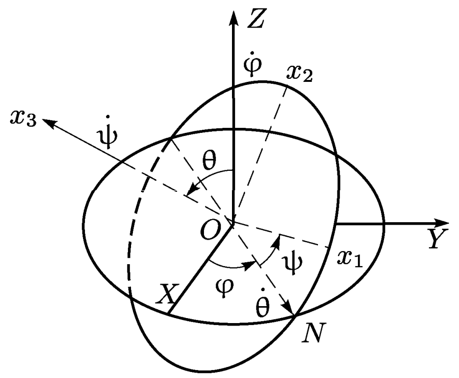
Ze vztahu (10.20) vyplývá například, že pokud je $\vec F=0$ („dvojice sil“), nezávisí moment síly na vztažném bodě. Dále je z tohoto vztahu vidět, že pokud jsou vektory $\vec K$ a $\vec F$ navzájem kolmé, je možné vždy najít takový vektor $\vec a$, že bude $\vec K'$ nulovým vektorem a $\vec K=\vec a\times\vec F$. Působení všech sil je tedy možno nahradit působením jediné síly. Najdeme-li nějaký určitý vektor $\vec a$, pak přirozeně můžeme působiště posouvat podél přímky dané směrem síly ($\left(\vec a+\alpha\vec F\right)\times\vec F=\vec a\times\vec F$. Typickým příkladem je tuhé těleso v homogenním poli.

10.5 Eulerovy úhly a Eulerovy rovnice

Při konkrétním výpočtu představuje problém to, že máme rotační část kinetické energie vyjádřenu pomocí úhlových rychlostí rotace kolem souřadných os soustavy spojené s tuhým tělesem ($x_1x_2x_3$), zatímco pohybové rovnice (10.19) jsou zapsány v pevné soustavě XYZ a také potenciální energie bude spíše vyjadřována v této pevné soustavě. Jednou z možností je vyjádřit úhlové rychlosti $\vec\Omega$ pomocí časových derivací úhlů, charakterizujících natočení $x_1x_2x_3$ vůči XYZ, tj. zavedení Eulerových úhlů. Druhou možností je pak zapsat pohybové rovnice v rotující souřadné soustavě – Eulerovy rovnice.

Nejprve zavedeme Eulerovy úhly. Podle obrázku ztotožníme počátky obou souřadných soustav. Rovina $x_1 x_2$ protíná rovinu XY v přímce ON, kterou budeme nazývat uzlovou přímkou. Tato přímka je zřejmě kolmá jak k ose Z, tak k ose x_3. Kladnou orientaci zvolíme ve směru vektorového součinu $\vec{e}_Z \times \vec{e}_3$. Pro popis natočení $x_1 x_2 x_3$ vůči XYZ zvolíme tři úhly: úhel θ od Z k x_3, úhel φ mezi X a N a úhel ψ mezi N a x_1, přitom kladná orientace φ a ψ je dána pravotočivostí rotace kole Z a x_3. Úhel θ se mění od nuly do π, zbývající dva úhly od nuly do 2π. Je zajímavé povšimnout si, že θ a $\varphi - \pi/2$ představují polární a azimutální úhel x_3 v soustavě XYZ, zatímco θ a $\pi/2 - \psi$ představují polární a azimutální úhel Z v soustavě $x_1 x_2 x_3$.

Nyní je možné vyjádřit průměty uhlových rychlostí $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ do os soustavy $x_1 x_2 x_3$.



Úhlová rychlost $\dot{\theta}$ míří podél uzlové přímky a její složky jsou tedy

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi \quad , \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi \quad , \quad \dot{\theta}_3 = 0 \quad .$$

Úhlová rychlost $\dot{\varphi}$ míří podél osy Z a má složky

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \quad , \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \quad , \quad \dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta \quad .$$

Konečně $\dot{\psi}$ míří podél osy x_3, takže $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$, $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$. Můžeme tak zapsat výsledné výrazy pro složky vektoru $\vec{\Omega}$

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \quad , \\
\Omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \quad , \\
\Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \quad .
\end{aligned} \tag{10.21}$$

Dosadíme-li do výrazu pro rotační část kinetické energie symetrického setrvačníku

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) + \frac{I_3}{2}\Omega_3^2 \quad ,$$

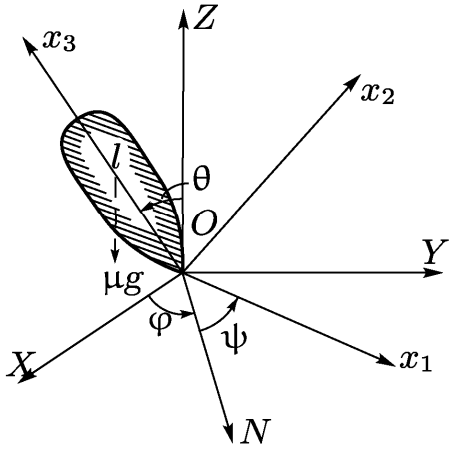
dostáváme

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 \quad . \tag{10.22}$$

Známou úlohou je rotační pohyb v homogenním gravitačním poli symetrického setrvačníku s pevným spodním bodem („vlček“), který učiníme společným počátkem obou souřadných soustav. Střed hmotnosti leží na ose setrvačníku ve vzdálenosti l od počátku, jak je znázorněno na obrázku. Lagrangeova funkce je

$$L = \frac{I_1 + M\,l^2}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - M\,g\,l\cos\theta \quad . \tag{10.23}$$

Souřadnice ψ a φ jsou cyklické, máme tak hned dvě zachovávající se veličiny



$$\begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right) = \text{konst.} = M_3 \quad , \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_1' \sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot{\varphi} + I_3\,\dot{\psi}\cos\theta = \text{konst.} = M_Z \quad . \end{aligned} \tag{10.24}$$

Označili jsme $I_1' = I_1 + M\,l^2$. Poněvadž Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, zachovává se také energie

$$E = \frac{I_1'}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 + M\,g\,l\cos\theta = \text{konst.} \quad . \tag{10.25}$$

Z rovnic (10.24) vypočteme $\dot{\psi}$ a $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{M_Z - M_3\cos\theta}{I_1' \sin^2\theta} \quad , \quad \dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos\theta\,\frac{M_Z - M_3\cos\theta}{I_1' \sin^2\theta} \quad . \tag{10.26}$$

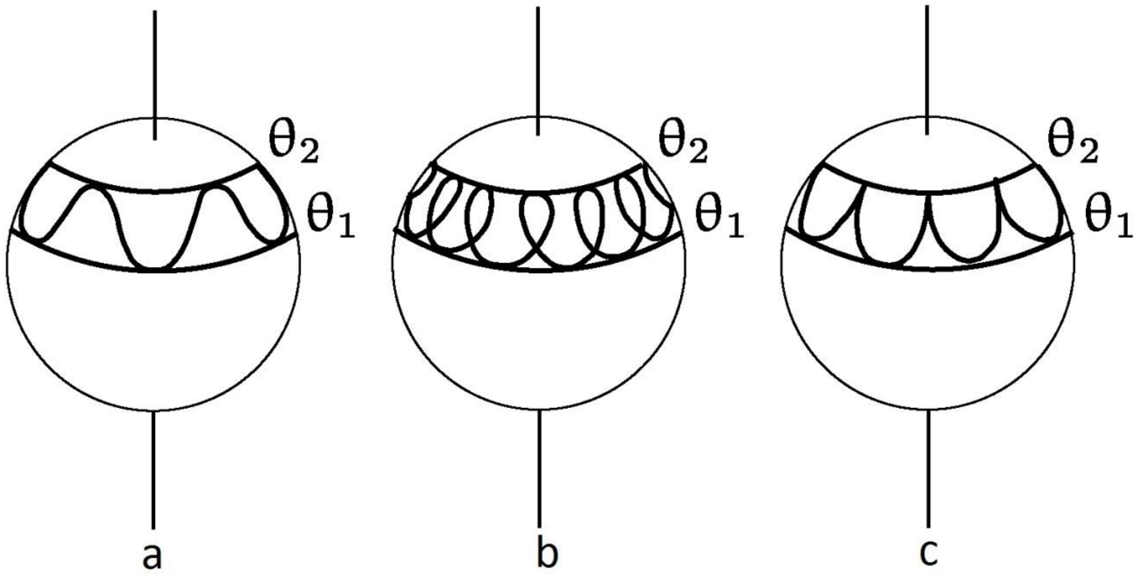
Tyto hodnoty pak dosadíme do (10.25). Dostáváme tak obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu pro úhel θ

$$E_{\text{eff}} = \frac{I_1'}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}\left(\theta\right) \quad , \tag{10.27}$$

kde

$$E_{\text{eff}} = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - M\,g\,l \quad , \quad U_{\text{eff}}\left(\theta\right) = \frac{\left(M_Z - M_3\cos\theta\right)^2}{2I_1^{/}\sin^2\theta} - M\,g\,l\left(1-\cos\theta\right) \quad . \qquad (10.28)$$

Možné jsou takové hodnoty úhlu θ, kdy $E_{\text{eff}} \geq U_{\text{eff}}\left(\theta\right)$. Protože však (s výjimkou zvláštního případu $M_Z = M_3$ funkce $U_{\text{eff}}\left(\theta\right)$ jde do nekonečna jak při $\theta \to 0$, tak při $\theta \to \pi$ a někde v intervalu $\left[0,\pi\right]$ nabývá minima, bude se pohyb odehrávat v omezeném intervalu úhlů $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Charakter trajektorie ještě závisí na tom, zda $\dot{\varphi}$ mění znaménko, což je podle (10.26) dáno výrazem $M_Z - M_3\cos\theta$. Je-li tento výraz kladný v celém dovoleném intervalu úhlů θ, vypadá trajektorie podobně obrázku a). Mění-li znaménko pro nějaké θ z dovoleného intervalu, má trajektorie podobu obrázku b). Nabývá-li výraz nulové hodnoty v krajním bodě intervalu, např. θ_2, vypadá trajektorie jako na obrázku c).



Nyní přejdeme k druhému způsobu popisu – k Eulerovým rovnicím. Označíme časovou změnu vektoru $\vec{S}$ vzhledem k pevné soustavě XYZ jako $\mathrm{d}\vec{S}/\mathrm{d}t$. Pokud se vektor v rotující souřadné soustavě $x_1x_2x_3$ nemění, je celá změna v soustavě XYZ způsobena pouze rotací, tj.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega}\times\vec{S} \quad .$$

Obecně musíme přidat na pravou stranu možnou změnu vektoru $\vec{S}$ vzhledem k rotující soustavě

$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\vec{S}}{\mathrm{d}t} + \vec{\Omega}\times\vec{S} \quad . \tag{10.29}$$

Pohybové rovnice (10.15) a (10.18) přepíšeme takto na

$$\frac{\mathrm{d}'\vec{P}}{\mathrm{d}t} + \vec{\Omega}\times\vec{P} = \vec{F} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}'\vec{M}}{\mathrm{d}t} + \vec{\Omega}\times\vec{M} = \vec{K} \quad . \tag{10.30}$$

Napíšeme-li rovnice ve složkách – průmětech do os soustavy $x_1 x_2 x_3$, je pro derivace vzhledem k této soustavě samozřejmě

$$\vec{e}_1 \frac{\mathrm{d}'\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\vec{e}_1\cdot\vec{S}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}$$

a podobně pro další dvě složky. Máme tak z (10.30) dvě soustavy rovnic (píšeme $\vec{P} = M\vec{V}$)

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2\right) &= F_1 \quad , \\ M\left(\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3\right) &= F_2 \quad , \\ M\left(\frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}t} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1\right) &= F_3 \end{aligned} \tag{10.31}$$

a

$$\begin{aligned} I_1\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t} + \left(I_3 - I_2\right)\Omega_2\,\Omega_3 &= K_1 \quad , \\ I_2\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t} + \left(I_1 - I_3\right)\Omega_3\,\Omega_1 &= K_2 \quad , \\ I_3\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t} + \left(I_2 - I_1\right)\Omega_1\,\Omega_2 &= K_3 \quad . \end{aligned} \tag{10.32}$$

Jako příklad uvažme volný pohyb ($\vec{K}=0$) symetrického ($I_2 = I_1$) setrvačníku. Ze třetí rovnice (10.32) máme $\Omega_3 = \mathrm{konst.}$ První dvě rovnice dávají

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2 \quad , \quad \dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1 \quad , \quad \omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\Omega_3 = \mathrm{konst.}$$

Tuto soustavu snadno vyřešíme

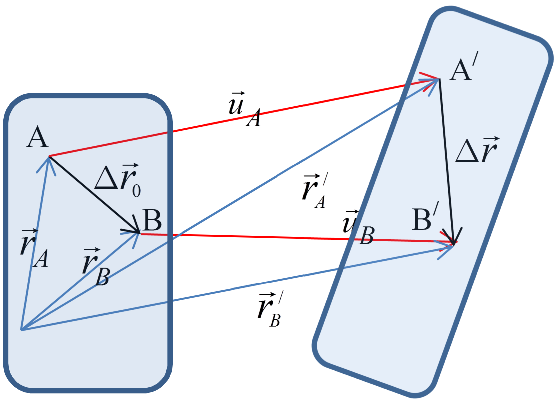
$$\Omega_1 = A\cos\left(\omega t + \alpha\right) \quad , \quad \Omega_2 = A\sin\left(\omega t + \alpha\right) \quad .$$

11. Mechanika pružných těles

11.1 Tensor deformace

Při definici tuhého tělesa se předpokládalo, že vzdálenosti mezi částicemi tvořícími těleso se nemění. Připustíme teď malé změny těchto vzdáleností způsobené vnějšími silami (deformace tělesa). Uvažujme dvě částice tělesa v blízkých polohách *A* a *B*, tj. vzdálené o $\Delta\vec{r}_0 = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. Po deformaci zaujmou částice dvě nové, ale stále blízké polohy $A^{/}$ a $B^{/}$, tj. $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B + \vec{u}_B - (\vec{r}_A + \vec{u}_A) = \Delta\vec{r}_0 + \Delta\vec{u}$. Posunutí jednotlivých bodů může být konečné, ale vzdálenosti jednotlivých bodu se mění jen málo, můžeme tedy v rozvoji $\Delta\vec{u}$ ponechat jen první člen

$$\Delta x_i = \Delta x_{0i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\Delta x_{0k} \quad .$$



Pro kvadrát délkového elementu pak máme

$$\Delta l^2 = \Delta x_i\,\Delta x_i = \Delta x_{0i}\,\Delta x_{0i} + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\Delta x_{0i}\,\Delta x_{0k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\Delta x_{0k}\,\Delta x_{0l} \quad .$$

Tento výraz můžeme zapsat jako

$$\Delta l^2 = \Delta l_0^2 + 2\,u_{ik}\,\Delta x_{0i}\,\Delta x_{0k} \quad , \qquad (11.1)$$

kde $u_{ik} = u_{ki}$ je symetrický tensor druhého řádu – tensor deformace

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \quad . \qquad (11.2)$$

Jako u každého symetrického tensoru můžeme zvolit takovou souřadnou soustavu, že je tensor diagonální

$$u_{ik} = \begin{pmatrix} u^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & u^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & u^{(3)} \end{pmatrix} \quad .$$

V takové soustavě pak

$$\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2=\left(1+2u^{(1)}\right)\Delta x_{01}^2+\left(1+2u^{(2)}\right)\Delta x_{02}^2+\left(1+2u^{(3)}\right)\Delta x_{03}^2 \quad .$$

Relativní prodloužení (zkrácení) v jednotlivých hlavních směrech je

$$\frac{\Delta x_i-\Delta x_{0i}}{\Delta x_{0i}}=\left(1-2u^{(i)}\right)^{1/2}-1\approx u^{(i)} \quad . \tag{11.3}$$

Přibližný vztah platí tehdy, jsou-li deformace malé – to znamená prakticky ve všech případech. (Vidíme také, proč ve výrazech (11.1) a (11.2) vystupuje dvojka.) Pro malé deformace je možné zanedbat kvadratický člen v (11.2), takže tensor malé deformace je

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \quad . \tag{11.4}$$

Pro změnu objemu při deformaci máme

$$V=\Delta x_1\,\Delta x_2\,\Delta x_3=\left(1+2u^{(1)}\right)^{1/2}\left(1+2u^{(2)}\right)^{1/2}\left(1+2u^{(3)}\right)^{1/2}\Delta x_{01}\,\Delta x_{02}\,\Delta x_{03}\approx$$
$$\left(1+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}\right)V_0 \quad .$$

Stopa (součet diagonálních elementů) je ale invariantem, takže platí

$$u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}=u_{11}+u_{22}+u_{33}=\mathrm{Tr}\left(u_{ik}\right) \quad .$$

Máme tedy (v libovolné soustavě) vyjádřenu relativní změnu objemu pružného tělesa jako

$$\frac{V-V_0}{V_0}=\frac{\Delta V}{V_0}=\mathrm{Tr}\left(u_{ik}\right) \quad . \tag{11.5}$$

11.2 Tensor napětí

Při deformacích se objevují síly, které působí proti deformaci – snaží se vrátit těleso do původního stavu. Těmto silám říkáme vnitřní napětí. Jsou to molekulární síly, které působí jen v bezprostředním okolí. Z hlediska makroskopické teorie můžeme uvažovat jen o působení sousedních částic – na vybraný objemový element pružného tělesa působí okolní části tělesa pouze povrchem vybrané části. Síla působící na objem je součtem sil působících na elementy daného objemu $\int \vec{F}\,\mathrm{d}V$. Síly vzájemného působení jednotlivých elementů uvnitř zvoleného objemu se díky zákonu akce a reakce ruší, výsledné síla je tedy dána jen působení okolí objemu. Protože však toto působení se děje jen styčným povrchem, musíme být schopni převést uvedený objemový integrál na plošný. Bude to zobecnění známé Gaussovy věty, kdy objemový integrál skaláru, vyjádřeného jako divergence nějakého vektoru $F=\partial\sigma_i/\partial x_i$

převedeme na plošný integrál $\int_V F \,\mathrm{d}V = \int_V \partial\sigma_i / \partial x_i \,\mathrm{d}V = \oint_S \sigma_i \, n_i \,\mathrm{d}S$, kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor vnější normály. Budeme tedy předpokládat

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \tag{11.6}$$

a je pak

$$\int_V f_i \,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \mathrm{d}V = \oint_S \sigma_{ik} \, n_k \,\mathrm{d}S \quad . \tag{11.7}$$

Ze vztahu (11.7) vidíme, že $\sigma_{ik} \, n_k \,\mathrm{d}S$ je i – tá složka síly, působící na plošný element $\vec{n}\,\mathrm{d}S$. Například na jednotkovou plošku kolmou k ose x působí k ní kolmá (ve směru osy x) síla σ_{xx} a tečné (ve směru osy y resp. z) síly σ_{yx} resp. σ_{zx}. Pokud jde o znaménko $\sigma_{ik} \, n_k \,\mathrm{d}S$, je to síla, kterou působí okolí na uvažovaný objem (i když je $\vec{n}$ vnější normála). Takže síla, kterou působí vnitřní napětí na povrch celého pružného tělesa je

$$-\oint \sigma_{ik} \, n_k \,\mathrm{d}S \quad .$$

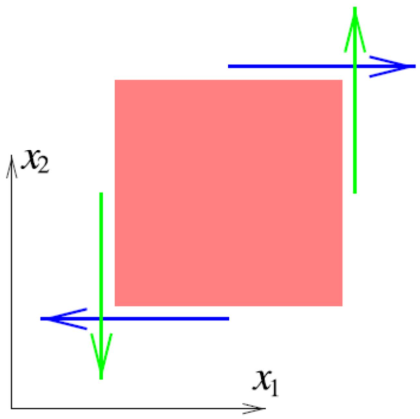
Tensor σ_{ik} se nazývá tensor napětí. Je stejně jako tensor deformace symetrický, ale to je třeba ještě dokázat (u tensoru deformace plynula symetrie přímo z definice). Důkaz vychází z požadavku, aby také moment hybnosti sil působících na vybraný objem byl vyjádřen jako integrál po povrchu. Máme

$$M_{ik} = \int_V \left(F_i \, x_k - F_k \, x_i\right) \mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) \mathrm{d}V =$$
$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sigma_{il} \, x_k - \sigma_{kl} \, x_i\right) \mathrm{d}V - \int_V \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) \mathrm{d}V =$$
$$\oint_S \left(\sigma_{il} \, x_k - \sigma_{kl} \, x_i\right) n_l \,\mathrm{d}S - \int_V \left(\sigma_{ik} - \sigma_{ki}\right) \mathrm{d}V \quad .$$

Použili jsme jednak zobecněnou Gaussovu větu v prvním členu a pak dosazení $\partial x_k / \partial x_l = \delta_{kl}$ a $\partial x_i / \partial x_l = \delta_{il}$ ve druhém členu. Vynulování příspěvku objemového integrálu vyžaduje symetrii tensoru napětí

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad . \tag{11.8}$$

Symetrii tensoru napětí můžeme ukázat názorně na příkladu krychličky hrany a. Podíváme-li se na ni v rovině $x_1 \, x_2$, vidíme dvojice sil, které by mohly krychli roztáčet: na pravé stěně (první index je složka síly, druhý složka normály) je síla $\sigma_{21} \, a^2$, na horní stěně $\sigma_{12} \, a^2$. Pro kompensaci musí být $\sigma_{21} = \sigma_{12}$.



Tensor napětí má velmi jednoduchý tvar v případě, když je těleso ze všech stran rovnoměrně stlačováno (hydrostatická komprese). Na plošný element působí síla (tlak míří ve směru vnitřní normály) $-p\,n_i\,\mathrm{d}S$. Tuto sílu však máme pomocí tensoru napětí vyjádřenu jako $\sigma_{ik}\,n_k\,\mathrm{d}S$. Zapíšeme tedy uměle $n_i=\delta_{ik}\,n_k$ a porovnáním dostaneme

$$\sigma_{ik}=-p\,\delta_{ik} \quad . \tag{11.9}$$

Při rovnováze musí být součet síly vnitřních napětí (11.6) a hustoty vnějších objemových sil roven nule f_i

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+f_i=0 \quad . \tag{11.10}$$

V homogenním gravitačním poli je $f_i=\rho\,g_i$, kde hustota ρ je zadaná funkce, zanedbávají se tedy její změny způsobené vnitřními napětími. Vnější síly působící na element povrchu tělesa $\vec{P}\,\mathrm{d}S$ musí být vykompensovány silou vnitřních napětí, kterými působí element povrchu tělesa na okolí. Platí tak na povrchu tělesa $P_i\,\mathrm{d}S-\sigma_{ik}\,n_k\,\mathrm{d}S=0$. Můžeme tedy tuto rovnost považovat za okrajovou podmínku pro rovnice rovnováhy

$$\sigma_{ik}\,n_k\big|_S=P_i \quad . \tag{11.11}$$

Pomocí vnějších povrchových sil můžeme spočítat střední hodnotu tensoru napětí, aniž musíme řešit rovnice rovnováhy. Máme

$$\int_V\left(\frac{\partial\sigma_{il}}{\partial x_l}x_k+\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial x_l}x_i\right)\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sigma_{il}\,x_k+\sigma_{kl}\,x_i\right)\mathrm{d}V-\int_V\left(\sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l}+\sigma_{kl}\frac{\partial x_i}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}V=$$
$$\oint_S\left(\sigma_{il}\,n_l\,x_k-\sigma_{kl}\,n_l\,x_i\right)\mathrm{d}S-\int_V\left(\sigma_{ik}+\sigma_{ki}\right)\mathrm{d}V=\oint_S\left(P_i\,x_k+P_k\,x_i\right)\mathrm{d}S-2\int_V\sigma_{ik}\,\mathrm{d}V \quad .$$

Pro střední hodnotu tensoru napětí pak

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ik}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2V}\oint_S \left(P_i\, x_k + P_k\, x_i\right)\mathrm{d}S \quad . \tag{11.12}$$

11.3 Hookův zákon

Pro odvození zobecněné formy Hookova zákona bude vhodné vyjít z termodynamického popisu pružného tělesa. Druhá věta termodynamická říká, že změna vnitřní energie tělesa je rovna tělesem přijatému teplu zmenšenému o tělesem vykonanou práci

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - \mathrm{d}R \quad .$$

Vztahujeme-li veličiny $\mathrm{d}U$, $\mathrm{d}S$ a $\mathrm{d}R$ na jednotkový objem, budeme psát

$$\mathrm{d}\mathfrak{U} = T\,\mathrm{d}\mathfrak{S} - \mathrm{d}\mathfrak{R} \quad . \tag{11.13}$$

Uvažujme práci, kterou vykonají vnitřní napětí, změní-li se vektor posunutí uvnitř tělesa o malou hodnotu $u_i \to u_i + \delta u_i \quad , \quad \delta u_i\big|_S = 0$. Práce konaná v elementu objemu $\mathrm{d}V$ je $\delta\mathfrak{R}\,\mathrm{d}V = F_i\,\delta u_i\,\mathrm{d}V$, celková práce tedy bude integrálem

$$\int_V \delta\mathfrak{R}\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta u_i\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}\,\delta u_i\right)\mathrm{d}V - \int_V \sigma_{ik}\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}V =$$
$$\oint_S \sigma_{ik}\,\delta u_i\, n_k\,\mathrm{d}S - \int_V \sigma_{ik}\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}V \quad .$$

Podle předpokladu je první integrál po povrchu roven nule, druhý integrál upravíme s využitím symetrie tensoru deformace

$$\int_V \delta\mathfrak{R}\,\mathrm{d}V = -\int_V \sigma_{ik}\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}V = -\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ik}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V =$$
$$-\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ik}\,\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V = -\int_V \sigma_{ik}\,\delta u_{ik}\,\mathrm{d}V \quad .$$

Dostali jsme tak

$$\delta\mathfrak{R} = -\sigma_{ik}\,\delta u_{ik} \quad . \tag{11.14}$$

Dosazením (11.14) do (11.13) dostáváme

$$\mathrm{d}\mathfrak{U} = T\,\mathrm{d}\mathfrak{S} + \sigma_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik} \quad . \tag{11.15}$$

Při hydrostatickém stlačení je dostáváme po dosazení ze vztahu (11.9) do (11.15) výraz

$$\mathrm{d}\mathfrak{U} = T\,\mathrm{d}\mathfrak{S} - p\,\mathrm{d}u_{ii} \quad .$$

Po vynásobení objemem V_0 a dosazením za $\mathrm{d}u_{ii}$ z (11.5) dostane předešlý tvar známou tvář

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V \quad . \tag{11.16}$$

Pokračujeme však s veličinami vztaženými na jednotkový objem. Volná energie je $\mathfrak{F} = \mathfrak{U} - T\,\mathfrak{S}$, takže

$$\mathrm{d}\mathfrak{F} = -\mathfrak{S}\mathrm{d}T + \sigma_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik} \quad , \quad \mathfrak{S} = -\left.\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}\right|_{u_{ik}} \quad , \quad \sigma_{ik} = \left.\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_{ik}}\right|_{T} \quad . \tag{11.17}$$

Volná energie (při konstantní teplotě) nedeformovaného tělesa nemůže mít členy, které by vedly k přítomnosti vnitřních napětí, musí být tedy až druhého řádu v u_{ik}. Tvar kvadratického členu je velmi závislý na symetrii tělesa. Obecný tvar (provedeme přiřazení $ik \leftrightarrow \alpha$, tj. $11 \leftrightarrow 1,\, 22 \leftrightarrow 2, 33 \leftrightarrow 3, 23 \leftrightarrow 4, 31 \leftrightarrow 5, 12 \leftrightarrow 6$)

$$\frac{1}{2} C_{iklm}\, u_{ik}\, u_{lm} = \frac{1}{2}\lambda_{\alpha\beta}\, u_\alpha\, u_\beta \quad , \quad \lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha}$$

připouští 21 koeficientů (krystal s triklinickou mřížkou) – symetrická matice 6×6 má 21 nezávislých prvků. Krystal s kubickou mřížkou je charakterizován třemi koeficienty

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \frac{1}{2} C_{xxxx}\left(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{yy}^2\right) + C_{xxyy}\left(u_{xx}\, u_{yy} + u_{xx}\, u_{zz} + u_{yy}\, u_{zz}\right) + 2\,C_{xyxy}\left(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2\right) \quad .$$

Nás zajímá nejvíce případ izotropního pružného tělesa. Tam máme dva nezávislé koeficienty, což souvisí se dvěma možnostmi, jak napsat pomocí tensoru deformace skalární veličinu druhého řádu v u_{ik}: druhá mocnina součtu diagonálních prvků $\left(u_{ll}\right)^2$ a součet druhých mocnin všech prvků $u_{ik}\, u_{ik}$.[5] Pro volnou energii tedy

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \frac{1}{2}\lambda\, u_{ll}^2 + \mu\, u_{ik}^2 \quad , \tag{11.18}$$

λ a μ jsou tzv. Laméovy koeficienty. Zapíšeme tensor deformace tak, že vydělíme bezestopou část

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\, u_{ll}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ik}\, u_{ll} \tag{11.19}$$

a výraz pro volnou energii se změní na

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\, u_{ll}\right)^2 + \frac{1}{2} K\, u_{ll}^2 \quad . \tag{11.20}$$

---

[5] Pro matici ortogonální transformace máme $O^T O = I \Rightarrow O^T_{il}\, O_{lk} = O_{li}\, O_{lk} = \delta_{ik}$. Pro stopu matice tedy $u'_{ii} = O^T_{ij}\, u_{jl}\, O_{li} = u_{jl}\, O_{ji}\, O_{li} = u_{jl}\, \delta_{jl} = u_{jj}$ a přirozeně i druhá mocnina je skalár. Dále $u'_{ik}\, u'_{ik} = O^T_{ij}\, u_{jl}\, O_{lk}\, O^T_{im}\, u_{mn}\, O_{nk} = O_{ji}\, O_{mi}\, O_{lk}\, O_{nk}\, u_{jl}\, u_{mn} = \delta_{jm}\, \delta_{ln}\, u_{jl}\, u_{mn} = u_{jl}\, u_{jl}$.

Srovnání (11.18) a (11.20) dává $K=\lambda+2\mu/3$. Kvadratická forma (11.20) musí být kladná, aby měla volná energie při nulové deformaci minimum. Je-li tedy tenzor deformace s nulovou stopou, musí být $\mu>0$, má-li diagonální tvar, musí být $K>0$. Diferenciál volné energie je

$$\mathrm{d}\mathfrak{F}=K\,u_{ll}\,\mathrm{d}u_{ll}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\,u_{ll}\right)\mathrm{d}\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\,u_{ll}\right)\quad .$$

Uvážíme, že

$$\delta_{ik}\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\,u_{ll}\right)=u_{ii}-\frac{1}{3}\underbrace{\delta_{ik}\,\delta_{ik}}_{3}\,u_{ll}=0$$

a zapíšeme $\mathrm{d}u_{ll}=\delta_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik}$, tím získáme pro diferenciál výraz v potřebném tvaru

$$\mathrm{d}\mathfrak{F}=\left[K\,u_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\,u_{ll}\right)\right]\mathrm{d}u_{ik}\quad ,$$

který srovnáním s (11.17) umožní vyjádřit tensor napětí pomocí tensoru deformace

$$\sigma_{ik}=K\,u_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\,u_{ll}\right)\quad . \tag{11.21}$$

Spočteme-li stopy obou stran (11.21), máme $\sigma_{ii}=3K\,u_{ii}$ a pak již můžeme vyjádřit tensor deformace pomocí tensoru napětí

$$u_{ik}=\frac{1}{9K}\delta_{ik}\,\sigma_{ll}+\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\,\sigma_{ll}\right)\quad . \tag{11.22}$$

Tensor deformace je pro malé deformace lineární funkcí tensoru napětí – to je slovní vyjádření Hookova zákona.

Pro hydrostatické stlačení je $\sigma_{ik}=-p\,\delta_{ik}$. Je tedy relativní změna objemu $u_{ii}=-p/K$. Pro malé hodnoty u_{ii} a p můžeme psát

$$\frac{1}{K}=-\frac{u_{ii}}{p}=-\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{p}=-\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\bigg|_T\quad .$$

Vyjádření volné energie můžeme rychle najít následující úvahou: je to kvadratická funkce složek tensoru deformace, podle Eulerovy věty o homogenních funkcích musí být $u_{ik}\,\partial\mathfrak{F}/\partial u_{ik}=2\mathfrak{F}$ a protože tensor napětí je $\sigma_{ik}=\partial\mathfrak{F}/\partial u_{ik}$, máme

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_0+\frac{1}{2}\sigma_{ik}\,u_{ik}\quad . \tag{11.23}$$

11.4 Homogenní deformace

Aproximace, kdy předpokládáme, že tensor napětí je konstantní v celém objemu pružného tělesa umožní vyřešit analyticky řadu i prakticky užitečných úloh. Nejčastěji zmiňovanou úlohou je prosté natažení (stlačení) tyče (orientované pro určitost podle osy z) silou působící na obou koncích. Okrajové podmínky na těchto koncích dávají $\sigma_{zi} n_i = p$ neboli $\sigma_{zz} = p$. Protože na bocích je $\sigma_{ik} n_k = 0$ pro $\vec{n}$ kolmé na n_z, jsou všechny ostatní složky tensoru napětí nulové. Z Hookova zákona dostáváme

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p \quad , \quad u_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)p \quad . \tag{11.24}$$

Objevují se tak známé veličiny – Youngův modul E, charakterizující relativní prodloužení

$$u_{zz} = \frac{1}{E}p \quad , \quad E = \frac{9K\mu}{3K+\mu} \tag{11.25}$$

a Poissonův poměr σ, udávající poměr relativního zúžení k relativnímu prodloužení tyče

$$u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz} \quad , \quad \sigma = \frac{1}{2}\frac{3K-2\mu}{3K+\mu} \quad . \tag{11.26}$$

Vztahy (11.18), (11.21) a (11.22) vyjádřeny pomocí nových koeficientů jsou

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{F}_0 + \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}^2\right) \quad , \\ \sigma_{ik} &= \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\delta_{ik} u_{ll}\right) \quad , \\ u_{ik} &= \frac{1}{E}\left[(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\delta_{ik}\sigma_{ll}\right] \quad . \end{aligned} \tag{11.27}$$

11.5 Rovnice rovnováhy pro izotropní tělesa

Dosadíme do rovnice (11.10) z (11.27)

$$\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0 \quad .$$

Pro malé deformace

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \quad ,$$

Takže rovnice rovnováhy získá tvar

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E\sigma}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + f_i = 0 \quad . \tag{11.28}$$

Ve vektorovém značení bude mít rovnice tvar

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) = -\frac{2(1+\sigma)}{E}\vec{f} \quad . \tag{11.29}$$

S využitím identity[6]

$$\Delta\vec{u} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)$$

můžeme rovnici (11.29) zapsat jako

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) - \frac{1-2\sigma}{2\left(1-\sigma\right)}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right) = -\frac{\left(1+\sigma\right)\left(1-2\sigma\right)}{E\left(1-\sigma\right)}\vec{f} \quad . \tag{11.30}$$

Předpokládejme, že vnější objemové síly tvořeny homogenním polem nebo nejsou vůbec přítomny. Potom aplikace operátoru divergence (skalární vynásobení $\vec{\nabla}\cdot$ zleva) na rovnici (11.29) dává (divergence a laplacián komutují)

$$\Delta\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) = 0 \quad , \tag{11.31}$$

to znamená, že $\operatorname{div}\vec{u}$ udávající změnu objemu při deformaci je harmonickou funkcí. S využitím (11.31) dává aplikace laplaciánu na (11.29) (gradient a laplacián komutují)

$$\Delta\Delta\vec{u} = 0 \quad , \tag{11.32}$$

to znamená, že vektor deformace splňuje biharmonickou rovnici.

11.6 Tensor deformace ve sférických souřadnicích

Ve většině předchozích vztahů jsme pracovali s kartézskými souřadnicemi. Pro řadu úloh je však s ohledem na symetrii vhodnější užití jiných souřadných soustav – většinou však ortogonálních. Můžeme buď přepsat vztahy do kovariatního tvaru, to však vyžaduje zavedení pojmů z tensorového počtu, nebo přepočítat vztahy z kartézské soustavy do konkrétní soustavy s křivočarými souřadnicemi. Tento postup si ukážeme pro sférické souřadnice, které s kartézskými souvisí vztahy

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad z = r\cos\theta \quad ,$$

Přitom $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$ a $0 \le \varphi < 2\pi$. Napíšeme diferenciál průvodiče v kartézských i sférických souřadnicích

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{r} &= \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z = \mathrm{d}r\left[\sin\theta\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) + \cos\theta\,\vec{e}_z\right] + \\ & r\,\mathrm{d}\theta\left[\cos\theta\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) - \sin\theta\,\vec{e}_z\right] + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\left[-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y\right] \quad . \end{aligned}$$

Získali jsme tak vyjádření jednotkových vektorů ve sférické souřadné soustavě pomocí vektorů kartézské soustavy

6 V jiném značení $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \operatorname{div}\vec{u}$, $\vec{\nabla}\times\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{u}$, $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}$, $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}$ a $\Delta\vec{u} = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}$.

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) + \cos\theta\,\vec{e}_z \quad ,\\
\vec{e}_\theta &= \cos\theta\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) - \sin\theta\,\vec{e} \quad ,\\
\vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y
\end{aligned}
\tag{11.33}
$$

a zápis pro $\mathrm{d}\vec{r}$

$$
\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi \quad . \tag{11.34}
$$

Snadno se přesvědčíme, že vektory $\left\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\right\}$ tvoří pravotočivou ortonormální bázi. Výraz pro vzdálenost dvou infinitesimálně blízkých bodů v kartézské a sférické soustavě je

$$
\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \quad , \quad \mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 \quad .
$$

Pro diferenciál obecného vektoru (v našem případě posunutí) ve sférické soustavě $\vec{u} = u_r\,\vec{e}_r + u_\theta\,\vec{e}_\theta + u_\varphi\,\vec{e}_\varphi$ potřebujeme znát, jak se mění vektory báze. Z (11.33) dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{e}_r &= \mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi \quad , \quad \mathrm{d}\vec{e}_\theta = -\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi \quad ,\\
\mathrm{d}\vec{e}_\varphi &= -\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\theta \quad .
\end{aligned}
\tag{11.35}
$$

Je tedy

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{d}\vec{u} = &\left(\mathrm{d}r + \mathrm{d}u_r - \sin\theta\,u_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\vec{e}_r + \left(r\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}u_\theta + u_r\,\mathrm{d}\theta - \cos\theta\,u_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\vec{e}_\theta +\\
&\left(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}u_\varphi + \sin\theta\,u_r\,\mathrm{d}\varphi + \cos\theta\,u_\theta\,\mathrm{d}\varphi\right)\vec{e}_\varphi \quad .
\end{aligned}
\tag{11.36}
$$

Zavedeme značení $\mathrm{d}l_1 = \mathrm{d}r$, $\mathrm{d}l_2 = r\,\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}l_3 = r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Potom bude

$$
\left(\mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{d}\vec{u}\right)^2 = \mathrm{d}l_i\,\mathrm{d}l_i + 2\,u_{ik}\,\mathrm{d}l_i\,\mathrm{d}l_k \quad , \tag{11.37}
$$

kde $u_{11} = u_{rr}\,, u_{12} = u_{r\theta} = u_{\theta r} = u_{21}\,, \ldots$ Pro výpočet musíme nejprve vyjádřit diferenciály složek vektoru posunutí

$$
\mathrm{d}u_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial u_r}{\partial r}\mathrm{d}l_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\mathrm{d}l_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\mathrm{d}l_3
$$

a podobně pro další dvě složky. Budeme-li pak zanedbávat členy $\left(\mathrm{d}\vec{u}\right)^2$, dostáváme pro složky tensoru deformace ve sférických souřadnicích

$$
\begin{aligned}
&u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad , \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad , \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \mathrm{cotg}\,\theta\,\frac{u_\theta}{r} + \frac{u_r}{r} \quad ,\\
&u_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] \quad , \quad u_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right] \quad ,\\
&u_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \mathrm{cotg}\,\theta\,\frac{u_\varphi}{r}\right] \quad .
\end{aligned}
\tag{11.38}
$$

Jako příklad uveďme výpočet napětí v kulové skořepině (s vnitřním poloměrem R_1 a vnějším poloměrem R_2), na kterou působí zevnitř tlak p_1 a zvnějšku tlak p_2. Symetrie úlohy vede k tomu, že vektor posunutí má pouze radiální složku a ta závisí jen na radiální souřadnici – je proto rotace vektoru posunutí rovna nule $\vec{\nabla}\times\vec{u}=0$ a jak plyne z rovnice (11.30), divergence musí být konstantní $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=\mathrm{konst}$. Tedy

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}\left(r^2 u_r\right)}{\mathrm{d}r}=\mathrm{konst.}=3a \quad \Rightarrow \quad u_r = a\,r+\frac{b}{r^2} \quad .$$

Z rovnic (11.38) máme pro diagonální (jediné nenulové) složky tensoru deformace

$$u_{rr}=a-\frac{2b}{r^3} \quad , \quad u_{\theta\theta}=u_{\varphi\varphi}=a+\frac{b}{r^3} \quad .$$

Z Hookova zákona (11.27) pak

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Big[(1-\sigma)u_{rr}+\sigma u_{\theta\theta}+\sigma u_{\varphi\varphi}\Big]=\frac{E\,a}{1-2\sigma}-\frac{2E\,b}{1+\sigma}\frac{1}{r^3}$$

a

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Big[(1-\sigma)u_{\theta\theta}+\sigma u_{rr}+\sigma u_{\varphi\varphi}\Big]=\frac{E\,a}{1-2\sigma}+\frac{E\,b}{1+\sigma}\frac{1}{r^3} \quad ,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Big[(1-\sigma)u_{\varphi\varphi}+\sigma u_{rr}+\sigma u_{\theta\theta}\Big]=\frac{E\,a}{1-2\sigma}+\frac{E\,b}{1+\sigma}\frac{1}{r^3} \quad .$$

Konstanty a a b spočítáme z okrajových podmínek

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R_1}=-p_1 \quad , \quad \sigma_{rr}\Big|_{r=R_2}=-p_2 \quad ,$$

takže

$$\frac{E\,a}{1-2\sigma}=\frac{p_1 R_1^3-p_2 R_2^3}{R_2^3-R_1^3} \quad , \quad \frac{2E\,b}{1+\sigma}=\frac{R_1^3 R_2^3\left(p_1-p_2\right)}{R_2^3-R_1^3} \quad .$$

12. Mechanika tekutin

12.1 Rovnice kontinuity

Považujeme kapalinu (pro stručnost bude mluvit o kapalině, velká většina výsledků se týká i plynů) za spojité prostředí. „Malý objemový element" je dostatečně velký, aby obsahoval značný počet molekul – v tomto smyslu je třeba chápat pojmy jako „částice kapaliny". Pohyb částice kapaliny je pohyb malého objemového elementu, chápaný jako pohyb bodové částice kapaliny. Matematický popis pohybového stavu kapaliny je dán funkcemi, které určují rozložení rychlosti $\vec{v}=\vec{v}\left(x,y,z,t\right)$ kapaliny a dvě termodynamické veličiny – mohou jimi být například hustota $\rho=\rho\left(x,y,z,t\right)$ a tlak $p=p\left(x,y,z,t\right)$. Další termodynamické veličiny lze určit pomocí stavové rovnice. Veličiny $\vec{v},\rho,p$ nepopisují pohybový stav nějaké částice kapaliny, ale stav kapaliny v určitém bodě prostoru v určitém čase.

Vezměme nějaký objem V_0 prostoru. Množství kapaliny v tomto objemu (tj. hmotnost objemu) je $\int_{V_0}\rho\,\mathrm{d}V$, kde ρ je hustota kapaliny. Objem V_0 je ohraničen uzavřenou plochou (povrchem) S_0. Elementem povrchu $\mathrm{d}\vec{f}$ (absolutní hodnota vektoru $\mathrm{d}\vec{f}$ je plocha elementu povrchu a směr je tohoto vektoru je směrem vnější normály), proteče za jednotku času množství kapaliny rovné $\rho\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{f}$ (tedy tato veličina je kladná, když kapaliny v objemu ubývá). Celkové množství kapaliny vytékající za jednotku času z objemu V_0 je $\oint_{S_0}\rho\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{f}$. Porovnání tohoto výrazu s úbytkem celkového množství v objemu dává

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_0}\rho\,\mathrm{d}V=\oint_{S_0}\rho\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{f} \quad . \qquad (12.1)$$

Povrchový integrál převedeme na objemový a časovou derivaci můžeme vnést do integrálu (integrační oblast je pevně daná), musíme však vyznačit znaménkem parciální derivace, že teď derivujeme pouze podle času, nikoliv podle prostorových proměnných

$$\int_{V_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec{v}\right)\mathrm{d}V=0 \quad .$$

Tato rovnost musí platit pro libovolně zvolený objem V_0, musí být roven nule integrand. Dostáváme tak rovnici kontinuity

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec{v}=0 \quad . \qquad (12.2)$$

Vektor

$$\vec{j}=\rho\vec{v} \qquad (12.3)$$

se nazývá vektorem hustoty toku kapaliny. Rovnici (12.2) lze rozepsat na

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}\vec{v}+\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\rho=0 \quad . \qquad (12.4)$$

12.2 Eulerova rovnice

Na vybraný objem kapaliny působí síla $-\oint_{S_0} p\,\mathrm{d}\vec{f}$. Přejdeme k vyjádření této síly pomocí objemového integrálu

$$-\oint_{S_0} p\,\mathrm{d}\vec{f} = -\int_{V_0} \operatorname{grad} p\,\mathrm{d}V \quad .$$

Znamená to, že na každý objemový element kapaliny působí okolní kapalina silou $-\operatorname{grad} p\,\mathrm{d}V$, na jednotkový objem tedy působí síla $-\operatorname{grad} p$. Hmotnost jednotkového objemu je hustota, zapíšeme tedy druhý Newtonův zákon pro tento jednotkový objem jako

$$\rho \frac{\mathrm{d}'\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\operatorname{grad} p \quad . \tag{12.5}$$

Čárkou u znaménka derivace zdůrazňujeme, že se nejedná o časovou změnu rychlosti v pevném bodě prostoru, ale změnu rychlosti pohybujícího se daného jednotkového objemu kapaliny (zde by se dalo už užít zkratky – pohybující se částice kapaliny). Přírůstek rychlosti takové částice $\mathrm{d}\vec{v}$ se skládá ze dvou částí: změny rychlosti v daném bodě za čas $\mathrm{d}t$ a z rozdílu rychlostí (v jednom a tomtéž časovém okamžiku) v sousedních bodech vzdálených o $\mathrm{d}\vec{r}$. První změna je jednoduše

$$\mathrm{d}'_1\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\mathrm{d}t \quad ,$$

druhá pak

$$\mathrm{d}'_2\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\mathrm{d}z = \left(\mathrm{d}\vec{r}\cdot\operatorname{grad}\right)\vec{v} \quad .$$

Sečtením obou částí

$$\mathrm{d}'\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\mathrm{d}t + \left(\mathrm{d}\vec{r}\cdot\operatorname{grad}\right)\vec{v}$$

a dosazením do (12.5) dostáváme Eulerovu rovnici

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \quad .. \tag{12.6}$$

Nachází-li se kapalina v poli objemových sil, objeví se tato síla na pravé straně Newtonova zákona a také v Eulerově rovnici. Jde-li o homogenní gravitační pole, dostáváme rozšířením rovnice (12.6)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \vec{g} \quad . \tag{12.7}$$

Při odvození Eulerovy rovnice se neuvažuje ani o vnitřním tření (viskozitě), ani o tepelné výměně mezi částicemi kapaliny – pojednáváme tak zatím jen o ideální kapalině.

Uvažované proudění bez tepelné výměny zachovává coby adiabatický děj entropii pohybujícího se elementu (s je entropie vztažená k jednotce hmotnosti kapaliny)

$$\frac{\mathrm{d}' s}{\mathrm{d}t} = 0 \quad . \tag{12.8}$$

Obdobným postupem jako u rychlosti dojdeme k

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} s = 0 \tag{12.9}$$

a spojením s rovnicí kontinuity (12.2) pak

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \vec{v}) = 0 \quad . \tag{12.10}$$

Pokud je podle častého předpokladu v nějakém počátečním okamžiku entropie v celém objemu kapaliny konstantní, zůstává podle (12.8) konstantní i při dalším pohybu. Takový pohyb se nazývá isoentropický. Eulerovu rovnici můžeme potom upravit. V termodynamice máme pro entalpii ($W = U + pV$) vztah (upravená druhá věta)

$$\mathrm{d}w = T\,\mathrm{d}s + \mathfrak{v}\,\mathrm{d}p \quad ,$$

kde w je entalpie jednotkové hmotnosti a $\mathfrak{v} = 1/\rho$ specifický objem. Pro $s = \text{konst.}$ máme

$$\mathrm{d}w = \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} w$$

a Eulerovu rovnici (12.6) zapíšeme jako

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad})\vec{v} = -\operatorname{grad} w \quad . \tag{12.11}$$

Využití identity

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 = \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad})\vec{v}$$

umožní zapsat (12.11) ve tvaru

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} = -\operatorname{grad}\left(w + \frac{v^2}{2}\right) \quad . \tag{12.12}$$

Aplikací operátoru rotace na předchozí vztah dostáváme tvar Eulerovy rovnice, který obsahuje pouze rychlost[7]

---

[7] Pro libovolnou funkci f platí $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f \equiv 0$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{v} = \mathrm{rot}\left(\vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{v}\right) \quad . \tag{12.13}$$

Jako vždy u řešení diferenciálních rovnic v konkrétních případech potřebujeme znát okrajové podmínky. Například na nepropustných pevných stěnách musí být normálová složka rychlosti kapaliny rovna nule $v_n = 0$.

Poněvadž pohyb kapaliny je popsán pěti veličinami (tři složky vektoru rychlosti a například hustota a tlak), potřebujeme pět rovnic. Ty pro ideální kapalinu skutečně máme: tři z Eulerovy rovnice, rovnici kontinuity a rovnici, vyjadřující skutečnost, že pohyb je adiabatický děj.

12.3 Bernoulliho rovnice

Při ustáleném proudění je $\partial\vec{v}/\partial t = 0$, takže rovnici (12.12) můžeme psát jako

$$\mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) = \vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{v} \quad . \tag{12.14}$$

Zavedeme pojem proudové linie (krátce proudnice) jako křivky, jejíž tečnou v každém bodě je rychlost kapaliny. Pokud rychlost kapaliny známe, je proudnice definována soustavou diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z} \quad . \tag{12.15}$$

Jednotkový vektor tečný k proudnici označíme $\vec{\ell}$. Podle definice je rovnoběžný s vektorem rychlosti, takže vynásobíme-li skalárně tímto vektorem obě strany rovnice (12.14), dostaneme[8]

$$\frac{\partial}{\partial \ell}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) = 0 \quad .$$

Podél proudnice tedy platí

$$\frac{v^2}{2} + w = \mathrm{konst.} \tag{12.16}$$

Konstanta je obecně pro různé proudnice různá. Pokud však je proudění nevírové, tj. platí $\mathrm{rot}\vec{v} = 0$, je pravá strana (12.14) rovna nule a máme jedinou konstantu pro všechny proudnice.[9]

---

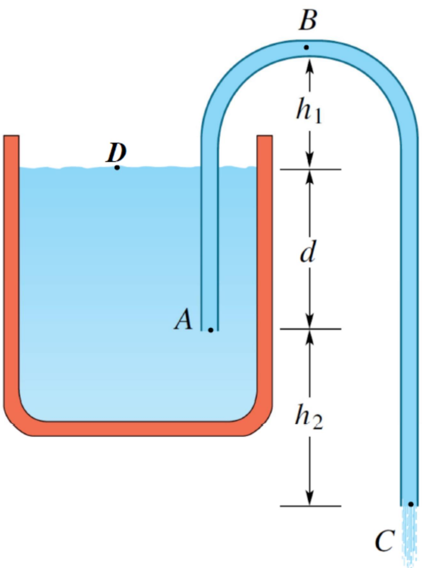
[8] Derivace ve směru je průmětem gradientu do tohoto směru: $\partial f/\partial \ell \equiv \vec{\ell}\cdot\mathrm{grad}\, f$.

[9] Připomeňme, že pro nestlačitelnou kapalinu můžeme psát entalpii jako $w = p/\rho$.

Za přítomnosti homogenního gravitačního pole $\vec{g}$ můžeme s uvážením $\vec{g} = \operatorname{grad}(\vec{g}\cdot\vec{r})$ zobecnit (12.16) na Bernoulliho rovnici

$$\frac{v^2}{2} + w - \vec{g}\cdot\vec{r} = \text{konst.} \tag{12.17}$$

Jednoduchou aplikací rovnice je určit výtokovou rychlost a nejvyšší možné převýšení u sifonu z obrázku. Hustota kapaliny je ρ a osu souřadnic z orientujeme vzhůru, takže $-\vec{g}\cdot\vec{r} = g\,z$. Předpokládáme nevírové proudění, takže můžeme psát



$$\frac{v_D^2}{2} + \frac{p_D}{\rho} + g\,z_D = \frac{v_C^2}{2} + \frac{p_C}{\rho} + g\,z_C \quad\Rightarrow\quad v_C = \left[\frac{2(p_D - p_C)}{\rho} + 2g(z_D - z_C) + v_D^2\right]^{1/2} .$$

Dosadíme-li teď $p_D = p_C = p_{\text{atm}}$ a $z_D - z_C = d + h_2$, dostáváme

$$v_C = \sqrt{2g(d + h_2) + v_D^2} .$$

Je-li plocha dna válcové nádoby S_D a plocha trubice sifonu S_C, máme z rovnice kontinuity $S_D\,v_D = S_C\,v_C$ a za obvyklých podmínek, kdy $S_D \gg S_C$ můžeme ve výrazu pro výtokovou rychlost zanedbat rychlost poklesu hladiny, takže je

$$v_C = \sqrt{2g(d + h_2)} .$$

Dále porovnejme hodnoty v bodech *B* a *C*, tedy

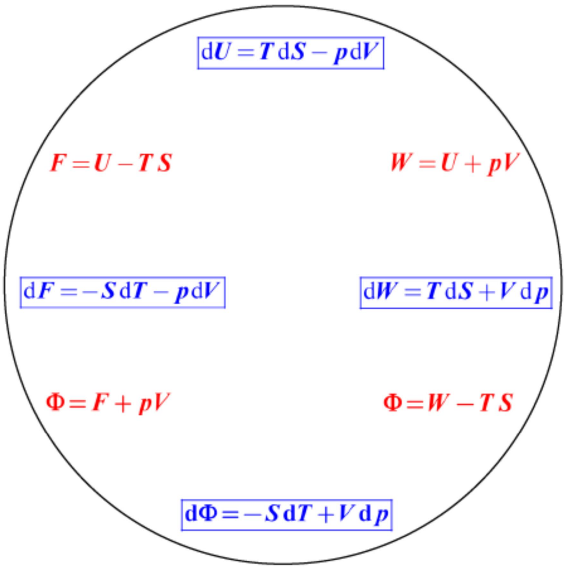
$$\frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} + g\,z_B = \frac{v_C^2}{2} + \frac{p_C}{\rho} + g\,z_C \quad\Rightarrow\quad p_B = p_C + \rho\frac{v_C^2 - v_B^2}{2} - \rho g(z_B - z_C) .$$

Musí být $p_B > 0$ a protože $v_B = v_C$ a $p_C = p_{\text{atm}}$, je maximální možná hodnota h_1

$$\left(h_1\right)_{\max} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho\, g} - \left(d + h_2\right) \quad .$$

12.4 Malé odbočení k termodynamice

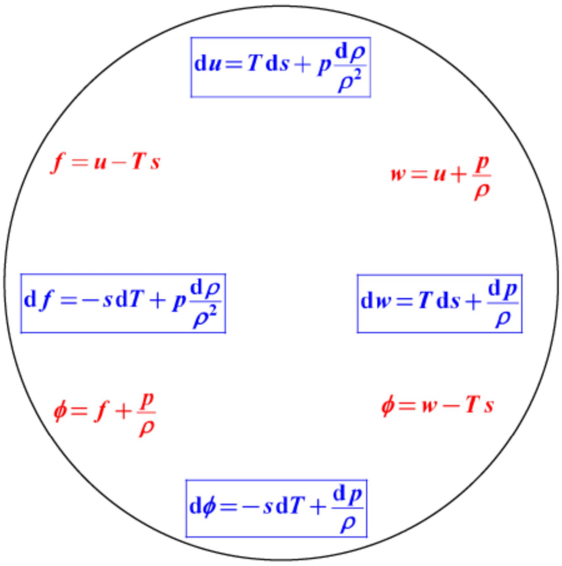
U řady rovnic využíváme toho, že popisují adiabatické (při konstantní entropii) nebo isotermické (při konstantní teplotě) děje. Připomeneme proto, jak spolu prostřednictvím Legendrových transformací souvisí různé termodynamické potenciály – jmenovitě vnitřní energie *U*, volná (Helmholtzova) energie *F*, entalpie *W* a volná (Gibbsova) energie Φ. Proměnnými jsou teplota *T*, entropie *S*, tlak *p* a objem *V*.



Obdobně můžeme postupovat i s potenciály, vztaženými na jednotku hmotnosti kapaliny. Pouze je třeba vzít v úvahu vztah mezi specifickým objemem $\mathfrak{v}$ a hustotou ρ

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\mathfrak{v} = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2} \quad ,$$

takže dostáváme následující diagram:



12.5 Tok energie a hybnosti

Energie a hybnost jednotkového objemu kapaliny jsou

$$\mathfrak{e} = \rho\frac{v^2}{2} + \rho u \quad , \quad \vec{\mathfrak{p}} = \rho\vec{v} \quad , \tag{12.18}$$

kde u je vnitřní energie jednotkové hmotnosti. Budeme počítat časové změny $\partial\mathfrak{e}/\partial t$ a $\partial\vec{\mathfrak{p}}/\partial t$ tak, abychom je mohli zapsat jako divergenci nějakého vektoru toku energie resp. divergenci nějakého (symetrického) tensoru toku hybnosti. Při úpravách využijeme řadu dříve odvozených vztahů. S využitím rovnice kontinuity (12.2) a Eulerovy rovnice (12.6) máme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{v^2}{2}\operatorname{div}(\rho\vec{v}) - \vec{v}\cdot\operatorname{grad}p - \rho\vec{v}\cdot(\vec{v}\cdot\operatorname{grad})\vec{v} \quad .$$

Poslední člen přepíšeme $\vec{v}\cdot(\vec{v}\cdot\operatorname{grad})\vec{v} = (1/2)\vec{v}\cdot\operatorname{grad}v^2$ a podle termodynamického vztahu pro entalpii $\mathrm{d}w = T\,\mathrm{d}s + \mathrm{d}p/\rho$ napíšeme místo gradientu tlaku $\operatorname{grad}p = \rho\operatorname{grad}w - \rho T\operatorname{grad}s$, takže

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = -\frac{v^2}{2}\operatorname{div}(\rho\vec{v}) - \rho\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\left(w + \frac{v^2}{2}\right) + \rho T\,\vec{v}\cdot\operatorname{grad}s \quad .$$

Dále

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho w - p)}{\partial t} = w\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} = -w\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} \quad .$$

Při poslední úpravě jsme z výrazu $\mathrm{d}w = T\,\mathrm{d}s + p/\rho$ dosadili $\rho\partial w/\partial t = \rho T\,\partial s/\partial t + \partial p/\partial t$. S využitím rovnice (12.9) je pak

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -w\operatorname{div}(\rho\vec{v}) - \rho T\,\vec{v}\cdot\operatorname{grad}s \quad .$$

Složením výrazů pro oba členy v hustotě energie dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho u\right)=-\left(w+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\,\right)-\rho\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\left(w+\frac{v^2}{2}\right)$$

nebo konečně

$$\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t}+\mathrm{div}\vec{\mathfrak{j}}=0 \quad , \quad \mathfrak{e}=\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right) \quad , \quad \vec{\mathfrak{j}}=\rho\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\vec{v} \quad . \tag{12.19}$$

Integrujeme-li rovnice přes určitý objem kapaliny a užijeme Gaussovu větu, dostáváme

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \mathfrak{e}\,\mathrm{d}V=\oint_S \vec{\mathfrak{j}}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \quad . \tag{12.20}$$

Vektor $\vec{\mathfrak{j}}$ je tedy vektorem hustoty toku energie. Na první pohled překvapivá entalpie místo vnitřní energie má snadné vysvětlení. Rozepsání výrazu $\rho w=\rho u+p$ dává

$$\oint_S \vec{\mathfrak{j}}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\oint_S \mathfrak{e}\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S+\oint_S p\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \quad ,$$

kde první člen representuje energii (kinetickou a vnitřní) bezprostředně nesenou kapalinou procházející hranicí z objemu. Druhý člen vyjadřuje práci kapaliny uvnitř objemu při překonávání tlakových sil. Oba členy se samozřejmě na úbytku energie v objemu projevují.

Pro změnu hybnosti (budeme počítat ve složkách)

$$\frac{\partial\vec{\mathfrak{p}}_i}{\partial t}=\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial t}v_i$$

dostaneme po dosazení z rovnice kontinuity a Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial\left(\rho v_k\right)}{\partial x_k} \quad , \quad \frac{\partial v_i}{\partial t}=-v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

výraz

$$\frac{\partial\vec{\mathfrak{p}}_i}{\partial t}=-\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-v_i\frac{\partial\left(\rho v_k\right)}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial\left(\rho v_i v_k\right)}{\partial x_k} \quad .$$

Zapíšeme-li v prvním členu $\partial p/\partial x_i=\delta_{ik}\,\partial p/\partial x_k$, můžeme zapsat výsledek jako

$$-\frac{\partial\vec{\mathfrak{p}}_i}{\partial t}=\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k} \quad , \quad \Pi_{ik}=\Pi_{ki}=p\,\delta_{ik}+\rho v_i v_k \quad . \tag{12.21}$$

Tensor Π_{ik} se nazývá tensorem hustoty toku hybnosti. V integrálním tvaru je

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{\mathfrak{p}}_i\,\mathrm{d}V=\oint_S \Pi_{ik}\,n_k\,\mathrm{d}S \quad . \tag{12.22}$$

Zapíšeme-li si $\Pi_{ik}\, n_k$ ve vektorovém tvaru, dostáváme $p\,\vec{n}+\rho\vec{v}\left(\vec{v}\cdot\vec{n}\right)$, vidíme, že Π_{ik} je *i* – tá složka hybnosti nesená kapalinou procházející za jednotku času jednotkovou ploškou kolmou k ose x_k. Hustota toku ploškou kolmou k rychlosti je $p+\rho\, v^2$, hustota toku ve směru kolmém k rychlosti je pouze tlak, tedy *p*.

12.6 Navierova – Stokesova rovnice

V předchozím odstavci jsme spojením rovnice kontinuity a Eulerovy rovnice zapsali rovnici (12.21) pro tok hybnosti

$$\frac{\partial\left(\rho\, v_i\right)}{\partial t}=-\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \quad .$$

Pro tensor hustoty toku hybnosti jsme odvodili výraz $\Pi_{ik}=-\sigma_{ik}+\rho\, v_i\, v_k$, kde tensor napětí byl dán tlakem $\sigma_{ik}=-p\,\delta_{ik}$ a obsahoval tu část toku hybnosti, která nesouvisela s přímým přenosem hybnosti společně s pohybující se kapalinou. Tensor napětí ale může mít obecnější tvar

$$\sigma_{ik}=-p\,\delta_{ik}+\sigma'_{ik} \quad , \tag{12.23}$$

kde pomocí σ'_{ik} budeme popisovat nevratnou část přenosu hybnosti – tření mezi jednotlivými pohybujícími se vrstvami kapaliny. Tvar tohoto tensoru můžeme určit z následujících úvah: v kapalině pohybující se jako celek je tensor nulový – musí tedy záviset na jen na derivacích složek rychlosti podle souřadnic a to lineárně, neboť tyto derivace nejsou příliš velké. Při rotaci jsou sice derivace nenulové, ale kapalina se pohybuje jako celek – musí tedy tensor obsahovat jen kombinace, které pro rotaci vymizí. Takže obecný tvar viskózního tensoru napětí je

$$\sigma'_{ik}=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\,\delta_{ik}\,\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\zeta\,\delta_{ik}\,\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad , \tag{12.24}$$

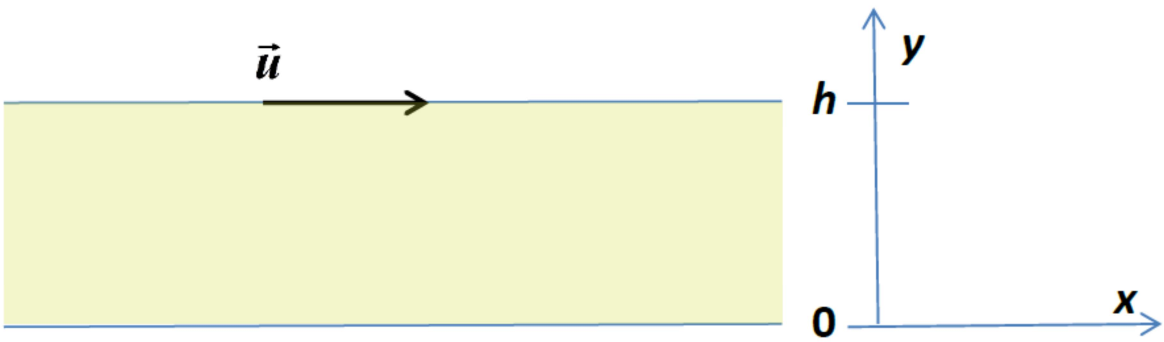
kde η a ζ jsou na rychlosti nezávislé koeficienty viskozity (z výpočtu změn kinetické energie vyplývá, že aby tato vlivem tření pouze ubývala, musí být oba koeficienty kladné). Koeficienty ovšem závisí například na teplotě, obvykle však předpokládáme, že jsou v celém objemu kapaliny konstantní. Dostáváme potom zobecnění Eulerovy rovnice, tj. Navierovu – Stokesovu rovnici

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\right)\vec{v}\right]=-\mathrm{grad}\,p+\eta\,\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{v}\right) \quad . \tag{12.25}$$

Pro nestlačitelnou tekutinu se rovnice výrazně zjednoduší (je nejenom $\rho = \text{konst.}$, ale z rovnice kontinuity také $\operatorname{div}\vec{v} = 0$) na

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot \operatorname{grad})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\,\Delta\vec{v} \quad , \tag{12.26}$$

kde jsme označili kinematickou viskozitu $\nu = \eta/\rho$. Pokud se kapalina pohybuje mezi statickými pevnými povrchy, je rychlost viskózní kapaliny na povrchu rovna nule. Pokud se povrch pohybuje nějakou rychlostí, má tuto rychlost i kapalina. Ukažme na řešení triviálním příkladu: stacionární proudění mezi dvěma rovinnými deskami $y = 0$ a $y = h$, horní deska se pohybuje ve směru x rychlostí u, v tomto směru působí i gradient tlaku $\partial p/\partial x$. Rychlost má



jedinou složku $v_x = v(y)$. Z (12.26) dostáváme

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad .$$

Z druhé rovnice plyne, že tlak závisí pouze na souřadnici x. V první rovnici odečítáme funkci pouze x od funkce pouze y – to lze splnit jen tehdy, jsou-li oba výrazy stejné konstanty

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = a \quad , \quad \eta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = a$$

a je tak

$$v = \frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y^2 + b\,y + c \quad , \quad v(0) = 0 \quad , \quad v(h) = u \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y(y-h) + u\frac{y}{h} \quad .$$

Třecí síla na stěnách je

$$\sigma_{xy}(0) = \eta\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\eta u}{h} \quad , \quad \sigma_{xy}(h) = -\eta\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=h} = -\frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{\eta u}{h} \quad .$$

13. Vlny

13.1 Gravitační vlny

Volný povrch kapaliny (tj. neomezovaný stěnou nebo stykem s jinou kapalinou) v homogenním gravitačním poli je v rovnováze rovinný. Pokud v nějakém místě vyvedeme povrch z rovnováhy, vznikne v kapalině pohyb, který se bude po povrchu šířit jako vlna. Protože je tento pohyb ovlivňován přítomností gravitačního pole, mluvíme o gravitačních vlnách. V zásadě jde o povrchové vlny, spodní vrstvy jsou ovlivňovány tím méně, čím jsou hlouběji pod povrchem. Budeme předpokládat, že rychlost pohybu částic kapaliny způsobená vlněním je natolik malá, že je možné v Eulerově rovnici zanedbat člen $(\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\vec{v})\vec{v}$ ve srovnání s členem $\partial\vec{v}/\partial t$. Co tento předpoklad znamená? Během periody kmitů τ urazí částice dráhu řádu amplitudy vlny α, je tedy jejich rychlost $v \sim a/\tau$. Samotná rychlost znatelně změní ve vzdálenosti řádu vlnové délky a po uběhnutí času řádu periody, je tedy $\partial v/\partial x \sim v/\lambda \sim \alpha/(\lambda\tau)$ a $\partial v/\partial t \sim v/\tau \sim \alpha/\tau^2$ a

$$(\vec{v}\cdot\operatorname{grad})\vec{v} \ll \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\alpha}{\tau}\frac{\alpha}{\lambda\tau} \ll \frac{\alpha}{\tau^2} \quad\Rightarrow\quad \alpha \ll \lambda \quad .$$

Předpokládáme tedy, že amplituda vln je mnohem menší než jejich vlnová dálka, což je velmi přijatelný předpoklad. Náš předpoklad umožňuje považovat proudění za potenciální

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\psi \quad . \tag{13.1}$$

Dále budeme považovat kapalinu za nestlačitelnou, takže Eulerova rovnice vede k

$$p = -\rho g z - \rho\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad . \tag{13.2}$$

Jako obvykle jsme zvolili osu z kolmo vzhůru a rovinu $x - y$ za rovnovážný povrch kapaliny. Vertikální výchylku (tj. odečítanou podél osy z) povrchu kapaliny budeme značit ζ, v rovnováze je tedy $\zeta = 0$. Působí-li na povrch konstantní tlak $p = p_0$, můžeme potenciál posunout o na souřadnicích nezávislou hodnotu $\psi \to \psi - p_0 t/\rho$ a (13.2) přejde na

$$g\zeta + \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{z=\zeta} = 0 \quad . \tag{13.3}$$

Předpoklad malé výchylky nám umožňuje položit vertikální složku rychlosti rovnu časové změně souřadnice ζ, tj. zanedbat ve výrazu

$$v_z = \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{z=\zeta(x,y,t)} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}v_x + \frac{\partial\zeta}{\partial y}v_y$$

poslední dva členy na pravé straně. Máme tak

$$v_z = \left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=\zeta} \quad , \quad v_z = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right|_{z=\zeta} \quad , \tag{13.4}$$

kde poslední rovnost vznikla parciální derivací podle času vztahu (13.3). Poslední aproximací, kterou nám umožní malé výchylky je, že derivace nebudeme počítat na deformovaném povrchu $z=\zeta$, ale na rovnovážném povrchu $z=0$ (provedeme Taylorův rozvoj a ponecháme jen první, tj. lineární členy). Rovnice kontinuity $\mathrm{div}\vec{v}=0$ a rovnost obou výrazů pro v_z v (13.4) dávají tedy konečnou dvojici rovnic pro potenciál

$$\Delta\psi = 0 \quad , \tag{13.5}$$

$$\left.\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)\right|_{z=0} = 0 \quad . \tag{13.6}$$

Kapalina bude naplňovat bazén nekonečně rozlehlý v rovině x – y, dno bazénu bude v rovině $z=-h$. Budeme hledat řešení homogenní v souřadnici *y* („rovinná vlna“)

$$\psi(x,z) = \cos(k\,x - \omega t)\, f(z) \quad ,$$

kde ω je kruhová frekvence, $k = 2\pi/\lambda$ vlnový vektor a λ je vlnová délka. Po substituci do (13.5) dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} - k^2 f = 0$$

a vybereme řešení, které na dně bazénu splňuje podmínku nulovosti normálové složky rychlosti. Z obecného řešení

$$\psi = \left[A\exp(k\,z) + B\exp(-k\,z)\right]\cos(k\,x - \omega\,t)$$

vybere podmínka

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0$$

konkrétní řešení úlohy

$$\psi = A\cosh\left[k(z+h)\right]\cos(k\,x - \omega\,t) \quad . \tag{13.7}$$

Dosazením tohoto výrazu do rovnice (13.6) dostáváme vztah mezi frekvencí a vlnovým vektorem (dispersní relaci)

$$\omega = \left[g\,k\tanh(h\,k)\right]^{1/2} \quad . \tag{13.8}$$

Z dispersní relace máme pro fázovou a grupovou rychlost

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k}\tanh(hk)\right)^{1/2} \quad , \quad c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{2}\left[\frac{g}{k}\tanh(hk)\right]^{1/2}\left[1 + \frac{2hk}{\sinh(2hk)}\right] \quad . \tag{13.9}$$

V limitních případech, kdy hloubka je mnohem větší ($hk \gg 1$) nebo mnohem menší ($hk \ll 1$) než vlnová délka dostáváme[10]

$$h \gg \lambda \quad : \quad c_f = 2c_g = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} \quad ,$$

$$h \ll \lambda \quad : \quad c_f = c_g = (gh)^{1/2} \quad .$$

V pevném bodě (x, z) se vektor rychlosti rovnoměrně otáčí s úhlovou rychlostí ω

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\psi}{\partial x} = -kA\cosh\left[k(z+h)\right]\sin(kx - \omega t) \quad , \\ v_z &= \frac{\partial\psi}{\partial z} = kA\sinh\left[k(z+h)\right]\cos(kx - \omega t) \quad . \end{aligned} \tag{13.10}$$

13.2 Zvukové vlny

Zvukové vlny jsou jednoduchým příkladem pohybu s malými amplitudami ve stlačitelné kapalině či plynu. Malé amplitudy znamenají zároveň malé rychlosti pohybu částice plynu (znovu připomínáme, že „částice“ zde znamená množství plynu vyplňujícího nějaký velmi malý objem), takže v Eulerově rovnici můžeme zanedbat člen $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$. Také změny hustoty a tlaku budou malé, takže budeme psát proměnné p a ρ jako

$$p = p_0 + p' \quad , \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad , \tag{13.11}$$

Kde p_0, ρ_0 jsou konstantní rovnovážné hodnoty tlaku a hustoty kapaliny a p', ρ' jejich malé změny ($p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$). Budeme tedy považovat $\vec{v}, p', \rho'$ za veličiny malé prvního řádu a členy vyššího řádu v rovnici kontinuity a Eulerově rovnici zanedbáme. Z úplných rovnic

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} \tag{13.12}$$

tak dostáváme

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \tag{13.13}$$

a

[10] Platí $\lim\limits_{x\to\infty}\tanh x = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sinh x} = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sinh x} = 1$.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} = 0 \quad . \tag{13.14}$$

Jak uvidíme po výpočtu, podmínkou pro to, aby linearizované rovnice byly dobrou aproximací je, aby rychlost pohybu částic kapaliny v byla malá ve srovnání s rychlostí zvukové vlny c.

Zvuková vlna, tak jako každý děj v ideální kapalině je děj adiabatický. Můžeme proto změnu tlaku spojit se změnou hustoty

$$p' = \left.\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right|_S \rho' \quad . \tag{13.15}$$

V rovnici kontinuity (13.13) pak ρ' vyjádříme pomocí p' a takto vzniklý vztah

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left.\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}\right|_S \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{13.16}$$

společně s (13.14) tvoří čtyři rovnice pro čtyři neznámé $\vec{v}, p'$. Protože už nemůže dojít k záměně, vynecháme v dalším psaní indexů 0 u rovnovážných hodnot tlaku a hustoty. Napíšeme-li teď rychlost jako gradient potenciálové funkce

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \psi \quad , \tag{13.17}$$

dostáváme z (13.14)

$$p' = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad . \tag{13.18}$$

Dosazení (13.18) do (13.16) pak vede k vlnové rovnici

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \psi = 0 \quad , \tag{13.19}$$

kde rychlost zvukové vlny je dána vztahem

$$c = \left(\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S \right)^{1/2} \quad . \tag{13.20}$$

Z termodynamiky víme, že platí vztah mezi adiabatickým a isotermickým dějem[11]

---

[11] Vztah získáme postupnými úpravami

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S = \frac{\partial(p,S)}{\partial(\rho,S)} = \frac{\dfrac{\partial(p,S)}{\partial(p,T)}\partial(p,T)}{\dfrac{\partial(\rho,S)}{\partial(\rho,T)}\partial(\rho,T)} = \frac{T\left.\dfrac{\partial S}{\partial T}\right|_p}{T\left.\dfrac{\partial S}{\partial T}\right|_V} \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T = \frac{c_p}{c_V}\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T \; .$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S = \frac{c_p}{c_V}\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T = \kappa \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T \quad , \tag{13.21}$$

takže (13.20) můžeme zapsat jako (Poissonova konstanta κ udává poměr měrných tepelných kapacit při stálém tlaku a stálém objemu)

$$c = \left(\kappa \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T \right)^{1/2} \quad . \tag{13.22}$$

Ze stavové rovnice ideálního plynu

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$$

(R je universální plynová konstanta a μ molekulární hmotnost) pak dostáváme pro rychlost zvuku výraz

$$c = \left(\kappa \frac{RT}{\mu} \right)^{1/2} \quad . \tag{13.23}$$

Vlnovou rovnici (13.19) pro rovinnou vlnu

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{13.24}$$

převedeme substitucí $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ na

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \, \partial \xi} = 0 \quad .$$

Provedeme-li nejprve integraci vzhledem ke ξ, dostáváme $\partial\psi / \partial\eta = G(\eta)$, provedeme-li nejprve integraci vzhledem k η, dostáváme $\partial\psi / \partial\xi = F(\xi)$, F a G jsou libovolné funkce. Druhou integrací pak dostáváme řešení, jejichž součet (rovnice je lineární) je obecným řešením vlnové rovnice s rovinnou symetrií

$$\psi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad , \tag{13.25}$$

f a g jsou libovolné funkce se spojitou první derivací.[12]

Uvažujme řešení $\psi = f(x - ct)$. Podle (13.17) a (13.18) dostáváme

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left.\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi = x - ct} \quad , \quad p' = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \rho c \left.\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi = x - ct} \quad .$$

---

[12] Podobně můžeme postupovat u řešení vlnové rovnice se sféricky symetrickým řešením, kdy dostáváme $\psi(r,t) = f(r - ct)/r + g(r + ct)/r$.

Podělením obou výrazů dostáváme $v = p^{/} / (\rho c)$. Dosazením za $p^{/}$ z (13.15) dostáváme pak

$$v = c\frac{\rho^{/}}{\rho} \quad . \tag{13.26}$$

Je tedy skutečně rychlost částice tekutiny mnohem menší než rychlost zvuku.

13.3 Vlny v pružném prostředí

Pohybovou rovnici získáme předpokladem, že zrychlení bodu pružného tělesa násobené hustotou položíme rovno síle dané vnitřními napětími

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad . \tag{13.27}$$

Není to samozřejmé – takovou rovností totiž předpokládáme, že rychlost bodu $\vec{v}$ pružného tělesa je rovna $\dot{\vec{u}}$, tedy parciální derivaci posunutí tohoto bodu podle času. Zejména u krystalických látek se složitější strukturou elementární buňky nebo s větším počtem defektů je to rovnost jen přibližná. Dosadíme do pravé strany (13.27) z rovnice rovnováhy (11.29) a dostáváme

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u}) \quad . \tag{13.28}$$

Budeme-li nejprve uvažovat o pohybu, kde posunutí závisí pouze na jediné souřadnici (zvolíme x) a čase. Potom z rovnice (13.28) dostáváme

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad c_l = \left[\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}\right]^{1/2} \quad , \\ &\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad c_t = \left[\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\right]^{1/2} \quad . \end{aligned} \tag{13.29}$$

Zavedení rychlosti podélného c_l a příčného c_t vlnění dovoluje přepsat obecnou rovnici (13.28) na

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = c_t^2 \Delta \vec{u} + \left(c_l^2 - c_t^2\right) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u}) \quad . \tag{13.30}$$

Rozložíme výchylku do dvou částí, odpovídajících příčnému a podélnému vlnění

$$\vec{u} = \vec{u}_t + \vec{u}_l \quad , \quad \operatorname{div} \vec{u}_t = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{u}_l = 0 \tag{13.31}$$

Dosazením do (13.30) a působením operátoru div dostáváme

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \vec{u}_l\right) = 0$$

a podobně působením operátoru rot

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2\, \Delta \vec{u}_t\right) = 0 \quad .$$

Je-li divergence i rotace vektoru rovna nule, musí být tento vektor nulovým vektorem[13], proto mŢğeme pŚedchozí vztahy napsat jako vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2\, \Delta \vec{u}_l = 0 \qquad (13.32)$$

a

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2\, \Delta \vec{u}_t = 0 \quad . \qquad (13.33)$$

[13] Kağdý vektor lze rozloğit na souļet nevírového a nezŚídlového vektoru.